UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

MANAUS-AMAZONAS
2024

LUCIANA DO VALE AMARAL

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Dissertação de mestrado apresentado à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.

Orientadora: Prof. Dra. SILVIA CRISTINA BELO E SILVA

MANAUS-AMAZONAS
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

L937a Amaral, Luciana do Vale

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas como estratégia de ensino no nono ano do ensino fundamental / Luciana do Vale Amaral. Manaus : [s.n], 2024.

142 f.: color.; 30 cm.

Dissertação - Profmat - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2024.

Inclui bibliografia

Orientador: Silvia Cristina Belo e Silva

1. Metodologia. 2. Aprendizagem. 3. Resolução de Problemas. I. Silvia Cristina Belo e Silva (Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas como estratégia de ensino no nono ano do ensino fundamental

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, da aluna **LUCIANA DO VALE AMARAL,** matrícula nº **2291940008.**

Em 04 de setembro de 2024, às 14h, na Sala de Videoconferência da Escola Normal Superior no Município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Profa. Dra. Sílvia Cristina Belo e Silva, Prof. Dr. João Batista Ponciano e Prof. Dr. Naamã Galdino da Silva Neris (Participação Remota), a aluna **LUCIANA DO VALE AMARAL** apresentou a defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEA, intitulada: **"A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas como Estratégia de Ensino no Nono Ano do Ensino Fundamental".**

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado ao aluno e aos demais presentes.

Manaus, 04 de setembro de 2024.

Silvia Cristina Belo e Silva.

Orientador

Membro Interno da Banca Avaliadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
NAAMA GALDINO DA SILVA NERIS
Data: 10/09/2024 21:34:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Membro Externo da Banca Avaliadora

Luciana do Vale Amaral

Mestrando

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que me deste. Só posso render graças ao meu Senhor pela oportunidade de cursar e concluir o mestrado que tanto almejava (PROFMAT). Sou grata a Deus pela saúde física, mental e espiritual, e por todas as pessoas e circunstâncias que colocou em meu caminho, tornando essa jornada possível e rica em aprendizado, experiência e amadurecimento profissional e pessoal. Portanto, tudo é graças ao meu Senhor e Salvador, Jesus Cristo.

Quero agradecer profundamente à minha filha, Elis. Embora ela não entenda totalmente tudo o que está acontecendo, seu amor e seu jeito carinhoso de me encorajar me dão forças.

Desejo dedicar um momento para expressar minha profunda gratidão à minha família. À minha mãe e aos meus irmãos, muito obrigada pela paciência e compreensão que tiveram durante todo o tempo em que me dediquei ao mestrado e à dissertação. A cada um dos meus familiares que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse alcançar esse objetivo, saibam que sou eternamente grata.

Aos meus amigos discentes do mestrado que compartilharam essa jornada comigo, quero fazer um agradecimento especial a cada um de vocês. A companhia, as conversas e o apoio que sempre recebi foram incríveis. Esta jornada teria sido bem diferente sem vocês; foi muito mais rica e divertida com a presença de vocês ao meu lado. Cada discussão e todos os momentos que vivemos juntos foram essenciais para o meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional. Sou imensamente grata por ter vocês comigo nesta caminhada.

Quero expressar minha profunda gratidão aos meus professores do mestrado e, especialmente, à minha orientadora, Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, que foram fundamentais na minha formação. Seus ensinamentos, orientações e críticas construtivas foram essenciais para que eu conseguisse concluir este mestrado e a dissertação. Saibam que vocês são verdadeiramente inspiradores. Sou imensamente grata por toda a dedicação, comprometimento, responsabilidade, paciência e pelo compromisso de compartilhar o conhecimento. Muito obrigada por guiarem meu caminho e por tudo o que me ensinaram.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar estratégias, metodologias e técnicas para o ensino e aprendizagem dos descritores do Saeb em Matemática, alinhado com as diretrizes da LDB, dos PCNs e da BNCC. A pesquisa será conduzida em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental II, composta por 40 alunos em uma escola estadual em Manaus/AM. As oito sequências didáticas foram desenvolvidas durante as aulas de Matemática, seguindo os dez passos propostos por Onuchic e Allevato para auxiliar os professores na aplicação da metodologia de resolução de problemas, em que o professor desempenha o papel de observador e incentivador do trabalho colaborativo. Destacamos, com base na análise dos estudos de Onuchic e Allevato (2021), Polya (2006), Van de Walle (2009) e Boaler (2019), a promoção de um aprendizado mais profundo ao direcionar a atenção dos alunos para os processos e argumentos envolvidos, em detrimento apenas das respostas. Valorizando aspectos socioemocionais e a colaboração entre os alunos, o erro é encarado como uma oportunidade de crescimento, estimulando a reflexão e ajuste de estratégias. A participação ativa dos alunos na construção do conhecimento é essencial para uma compreensão aprofundada, conectando conceitos à experiencia pessoal e capacitando-os a serem protagonistas em seu processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Metodologia, aprendizagem, resolução de problemas

ABSTRACT

This work aims to investigate strategies, methodologies, and techniques for teaching and learning the descriptors of the Saeb in Mathematics, aligned with the guidelines of the LDB, the PCNs, and the BNCC. The research will be conducted in a 9th-grade class of Elementary School II, consisting of 40 students at a state school in Manaus/AM. The eight didactic sequences were developed during Mathematics classes, following the ten steps proposed by Onuchic and Allevato to assist teachers in applying problem-solving methodology, in which the teacher plays the role of an observer and encourager of collaborative work. Based on the analysis of the studies by Onuchic and Allevato (2021), Polya (2006), Van de Walle (2009), and Boaler (2019), we highlight the promotion of deeper learning by directing students' attention to the processes and arguments involved, rather than just the answers. Valuing socio-emotional aspects and collaboration among students, mistakes are seen as opportunities for growth, encouraging reflection and strategy adjustment. The active participation of students in constructing knowledge is essential for a deeper understanding, connecting concepts to personal experiences and empowering them to become protagonists in their learning process.

Keywords: Methodology, learning, problem solving

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

SAEB: Sistema de Avaliação da Educação Básica

PISA: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

PCNs: Parâmetros Curriculares Nacionais

RP: Resolução de Problemas

NCTM: Conselho Nacional de professores de matemática dos Estados Unidos

FIFA: Federação Internacional de Futebol

COVID-19: Doença do Coronavírus 2019

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, buscamos compartilhar a origem do nosso interesse em explorar o tema "A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas como Estratégia de Ensino no nono ano do Ensino fundamental" e, em seguida, apresentaremos os objetivos da pesquisa desenvolvida.

1.1 ASPECTOS MOTIVACIONAIS DA PESQUISA

A escolha do tema surgiu a partir da observação comumente abstraída na prática docente, nos quais pode-se perceber as dificuldades encontradas pelos alunos no momento de interpretar o texto matemático, a fim de resolver situações problemas nas mais diversas áreas do ensino.

Em virtude dessas barreiras encontradas pelos alunos, deparamo-nos com rendimentos insatisfatórios, sobretudo nas provas externas, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes).

Tais dificuldades desencadeiam em boa parte dos discentes, um desinteresse pela disciplina e um sentimento de incapacidade em resolver problemas matemáticos, principalmente diante daqueles que exigem uma maior interpretação e raciocínio lógico, sendo o maior viés encontrado na resolução de problemas.

No entanto, todos os dias enfrentamos desafios e situações que exigem o uso de nossas habilidades de Resolução de Problemas para encontrarmos soluções. Essas habilidades podem ser desenvolvidas e aprimoradas ao longo do tempo e são úteis em diversas áreas da vida, desde questões pessoais até desafios profissionais. A Matemática, por sua vez, é uma ferramenta poderosa que ajuda a desenvolver essas habilidades, pois nos ensina a pensar de maneira lógica e estruturada.

Por outro lado, vivemos em um mundo em constante mudança e evolução, o que gera uma demanda por pessoas cada vez mais preparadas para enfrentar os desafios e aproveitar as oportunidades que surgem. Isso inclui a necessidade de adquirir habilidades e conhecimentos em várias áreas.

Morais e Onuchic afirmam

> que nos "ombros da escola" recai a responsabilidade de cumprir com o papel de melhor preparar o cidadão para atuar na sociedade em mudança. Coube a matemática, dentre todas as ciências escolares, a responsabilidade de fornecer ao cidadão os conhecimentos mínimos necessários para que ele possa melhor desempenhar o papel que lhe foi designado. (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021, p. 19)

Isso destaca a importância da Educação Matemática para o sucesso pessoal e profissional de nossos discentes.

Na contramão dessa proposta de uma aprendizagem com significado, temos a metodologia tradicional, pois baseia-se na transmissão de conhecimento pelo professor e na repetição de exercícios pelos alunos, sem levar em consideração seu significado, o contexto ou a aplicação da matemática. Toda essa problemática, pode desencadear uma aprendizagem insuficiente, tendo como maior finalidade apenas a memorização de procedimentos e fórmulas.

Na busca por atender as demandas da sociedade atual, surgiram nos últimos anos metodologias que visam tornar o aprendizado mais significativo e eficaz. Ao pesquisar e fazer revisão bibliográfica encontramos algumas abordagens didáticas, como Aprendizagem Baseada em Problemas, Aprendizagem Baseada em Projetos e Modelagem Matemática, que prometem alcançar esse objetivo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) salienta a importância da Resolução de Problemas como uma das competências gerais que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica.

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, **formular e resolver problemas** e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9)

De acordo com Morais e Onuchic (2021) a resolução de problemas vai além da simples prática de resolver problemas nas aulas de Matemática, pressupondo professores e alunos envolvidos em uma comunidade de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando promover uma aprendizagem mais significativa. Isso implica que os alunos são encorajados a explorar e aplicar seus conhecimentos de maneira ativa e colaborativa, enquanto os professores atuam como facilitadores e guias nesse processo.

Os resultados das escolas brasileiras no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) mostram que o aprendizado da Matemática tem sido insatisfatório. Desafiando os professores e pesquisadores a buscar metodologias de ensino para tornar o aprendizado mais eficaz.

Walle argumenta que

> As pesquisas em educação matemática constantemente revelam que a compreensão e as habilidades são desenvolvidas melhor quando os estudantes têm permissão para investigar novas ideias, criar e defender soluções para problemas e participar em uma comunidade de aprendizagem matemática. (Walle, pag. 9)

Nessa abordagem centrada no aluno e baseada na Resolução de Problemas para a aprendizagem, surge a pergunta norteadora do nosso trabalho: como a resolução de problemas pode ser aplicada como metodologia de ensino para o desenvolvimento das habilidades e competências de matemática da matriz de referência do SAEB?

Desta forma, esta pesquisa delimita-se no estudo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, destacando aplicações nos descritores que se referem às competências e habilidades de resolver problemas, que compõe a matriz de referência dos testes do SAEB em conformidade com a BNCC.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

1.2.1 Objetivo Geral

- Investigar a aplicação de uma metodologia de ensino com base na Resolução de Problemas, promovendo o ensino e a aprendizagem dos descritores do SAEB em Matemática, em conformidade com as diretrizes estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

1.2.2 Objetivo Específico

- Apresentar questões em forma de situações-problemas;
- Selecionar e criar problemas matemáticos para iniciar e/ou retomar o conteúdo relacionados aos descritos da matriz de referência do SAEB ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Desenvolver os problemas elaborados em turma do nono ano do Ensino Fundamental, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
- Analisar a aprendizagem dos alunos e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
- Identificar na resolução das questões, as maiores dificuldades encontradas e elaborar estratégias que possibilitem uma aprendizagem significativa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, abordaremos os aspectos históricos e, as principais contribuições de autores e suas respectivas ideias sobre a resolução de problemas no ensino de Matemática. Além disso, discutiremos acerca da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas como estratégia de ensino da matemática, agregando reflexões acerca dessa metodologia.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

A resolução de problemas é uma atividade natural do ser humano, que está presente na vida cotidiana. Como argumenta Polya:

> Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema. (POLYA, 2006, p. 159)

Porém, o desenvolvimento dela de forma sistemática como abordagem didática da Matemática começou a ser estudada a partir da publicação do livro “A arte de resolver problemas”, de George Polya, em 1945.

De acordo com Morais e Onuchic (2021, p. 24), [...] a Resolução de problemas foi estabelecida pelo matemático e pesquisador George Polya, e é apresentada em um dos livros mais populares do mundo contemporâneo: A arte de resolver problemas.

Nessa obra, Polya apresenta uma sequência de quatro passos que julgou ser aqueles que um solucionador de problemas necessitaria executar durante a resolução de quaisquer problemas, tais como: *compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto da resolução completa*.

As pesquisas de Polya vão além dos quatros passos. Elas destacam a importância do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem da resolução de problemas (RP). Segundo Morais e Onuchic,

> A pesquisa de Polya sobre RP transcende as quatro fases apresentadas em duas páginas desse livro. Sua preocupação estava voltada para a melhoria das habilidades de resolução de problemas pelos estudantes e, para que isso ocorresse, era preciso que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem interessados em fazer de seus estudantes também bons resolvedores [...] de modo a promover uma aula de matemática mais significativa, desenvolvida em um ambiente de inquirição (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021, p. 25).

Em sua obra, Polya deixa inúmeros conselhos ao professor, destacando que o papel mais importante do docente é de auxiliar seus alunos. Porém, isso não é uma tarefa fácil, pois cabe ao professor guiar seus alunos na medida certa, de tal modo, que estes tenham uma parcela de contribuição no trabalho de forma independente. O professor deve ajudar de forma natural, colocando-se no lugar do estudante, percebendo as suas perspectivas, os auxiliando com perguntas e indicando caminhos, sem que eles percebam (Polya, 2006).

George Polya se transformou em uma grande referência para o ensino da matemática com resolução de problemas. Assim, a RP passou a ser pesquisada e estudada enquanto teoria, inicialmente nos Estados Unidos e posteriormente ganhou espaço em vários países.

Vários pesquisadores, passaram a destinar suas pesquisas a investigar a RP, surgindo ramificações da teoria de Polya, como por exemplo no Japão, a metodologia chamada "Abordagem de Problemas Abertos, proposto pelo professor Shigueru Shimada e sua equipe, na década de 1970. De acordo com Shimada, os problemas matemáticos nessa Metodologia possuem múltiplas respostas corretas que podem ser utilizadas pelo professor para encontrar alguma coisa nova para cada aluno (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021, p. 24).

Muitas pesquisas foram produzidas com ênfase na Resolução de Problemas, ajudando os professores a torná-la o foco de seu ensino. Várias pesquisas produziram diferentes visões sobre a abordagem da resolução de problemas na sala de aula. Assim, as concepções apontadas por Hatfield (1989) e posteriormente por Schroeder e Lester, salientam que

> [...] uma das melhores formas de confrontar essas diferenças seria a de distinguir entre três abordagens de ensino de resolução de problemas: (1) ensinando sobre resolução de problemas, (2) ensinando para resolver problemas, e (3) ensinando via resolução de problemas. (Schroeder; Lester, 1989, p.32, apud Morais; Onuchic, 2021, p. 31)

Em relação à primeira perspectiva, ensinar "sobre" Resolução de Problemas condiz em considerá-la como um novo conteúdo. Esta abordagem explora temas relevantes para a Resolução de Problemas e se baseia fortemente em técnicas heurísticas" de maneira a guiar os alunos na Resolução de Problemas, com regras e procedimentos gerais, independentes do conteúdo específico abordado. Em outras palavras, é trabalhar com o método proposto por Polya.

Quanto à segunda perspectiva, ensinar "para" a Resolução de Problemas, o professor concentra-se nas formas como a matemática ensinada pode ser utilizada. Essa abordagem, não está mais baseada na Resolução de Problemas, mas na Matemática, tendo a Resolução de Problemas como um complemento. Assim, a aquisição de conhecimento matemático passa a ter importância primordial para o ensino, cujo propósito principal é que os alunos sejam capazes de aplicar o que aprenderam na teoria (puramente matemática) aos problemas reais. Então primeiro se ensina matemática para depois partir para resolução de problemas. Desse modo, o professor propõe problemas aos alunos apenas após ter ensinado a parte “teórica” referente a um determinado assunto de Matemática. Consequentemente, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a Resolução de Problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático. Esta abordagem apresenta limitações para a Metodologia, pois a Resolução de Problemas é aplicada apenas após a explanação de um novo conceito ou o desenvolvimento de uma habilidade ou algoritmo. Isso, no entanto, é um tanto contraditório, uma vez que a história da Matemática ilustra que seu desenvolvimento está intimamente ligado à Resolução de Problemas do cotidiano. Desta forma, podemos observar que no centro do desenvolvimento da Ciência Matemática estava a atividade de Resolução de Problemas, ou seja, fazer Matemática é Resolver Problemas, sejam domésticos, formulados em estreita ligação com outras ciências, ou próprios da Matemática.

Já a terceira perspectiva, refere-se à Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, ou seja, refere-se ao Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas. A Matemática é inserida na expressão para retirar o foco exclusivo da resolução de problemas. Na realidade, a expressão “através” enfatiza que ambas, matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e construídas mutuamente.

Esta última perspectiva que é também de interesse particular para esta pesquisa e teve início no final da década de 1980 e foi consolidada através de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, culminando com a publicação das normas de 2000. O NCTM (2000, p. 50, apud Walle, 2009) argumenta que:

> Neste mundo em constante mudança, aqueles que compreendem e conseguem fazer matemática terão significativamente maiores oportunidades e melhores opções para construir seus futuros. A competência matemática abre portas para futuros produtivos. Uma falta de competência matemática mantém essas portas fechadas. ... Todos os estudantes devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender matemática significativa com profundidade e compreensão. Não existe nenhum conflito entre equidade e excelência. (WALLE, 2009, p. 19)

Além de afirmar que todos os alunos devem “construir novo conhecimento matemático através de resolução de problemas” (NCTM, 2000, p. 52, apud Walle, 2006, p. 23). Então, sugere que a resolução de problemas é vista como o meio pelo qual as crianças irão desenvolver conceitos e ideias matemáticos. A partir daí, os professores de matemática começaram a ver a resolução de problemas como uma oportunidade para ensinar matemática.

Com isso, a sala de aula pode ser vista como uma comunidade de aprendizes de Matemática, em vez de uma simples coleção de indivíduos. Isso significa que os alunos devem ser incentivados a trabalhar juntos e ajudar uns aos outros, em vez de competir entre si. Além disso, é importante que os alunos sejam encorajados a pensar criticamente e a questionar as informações que lhes são apresentadas. A lógica e a evidência matemáticas devem ser usadas como modo de verificação, em vez de depender exclusivamente da autoridade do professor para respostas corretas. O raciocínio matemático deve ser enfatizado em vez de meros procedimentos de memorização. Os alunos devem ser incentivados a conjecturar, propor e resolver problemas, ao invés de simplesmente obter respostas mecânicas. Por fim, é importante conectar os ramos da Matemática, suas ideias e aplicações, tratando-os como um corpo isolado de conceitos e procedimentos. (WALLE, 2009)

Dessa forma, a Resolução de Problemas passa a ser reconhecida como Metodologia de Ensino, como um ponto de partida e um método para ensinar Matemática. Assim, os problemas são considerados como instrumentos de aprendizado.

No Brasil, em 1996, foi sancionada a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional). Esta lei, atualizada em 2023, apresenta alguns princípios e fins da educação nacional que estão relacionados a essa abordagem e faz apenas uma menção ao direito à resolução de problemas.

> Art. 2º A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.
> Art. 3º. O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:
> II – Liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber;
> X – Valorização da experiência extraescolar;
> Art. 4o O dever do Estado com educação escolar pública será efetivado mediante a garantia de:
> XII – educação digital, com a garantia de conectividade de todas as instituições públicas de educação básica e superior à internet em alta velocidade, adequada para o uso pedagógico, com o desenvolvimento de competências voltadas ao letramento digital de jovens e adultos, criação de conteúdos digitais, comunicação e colaboração, segurança e resolução de problemas. (BRASIL, 2023, p. 8-10)

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) define que a educação tem como finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho; estabelece que o ensino deve ser ministrado com base no princípio da liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber; e ainda, valoriza a experiência extraescolar dos alunos. Alguns desses tópicos podem ser contemplados pela resolução de problemas no ensino da matemática.

Em 1997, o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) salienta que a resolução de problemas deve permear toda a prática pedagógica, com problemas que estimulem os alunos a usarem seus conhecimentos, aprimorar suas habilidades e aprender novos conceitos.

Segundo o PCN, a resolução de problemas, como eixo norteador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode se basear nos seguintes princípios:

> ➢ a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> ➢ o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> ➢ aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> ➢ um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> ➢ a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1997, p. 40-41).

De acordo com os PNC (BRASIL, 1997)**,** a Matemática deve desenvolver as competências e habilidades dos alunos. Na perspectiva dos educadores matemáticos, a resolução de problemas permite que os alunos desenvolvam sua capacidade de mobilizar conhecimentos e gerir informações. Isso proporciona aos alunos a oportunidade de ampliar seus conhecimentos sobre conceitos e procedimentos matemáticos, bem como ampliar sua visão dos problemas da matemática e do mundo em geral, além de desenvolver autoconfiança.

Para Walle em uma abordagem baseadas em Resolução de Problemas e centrada nos alunos, é útil pensarmos em uma lição como constituída de três fases simples: antes, durante e depois (WALLE, 2009):

Na fase "antes" de uma lição existem três objetivos associados a essa fase:

- Verifique se o problema foi compreendido - Garanta que os alunos compreendam bem o problema, para evitar que precisemos fornecer esclarecimentos ou explicações individuais mais tarde.
- Estabeleça expectativas claras para o problema - Antes que eles iniciem a abordagem converse com os alunos sobre suas expectativas e o que você espera que eles

entreguem além de apenas uma resposta. É importante também esclarecer qual será o formato de trabalho, se será individual, em duplas ou em pequenos grupos.

- Ative os conhecimentos prévios úteis - Ajude os alunos a se prepararem mentalmente para enfrentar o problema, incentivando-os a refletir sobre os conhecimentos que já possuem e que podem ser mais úteis nessa situação.

A fase durante de uma lição:

- Deixe os alunos caminharem sozinhos – Ofereça aos alunos a chance de trabalharem de forma independente, sem a sua orientação direta. Evite antecipar ou resolver os desafios que eles enfrentam.
- Escute ativamente – Aproveite esse tempo para perceber como cada aluno está pensando, quais ideias estão empregando e como estão lidando com o problema. Esse é um momento dedicado à observação e avaliação.
- Proponha dicas e sugestões cuidadosamente - Faça sugestões relevantes com cautela, sempre fundamentadas nas ideias e formas de pensar dos alunos. Se parecer apropriado, você pode sugerir que eles tentem usar uma ferramenta interativa, como desenhar uma ilustração ou elaborar uma tabela. É importante ter cuidado para não dar a impressão de que você tem a única maneira certa de resolver o problema.
- Encoraje a verificação e o teste das ideias - Os alunos podem procurar sua aprovação para seus resultados ou ideias. Evite ser a fonte da "verdade" ou do julgamento de "certo ou errado". Quando perguntarem se um resultado ou método está correto, responda com perguntas como "Como você pode decidir?" ou "Por que você acha que isso estaria certo?" ou "Eu entendi o que você fez. Como você pode verificar isso?". Mesmo que não peçam sua opinião, pergunte "Como podemos saber se isso faz sentido?". Lembre os alunos de que respostas sem explicações não são aceitáveis.
- Forneça atividades adequadas aos alunos que terminam depressa - É importante gerenciar de maneira eficaz os alunos que concluem as atividades mais rapidamente para evitar distrações, sem que isso pareça uma recompensa por sua velocidade. Esses alunos podem ser desafiados com tarefas adicionais ligadas ao problema que acabaram de resolver. Outra opção é incluir projetos de extensão no currículo de matemática, permitindo que os alunos que terminam cedo utilizem esse tempo para se dedicarem a esses projetos.

A fase depois de uma lição - Nessa fase, os alunos atuarão como uma comunidade de aprendizes, discutindo, justificando e questionando as várias soluções para o problema que acabaram de resolver. Este é o momento em que a maior parte da aprendizagem ocorrerá, à medida que os alunos refletem individual e coletivamente sobre as ideias que criaram e investigaram. É crucial planejar tempo suficiente para uma discussão e evitar que a fase de resolução do problema se prolongue demais. Durante essa fase de discussão:

- Discussão em Comunidade de Aprendizes - Incentive uma discussão produtiva e auxilie os alunos a trabalharem juntos como uma comunidade de aprendizes.
- Escuta Ativa Sem Julgamento - Ouça ativamente sem julgar, aproveitando essa oportunidade para entender como os alunos estão pensando e abordando o problema. A avaliação dos métodos e soluções é responsabilidade dos alunos.
- Síntese de Ideias - Resuma as ideias principais e identifique questões para investigações futuras.

Portanto, Ensinar Matemática Através da Resolução de Problemas não se resume a simplesmente apresentar um problema, acomodar-se e aguardar que a solução surja espontaneamente. O educador desempenha um papel fundamental na criação e manutenção de um ambiente de aprendizagem Matemática que seja motivador e inspirador, onde as aulas possam fluir de maneira eficaz. Para alcançar esse objetivo, cada aula deve incluir três etapas principais: antes, durante e depois. Na fase inicial, o professor deve assegurar que os alunos estejam mentalmente preparados para a tarefa e garantir que todas as expectativas estejam bem definidas. Durante a execução, os alunos realizam o trabalho enquanto o professor observa e avalia o progresso. Na etapa final, o professor aceita as soluções apresentadas pelos alunos sem a intenção de avaliá-las e promove uma discussão na qual os alunos justificam suas respostas e métodos. Por fim, o professor formaliza os novos conceitos e conteúdos que foram construídos. (WALLE, 2009)

Em 2018, com o propósito de elevar o padrão do Ensino Fundamental, o Ministério da Educação, cujo objetivo é promover medidas que visem à melhoria da qualidade da escola básica, de forma a dialogar com outras políticas públicas, lançou o documento Base Nacional Comum Curricular (BNCC). E uma das competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aponta que os alunos durante sua formação escolar devem:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir

> conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9)

A BNCC propõe a Resolução de Problemas como uma das metodologias que conduzem ao caminho para o desenvolvimento das competências e habilidades em Matemática. A resolução de problemas é uma habilidade importante que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

Baseando-se nos documentos oficiais que norteiam a Educação Brasileira, percebe-se que a Resolução de Problemas é citada como um importante recurso em sala de aula. A utilização desta Metodologia é recomendável para dinamizar as aulas, aproximar o ambiente escolar da realidade do aluno, promover o desenvolvimento de estratégias diversas de solução e possibilitar o desenvolvimento de aprendizagens ativas.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 266)

Ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma maneira de fazer Matemática na qual o aluno é construtor do seu próprio conhecimento. Nessa perspectiva, os problemas são sugeridos de forma a dar suporte à formalização dos conceitos. Assim, os problemas apresentados geram novos conceitos, procedimentos ou conteúdos matemáticos.

Para reforçar essa metodologia, podemos observar que as ideias socioconstrutivistas de aprendizagem, que embasam as orientações oficiais atuais para o ensino de Matemática em sala de aula, se fundamentam no princípio de que o aprendizado acontece quando o aluno constrói seus próprios conceitos por meio da Resolução de Problemas. Esse princípio pressupõe que a aprendizagem ocorre quando o aluno, ao confrontar suas ideias prévias, constrói os conceitos que o professor pretende ensinar. Assim, o professor assume o papel de mediador, isto é, de criador de situações que propiciem esse confronto de ideias, enquanto o aluno tem o papel de construtor do seu próprio conhecimento matemático.

No entanto, Cai e Lester (2012) citado por Allevato e Onuchic alertam que

> [...] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula. (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021, p. 44)

Walle (2009) destaca que é o professor que dá forma à matemática que é ensinada aos alunos. Suas percepções sobre o que significa saber e fazer matemática e sobre como os alunos chegam a dar sentido à matemática terão um impacto significativo em como o professor aborda o ensino de matemática. Ele ainda destaca alguns elementos-chave que os professores de Matemática devem envolver em seu trabalho, incluindo a capacidade de conceber e selecionar tarefas para que os alunos aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas. Além disso, é fundamental integrar a avaliação ao processo educativo, pois isso não apenas enriquece a aprendizagem dos alunos, mas também contribui para a melhoria contínua do ensino no dia a dia.

O processo educativo, por muito tempo, foi concebido de tal forma que o professor era a figura central, o dono de todo o conhecimento e os alunos eram apenas espectadores que reproduziam mecanicamente o que o professor explicava. Diferentemente daquele modelo, a metodologia de resolução de problemas busca colocar o aluno em ação, demandando que o professor crie a motivação necessária para que o aluno participe do processo de aprendizagem do conteúdo matemático. A Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática exige muita dedicação por parte do professor, avaliações contínuas e um minucioso planejamento de situações-problema que estimule os alunos na construção de novos conceitos.

2.2 A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

O estudo abordado, neste trabalho, concentra-se na metodologia proposta por Onuchic (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021), por ser uma abordagem que fornece contribuições significativas para o Ensino da Matemática Através da Resolução de Problemas.

A abordagem de Ensinar Matemática Através da Resolução de Problemas é uma metodologia na qual o professor deve desempenhar um papel de observador, analisando e incentivando o trabalho colaborativo. Com o intuito de auxiliar os professores que desejam trabalhar com essa metodologia foi que Onuchic e Allevato desenvolveram dez passos a serem desenvolvidos na aplicação dessa metodologia. Esses passos têm como objetivo ajudar os professores a aplicarem a metodologia de resolução de problemas em sala de aula.

1º Passo: PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA GERADOR - É a etapa em que o professor pode selecionar ou elabora um problema e propõem aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos. Esse problema inicial é chamado de problema gerador porque tem como objetivo a construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento. A meta é que os alunos desenvolvam habilidades de resolução de problemas e raciocínio matemático, em vez de simplesmente memorizar procedimentos. O problema gerador é aquele que tem como objetivo conduzir os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula, ao longo do processo de resolução do problema. Conteúdo este que ainda não foi estudado em sala;

2º Passo: LEITURA INDIVIDUAL - Nessa etapa, é entregue ao discente uma cópia do problema e ao receber o problema impresso, cada aluno lê individualmente e tem a oportunidade de refletir, interagir com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema apresentado, fazendo uso dos conhecimentos prévios. Nesta fase, a ação é do aluno.

3º Passo: LEITURA EM CONJUNTO - Agora os discentes formam pequenos grupos e fazem uma nova leitura e discutem o problema. O professor pode auxiliar os grupos a compreenderem o problema e a sanar algumas dúvidas, tais como: dúvidas relacionadas a notação, a linguagem matemática. Mas, cabe aos alunos a realização das ações necessárias da atividade. Dessa forma, os discentes têm a oportunidade de exercitar a articulação de suas ideias, aprimorando sua linguagem para expressar-se com clareza e coerência, garantindo assim que sejam compreendidos.

4º Passo: RESOLUÇÃO DO PROBLEMA – Aqui começa a resolução do problema. Os alunos, trabalhando em seus grupos, se esforçam para resolver o problema gerador, que tem como objetivo guiá-los na construção do conhecimento do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. As ações dos discentes, nesse passo, é voltada para a expressão escrita, onde poderão fazer desenhos, gráficos, tabelas, esquemas, simulações com situações mais simples do problema, o que estiver disponível e facilite a resolução do problema. Assim, cabendo ao professor o quinto passo.

5º Passo: PROFESSOR OBSERVAR E INCENTIVAR – O quinto passo é reservado ao professor, que adota o papel de mediador, estimulando questionamentos e criando situações. Durante esse processo, o professor desempenha um papel ativo, observando o trabalho dos alunos e incentivando-os a aplicar seus conhecimentos prévios e técnicas já dominadas, além de promover a troca de ideias. Além disso, é crucial que o professor esteja ciente das possíveis dificuldades que seus alunos possam enfrentar, assumindo um papel proativo como interventor e questionador. Oferecendo suporte nas dificuldades, mas sem fornecer respostas prontas, demonstrando assim sua confiança na capacidade dos alunos.

6º Passo: REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA – Os representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções no quadro, sejam elas corretas, incorretas ou realizadas por diferentes métodos. Diante das soluções apresentadas, o professor incentiva os alunos a compartilharem, justificar e discutir suas ideias, comparando uma com as outras com o objetivo de aprimorar a apresentação escrita da solução.

7º Passo: PLENÁRIA – Nessa etapa, todos os alunos são estimulados a discutir as diversas resoluções registradas no quadro pelos colegas, para defenderem suas perspectivas e esclarecerem suas dúvidas. Assim, cabe ao professor o papel de orientador e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e significativa de todos os alunos. Este é um momento extremamente valioso para o aprendizado.

8º Passo: BUSCA DO CONSENSO – Ainda em plenária, depois de esclarecer as dúvidas e analisar as resoluções e soluções propostas para o problema. O professor e alunos busca chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9º Passo: FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO - Durante a fase de formalização, o professor realiza um registro estruturado e organizado na lousa, empregando a linguagem matemática. Dessa forma, formaliza os conceitos, princípios e procedimentos que foram construídos ao resolver o problema, destacando várias técnicas operacionais e, se necessário, construindo demonstrações.

10º Passo: PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS - Com o objetivo de realizar uma avaliação contínua, após a fase de formalização, são propostos aos alunos novos problemas que estão relacionados ao problema inicial. Esses problemas permitem analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula foram compreendidos e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Além disso, eles possibilitam aprofundar e expandir as compreensões sobre aquele conteúdo ou tópico matemático, criando um ciclo de construção de novos conhecimentos e resolução de novos problemas. Esta etapa tem um forte viés do ensino voltado para a Resolução de Problemas, mas isso não desconfigura a metodologia, pois essa concepção inclui as demais: os alunos podem aprender tanto sobre a resolução de problemas, quanto aprender matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem matemática através da resolução de problemas (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2021, p. 48-50)

Ensinar Através da Resolução de Problemas exige que os alunos desloquem sua atenção de simplesmente obter as respostas para se concentrarem nos processos e argumentos que levaram a essas respostas. Por outro lado, é essencial escolher problemas ou tarefas adequadas. E um problema é considerado eficaz quando auxilia os alunos a compreenderem as ideias que desejamos que eles aprendam (WALLE, 2009).

Boaler (2019) argumenta que para que percebam a Matemática como uma área de aprendizado, os alunos necessitam de atividades e questões matemáticas que favoreçam a aquisição de conhecimento. É fundamental que os indivíduos saibam raciocinar e solucionar problemas, utilizando abordagens flexíveis em diferentes contextos.

Assim, podemos concluir que o que é um problema apropriado para uma turma ou professor, não será para outros. Cabe ao professor refletir e tomar a decisão de escolher o problema adequado baseado na realidade dos alunos e nas metas que o professor deseja alcançar.

Onuchic e Allevato (2021) destacam, em sua abordagem, a importância do envolvimento ativo e das descobertas dos alunos durante seu processo de aprendizagem, o que lhes permite adquirir novas competências no ensino da Matemática. Nessa metodologia, são propostos problemas aos alunos para os quais não possuem conhecimentos prévios sobre o conteúdo necessário para solucioná-los. Essa estratégia visa promover a capacidade deles de investigar problemas de forma independente, criando um ambiente onde a curiosidade e a investigação são mais valorizadas do que fórmulas e soluções prontas fornecidas pelos professores. Além de tratar da concepção de que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, essa abordagem considera a avaliação não apenas um instrumento para medir o aprendizado, mas uma parte essencial do processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, ela se torna um recurso importante para compreender as experiências dos alunos, proporcionar feedback significativo e ajustar as práticas pedagógicas, enriquecendo a experiência de aprendizado como um todo. Nesse âmbito, o professor atua como orientador e mediador, facilitando essa dinâmica de aprendizado.

As atividades que aplicaremos em sala de aula seguirão as orientações das 10 etapas da metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2021). Dentro dessas etapas, incorporaremos algumas sugestões fundamentadas na análise de estudos de especialistas como Polya (2006), Van de Walle (2009) e Boaler (2019).

2.3 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (SAEB)

O Brasil implementou uma abordagem para alcançar as escolas e reunir dados sobre professores e alunos, permitindo a supervisão da qualidade da educação em todo o território nacional. Essa é a missão do Sistema de Avaliação da Educação Básica, conhecido como Saeb, anteriormente chamado de Prova Brasil, que é gerido pelo Instituto Nacional de Estudos e

Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). O Saeb é um conjunto de avaliações externas em larga escala que o Inep utiliza para fazer um diagnóstico da educação básica brasileira e identificar fatores que podem afetar o desempenho do aluno. Essas avaliações, que incluem testes e questionários, são aplicadas a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada, refletindo os níveis de aprendizado dos alunos.

O Saeb se concentra na educação básica do Brasil, que abrange a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Foi criado com os seguintes objetivos:

1. Avaliar a qualidade da educação: O Saeb busca entender se todos têm condições iguais de acesso à escola e de permanência nela, além de investigar a qualidade do ensino no país.
2. Promover a pesquisa em avaliação: O Saeb visa estimular que mais pessoas conheçam a área de avaliação e realizem pesquisas sobre o tema.
3. Traduzir dados em indicadores: O Saeb traduz seus dados em forma de indicadores que auxiliam a entender a educação brasileira. Um exemplo disso é o Ideb (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica). O Inep também produz vários outros indicadores com os dados do Saeb.
4. Fornecer dados para políticas públicas: O Saeb fornece dados e evidências para que o governo crie políticas públicas com o objetivo de melhorar a educação (BRASIL, 2023).

Esses objetivos ajudam a garantir que a educação no Brasil seja continuamente monitorada e melhorada.

Quando se fala em avaliação, muitas pessoas associam imediatamente a provas. No entanto, é crucial entender que as provas são apenas um componente do Saeb. A avaliação reconhece que a qualidade do ensino está relacionada a diversos fatores e procura recolher e fornecer informações sobre sete dimensões de qualidade da educação básica: atendimento escolar, ensino e aprendizagem, investimento, profissionais da educação, gestão, equidade, Cidadania, Direitos Humanos e valores.

Para avaliar todas essas dimensões, o Saeb aplica questionários aos alunos, professores, diretores de escolas e gestores municipais de educação, além de testes de língua portuguesa, matemática, ciências naturais e ciências humanas.

As médias de desempenho dos alunos no Saeb, juntamente com as taxas de aprovação, reprovação e abandono escolar obtidas no Censo Escolar, compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

O Saeb acontece a cada dois anos e avalia os seguintes níveis de ensino:

- Educação Infantil em escolas públicas, privadas e conveniadas com o poder público;
- Ensino Fundamental em turmas de 2º, 5º e 9º anos em escolas públicas e privadas;
- Ensino Médio em turmas de 3ª e 4ª séries de escolas públicas e privadas.

Algumas escolas não são incluídas na avaliação. Como por exemplo:

- Escolas de pequeno porte, com menos de dez alunos matriculados nas séries avaliadas;
- Escolas ou turmas que atendem exclusivamente a estudantes que são o público-alvo da educação especial;
- Escolas onde o português não é falado, algumas escolas indígenas;
- Turmas de EJA (Educação de Jovens e Adultos), do magistério e multisseriadas.

Desde sua primeira edição em 1990, o Saeb passou por várias melhorias teórico-metodológicas. Nas últimas edições, incluindo a de 2023, foram implementadas várias novidades, especialmente aquelas voltadas para a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os testes do Saeb são formulados com base em matrizes de referência, que atuam como diretrizes para a elaboração de itens dos testes. Essas matrizes, desenvolvidas pelo Inep, são organizadas em torno das competências e habilidades que se espera que os alunos tenham adquirido na fase da educação básica que está sendo avaliado.

Vale ressaltar que as matrizes de referência não devem ser confundidas com os currículos, que são muito mais abrangentes. Além disso, elas não devem ser confundidas com procedimentos, estratégias de ensino ou orientações metodológicas, pois representam uma seleção dos conteúdos curriculares estabelecidos para uma determinada etapa ou ciclo escolar.

As matrizes de referência são organizadas em eixos do conhecimento. Cada eixo do conhecimento é subdividido em eixos cognitivos que detalham as habilidades abordadas nas avaliações externas. Essa subdivisão é conhecida como descritores, que detalham as habilidades abordadas nas avaliações externas. Esses descritores são a base para a criação das questões dessas avaliações.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos as características da abordagem utilizada nesta pesquisa. Descrevemos o contexto em que a investigação foi realizada, bem como os participantes envolvidos. Além disso, apresentamos as sequências didáticas que serão implementadas em sala de aula.

Verificar os verbos e pôr para o PRETERITO.

3.1 TIPO DE ABORDAGEM DA PESQUISA

Essa pesquisa foi realizada pela abordagem de pesquisa qualitativa. O caráter interpretativo da pesquisa qualitativa permitiu que os pesquisadores explorem o que viram, ouviram e entenderam (CRESWELL, 2010). Assim, buscamos, nesta pesquisa, refletir sobre e analisar as percepções dos discentes em relação à metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação no âmbito escolar. De acordo com MINAYO (2002) a pesquisa qualitativa tem demonstrado grande eficácia em vários estudos no domínio da educação matemática. Esta abordagem concentrou-se na análise dos processos de ensino e aprendizagem, proporcionando uma compreensão mais aprofundada das experiências e pontos de vista dos participantes. Isso permite aos pesquisadores obterem uma visão detalhada das interpretações dos participantes, bem como “insights” sobre as interações sociais, práticas culturais e processos psicológicos que puderam influenciar os resultados.

Além disso, tratou-se de uma pesquisa-ação, pois o professor pesquisador, que era o professor titular, e os alunos envolvidos na pesquisa estiveram em constante reflexão, ação e cooperação, como participantes ativos no desenvolvimento dos problemas, como salienta Thiollent:

> Em geral, a ideia de pesquisa-ação encontra um contexto favorável quando os pesquisadores não querem limitar suas investigações aos aspectos acadêmicos e burocráticos da maioria das pesquisas convencionais. Querem pesquisas nas quais as pessoas implicadas tenham algo a ‘dizer’ e a ‘fazer’. Não se trata de simples levantamento de dados ou de relatórios a serem arquivados. Com a pesquisa-ação os pesquisadores pretendem desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos observados. (THIOLLENT, 2022, p. 22)

A pesquisa teve início por meio de uma revisão bibliográfica sobre o tema Resolução de Problemas como metodologia, analisou obras de teóricos como George Polya, Lourdes Onuchic, Van de Walle, e documentos do Saeb e da BNCC.

3.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental II, composta por 40 alunos de uma escola estadual de tempo integral, na zona norte de Manaus/AM, sendo composta por adolescentes, na faixa etária de 14 a 15 anos. As atividades da pesquisa foram desenvolvidas durante tempos de aulas de Matemática. A turma foi escolhida pelo fato da professora pesquisadora ser a titular da turma, ponto que facilitou a aplicação da metodologia na sala de aula. Desta forma, a metodologia de observação participante tornou-se uma prática mais acessível, devido à confiança mútua entre os participantes.

A intenção da aplicação dessas atividades foi levar informações sobre o tema de forma descontraída e atrativa, visando aumentar o interesse nas aulas, proporcionando aos alunos uma nova perspectiva sobre o conteúdo e permitindo uma reflexão sobre o futuro. Todas as atividades foram seguidas por normas, sem violar o código de ética. A pesquisa foi realizada entre os meses de fevereiro e maio, nos tempos de aula de matemática disponíveis em cada semana nesse período. Cada aula teve uma duração de 60 minutos (1 hora).

O registro dos dados coletados na pesquisa foi realizado por meio de anotações nos cadernos de matemática dos alunos e no caderno da pesquisadora, além de fotos das atividades realizadas em sala de aula. Esse processo permitiu descrever as impressões sobre os eventos ocorridos durante a aplicação da metodologia. Os alunos foram estimulados a compartilharem suas opiniões, dificuldades e reflexões sobre a matemática nos cadernos ou verbalmente.

3.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

A BNCC (2018) enfatiza competências específicas de matemática para o ensino fundamental. Dentre essas competências, destacamos as seguintes, por enfatiza a proposta desse trabalho:

> - Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> - Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 266)

Nesse contexto, os alunos precisam explorar e aprimorar seu próprio raciocínio, bem como suas capacidades de investigação, comunicação e argumentação, para que possam expressar suas respostas de forma clara e sintetizar conclusões usando diferentes formas de representação. Além disso, a interação colaborativa com colegas contribui para o aprendizado com diferentes perspectivas e abordagens. Por meio de diálogos colaborativos e validações conjuntas, eles adquirem conhecimentos, aperfeiçoam representações e desenvolvem procedimentos cada vez mais sofisticados. Essa abordagem visa prepará-los para enfrentar os desafios do mundo acadêmico e profissional.

As expectativas relacionadas ao modo como se ensina a álgebra tem passado por variações ao longo dos anos, a disciplina já não é mais vista apenas como procedimentos de manipulação de símbolos e aplicações artificiais sem conexões com o mundo real. O foco atual do ensino de álgebra está no tipo de pensamento e raciocínio que prepara os alunos a pensar matematicamente em todas as áreas da Matemática, conforme salienta Walle (2009):

> O Pensamento algébrico ou Raciocínio algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda a matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana. (WALLE, 2009, p. 287)

A Geometria e a Álgebra, sendo unidades temáticas da matriz de referência do SAEB, são áreas em que os alunos frequentemente enfrentam dificuldades. Reconhecendo a importância do ensino da geometria e da álgebra e a complexidade de sua compreensão por parte dos estudantes, propomos preparar aulas que apliquem a metodologia de resolução de problemas, integrando a presente pesquisa à unidade temática de geometria e álgebra. Além disso, é crucial lembrar que as habilidades relacionadas a essas temáticas são essenciais em quase todos os outros conteúdos matemáticos, incluindo a Física no Ensino Médio. No decorrer da pesquisa, sentimos a necessidade de incluir a unidade temática de Grandezas e Medidas para aproveitar o Tangram construído em uma das sequências didáticas.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

UNIDADE TEMÁTICA
Geometria
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Ângulos, ângulos opostos pelo vértice, ângulos suplementares, retas paralelas, reta transversal.
HABILIDADES SAEB
9G2.3 - somente a parte de resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal.
HABILIDADES BNCC
EF09MA10 - Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Reconhecer ângulos congruentes, suplementares e opostos pelos vértices. ➢ Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. ➢ Explorar a noção de retas paralelas cortadas por transversais e conhecer os ângulos formados entre elas.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
6 aulas de 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, transferidor, folhas A4 sem pauta, palito de picolé, cola quente, lápis de cor ou canetinhas coloridas.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1ª ETAPA

PROBLEMA 1[1] Responda o que se pede:

a) Desenhe duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

b) Nomeie com números ou letras os oitos ângulos formados na figura anterior.

c) Use codificação de cores para identificar ângulos congruentes.

d) Identifique ângulos opostos pelo vértice e suplementares.

e) Escreva as conexões que você observa. Utilize as cores do seu diagrama para expressar essas relações.

Para esta atividade, os alunos receberão o problema impresso e farão a leitura individual. Em seguida, o professor os dividirá em pequenos grupos, compostos por no máximo 4 alunos,

---

[1] BOALER, J. **Mentalidades matematicas:** estimulando o potencial dos estudantes por meio da matematica criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

para que realizem a releitura de forma coletiva. As perguntas que constam no problema têm o intuito de conduzir os alunos para uma percepção clara das relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal. Desta forma, os alunos irão construir seu conhecimento de forma progressiva ao longo da realização da atividade, de modo a permitir uma conexão entre os ângulos formados pelas retas.

É bom salientar, que o professor deve ser um mediador do conhecimento, não apenas solucionando todos os problemas, mas sobretudo, fornecendo ao aluno ferramentas suficientes para que possam através de seu raciocínio ser capazes de construir suas próprias estratégias de resolução das atividades.

Sugerimos a utilização do transferidor para observar as relações entre os ângulos. Caso os alunos não possuam um transferidor, uma opção é disponibilizar um transferidor de papel (modelo para impressão em anexo) e/ou realizar a manipulação com material concreto, como a construção de duas retas paralelas e uma transversal com o auxílio de palitos de picolé.

Após a conclusão da atividade, um membro representante de cada equipe se dirige ao quadro e registra os resultados. Em seguida, na plenária, as estratégias de cada equipe são analisadas e comparadas. O professor, nesse momento, estimula a discussão e busca um consenso entre as equipes, visando a uma classificação mais coerente e convincente das relações entre os ângulos formados pelas retas paralelas e a transversal observadas pelos alunos.

Neste momento, é relevante destacar que o processo de aprendizado é mais eficaz quando nos deparamos com erros em vez de acertos. Quando cometemos erros, nosso pensamento crítico se desenvolve, as sinapses são ativadas e novas conexões se formam (BOALER, 2018). Portanto, os erros desempenham um papel produtivo e enriquecedor no desenvolvimento do conhecimento e na construção de uma compreensão mais profunda.

2ª ETAPA - FORMALIZAÇÃO

Na segunda etapa, ocorre a formalização do conteúdo desejado. Sugerimos que essa formalização seja realizada em conjunto com os alunos, de acordo com o seguinte procedimento:

I. Copie no quadro, imprima ou projete as definições dos ângulos correspondentes, alternos e colaterais, um de cada vez.

Ângulos Correspondentes são ângulos que estão do mesmo lado da transversal, um na região interna e outro na região externa às paralelas e não são adjacentes.

Ângulos alternos são ângulos que estão em lados diferentes da reta transversal e na mesma região. Caso estejam na região entre as paralelas, ou seja, na região interna as paralelas, são chamados de alternos internos. Por outro lado, se estão nas regiões externas às paralelas são chamadas de alternos externos. Em ambos os casos não podem ser adjacentes.

Ângulos colaterais são ângulos que estão do mesmo lado da transversal. Caso estejam na região entre as paralelas, ou seja, na região interna às paralelas, são chamados de colaterais internos. Por outro lado, se estão na região externa às paralelas são chamadas de colaterais externos. Em ambos os casos não podem ser adjacentes.

II. Peça aos alunos para fazer uma investigação sobre esses ângulos, ou seja, eles devem ler a definição e fazer os desenhos correspondentes aos ângulos mencionados. Neste ponto, é natural que dúvidas surjam a respeito das regiões internas e externas, bem como sobre o que significa ser adjacente. Essas questões são importantes para o entendimento do conteúdo e podem ser esclarecidas de forma mais aprofundada durante as discussões em sala de aula. É fundamental que os alunos busquem compreender esses conceitos para uma melhor assimilação dos tópicos abordados.

III. A partir da atividade realizada na etapa anterior, os alunos devem fazer inferências sobre as medidas dos ângulos. Caso necessário, podem utilizar o transferidor (modelo para impressão em anexo).

Espera-se que os alunos concluam que:

- Os ângulos correspondentes sejam congruentes;
- Os ângulos alternos também sejam congruentes.
- Os ângulos colaterais sejam suplementares.

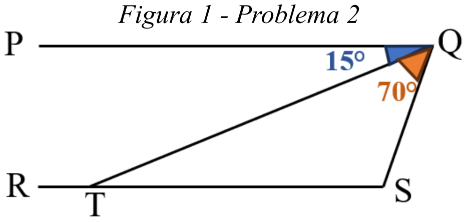
Desta forma, alcançaremos os objetivos da aula de forma eficaz e colaborativa.

3ª ETAPA – FINALIZANDO COM NOVOS PROBLEMAS

O professor propõe um ou mais problemas relacionados ao conteúdo estudado. Esses problemas devem ser resolvidos pelos alunos individualmente ou em pequenos grupos, com no máximo 4 alunos. Após a resolução, os alunos compartilham suas estratégias no quadro, permitindo que todos percebam como a matemática é flexível em relação às estratégias de solução. Essa abordagem colaborativa enriquece o aprendizado e estimula a criatividade dos estudantes. Para a última etapa, a resolução de outros problemas, sugerimos os três problemas a seguir, podendo ser utilizados sozinhos ou em conjunto com outros problemas do livro de didático.

PROBLEMA 2[2] (CESPE / CEBRASPE 2007) Na figura abaixo, as retas que contêm os segmentos PQ e RS são paralelas e os ângulos PQT e SQT medem 15º e 70º, respectivamente. Nessa situação, é correto afirmar que o ângulo TSQ medirá

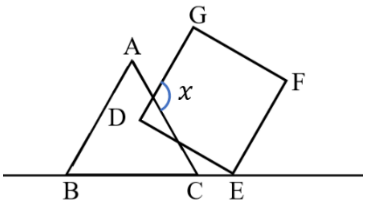
Figura 1 - Problema 2



A) 55º. B) 85º. C) 95º. D) 105º.

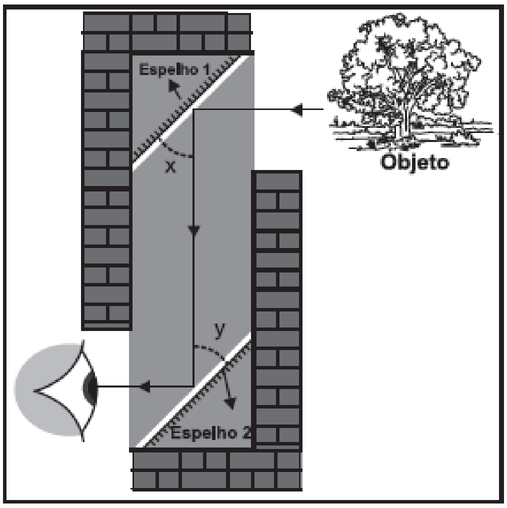
PROBLEMA 3 Na figura a seguir, o segmento AB do triângulo equilátero ABC é paralelo ao lado DG do quadrado DEFG. Qual é o valor do ângulo x?

Figura 2 - Problema 3



PROBLEMA 4[3] Na figura abaixo, os espelhos 1 e 2 são paralelos.

Figura 3 - Problema 4



Qual é a relação entre as medidas dos ângulos x e y?

A) x + y = 90° B) x + y = 180° C) x = y D) x > y

***

[2] ASTH, C. Exercícios sobre retas paralelas cortadas por uma transversal. **Toda Matéria.** Disponivel em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal/ Acesso em : 17 de Junho de 2023.

[3] WARLES. Questões por descritores. **Blog do Prof. Warles**. Disponivel em: https://docs.google.com/document/d/1dF0MmT99oDyLYcJSKe4O0rDuQKQt_Tpu/edit Acesso em: 17 de Junho de 2023.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

TEOREMA DE TALES

UNIDADE TEMÁTICA
Geometria
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Razão e Proporção, Teorema de Tales e rever equação do 1ºgrau
HABILIDADES SAEB
9G2.6 - Resolver problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.
HABILIDADES BNCC
EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação ... relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (grifo nosso)
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
• Revisar razão e proporção • Revisar equação do 1ºgrau. • Resolver problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por uma transversal. • Resolver problemas que envolvem o Teorema de Tales.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
6 aulas de 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, problema impresso, lápis, borracha, régua, notebook, datashow
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1ª ETAPA

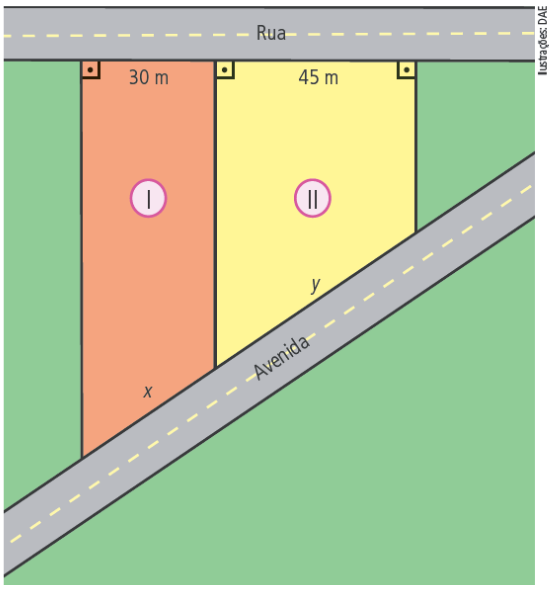
PROBLEMA 5[4] Na ilustração abaixo, percebemos que as avenidas das Rosas, das margaridas e dos Lírios são paralelas. As ruas dos Pinheiros e dos eucaliptos são transversais a essas avenidas. Será que podemos, com as informações desta ilustração, determinar a distância entre Marcos e Débora? Justifique sua estratégia de solução.

[4] ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. Praticando matemática, 9. 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

Figura 4 - Problema 5

Problema 6[5]: Esta planta mostra dois terrenos. As divisas laterais são perpendiculares à rua. Quais são as medidas das frentes dos terrenos que dão para a avenida, sabendo-se que a frente total para essa avenida é de 90 metros? Justifique sua estratégia de solução.

Figura 5 - Problema 6



[5] (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012)

Os alunos serão desafiados a resolver dois problemas matemáticos sem a formalização do Teorema de Tales, utilizando apenas seus conhecimentos prévios. Essa atividade é composta por dois problemas, que requerem diferentes perspectivas para serem solucionados.

O professor separa os alunos em duplas ou trios, e cada equipe recebe um dos dois problemas para fazer a leitura individual. Em seguida, eles farão a leitura novamente de forma coletiva.

O papel do professor é fundamental para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. Assim, uma estratégia pedagógica eficaz é estimular os alunos a observarem padrões nos problemas e, a partir dessas observações, fazerem inferências que os auxiliem na busca por soluções.

Os padrões observados podem fornecer “insights” valiosos para a resolução dos problemas. Por exemplo, se um aluno identificar um padrão multiplicativo na rua dos pinheiros, ele pode aplicar essa observação para encontrar a distância entre Marcos e Débora (no problema 5). A justificativa matemática deve acompanhar essas estratégias. Os alunos devem explicar por que suas ideias fazem sentidos.

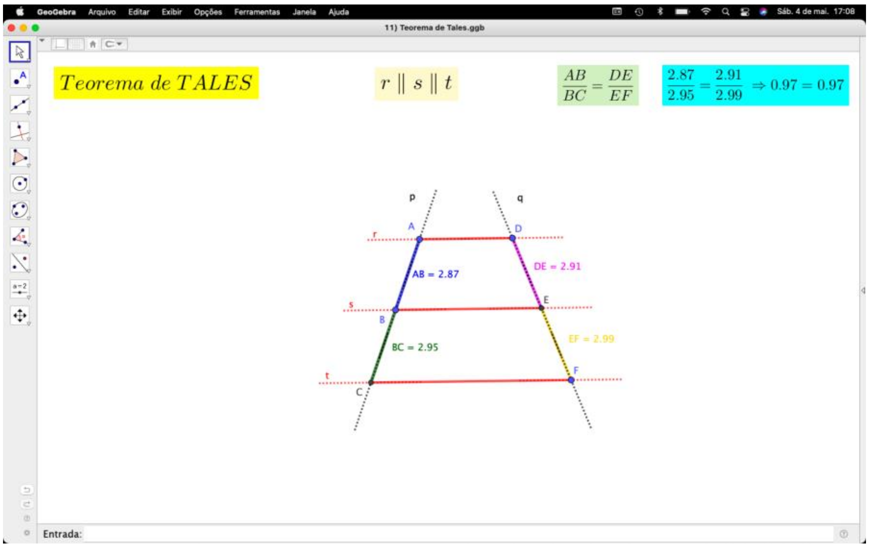
Desta maneira, os estudantes devem trabalhar de forma independente, discutir entre si e elaborar estratégias. Durante este processo, muitas dúvidas podem surgir. Cabe ao professor atuar como mediador, não oferecendo respostas prontas, mas sim questionando e estimulando a curiosidade e os anseios dos alunos, conforme o 5º passo da metodologia.

Assim que eles finalizarem suas estratégias de solução para os problemas, um integrante de cada equipe vai à lousa e faz os seus registros. Logo após, na plenária, suas estratégias são discutidas e comparadas entre as equipes. O professor, nesse momento, os instiga e os leva a um consenso, buscando as estratégias mais convincentes e coerentes.

2ª ETAPA - FORMALIZAÇÃO DO TEOREMA DE TALES

Para a formalização, recomendamos o uso do software Geogebra para auxiliar na visualização dos alunos. Ao clicar no link da Figura 6, você será direcionado para a página do Geogebra online, onde poderá utilizar a ferramenta.

Figura 6 - Teorema de Tales – Geogebra



Fonte: Joilson Alves Lopes.
Disponível em https://www.geogebra.org/m/rfbz6buk.

O Geogebra é um software matemático poderoso para explorar conceitos matemáticos de forma interativa. Espera-se que os alunos possam aproveitar essa ferramenta para aprofundar sua compreensão do Teorema de Tales.

3ª ETAPA – FINALIZANDO COM NOVOS PROBLEMAS

Nesta etapa, o professor traz novos problemas para que os alunos possam resolver ou solicita que eles elaborem questões que envolvam o conteúdo estudado, utilizando como inspiração o livro texto de matemática da turma.

Segundo a BNCC

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos (BRASIL, 2018, p. 277)

O ensino da matemática não se resume à aplicação de fórmulas e técnicas, é essencial capacitar e estimular os alunos a criarem e aplicarem seus conhecimentos de forma mais ampla, envolvendo habilidades como formular, interpretar e avaliar conceitos matemáticos em diferentes contextos.

***

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 3

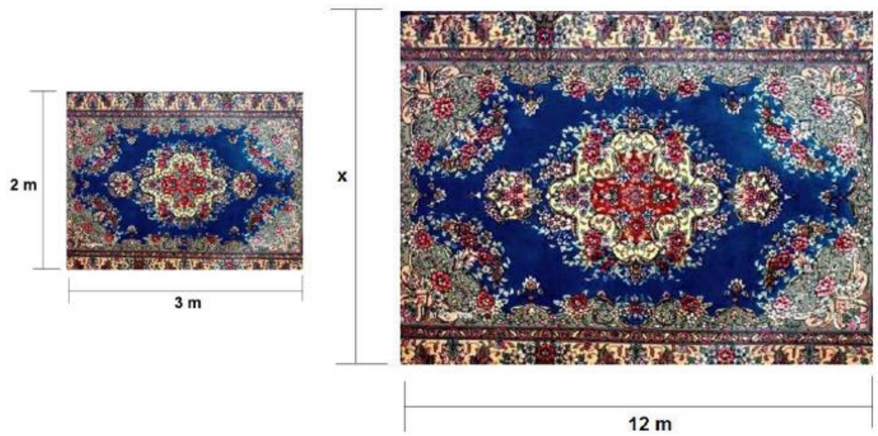
SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

UNIDADE TEMÁTICA
Geometria
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Semelhança de polígonos
HABILIDADES SAEB
9G2.5 - Resolver problemas que envolvam polígonos semelhantes.
HABILIDADES BNCC
EF09MA12 - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
6 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, problema impresso, lápis, borracha, régua.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ETAPA 1 - PROBLEMAS GERADORES[6]

Problema 7 (Projeto con(seguir) - DC) O povo persa é famoso pela confecção de seus valiosos tapetes. Sabendo que os tapetes abaixo são semelhantes.

Figura 7 - Problema 7



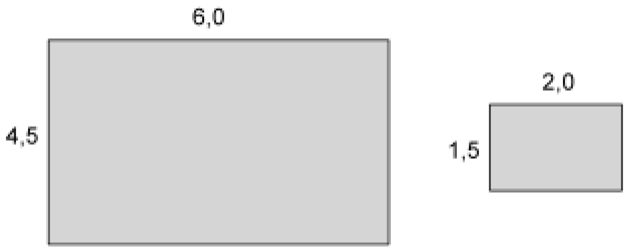
[6] Os problemas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 foram retirados do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1jiic7DtQKAW5vAgUzBz-qcTSbIbxTUor/edit

Calculando o valor de **x**, obtemos:

A) 4 m. B) 8 m. C) 9 m. D) 11 m.

Problema 8 (SAEB 2013). Os retângulos abaixo são semelhantes.

Figura 8 - Problema 8

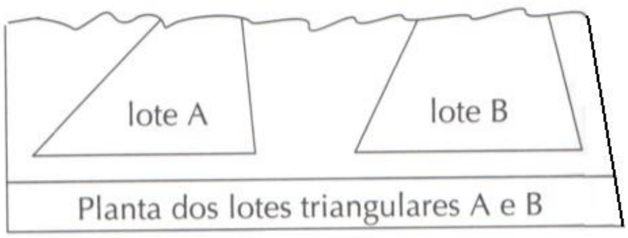


A razão da semelhança entre eles é

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$

Problema 9 (Praticando matemática). Encontrei um pedaço da planta de um loteamento.

Figura 9 - Problema 9



Medindo os ângulos encontrei: 30º e 80º em um lote e 80º e 70º em outro. Pude, então, concluir que:

A) os dois lotes são iguais.

B) os lotes são diferentes, mas têm o mesmo perímetro.

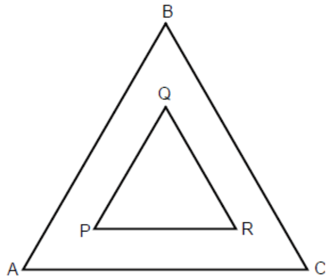
C) os lotes têm a mesma área.

D) a área de um lote é o dobro da área do outro.

E) os lotes têm os lados proporcionais.

Problema 10 (GAVE). O triângulo PQR é uma redução do triângulo equilátero ABC, de razão 0,5. Sabendo que QR = 5.

Figura 10 - Problema 10

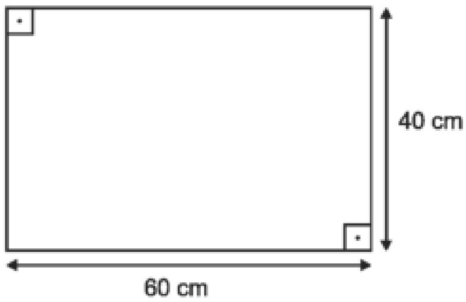


O valor do lado do triângulo ABC é

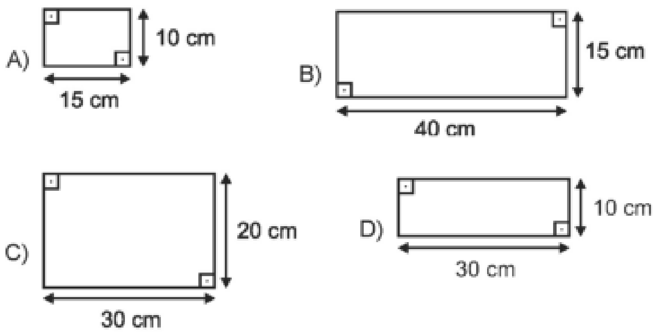
A) 2,5 cm B) 5 cm C)7,5 cm D) 10 cm

Problema 11 (Saerjinho). João passa horas brincando de aviões de papel que constrói. Sua avó, sabendo disso, deu-lhe uma folha de papel medindo 60cm por 40cm conforme a figura abaixo.

Figura 11 - Problema 11

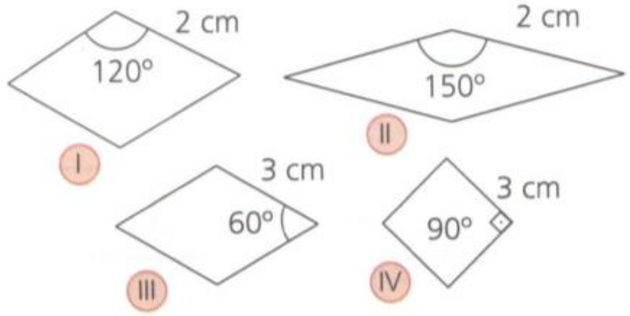


João ficou muito feliz com a surpresa e, para aproveitar melhor o papel resolveu dividir a folha em 4 partes iguais mantendo a semelhança com a folha que ganhou. Dessa forma, João ficou com 4 folhas de tamanho:



Problema 12 (Saresp – SP). Observe os losangos abaixo.

Figura 12 - Problema 12

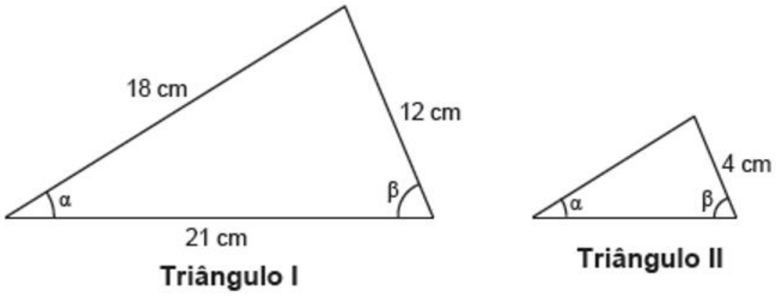


Quais desses losangos são semelhantes entre si?

A) I e II. B) I e III C) II e III. D) III e IV.

Problema 13 (Supletivo 2011). Marcos desenhou dois triângulos semelhantes, que estão representados abaixo.

Figura 13 - Problema 13



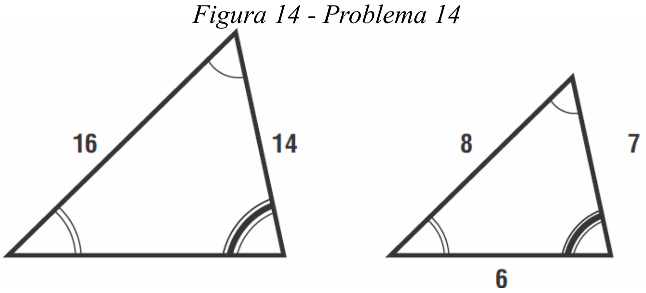
Quais são as medidas dos outros dois lados do triângulo II?

A) 3 cm e 5 cm. C) 10 cm e 13 cm.

B) 6 cm e 7 cm. D) 14 cm e 17 cm.

Problema 14 Observe esses dois triângulos. As medidas de seus lados estão registradas numericamente. Os ângulos com símbolos iguais mostram que possuem medidas congruentes. Sendo assim, assinale a opção que contém a afirmativa correta:

Figura 14 - Problema 14



A) Os triângulos não são semelhantes, porque não são equiláteros.

B) Os triângulos não são semelhantes, porque, apesar de seus lados correspondentes serem proporcionais, seus ângulos correspondentes têm medidas diferentes.

C) Os triângulos não são semelhantes, porque somente seus ângulos correspondentes são congruentes.

D) Os triângulos são semelhantes, porque seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais.

Para a realização dessa atividade, considerando uma turma composta por 40 alunos, sugerimos a divisão da turma em 8 grupos, cada um contendo 5 componentes. A seguir, apresentamos as etapas detalhadas:

1. Nomeação dos Grupos:
   - ✓ Cada grupo será identificado numericamente, por exemplo: Grupo 1, Grupo 2, e assim por diante.
   - ✓ Todos os componentes de um grupo receberão o mesmo número de identificação.
2. Distribuição dos Problemas:
   - ✓ O professor atribuirá um problema específico para cada grupo, entre os oito problemas geradores sugeridos, cada aluno deverá ter o problema impresso.
   - ✓ Cada aluno realizará a leitura do problema individualmente, seguida de uma releitura coletiva. Posteriormente, cada equipe será responsável por desenvolver suas próprias estratégias de solução para o problema atribuído.

O professor deve estar atento às possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar, agindo como um interventor proativo, com perguntas pertinentes e oferecer suporte quando necessário. Importante ressaltar que, embora o professor esteja disponível para auxiliar, não necessariamente deve fornecer respostas prontas.

3. Compartilhamento de Ideias:
   - ✓ Após o desenvolvimento das estratégias de solução, cada grupo deverá chamar o professor, os grupos compartilharão suas ideias e estratégias de solução.
4. Conclusão e Coerência:
   - ✓ Nesse momento, ocorrerá uma plenária com cada grupo junto ao professor.
   - ✓ Após discussões e análises, os grupos devem chegar a uma conclusão convincente e coerente sobre a solução do problema.

- ✓ É essencial que todos os membros do grupo compreendam e sejam capazes de explicar a estratégia de solução para os demais colegas.

5. Redistribuição dos Alunos:
   - ✓ Nesse momento, ocorrerá uma redistribuição dos alunos.
   - ✓ Novos grupos serão formados, compostos por alunos provenientes de grupos diferentes, ou dependendo da turma, o professor poderá deixá-los livres para explicar uns para os outros, deixando claro que ao terminar o tempo determinado pelo professor todos devem ter o conhecimento dos oito problemas distribuídos entre os alunos.
6. Antes da formalização do conteúdo, o professor projeta os problemas na lousa e pode pedir para os alunos explicarem de forma voluntária os problemas. Esse momento é de grande aprendizado, tanto no que diz respeito ao conhecimento matemático quanto no enriquecimento da comunicação dos alunos na forma de se expressar, o que é essencial para sua vida profissional.

Esta estratégia pedagógica tem como objetivo fomentar a colaboração, o pensamento crítico e a comunicação entre os estudantes. Além disso, busca promover a troca de conhecimentos e experiências entre os participantes. A participação ativa de todos os componentes é essencial para o êxito dessa dinâmica acadêmica. Ademais, essa abordagem não apenas estimula o desenvolvimento socioemocional dos alunos, preparando-os para enfrentar desafios acadêmicos e pessoais, mas também fortalece suas habilidades essenciais para o contexto educacional e profissional.

Embora nem todos os alunos possuam facilidade para explicar os problemas a seus colegas, é responsabilidade do professor estimulá-los e encorajá-los a tentar expressar suas ideias da melhor forma possível. A abordagem pedagógica deve ser sensível às diferentes habilidades e estilos de comunicação dos estudantes, incentivando-os a superar desafios e aprimorar suas capacidades de expressão.

O professor deve apresentar formalmente os conceitos de semelhança de polígonos no quadro. Durante essa explanação, ele pode abordar tópicos como: soma dos ângulos internos de um triângulo; razão e proporção; aplicação do Teorema de Tales; semelhança de triângulos. Além disso, o professor pode explorar outros tópicos relevantes conforme julgar necessário e seguir com a resolução de mais problemas relacionados a temática.

***

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 4

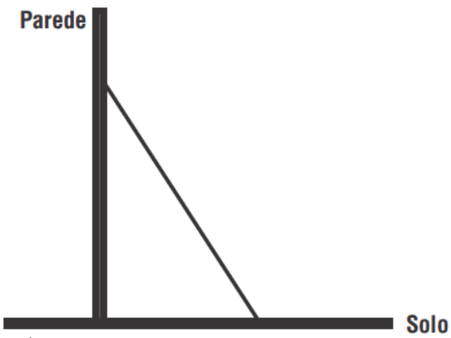
RELAÇÕES METRICAS NO TRIÂNGULO RETANGULO

UNIDADE TEMÁTICA
Geometria
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Teorema de Pitágoras e Relações métricas do triângulo retângulo
HABILIDADES SAEB
9G2.4 - Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.
HABILIDADES BNCC
EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. EF09MA13 - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Resolver problemas de aplicação do teorema Pitágoras. ➢ Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
6 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, problema impresso, lápis, borracha, régua, notebook, datashow, EVA, lápis de cor.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1ª etapa – PROBLEMAS GERADORES[7]

PROBLEMA 15 (*evaluacioneducativa*). Observe a figura abaixo que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.

Figura 15 - Problema 15



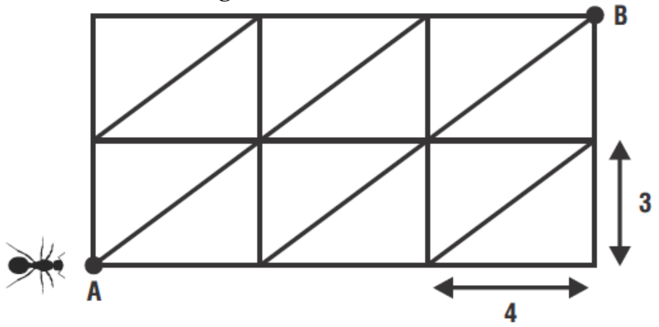
A escada mede, aproximadamente,

A) 5 m. B) 6,7 m. C) 7,3 m. D) 9 m.

[7] Os problemas 15, 16 e 17 foram retirados do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1m9Qjpk_aRct7M8qhQJNz9Wc9eCt4LGq2/edit

PROBLEMA 16 (OBMEP). Uma formiga está no ponto *A* da malha mostrada na figura. A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de *A* até *B*?

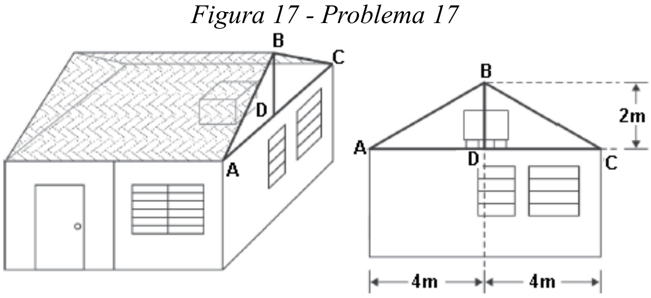
Figura 16 - Problema 16



A) 12 cm. B) 14 cm. C) 15 cm. D) 18 cm.

PROBLEMA 17 (Saresp-2010). Na casa ilustrada, a estrutura de madeira que sustenta o telhado apoia-se na laje. Devem-se dispor caibros (peças de madeira) na vertical, indo da laje ao ponto mais alto do telhado, como a peça BD da ilustração. Devido à presença da caixa d'água, essas peças são cortadas com dois metros de comprimento e postas a meia distância das extremidades A e C da laje. Assim, ABD é um triângulo retângulo de catetos quatro metros e dois metros.

Figura 17 - Problema 17



Dados		
$\sqrt{2} \cong 1{,}41$	$\sqrt{3} \cong 1{,}73$	$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

O comprimento da peça de madeira com extremidades em A e em B é, aproximadamente, de

A) 5 metros. B) 7,05 metros. C) 5,19 metros. D) 4,48 metros.

Nesta atividade, serão distribuídos três problemas distintos entre os discentes, com o intuito de desafiá-los a resolver questões relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Como as atividades têm o foco no SAEB, todas as questões foram apresentadas considerando esse contexto.

Antes da aplicação da atividade, faz-se necessário que o professor realize uma avaliação formativa sobre o tema para verificar se os alunos já estudaram ou lembram do assunto. A ideia é aplicar a atividade para alunos que não sabem ou não lembram do conteúdo propriamente dito. Dessa forma, eles terão a oportunidade de aprender com seus erros, conforme destacado por BOALER (2018).

Seguindo com a distribuição dos problemas e conforme a metodologia deste estudo, o professor deve observar e incentivar os alunos a resolverem os problemas. É importante que os alunos utilizem o que têm disponível, mesmo que não conheçam o conteúdo ou um algoritmo específico para a resolução do problema. O raciocínio lógico pode ser uma ferramenta valiosa para deduzir a resposta do problema em questão, com argumentos válidos e lógicos baseados nas alternativas disponíveis e nos dados apresentados nos problemas. Além disso, a interpretação textual em suas diversas formas, como a análise do texto, da imagem e até mesmo das alternativas, também é fundamental.

Quando todos os grupos chegarem a uma solução, o professor deve projetar o primeiro problema no quadro para que todos possam ver a questão. Dependendo do quantitativo de alunos, teremos equipes diferentes trabalhando no mesmo problema, o que é fundamental para a prática dessa metodologia. Dessa forma, os alunos que estão com o mesmo problema expõem suas soluções no quadro, ocorrendo assim, as etapas da plenária e a busca por consenso da solução desse problema. Após a conclusão do primeiro problema, os grupos que estão com o segundo problema vão à lousa e seguem os passos da plenária e da busca por consenso da solução. O mesmo processo ocorre com o terceiro problema.

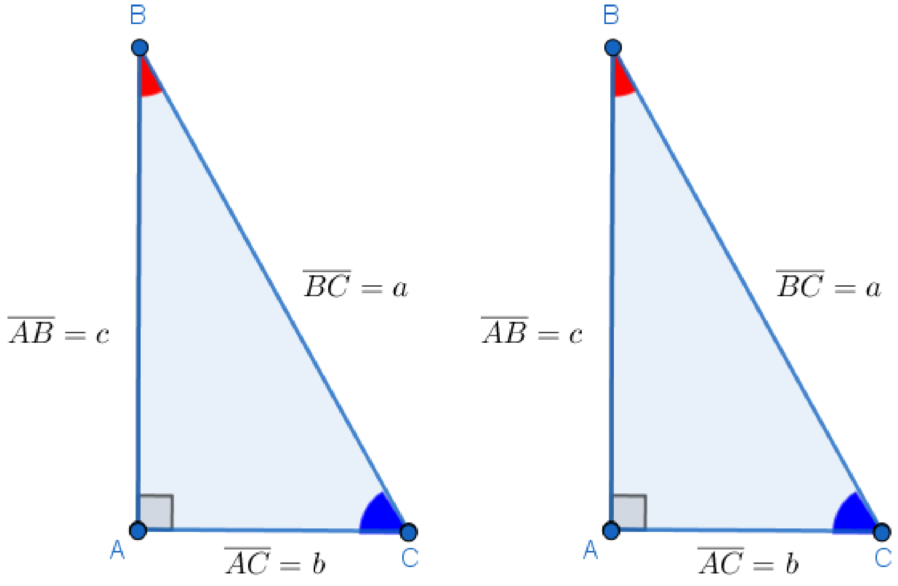
Após a discussão de todos os problemas, ou até mesmo durante a exposição das soluções na lousa, o professor pode fazer referência ao Teorema de Pitágoras, no qual os alunos poderão validar suas respostas com tal teorema. Dessa forma, através de um problema, é possível fazer a construção de um novo conhecimento, iniciando a formalização do conteúdo.

2ª etapa – FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO.

Sugestão de atividade para a formalização:

Sugerimos que o professor, juntamente com sua turma, confeccione dois triângulos retângulos idênticos utilizando papel cartão ou E.V.A. Em seguida, pinte ou identifique de alguma forma os ângulos dos triângulos. Certifique-se de que ambos os triângulos tenham os ângulos dispostos da mesma forma, como exemplificado abaixo.

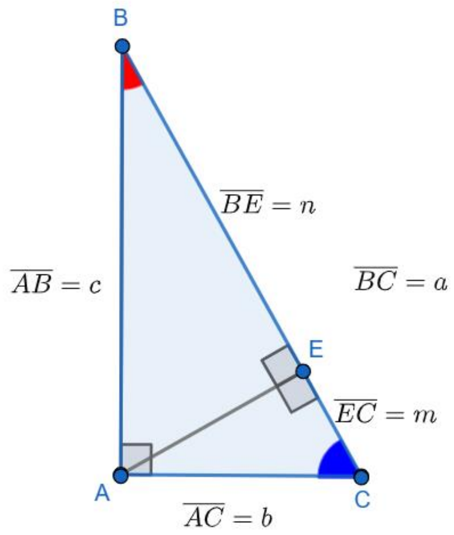
Figura 18 – Relações Métricas no Triângulo retângulo 1



Fonte: Autora.

Assim, dado um triângulo ABC, traçamos um segmento de reta $\overline{AE}$ perpendicular $\overline{BC}$.

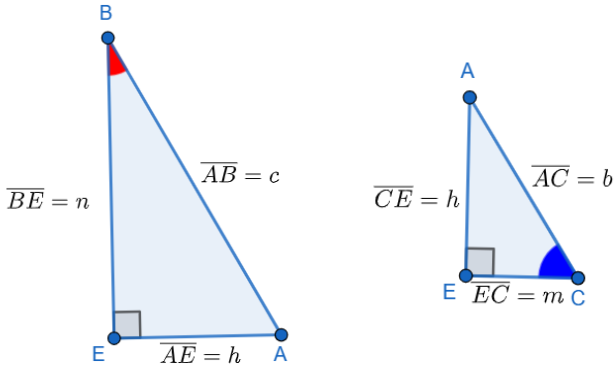
Figura 19 - Relações Métricas no Triângulo retângulo 2



Fonte: Autora.

Separamos os triângulos ACE e ABE, agora temos três triângulos semelhantes, pelo caso AA.

Figura 20 - Relações Métricas no Triângulo retângulo 3



Fonte: Autora.

Agora, com os três triângulos semelhantes em mãos, é válido questionar aos alunos o motivo pelo qual esses triângulos são considerados semelhantes. Essa abordagem visa reforçar o conceito de semelhança de triângulos.

Peça aos alunos, em dupla, que realizem uma atividade investigativa com esses triângulos, buscando identificar as proporções que são possíveis determinar a partir dos triângulos ABC, ABE e ACE.

Depois, que todos conseguem terminar a atividade, desenhe ou projete no quadro os triângulos. Peça para alguns voluntários escreverem na lousa suas respostas. Em seguida, verifique juntamente com os alunos as equações formadas a partir das proporções que são repetidas e descarte.

Assim, teremos as seguintes relações:

$$\frac{c}{b} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Longrightarrow \begin{cases} c.h = b.n \\ c.m = b.h \\ h^2 = m.n \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} = \frac{h}{b} \Longrightarrow \begin{cases} c^2 = a.n \\ c.b = a.h \\ b.n = c.h \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Longrightarrow \begin{cases} a.h = b.c \\ b^2 = a.m \\ c.m = b.h \end{cases}$$

Daí, temos as relações métricas do triângulo retângulo:

$$c.h = b.n \quad (1)$$
$$c.m = b.h \quad (2)$$
$$h^2 = m.n \quad (3)$$
$$c^2 = a.n \quad (4)$$
$$b^2 = a.m \quad (5)$$
$$a.h = b.c \quad (6)$$

Posteriormente, peça aos alunos para analisar as equações obtidas e verificar se estão sentindo falta de algo. Caso ninguém comente, destaque as letras que estão ao quadrado e pergunte qual lado do triângulo ABC ficou faltando estar ao quadrado.

Lembre-os que $m + n = a$ e peça-os que some a equação (4) e (5).

Daí, adicionamos a equação $c^2 = a.n$ (4) e $b^2 = a.m$ (5), obtemos:

$$\begin{cases} c^2 = a.n \\ b^2 = a.m \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a.m + a.n$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a.(m + n)$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a.a$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Assim, demonstraremos as relações métricas no triângulo retângulo, inclusive o teorema de Pitágoras com o auxílio dos alunos.

Para o passo 10, que consiste em resolver ou elaborar problemas sobre o conteúdo, sugerimos que o professor utilize as questões do livro-texto da turma ou solicite aos alunos que elaborem problemas relacionados ao conteúdo que aprenderam.

***

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O raciocínio proporcional é fundamental para compreender o mundo ao nosso redor e para progredir nos estudos de matemática. Esse tipo de raciocínio é a base de diversos tópicos do currículo do ensino fundamental e médio. Ele pode ser observado em diferentes áreas da matemática, tais como:

- Frações - Frações equivalentes são encontradas através de um processo multiplicativo; numeradores e denominadores são multiplicados ou divididos pelo mesmo número. As razões equivalentes podem ser encontradas da mesma maneira. De fato, as relações de parte-todo (frações) são um exemplo de razão. As frações também são um dos principais métodos de representar as razões.
- Álgebra - Muito da álgebra envolve um estudo de mudanças (variações) e, consequentemente, taxas de mudança (razões) são particularmente importantes...A inclinação da reta é a razão unitária. A inclinação ou declive da reta é propriamente uma taxa de mudança e um componente importante na compreensão de representações algébricas de quantidades relacionadas.
- Semelhança: Quando duas figuras têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes (isto é, semelhantes), elas constituem um exemplo visual de uma proporção. As razões das medidas lineares em uma figura serão iguais às razões correspondentes na outra.
- Gráficos de Dados: Um histograma de frequência relativa mostra as frequências de diferentes eventos relacionados comparados a todos os resultados (razões parte-todo visuais). Um gráfico do tipo “caixa e haste” apresenta a distribuição relativa de dados ao longo de uma reta numérica e pode ser usado para comparar distribuições de populações de tamanhos muito diferentes.
- Probabilidade: Uma probabilidade é uma razão que compara o número de resultados em um evento ao total de resultados possíveis. O raciocínio proporcional ajuda os alunos a compreenderem essas razões, especialmente ao comparar amostras de tamanhos grandes e pequenos. (WALLE, 2009, p. 382)

Dada a relevância dessa habilidade, dedicamos as próximas três sequências didáticas, a saber, as sequências didáticas 5, 6 e 7, a essa temática, as quais abordaremos problemas que envolvem proporção direta e inversa proporcional, taxa de variação, escala e contexto geométrico, como perímetro e área.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 5

UNIDADE TEMÁTICA
Álgebra
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
➢ Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais
HABILIDADES SAEB
9A2.1 - Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa devariação.
HABILIDADES BNCC
EF09MA08 - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Revisar os conceitos de razão e proporção. ➢ Desenvolver o pensamento proporcional. ➢ Resolver problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
6 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, problema impresso, lápis, borracha, régua.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1ª ETAPA – PROBLEMA GERADOR.

PROBLEMA 18[8] Dois em cada três alunos que comem na lanchonete bebem um quarto de litro de leite. Se 450 estudantes comem na lanchonete, quantos litros de leite são consumidos?

Nessa atividade, desafiamos os alunos a investigar uma estratégia de solução para a questão sem que o professor forneça uma fórmula pronta. Os alunos terão a missão de desenvolver estratégias para solucionar o problema. É importante destacar que, embora a habilidade do pensamento proporcional seja indicada desde o ensino fundamental I, muitos alunos, mesmo no 9º ano do ensino fundamental II, ainda não desenvolveram essa habilidade de forma satisfatória1. Portanto, é fundamental promover estratégias que estimulem o raciocínio proporcional e a resolução de problemas de maneira mais autônoma e reflexiva.

O professor projeta ou copia o problema no quadro, organiza os alunos em duplas e incentiva-os a mudarem de parceiros. Essa dinâmica permite que os alunos conheçam mais

[8] WALLE, J. A. V. D. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula [livro eletrônico]. Tradução de Paulo Henrique Colonesse. 6. ed. Porto Alegre: Penso, 2009. Disponivel em: <Bookshelf>. (WALLE, 2009, p. 310)

pessoas e tenham a oportunidade de entrar em contato com diferentes percepções na solução de problemas, depois segue com os passos da metodologia.

Nessa atividade, aconselha-se uma dinâmica de resolução de vários problemas envolvendo o pensamento proporcional antes da formalização do conteúdo, uma vez que, como Walle aponta, “o uso prematuro de regras encoraja os estudantes a aplicarem regras sem pensar, e, desse modo, a habilidade de raciocinar proporcionalmente geralmente não se desenvolve”. (WALLE, 2009, p. 384)

A seguir, temos algumas sugestões de problemas. Sugere-se seguir a mesma estratégia da metodologia com cada problema até o 8º Passo: busca do consenso. Por mais trabalhosa e prolongada que possa ser a atividade, é importante que os alunos tenham contato com inúmeros problemas com contextos diferentes para que assim desenvolvam o raciocínio proporcional. WALLE (2009) aponta algumas orientações que podem ajudar os estudantes no processo de desenvolver o raciocínio proporcional. Uma dessas orientações está relacionada ao fato de fornecer, aos estudantes, problemas em uma grande variedade de contextos que envolvam razão e proporção, os quais podem incluir medidas, preços, contextos geométricos e outros elementos visuais, assim como taxas de todos os tipos.

Problema 19[9] (Saresp 2005). O proprietário de uma pequena loja de produtos naturais emprega duas funcionárias, Joana e Carolina. No mês de julho ele decidiu dividir um bônus de R$ 160,00 entre as duas funcionárias, de forma que cada uma receberia um valor inversamente proporcional ao número de faltas naquele mês. Carolina faltou 3 vezes, e Joana faltou 2.
A quantia recebida por Joana como bônus é igual a:

A) R$ 72,00. B) R$ 80,00. C) R$ 96,00. D) R$ 108,00.

Problema 20 (SPAECE). Com um saco de ração, alimento 12 galinhas durante 8 dias. Se aumentar o número de galinhas para 16, quantos dias vai durar um saco dessa ração?

Problema 21 Em uma fazenda chamada “Bom Jardim”, **6 tratores** trabalhando no mesmo ritmo colhem uma quantidade x de soja em **30 horas**. Devido a uma antecipação para a exportação do produto, é necessário colher a soja mais rapidamente. Então, para colher essa mesma quantidade de soja em **20 horas**, quantos desses tratores, trabalhando nesse mesmo ritmo, seriam necessários?

[9]Os problemas 19, 20 e 21 foram retirados do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1m9Qjpk_aRct7M8qhQJNz9Wc9eCt4LGq2/edit

A) 6 dias. B) 7 dias. C) 8 dias. D) 10 dias.

Problema 22[10] Dada uma situação como uma das seguintes, a tarefa é construir uma tabela de razão e usá-la para responder à pergunta.

A) Uma pessoa que pesa 80 quilos na Terra pesará 208 quilos no planeta Júpiter. Quanto uma pessoa que pesa 60 quilos na Terra pesará em Júpiter?

B) Na Universidade local, cinco de cada oito mestrandos vivem em apartamentos. Quantos dos 30 mestrandos em matemática provavelmente vivem em um apartamento?

C) O imposto em uma compra de R$ 20,00 é de R$1,12. Quanto imposto existirá em uma compra de R$ 45,50?

D) Quando na Austrália você pode permutar $4,50 dólares americanos por $6,00 dólares australianos. Quanto $17,50 dólares australianos valem em dólares americanos?

2ª ETAPA – FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO.

Nessa etapa, sugerimos a formalização do conteúdo de grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, sem mencionar escalas, porcentagens e contextos geométricos. Esses temas serão abordados nas próximas sequências didáticas, onde poderemos avaliar a capacidade dos alunos em aplicar o pensamento proporcional em diferentes contextos.

Para o passo 10, que consiste em resolver ou elaborar problemas sobre o conteúdo, sugerimos que o professor trabalhe mais alguns problemas juntamente com os alunos, podendo utilizar os problemas do livro didático da turma. Posteriormente, oriente aos alunos que forme grupos, no máximo 4 alunos, e faça uma pesquisa por problemas que envolvam o pensamento proporcional, diferentes dos vistos anteriormente, para a próxima aula. Na aula seguinte, solicite que os grupos compartilhem no quadro o seu problema e justifiquem a relação do problema com o conteúdo estudado.

***

[10] (WALLE, 2009, p. 290)

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 6

UNIDADE TEMÁTICA
Álgebra
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Escalas
HABILIDADES SAEB
9A2.1 - Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa de variação.
HABILIDADES BNCC
EF09MA08 - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Resolver problemas que envolvam escalas. ➢ Interpretar mapas e plantas com diferentes escalas. ➢ Desenvolver o pensamento proporcional.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
8 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, instruções impressas, papel quadriculado, lápis, borracha, régua, notebook, datashow, lápis de cor.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Propomos a atividade como um recurso visual para motivar a aprendizagem, com o objetivo de permitir que os alunos percebam por si mesmos o que acontece com uma figura ao ampliá-la ou reduzi-la.

Dessa forma, essa atividade será realizada individualmente, onde o professor entrega uma folha de papel quadriculado ou pede para os alunos trazerem uma folha de papel quadriculado, juntamente com lápis, borracha, régua e lápis de cor.

O professor escreve no quadro ou trás impresso as orientações para a construção de um Tangram no papel quadriculado recebido, seguindo os passos das orientações abaixo:

1ª ETAPA – PROBLEMA GERADOR

PARTE 1

PROBLEMA 23 - Construção do Tangram

Primeiramente, lembre-se de considerar sempre que cada segmento de reta que traçamos ou coincide com as linhas do quadriculado ou corta cada quadrícula na sua diagonal.

1.Desenhe um quadrado ABCD, 20 por 20 no papel quadriculado que você recebeu.

2.Trace a diagonal $\overline{AC}$.

3.Marque os pontos médios F e G, respectivamente, em relação aos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$.

4.Trace o segmento de reta $\overline{FG}$

5.Marque o ponto médio H relativo ao segmento $\overline{FG}$.

6.Depois trace os segmentos $\overline{DH}$.

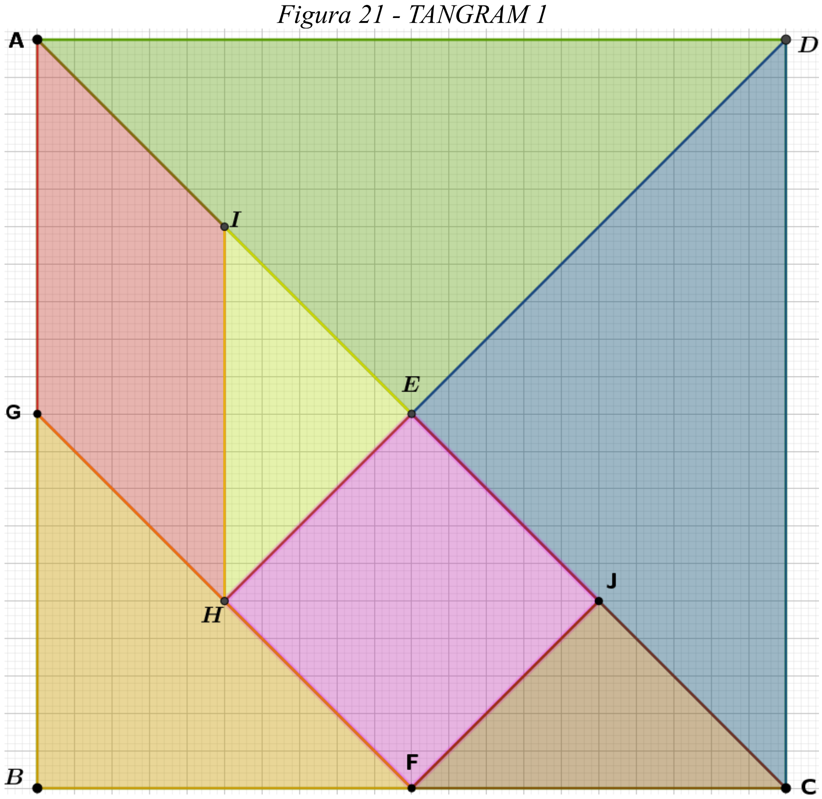
7. Marque o ponto E, no encontro dos segmentos $\overline{DH}$ e $\overline{AC}$

8.Marque os pontos médios I e J, respectivamente, relacionado $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$.

9.Trace os segmentos $\overline{HI}$ e $\overline{FJ}$.

Após o desenho do Tangram pronto, peça aos alunos para pintar cada polígono formado com cores diferentes, de modo que seja possível ver as linhas do papel quadriculado.

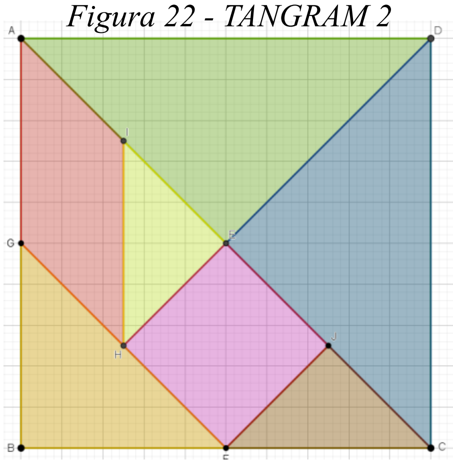
Figura 21 - TANGRAM 1



Fonte: Autora.

Recorte os sete polígonos e monte uma figura com eles, que chamaremos de figura I. Sugestão em anexo ou poderá pedir para os alunos pesquisarem na internet e colar no caderno ou em uma folha A4 a figura. Em seguida, oriente os alunos a fazerem outra figura (figura II), no formato da anterior, porém reduzindo as medidas pela metade.

Figura 22 - TANGRAM 2



Fonte: Autora.

Durante o processo da atividade, é provável que surjam dúvidas entre os alunos. Questões relacionadas ao conceito de ponto médio, segmento de reta e principalmente questões relacionadas aos termos matemáticos podem surgir, pois boa parte dos estudantes não estão familiarizados a linguagem matemáticas. Portanto, é importante abrir espaço para que os alunos compartilhem suas percepções e conclusões com o professor e entre si. Esse momento é fundamental para o aprendizado, pois permite a construção do conhecimento a partir de erros e acertos, com os estudantes ajudando uns aos outros, principalmente usando sua própria linguagem.

Para finalizar, chegamos à fase da reflexão sobre a atividade. Para isso, devemos analisar e estabelecer relações entre a figura inicial e sua redução e/ou ampliação. Perguntas importantes para considerar incluem:

Qual foi a sua maior dificuldade na execução da atividade?

Cite pelo menos duas coisas que você aprendeu durante a atividade.

Que conclusões vocês podem chegar em relação aos lados da figura I (a figura inicial) e da figura II (a figura reduzida pela metade)?

O que aconteceria com os lados da figura se ela fosse reduzisse em $\frac{1}{3}$, ampliada em 50% ou duplicada?

Para isso, reserve um tempo para que os alunos possam discutir essas questões entre si, como em uma roda de conversa juntamente com o professor, ou até mesmo para transcrever suas percepções da atividade em forma de uma pequena redação. Este momento ajudará os alunos a desenvolverem sua capacidade de expressão e comunicação por meio da escrita e da fala, permitindo-lhes a habilidade de comunicar aquilo que aprenderam e observaram, além de apresentar suas próprias conclusões. A reflexão é uma parte valiosa do aprendizado, e por meio das perguntas, você motiva seus alunos a consolidarem os conceitos presentes na execução da atividade.

PARTE 2

Neste momento, o professor pede para os alunos formarem duplas e entrega o problema 1 impresso para cada dupla ou escreve no quadro o problema, e segue com os passos da metodologia até o 8º Passo: busca do consenso.

PROBLEMA 24 Elis vai realizar uma viagem na região norte do Brasil. Conforme é apresentado no mapa a seguir, a distância de Manaus (AM) – Santarém (PA) é de 2 cm aproximadamente. Veja qual é a escala do mapa e descubra a distância fluvial aproximada entre as duas cidades.

Figura 23 - Mapa: escala [11].

Escala 1: 37.000.000

A) 37 Km.

B) 370 Km.

C) 740 Km.

D) 7400 Km

ETAPA 2 – FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O professor deve apresentar formalmente os conceitos relacionados a escalas. Durante essa explanação, ele pode abordar tópicos relacionados às unidades de medida de comprimento e de capacidade. Além disso, o professor pode explorar outros tópicos relevantes conforme julgar necessário e seguir com a resolução de mais problemas relacionados à temática. A seguir sugerimos três problemas [12] que poderão ser utilizado. Devemos lembrar que a proposta das sequências didáticas é trabalhar as habilidades descritas na matriz curricular do SAEB,

[11] Fonte da figura: https://www.transamazonas.com.br/transporte-de-cargas-e-veiculos-em-balsa-santarem-manaus/mapa-rota-balsa-manaus-santarem-transamazonas/

[12] Os problemas 25, 26, e 27 foram retirados do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1IP79yOAnhEuUIR0iH6da-adUFLQkzxeO/edit

conforme a BNCC. O objetivo é ajudar os alunos a verem e/ou reverem os conteúdos que fazem parte dessa temática do SAEB.

PROBLEMA 25 (SAEGO). Após a secagem de um determinado tipo de grão, um produtor verificou que houve uma redução em quilogramas desse grão na razão de 3 para 1. Esse produtor colheu 327 kg desse grão. Mantendo essa proporção, quantos quilogramas esse produtor terá após essa secagem?

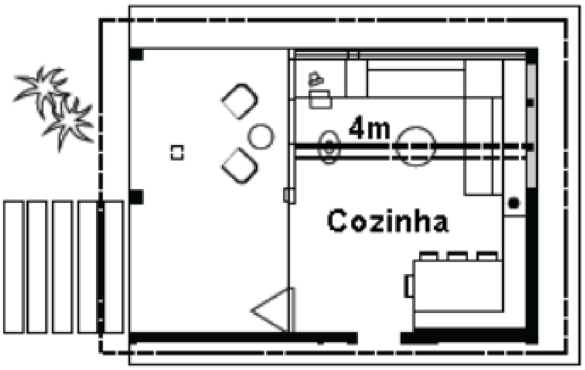
A) 981 kg. B) 327 kg. C) 324 kg. D) 109 kg.

PROBLEMA 26 (Prova Brasil). O desenho de um colégio foi feito na seguinte escala: cada 4 cm equivale a 5 m. A representação ficou com 10 cm de altura. Qual é a altura real, em metros, do colégio?

A) 2,0. B) 12,5. C) 50,0. D) 125,0.

PROBLEMA 27 (Saresp-2010). Eliana desenhou a planta baixa da cozinha de sua casa.

Figura 24 - Planta baixa: escala



Ela usou 4 cm para representar seu comprimento real, que é de 4 m.

A escala que Eliana utilizou foi:

A) 1:5. (B) 1:10. (C) 1:50. (D) 1:100.

***

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 7

UNIDADE TEMÁTICA
GRANDEZAS E MEDIDAS
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Perímetro e área
HABILIDADES SAEB
9M2.2 - Resolver problemas que envolvam perímetro de figuras planas. **9M2.3 -** Resolver problemas que envolvam área de figuras planas.
HABILIDADES BNCC
EF09MA16 - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Resolver problemas que envolvam perímetro e área de figuras planas.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
4 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, instruções impressas, papel quadriculado, lápis, borracha, régua, notebook, datashow, lápis de cor.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ETAPA 1 – PROBLEMA GERADOR

PARTE 1 - Atividade com o Tangram.

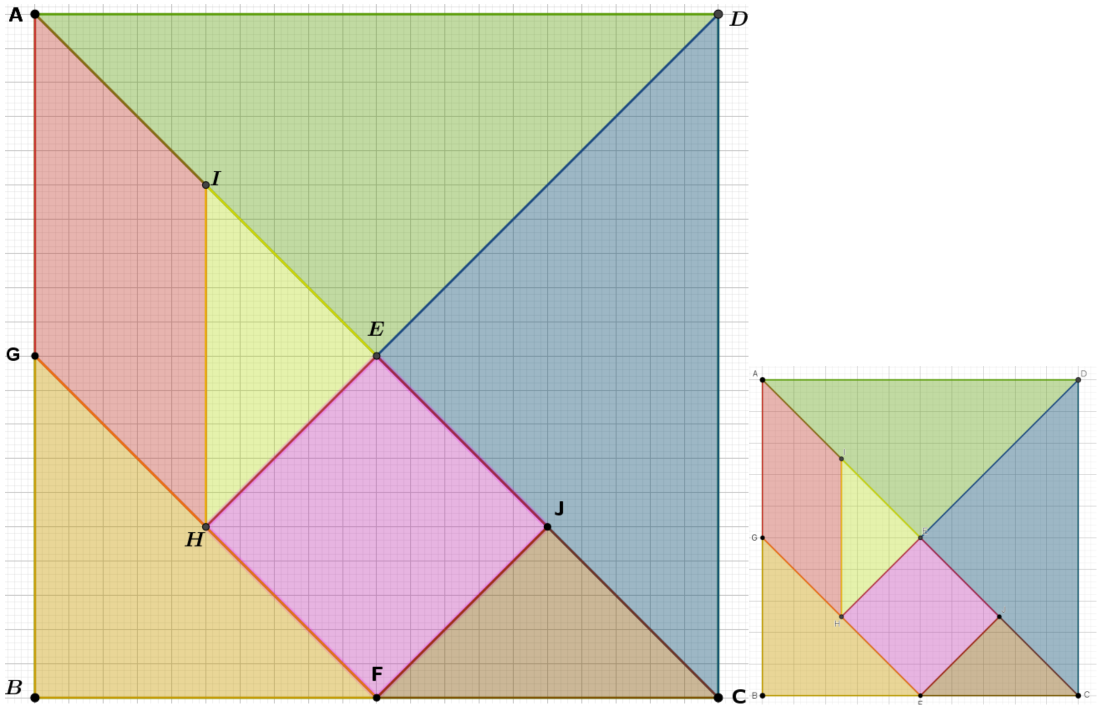
Esta sequência didática é uma continuação da anterior. Vamos utilizar o Tangram construído na atividade anterior para realizar esta atividade. Sendo assim, para enriquecer a atividade, pedimos aos alunos que formem duplas e a partir de suas figuras construídas na sequência didática anterior responda:

PROBLEMA 28 Calcule a área e o perímetro de cada polígono, incluindo paralelogramos, triângulos e quadrados. Em seguida, análise e compare as áreas e os perímetros das figuras correspondentes, buscando identificar padrões de variação.

Espera-se que os alunos observem que, à medida que o lado é reduzido pela metade, o perímetro diminui proporcionalmente, enquanto a área fica dividida pela quarta parte do seu tamanho original. Essa análise permitirá que os alunos explorem conceitos geométricos de maneira prática e visual.

Dessa forma, oriente os alunos a considerar cada lado do quadradinho como sendo "u" unidade e a diagonal dos quadradinhos como "d" unidade. Dessa forma, poderemos contabilizar o perímetro e a área (quantidade de quadradinhos "q") em cada um dos sete polígonos que formam o Tangram.

Figura 25- TANGRAM 3



Fonte: Autora.

A organização dos dados é livre, a seguir temos apenas uma sugestão em forma de tabela

	Figura I (original)	Figura II (reduzida pela metade)
PARALELOGRAMO		
Perímetro	20u + 10d	10u + 5d
Área	50 quadradinhos	12,5 quadradinhos
QUADRADO		
Perímetro	25d	10d
Área	25 quadradinhos	6,25 quadradinhos
TRIÂNGULO GRANDE		
Perímetro	20u + 20d	10u + 10d
Área	100 quadradinhos	25 quadradinhos
TRIÂNGULO MÉDIO		
Perímetro	20u + 10d	10u + 5d
Área	50 quadradinhos	12,5 quadradinhos
TRIÂNGULO PEQUENO		
Perímetro	10u + 10d	5u + 5d
Área	25 quadradinhos	6,25 quadradinhos

PARTE 2

A partir das observações realizadas na atividade acima, os alunos deverão responder os problemas a seguir, individualmente ou em dupla. Depois alguns alunos compartilham suas soluções com a turma mostrando suas estratégias para solucionarem os problemas e buscam o consenso em suas respostas. O professor guia os alunos nos passos da metodologia, sem necessariamente deixar explicito para os alunos tais passos.

Problema 29[13] Um quadrado tem lado de medida 6 cm. Diminuindo 3 cm de cada um dos lados, é correto afirmar:

A) o perímetro do novo quadrado tem 12 cm a mais do que o perímetro do primeiro.

B) o perímetro do novo quadrado é a terça parte do perímetro do primeiro.

C) o perímetro do novo quadrado é a metade do perímetro do primeiro.

D) o perímetro do novo quadrado é a quarta parte do perímetro do primeiro.

Problema 30 (Saresp 2005). O piso de uma varanda é feito com ladrilhos quadrados de dois tamanhos. A medida do lado do ladrilho maior é o dobro da medida do lado do ladrilho menor. Considere as afirmativas.

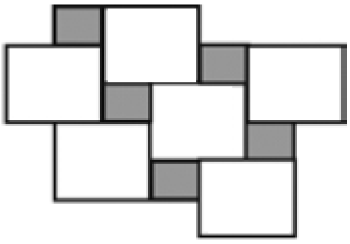
I - O perímetro do ladrilho maior é o dobro do perímetro do ladrilho menor.

II - O perímetro do ladrilho maior é o quádruplo do perímetro do ladrilho menor.

III - A área do ladrilho maior é o dobro da área do ladrilho menor.

IV - A área do ladrilho maior é o triplo da área do ladrilho menor.

Figura 26 - Problema 30



É correta apenas a alternativa:

A) I. B) II. C) III. D) IV

[13]Os problemas 29, 30 e 31 foi retirado do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1IP79yOAnhEuUIR0iH6da-adUFLQkzxeO/edit

Problema 31 (Saresp 2007) Observe as figuras abaixo.

Figura 27 - Problema 31

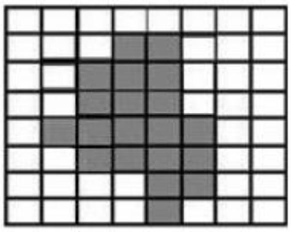


Figura 1

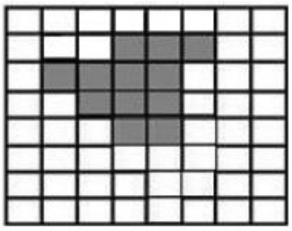


Figura 2

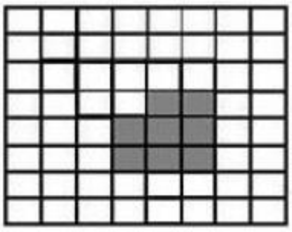


Figura 3

Sabendo que, em todas as figuras, o lado de cada quadrado mede 1 cm, é correto dizer que

A) a área da Figura 2 é igual à metade da área da Figura 1.

B) a área da Figura 1 é o dobro da área da Figura 3.

C) a área da Figura 1 é metade da área da Figura 3.

D) a área da Figura 2 é diferente das áreas das Figuras 1 e 3.

Problema 32[14] (Projeto con(seguir) - DC). Jorge e Fernando compraram terrenos vizinhos em um condomínio. Os dois terrenos são retangulares. O comprimento do terreno do Jorge tem o dobro do comprimento do terreno de Fernando e a largura do terreno de Jorge tem a metade da largura do terreno de Fernando. É possível afirmar com esses dados que:

A) O terreno de Jorge não pode ser quadrado

B) Os terrenos têm áreas iguais

C) O terreno de Jorge tem área maior que o terreno de Fernando.

D) O terreno de Fernando tem área maior que o terreno de Jorge.

ETAPA 2 – FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Estamos agora na etapa de formalização do conteúdo sobre perímetro e áreas. Embora esse seja um tópico que todos deveriam dominar no 9º ano do ensino fundamental, a realidade pós-pandemia é bastante diferente. Além disso, outros fatores, como a localização da escola e

[14] O problema 32 foi retirado do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1FjEzVIiKX4ayC6CGMYtbjob3N3RsSNzs/edit

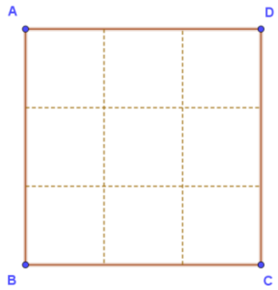
a situação econômica dos alunos, afetam significativamente o processo de aprendizagem. Portanto, nossa realidade difere consideravelmente dos grandes centros do país.

Sugestão de abordagem na formalização do conteúdo área.

Comece fazendo com que os alunos percebam que a área do quadrado ABCD é a região interna delimitada pelos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD}$. Assim, podemos contar os quadrados menores dentro da região, ou seja, 9 quadradinhos. Podemos observar também que é o mesmo que fazer a multiplicação da base pela altura, que no caso do quadrado ambos são de mesma medida, ou seja,

$Área = base \times altura = lado \times lado = \overline{BC}\ x\ \overline{CD} = 3 \times 3 = 3^2 = 9\ quadradinhos.$

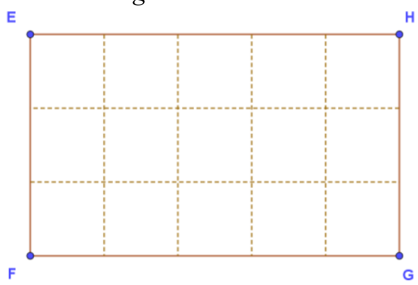
Figura 28 - Área 1



Fonte: Autora.

O mesmo raciocínio podemos observar no retângulo.

Figura 29 - Área 2

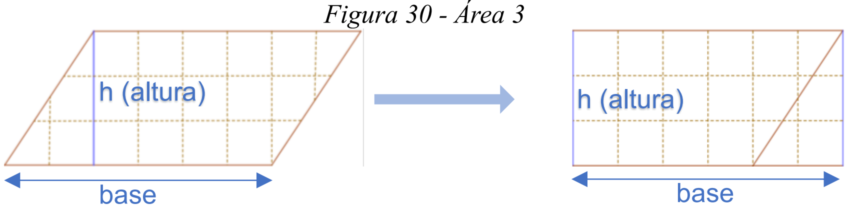


Fonte: Autora.

$$Área = base \times altura = \overline{FG} \times \overline{GH} = 5 \times 3 = 15\ quadradinhos$$

No caso do paralelogramo, podemos observar o seguinte:

Figura 30 - Área 3



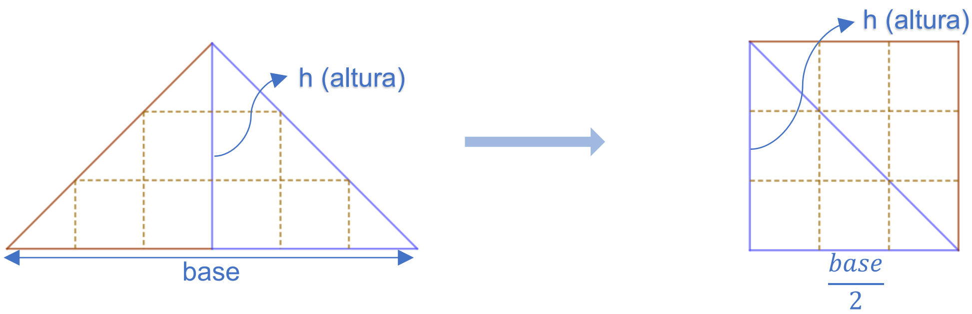
Fonte: Autora.

Dessa forma, podemos usar a mesma ideia do retangulo.

$$Área = base \times altura = 5 \times 3 = 15\ quadradinhos.$$

No caso dos triângulos, podemos notar o seguinte padrão:

Figura 31 - Área 4



Fonte: Autora.

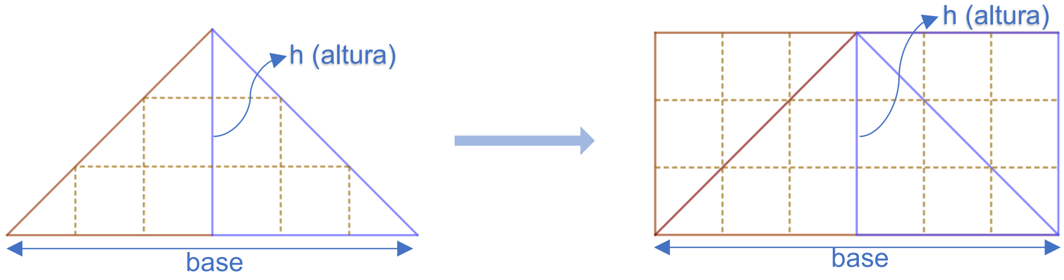
Dividindo o triângulo ao meio, podemos forma um quadrado, assim seguindo o raciocinio da area do quadrado, temos que:

$$Área = \frac{base}{2} \times altura = \frac{base \times altura}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = \frac{18}{2} = 9\ quadradinhos$$

Note que neste caso, a base do quadrado é a metade da base do triângulo original. Essa ideia serve para os triângulos isósceles e equiláteros.

Por outro lado, se o triangulo for escaleno, podemos pensar em duplicar o triângulo, assim formamos um retângulo. Dessa maneira, podemos seguir calculando a área do retângulo, porém como queremos a área do triângulo que está duplicado no retângulo, basta dividir por dois.

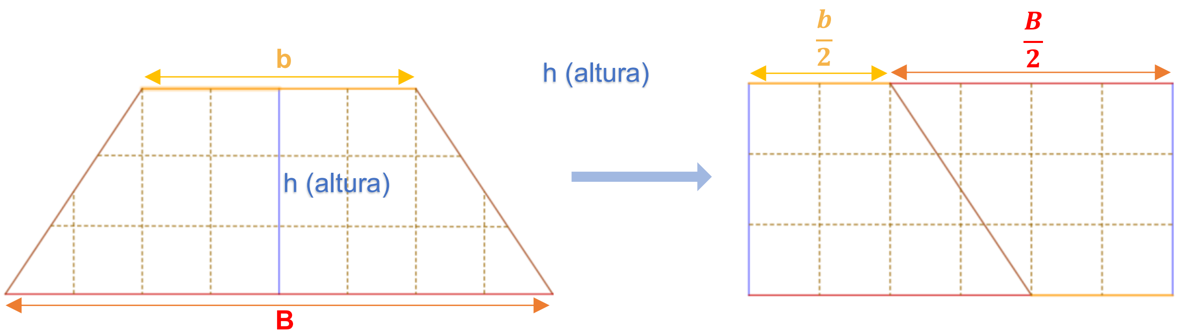
Figura 32 - Área 5



Fonte: Autora.

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12\ quadradinhos$$

Figura 33 - Área 6



Fonte: Autora.

$$Área = base\ \times altura = \left(\frac{B}{2} + \frac{b}{2}\right) \times h = \frac{(B+b)}{2} \times h =$$

$$= \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(8+4) \times 3}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = \frac{36}{2} = 24\ quadradinhos$$

Assim, tudo resulta da ideia do cálculo da área de um retângulo (base x altura). Não precisamos decorar fórmulas, mas sim enxergar padrões. Dessa forma, os alunos podem calcular a área de qualquer figura subdividindo polígonos cujas áreas são desconhecidas em polígonos cuja área são conhecidas por eles, como o exemplo do triangulo e do retângulo.

Depois da formalização do conteúdo de perímetro e área o professor segue com a resolução de mais problemas. Podendo pedir para os alunos criarem problemas sobre a temática.

***

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 8

UNIDADE TEMÁTICA
Álgebra
PUBLICO-ALVO
9º ANO 1
OBJETO DE CONHECIMENTO
Valor numérico de expressões algébricas e Função afim
HABILIDADES SAEB
9A2.2 - Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas. **9A2.5 -** Resolver problemas que envolvam função afim
HABILIDADES BNCC
EF09MA06 - Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
➢ Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas. ➢ Resolver problemas que envolvam função afim.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
4 aulas de aproximadamente 60 minutos cada
RECURSOS E/OU MATERIAL NECESSÁRIO
Quadro, pincel, problema impresso, calculadora, lápis, borracha, régua.
DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1ª ETAPA – PROBLEMAS GERADORES[15]

Problema 33 Para descobrir o número de sapato de qualquer pessoa, você pode usar a fórmula

$$N = \frac{5p+28}{4},$$

onde N é o número do sapato e p o comprimento do pé em centímetros. Se você não sabe o comprimento do pé de alguém, pode medir com a ajuda de uma fita métrica ou uma régua. Meça do topo do dedão do pé até o calcanhar, depois insira o valor de p na fórmula acima.
Agora, vamos à ação! Escolha uma pessoa cujo número de sapato você não saiba. Com a ajuda de uma régua ou fita métrica, meça o pé dessa pessoa conforme indicado acima. Usando a fórmula, descubra o número do sapato da pessoa escolhida. Mãos à obra, e surpreenda a pessoa!

Primeiramente, o professor entrega a atividade impressa para os alunos, na qual eles deverão ler individualmente. Após a leitura, o professor esclarece algumas dúvidas relacionadas à interpretação textual, como por exemplo: o que os caracteres "N" e "p" representam? Qual é o procedimento correto para medir o pé? De que tipo de material os alunos precisarão para

[15] O problema 33 e 34 foram retirados do blog do Prof. Warles. O conteúdo está disponível em: https://docs.google.com/document/d/1K3PO34y3Ea0Ve_UrTjH7k4dvKwYvJJ2j/edit

realizar a atividade? Qual a proposta da atividade? Essas perguntas fornecerão ao professor um *"feedback"* sobre a compreensão dos alunos em relação ao problema.

Eles podem realizar a atividade em grupo e fora da sala de aula, como por exemplo: medir o pé de outros professores, colegas ou funcionários da escola. Depois, quando estiverem com os dados em mãos, deverão compartilhar seus resultados em sala com o professor. Esse será um momento para discussões sobre os procedimentos matemáticos, verificação de erros e acertos, chegando a um consenso. O professor deve aproveitar para salientar os cuidados que devemos ter ao utilizar a calculadora. Para finalizar, peça que faça a atividade com algum familiar ou amigos em casa, como tarefa para casa e faça a verificação da realização da atividade na próxima aula.

Em seguida, o professor pergunta à turma se fosse fornecido o número do sapato, como por exemplo, o número 33 ou 36, o que deveria ser feito, e sugere que os alunos reflitam sobre qual procedimento devem tomar. Ao notar que boa parte da turma se empenhou na atividade solicitada, pede que alguns alunos compartilhem suas resoluções. Após este momento, seguem com a plenária em busca de um consenso do resultado. Depois, o professor propõe o segundo problema e segue com os passos da metodologia.

PROBLEMA 34 (Adaptada) A Copa do Mundo ou Campeonato do Mundo de Futebol é um torneio masculino realizado a cada quatro anos pela Federação Internacional de Futebol (FIFA). A primeira edição aconteceu em 1930, no Uruguai, e, nos anos de 1942 e 1946, a Copa não ocorreu devido à Segunda Guerra Mundial. As edições voltaram a ocorrer a partir de 1950. A expressão algébrica que representa a regularidade das realizações das Copas do Mundo pós-guerra é

$$a = 1950 + 4(n - 1),$$

sendo a o ano de realização e n o número da edição.

A) Qual o ano que corresponde à realização da 18ª Copa do Mundo pós-guerra?

B) Qual a edição da copa do mundo será realizada 2026?

O professor deve apresentar formalmente os conceitos relacionados a função afim e o valor numérico de expressões algébricas. Além desses conteúdos, durante essa explanação, ele pode abordar tópicos relacionados às operações de polinômios, revisão da equação do 1ºgrau, plano cartesiano, entre outros tópicos relevantes conforme julgar necessário e seguir com a resolução de mais problemas relacionados à temática.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, será apresentada uma descrição da aplicação das sequências didáticas realizadas no estudo em sala de aula, bem como as reflexões resultantes da observação e análise das respostas e da recepção dos alunos diante da proposta metodológica de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas matemáticos como estratégia de ensino no nono ano do ensino fundamental.

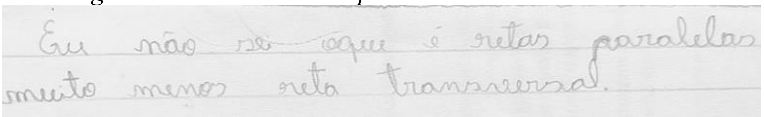
A pesquisadora, que também é professora da escola participante do estudo, vivenciou as dificuldades enfrentadas por muitos alunos durante o período da pandemia da COVID-19. Ela acompanhou de perto as aulas ministradas remotamente e a situação da aprendizagem dos alunos quando as aulas presenciais foram retomadas. As principais dificuldades constatadas nesse período pandêmico estão relacionadas ao acesso à internet e aos aparelhos celulares disponíveis. Além disso, muitos alunos tiveram dificuldade em se adaptar ao ensino a distância e enfrentaram dificuldades para entender os assuntos ministrados nas aulas disponibilizadas na TV pela SEDUC/AM, algo que já era esperado, dado que a disciplina de matemática pode ser desafiadora para muitos estudantes. Além disso, alguns pais não tinham conhecimento da disciplina de Matemática ou não conseguiam entrar em contato com os professores devido à falta de recursos. Essas dificuldades foram especialmente evidentes em Escolas situadas em regiões periféricas, em que a realidade das famílias em relação ao acesso à rede sem fio de internet (Wi-Fi) e aos aparelhos tecnológicos (celulares, tablets, notebooks) é bastante distinta daquelas pertencentes a famílias com mais recursos financeiros. Reconhecendo que ainda estamos empenhados na recuperação do aprendizado desses estudantes, a pesquisadora decidiu implementar a metodologia integrante dessa pesquisa na escola, com o objetivo de auxiliar os alunos em seu processo de aprendizagem. Embora alguns dos conteúdos abordados por meio dessa metodologia possam ser provenientes de séries anteriores, a avaliação formativa revelou que muitos alunos não dominavam tais conceitos.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

No problema 1, os alunos apresentaram muita dificuldade na execução das atividades, poucos alunos sabiam o que eram retas paralelas (

Figura 34). Alguns não sabiam sequer o que eram ângulos, tão pouco o que eram ângulos congruentes, suplementares, opostos pelo vértice e adjacentes.

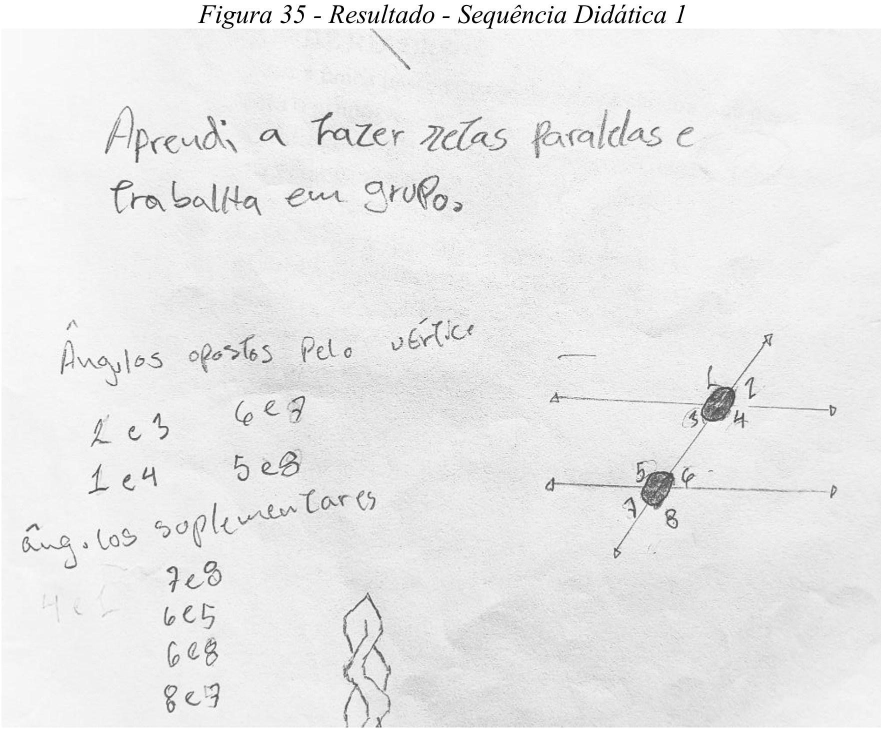
Figura 34 - Resultado - Sequência Didática 1- Problema 1



Fonte: Autora.

Quando se reuniram em grupos para responder a atividade, com o auxílio da professora e do transferidor, podemos observar um novo cenário, como mostra a Figura 35.

Figura 35 - Resultado - Sequência Didática 1



Fonte: Autora.

Na execução da atividade de construção de retas paralelas com uma transversal com o auxílio de palitos de picolé, os alunos não conseguiram um resultado satisfatório, uma vez que os palitos não foram dispostos de forma realmente paralelos um ao outro (

Figura 36). Porém, apesar do "insucesso" na construção das retas paralelas com a transversal, foi perceptivo a construção dos conhecimentos com essa atividade, ficando gravado na mente dos alunos o porquê de os palitos não estarem paralelos. Sendo assim, contribuiu para o aprendizado dos discentes, pois conforme Boaler afirma: "... o cérebro dispara e cresce quando cometemos um erro, mesmo que não estejamos conscientes disso, porque é um momento de dificuldade; o cérebro é desafiado, e nesse momento ele cresce." *(BOALER, 2018, p. 18)*

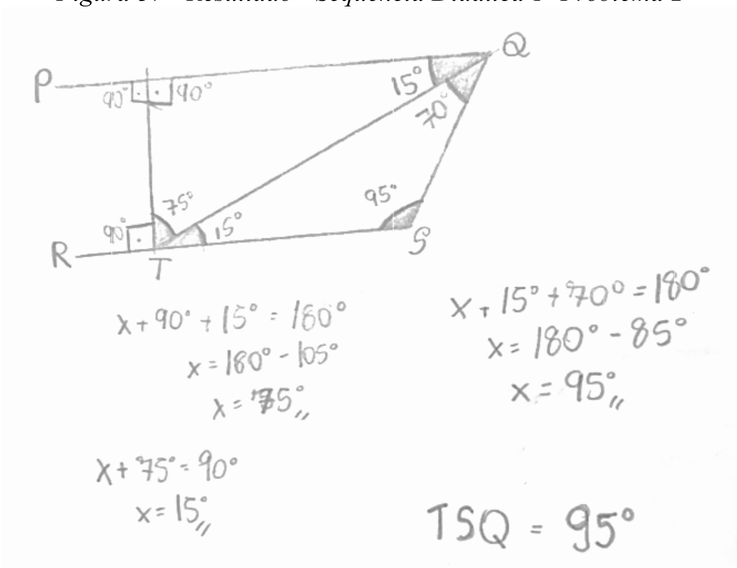
Figura 36 - Resultado - Sequência Didática 1 - Palitos

Fonte: Própria

Nos problemas seguintes, destacaram-se algumas resoluções com diferentes perspectivas dos alunos frente aos desafios de resolvê-los.

Na resolução da Figura 37, o aluno demonstra compreender a relação entre ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Esse entendimento decorre do conhecimento prévio que, de maneira subconsciente, o levou a fazer essa conexão, facilitando a inferência desses conceitos por parte dos demais alunos ao serem apresentados na lousa.

Figura 37 - Resultado - Sequência Didática 1- Problema 2

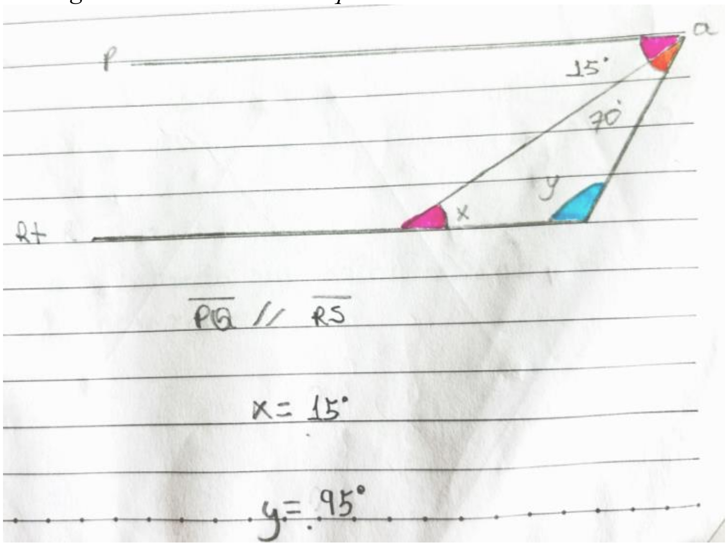


Fonte: Autora.

Por outro lado, na resolução da

Figura 38, o aluno estabelece uma relação com o assunto abordado na aula e a soma dos ângulos internos de um triângulo, consolidando assim o conhecimento adquirido durante ela.

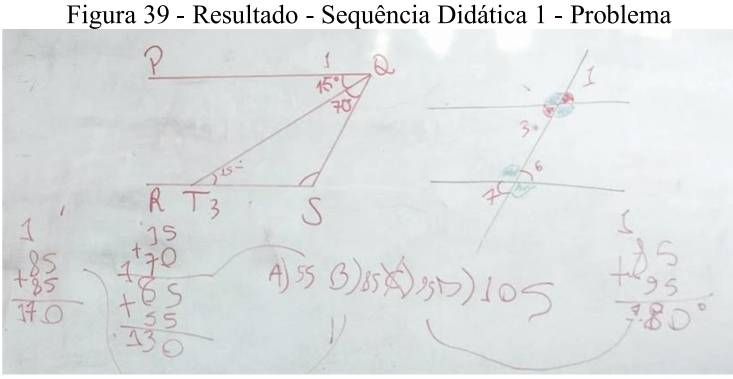
Figura 38 - Resultado - Sequência Didática 1 - Problema 2



Fonte: Autora.

Na Figura 39, o aluno, além de estabelecer uma relação com o assunto abordado na aula, utiliza as alternativas de resposta disponíveis no problema.

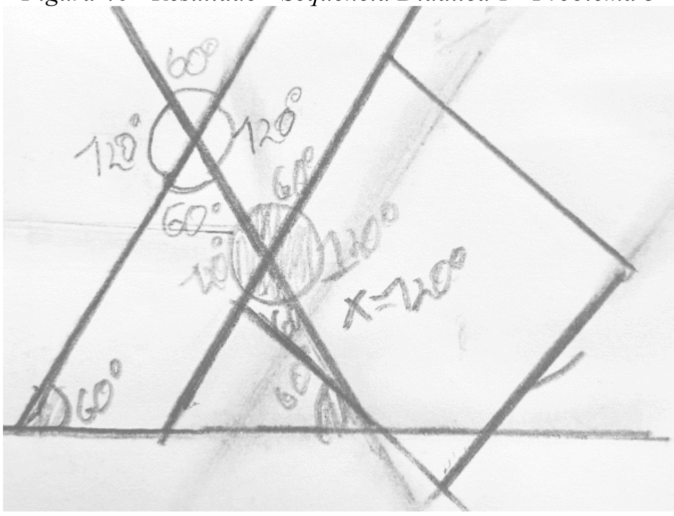
Figura 39 - Resultado - Sequência Didática 1 - Problema



Fonte: Autora.

Na resolução do problema 3, foi possível revisar as medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero. Inicialmente, os alunos encontraram dificuldades em relacionar conhecimentos prévios para resolver a questão, pois não conseguiam identificar a reta paralela. No entanto, após a extensão do lado $\overline{DG}$ do quadrado, a compreensão foi facilitada, como ilustra a Figura 40.

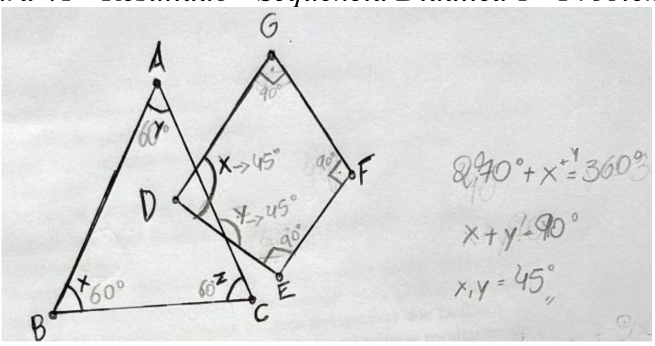
Figura 40 - Resultado - Sequência Didática 1 - Problema 3



Fonte: Autora.

Alguns alunos, mesmo de forma equivocada, ao tentar resolver a questão, relacionaram-na com a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, como evidenciado na Figura 41.

Figura 41 - Resultado - Sequência Didática 1 - Problema 3

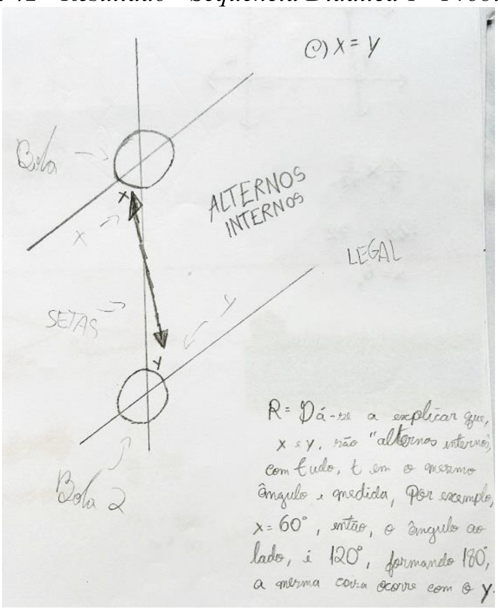


Fonte: Própria

De imediato, os alunos não conseguiam identificar uma ligação entre o problema e algum conhecimento prévio que possuíam. No entanto, ao serem estimulados a refletir e analisar mais atentamente suas opções de resposta, levando em consideração as informações fornecidas no enunciado, eles chegaram à conclusão ilustrada na

Figura 42.

Figura 42 - Resultado - Sequência Didática 1 - Problema 4



Fonte: Autora.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

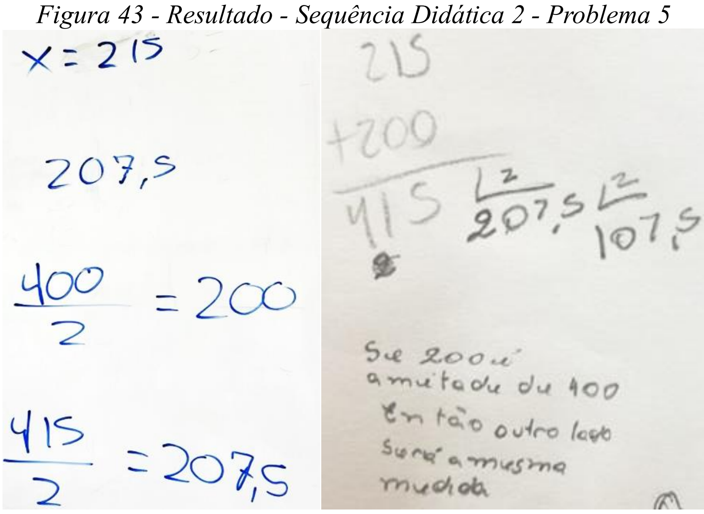
No problema 5, alguns alunos, inicialmente sem prestar muita atenção, afirmaram que a resposta era 200, presumindo que ambos os segmentos eram do mesmo tamanho. Outros grupos chegaram à conclusão de que a resposta era 215, argumentando que, de um lado, havia 400 e, do outro, 415, levando-os a pensar que a diferença era de 15 unidades. No entanto, eles não conseguiram encontrar uma explicação matemática clara para essa afirmação.

A professora, percebendo a confusão, pediu que eles observassem o problema com mais atenção, refletindo sobre os dados apresentados no desenho. Assim, os alunos releram o problema, tanto individualmente quanto em grupo, com mais calma e concentração, buscando compreender as informações e refletindo sobre as ideias que surgiram. Eles começaram a registrar as suas concepções no papel, algo que até então faziam apenas verbalmente, e compartilharam-nas com a equipe, que teve dificuldades para compreender e aceitar os diversos raciocínios apresentados.

Os alunos começaram a girar a folha com o desenho e perceberam que as linhas não eram retas; estavam “tortas”. Alguns sugeriram que a diferença era de 200 unidades a mais, mas depois surgiu a ideia de considerar metade e dobro. Assim, chegaram ao resultado de 207,5.

Após a maioria já ter registrado suas estratégias no papel, a professora pediu que cada um apresentasse suas ideias para a turma. Alguns alunos estavam tímidos e, em vez de expor suas ideias, preferiram escrevê-las na lousa e pedir para que a professora explicasse o raciocínio. A seguir, foram apresentados exemplos de algumas soluções para esse problema.

Figura 43 - Resultado - Sequência Didática 2 - Problema 5



Fonte: Autora.

A Figura 44 mostra a perspectiva de um aluno para resolver o problema 4, considerando x como a distância entre Marcos e Débora:

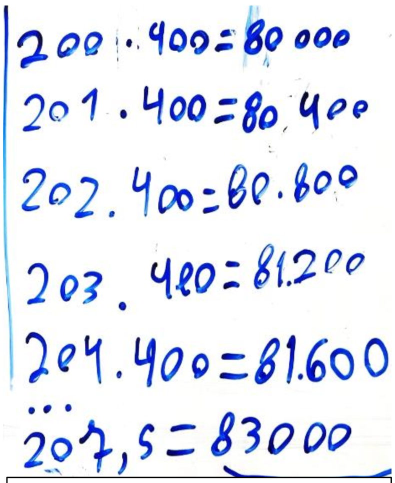
$$\frac{200}{400} = \frac{x}{415}$$

$$200.415 = 400.x$$

$$83000 = 400.x$$

Seguindo esse raciocínio, o aluno investigou um número que, multiplicado por 400, resultaria em 83.000.

Figura 44 - Resultado - Sequência Didática 2 - Problema 5

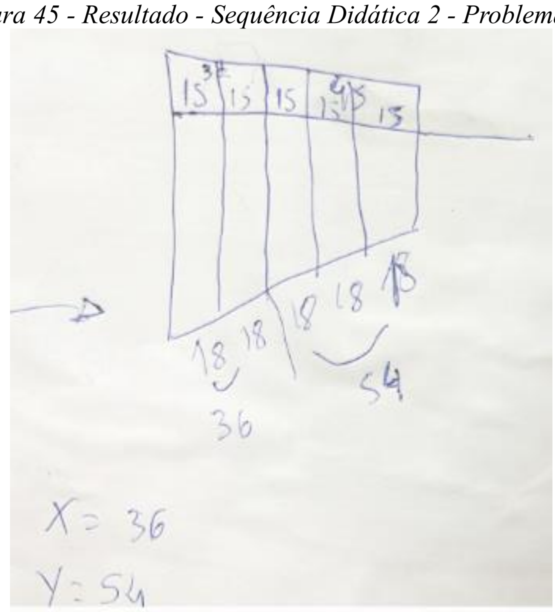


$$207{,}5 \,.\, 400 \;=\; 83000$$

Fonte: Autora

No problema 6, dentre as estratégias desenvolvidas, uma se destacou pela abordagem utilizada na resolução do problema, em que o aluno que propôs a solução peculiar reconheceu um padrão e dividiu os terrenos em 5 partes iguais. Cada parte correspondente à “rua” equivalia a 15 metros. Dessa forma, a seção do terreno voltada para a “avenida” também foi dividida em partes iguais de 5 metros. Considerando que o total dos terrenos corresponde a 90 metros, conclui-se que cada parte tem 18 metros. Logo, $x = 18 + 18 = 36\, metros$; $y = \; 18 + 18 + 18 = 54\, metros$. Conforme a Figura 45.

Figura 45 - Resultado - Sequência Didática 2 - Problema 6



Fonte: Autora.

Sequência Didática 3

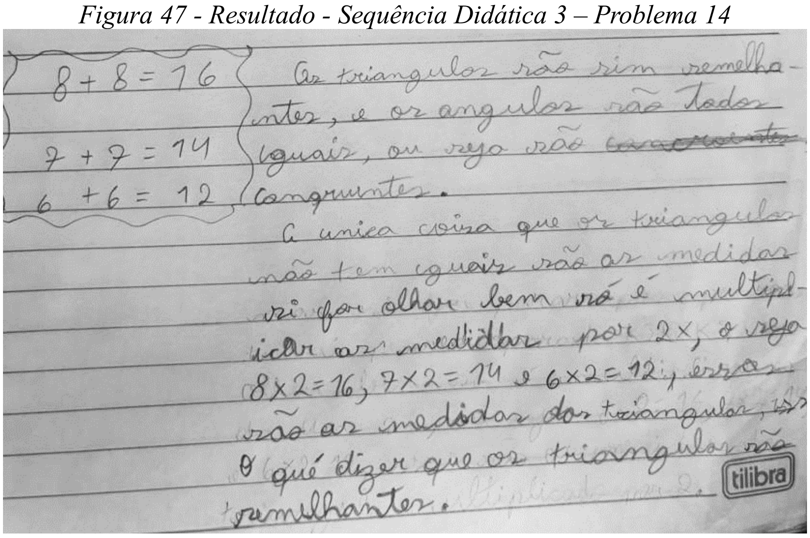
Nesta atividade, lidamos com 8 problemas distintos, e cada equipe foi encarregada de resolver apenas um deles. A dinâmica da atividade consistia em permitir que, após a resolução de cada problema por uma equipe, os membros compartilhassem suas soluções com os alunos das outras equipes. Ao final da atividade, cada aluno deveria ter todos os oito problemas resolvidos. Essa abordagem promoveu uma colaboração intensa entre as equipes, com todos os alunos se auxiliando mutuamente na compreensão dos problemas. Como resultado, a aula foi muito dinâmica, permitindo que os alunos se movimentassem pelas salas e interagissem uns com os outros, em contraste com a tradicional posição sentados na cadeira.

Figura 46 - Resultado - Sequência Didática 3

Fonte: Autora.

Outro aspecto relevante a ser destacado sobre os resultados obtidos nessa atividade foi o fato de os alunos terem iniciado a prática de escrever suas próprias explicações, algo que não era comum e enfrentaram alguma resistência no início. No entanto, já é possível observar que alguns alunos estão começando a se familiarizar com essa prática, como indicam as figuras abaixo.

Figura 47 - Resultado - Sequência Didática 3 – Problema 14



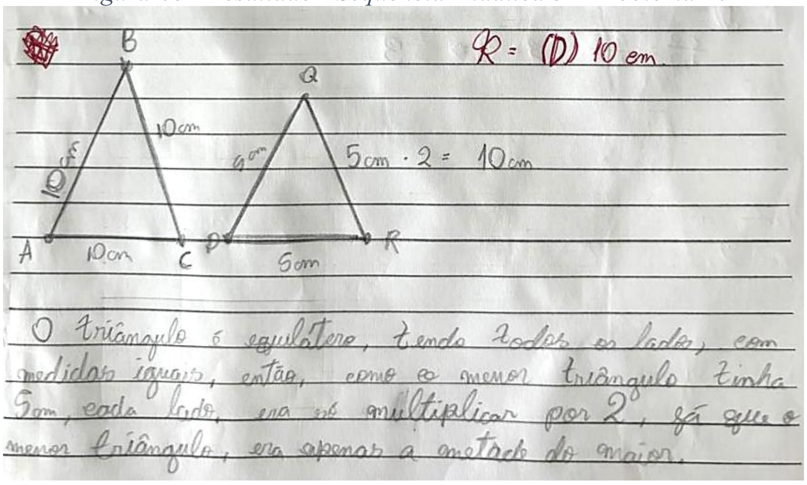
8 + 8 = 16
7 + 7 = 14
6 + 6 = 12

Os triangulos são sim semelhantes, e os angulos são todos iguais, ou seja são ~~congruentes~~ congruentes.

A unica coisa que os triangulos não tem iguais são as medidas se for olhar bem só é multiplicar as medidas por 2x, ou seja 8x2=16; 7x2=14 e 6x2=12; essas são as medidas dos triangulos, isso quer dizer que os triangulos são semelhantes.

Fonte: Autora.

Figura 48 - Resultado - Sequência Didática 3 – Problema 10

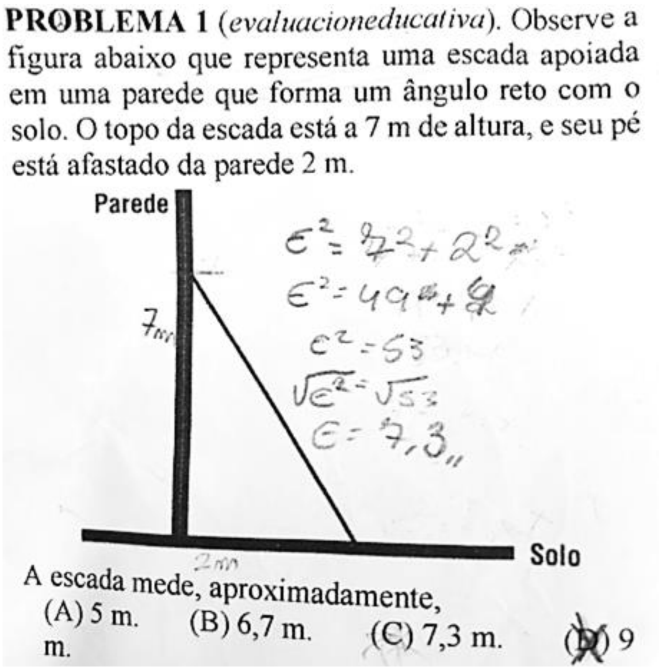


Fonte: Autora.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 4

Neste problema 15, alguns alunos cometeram um equívoco ao pensar que a escada tinha 7 metros de comprimento, quando na verdade o problema mencionava que o topo da escada estava a 7 metros de altura. Outros simplesmente somaram os 7 metros com os 2 metros do outro lado, chegando, assim, à alternativa (D) que correspondia a 9 metros. Levando-os a não ter sucesso na resolução desta questão, foi necessário intervir e mencionar o teorema de Pitágoras. Mesmo que de forma breve, essa referência permitiria que utilizassem o teorema na resolução. Após essa intervenção, o conteúdo seria abordado de maneira sistemática.

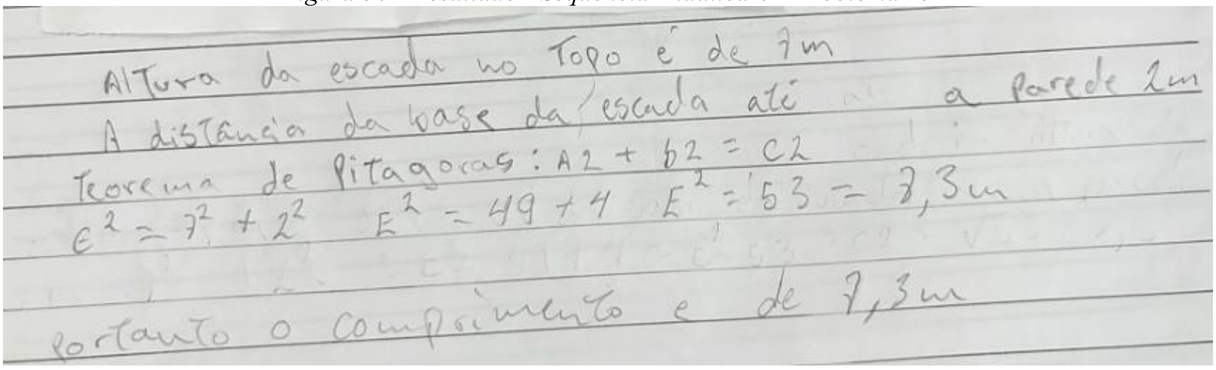
Figura 49 - Resultado - Sequência Didática 4 – Problema 15


PROBLEMA 1 (*evaluacioneducativa*). Observe a figura abaixo que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.

A escada mede, aproximadamente,
(A) 5 m. (B) 6,7 m. (C) 7,3 m. (D) 9 m.

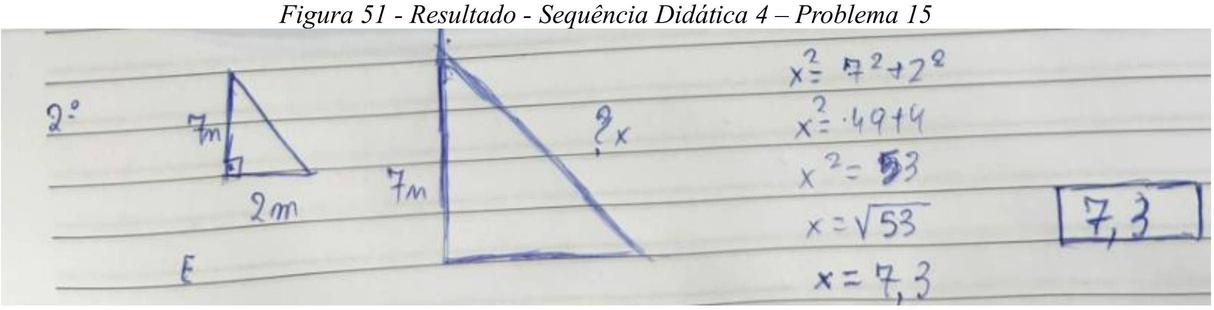
Fonte: Autora.

Figura 50 - Resultado - Sequência Didática 4 – Problema 15



Fonte: Autora.

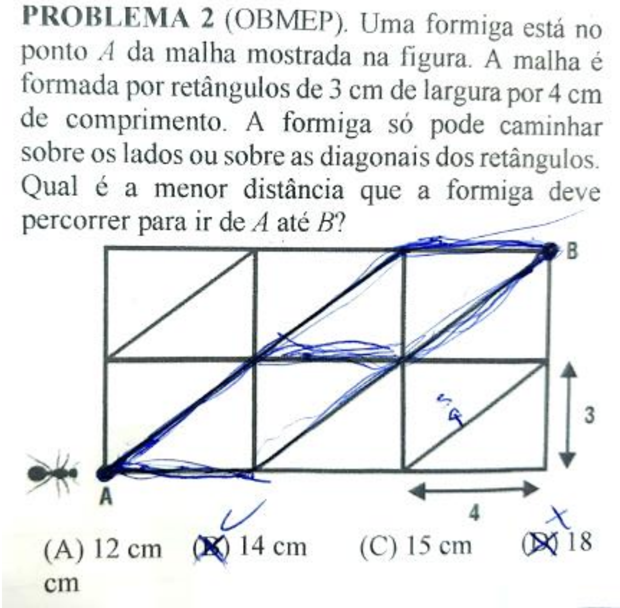
Figura 51 - Resultado - Sequência Didática 4 – Problema 15



Fonte: Autora.

Este problema 16, ilustrado na Figura 52, demonstra que, inicialmente, os alunos chegaram ao resultado de 18 considerando que a formiga se movia de A para a direita 3 vezes e subia 2 vezes, resultando em 4+4+4+3+3=18. No entanto, eles não perceberam que o problema solicitava a menor distância. Após serem questionados sobre essa perspectiva, revisaram suas respostas e entraram em consenso, obtendo um novo resultado: 14. Ao considerar a movimentação da formiga de A para a direita 1 vez e subindo 2 vezes pela diagonal, eles concluíram que a diagonal tinha o valor de 5.

Figura 52 - Resultado - Sequência Didática 4 - Problema 16



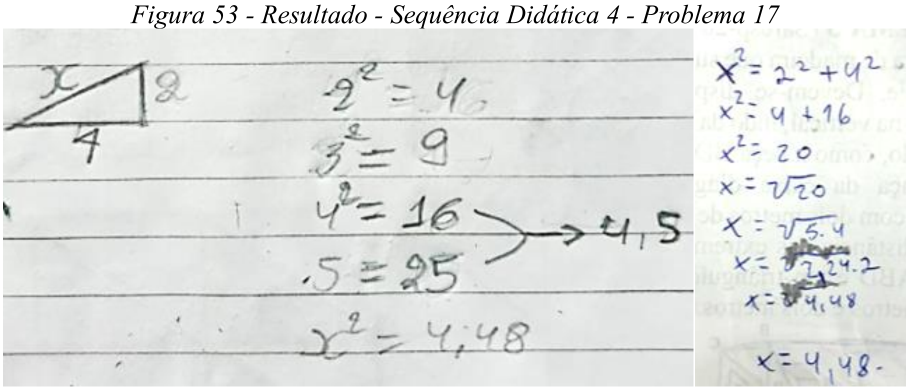
PROBLEMA 2 (OBMEP). Uma formiga está no ponto A da malha mostrada na figura. A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de A até B?

(A) 12 cm (B) 14 cm (C) 15 cm (D) 18 cm

Fonte: Autora.

No problema 17, alguns alunos analisaram a partir da perspectiva de observação, fazendo a análise da projeção do $\overline{AB}$ em $\overline{AD}$, sendo assim, nessa comparação $\overline{AB}$ deveria ser um pouco maior que $\overline{AD}$. Como entre as alternativas havia a opção 4,48, essa foi a resposta escolhida pelo aluno, fazendo assim, uso do que tinha disponível para chegar a uma conclusão. Após a intervenção sobre o teorema de Pitágoras, os alunos apresentaram perspectivas diferentes para resolver o problema, conforme ilustrado na Figura 53.

Figura 53 - Resultado - Sequência Didática 4 - Problema 17



Fonte: Autora.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 5

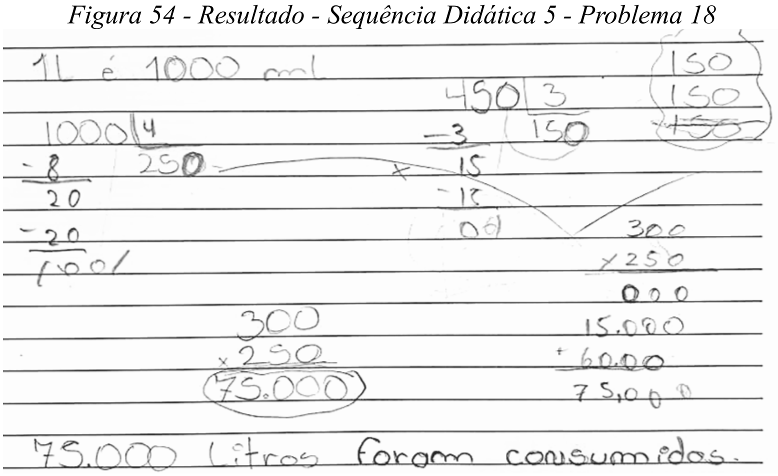
No problema 18, os alunos enfrentaram alguns desafios na interpretação do enunciado, especialmente para estabelecer a conexão entre a expressão " Dois em cada três alunos que comem na lanchonete bebem um quarto de litro de leite". Após discutir essas dúvidas com a professora, eles conseguiram esclarecer os pontos confusos e avançar na busca pela solução do problema. Nas figuras a seguir, serão apresentadas algumas das estratégias de resolução que utilizaram, além dos equívocos que surgiram durante o processo.

A estratégias ilustrada na

Figura *56*, mostra que os alunos concluíram que, juntos, consumiam 250 ml de leite, o que significa que cada um deles consumia 125 ml de leite. Por outro lado, conforme ilustrado nas Figura 54 e Figura 55, os alunos perceberam que cada um bebia 250 ml de leite.

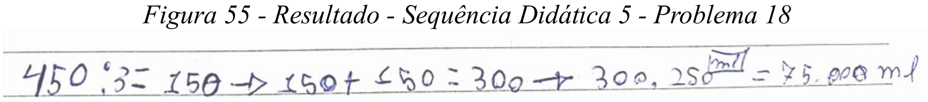
Além disso, o aluno responsável pela estratégia da Figura 54 equivocou-se ao não considerar a unidade de medida correta, confundindo mililitros com litros.

Figura 54 - Resultado - Sequência Didática 5 - Problema 18



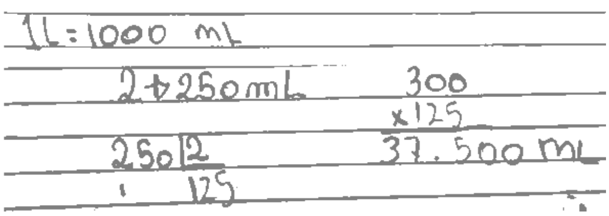
Fonte: Autora.

Figura 55 - Resultado - Sequência Didática 5 - Problema 18



Fonte: Autora.

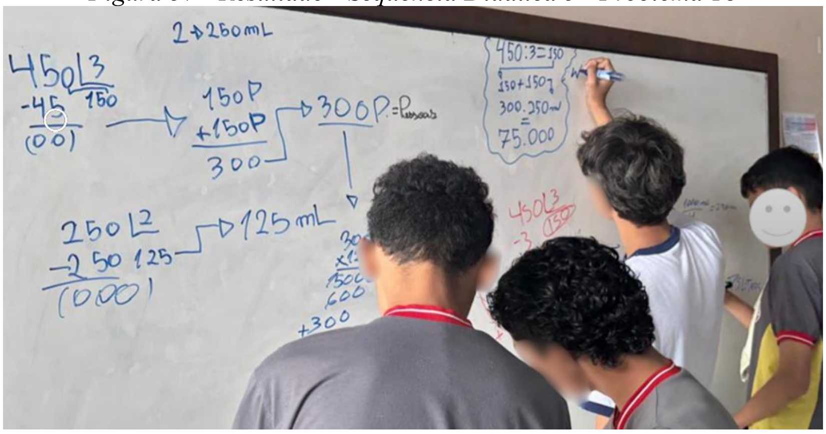
Figura 56 - Resultado - Sequência Didática 5 - Problema 18



Fonte: Autora.

Na Figura 57, temos o momento de compartilhar com os demais na lousa. Esta etapa da atividade é bem dinâmica e prazerosa, onde os alunos conversam e discutem sobre as estratégias que não entendem e tentam convencer uns aos outros de suas perspectivas. Tornando-se um momento que promove a colaboração e fortalece o aprendizado.

Figura 57 - Resultado - Sequência Didática 5 - Problema 18



Fonte: Própria

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 6

Nesta atividade, problema 23, ilustrado na

Figura 58, os alunos executaram a tarefa de construir o Tangram seguindo alguns passos, o que nos proporcionou a oportunidade de esclarecer, relembrar e fixar conceitos como segmentos de reta e sua nomenclatura, identificar o ponto médio entre dois pontos e compreender como chegar a esse resultado, identificar as diagonais e até discutir o significado de palavras que não eram comuns no vocabulário dos alunos. Isso evidenciou a falta de familiaridade com termos específicos da linguagem matemática, caracterizando assim um dos pontos de maior dificuldade na execução da atividade.

Figura 58 - Resultado - Sequência Didática 6 - Problema 23

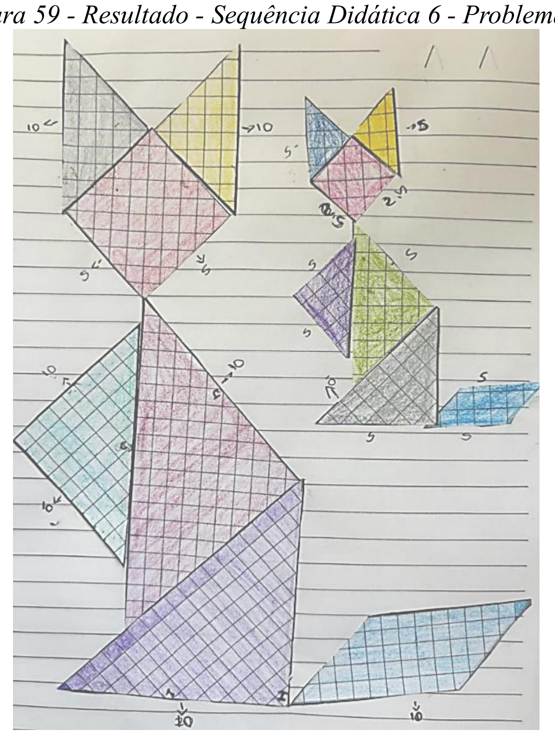
Fonte: Autora.

Quando foi solicitado que os alunos reproduzissem outro Tangram reduzido pela metade de suas medidas, a maioria deles iniciou a atividade seguindo os passos da construção inicial sem maiores dificuldades, apenas reduzindo pela metade o valor das medidas do lado do quadrado. Os poucos alunos que tiveram dificuldades foram orientados pelos colegas.

Após refletirem sobre as medidas dos lados das figuras que compõem o Tangram, tanto na figura original quanto na figura reduzida (

Figura 59), os alunos conseguiram concluir que os lados foram divididos por 2. Desta forma, quando questionados sobre o que aconteceria ao ampliar a figura original para o dobro, eles concluíram que os lados seriam multiplicados por dois.

Figura 59 - Resultado - Sequência Didática 6 - Problema 23

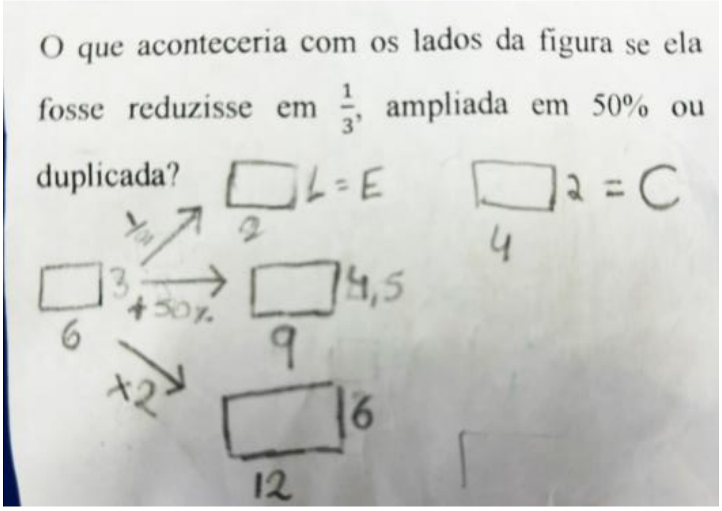


Fonte: Autora.

Ao serem questionados sobre o que aconteceria com os lados de uma figura se ela fosse ampliada em 50% ou duplicada, como um retângulo de dimensões 6 por 3, os alunos conseguiram responder sem muita dificuldade. No entanto, ao serem questionados sobre o que aconteceria com os lados de uma figura se ela fosse reduzida em $\frac{1}{3}$, os alunos não conseguiram responder de modo satisfatório. Foi somente após uma revisão sobre o significado geométrico da fração $\frac{1}{3}$ que os alunos conseguiram concluir de forma satisfatória, como ilustrado na

Figura 60.

Figura 60 - Resultado - Sequência Didática 6 - Problema 23

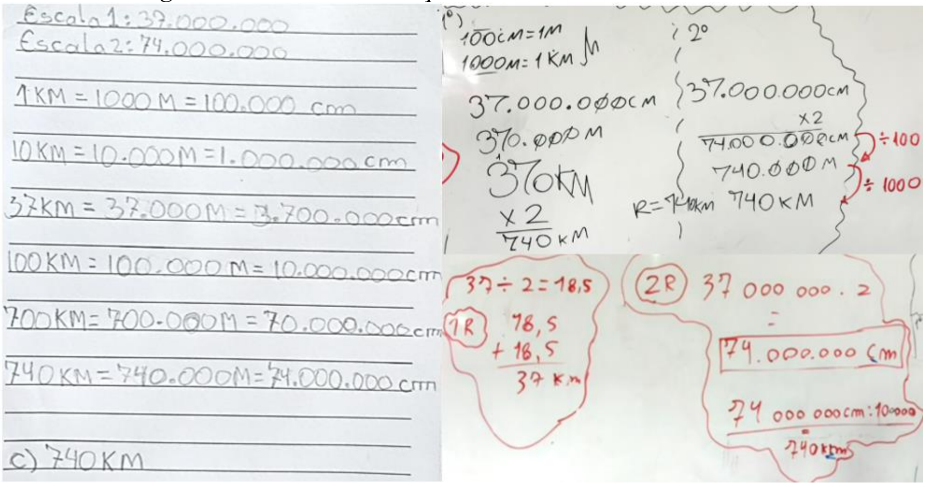


Fonte: Autora.

No problema 24 os alunos tiveram dificuldade em compreender o significado da escala 1:37.000.000, mas após o esclarecimento sobre o que está simbologia representa, os alunos conseguiram compreender. Outro ponto de reflexão foi a conversão de unidades de medida, ou seja, estabelecer a relação entre centímetros e quilômetros. As estratégias compartilhadas foram as ilustrada na

Figura *61.*

Figura 61 - Resultado - Sequência Didática 6 - Problema 24



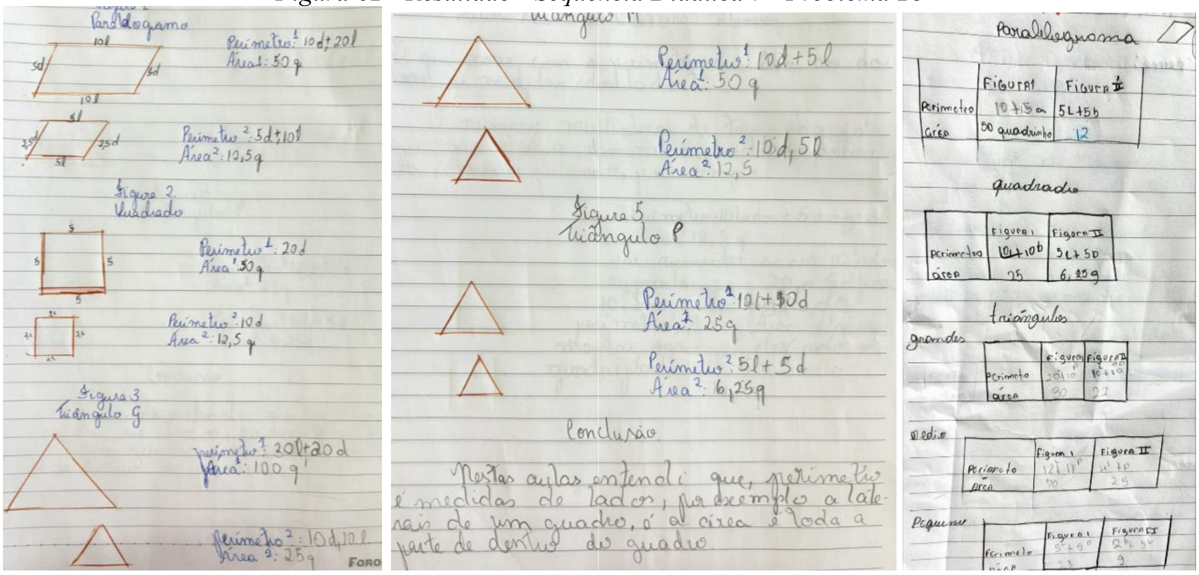
Fonte: Autora.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 7

Durante a execução do problema 28, observou-se que os alunos enfrentavam desafios significativas em recordar os conceitos de perímetro e área. Nesse cenário, o professor atuou como mediador para facilitar o entendimento, enquanto os alunos colaboraram entre si na realização da atividade. Na

Figura *62*, temos as estratégias desenvolvidas pelos alunos após essa interação juntamente com o relato de um aluno sobre o que aprendeu.

Figura 62 - Resultado - Sequência Didática 7 - Problema 28

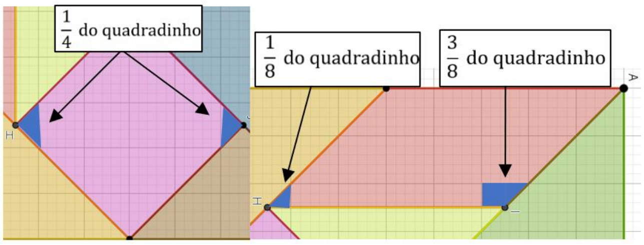


Fonte: Autora.

Como ilustrado na

Figura *62*, durante a contagem dos quadradinhos que formavam a área de cada figura, os alunos cometeram equívocos ao considerar as áreas do quadrado e do paralelogramo, uma vez que não perceberam a existência de partes fracionárias dos quadradinhos, conforme mostrado na Figura 63.

Figura 63 - Resultado - Sequência Didática 6 - Problema 24



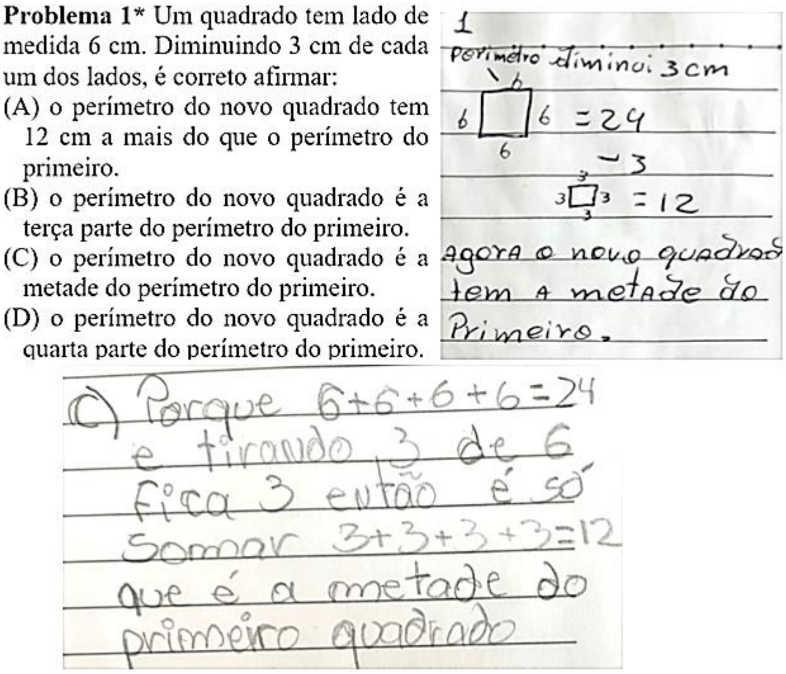
Fonte: Autora.

Para abordar os problemas retratados nas

Figura *64*,

Figura 65 e Figura 66 e auxiliar os alunos com dificuldades na compreensão deles, os estudantes foram desafiados a criar representações visuais com base nas informações fornecidas. Ao empregar valores numéricos para exemplificar os problemas, os alunos conseguiram facilitar a interpretação dos enunciados, algo que não estavam habituados a fazer. Além disso, foi enfatizada a importância da leitura analítica e concentrada, algo que a professora orientou os alunos a realizarem em cada questão. Foi ressaltada também a importância de analisar as alternativas disponíveis, possibilitando que os estudantes avaliassem as opções de resposta e conduzissem uma análise satisfatória.

Figura 64 - Resultado - Sequência Didática 7 - Problema 29



Problema 1* Um quadrado tem lado de medida 6 cm. Diminuindo 3 cm de cada um dos lados, é correto afirmar:

(A) o perímetro do novo quadrado tem 12 cm a mais do que o perímetro do primeiro.

(B) o perímetro do novo quadrado é a terça parte do perímetro do primeiro.

(C) o perímetro do novo quadrado é a metade do perímetro do primeiro.

(D) o perímetro do novo quadrado é a quarta parte do perímetro do primeiro.

1

perímetro diminui 3cm

6 6 = 24

6

−3

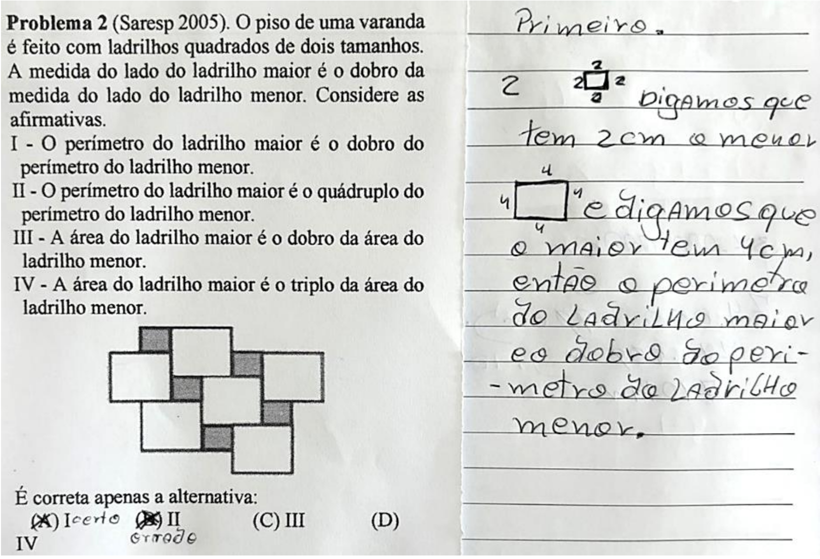
3 3 = 12

agora o novo quadrado tem a metade do Primeiro.

C) Porque 6+6+6+6=24 e tirando 3 de 6 fica 3 então é só somar 3+3+3+3=12 que é a metade do primeiro quadrado

Fonte: Autora.

Figura 65 - Resultado - Sequência Didática 7 - Problema 30



Problema 2 (Saresp 2005). O piso de uma varanda é feito com ladrilhos quadrados de dois tamanhos. A medida do lado do ladrilho maior é o dobro da medida do lado do ladrilho menor. Considere as afirmativas.

I - O perímetro do ladrilho maior é o dobro do perímetro do ladrilho menor.

II - O perímetro do ladrilho maior é o quádruplo do perímetro do ladrilho menor.

III - A área do ladrilho maior é o dobro da área do ladrilho menor.

IV - A área do ladrilho maior é o triplo da área do ladrilho menor.

É correta apenas a alternativa:

(A) I certo (B) II errado (C) III (D) IV

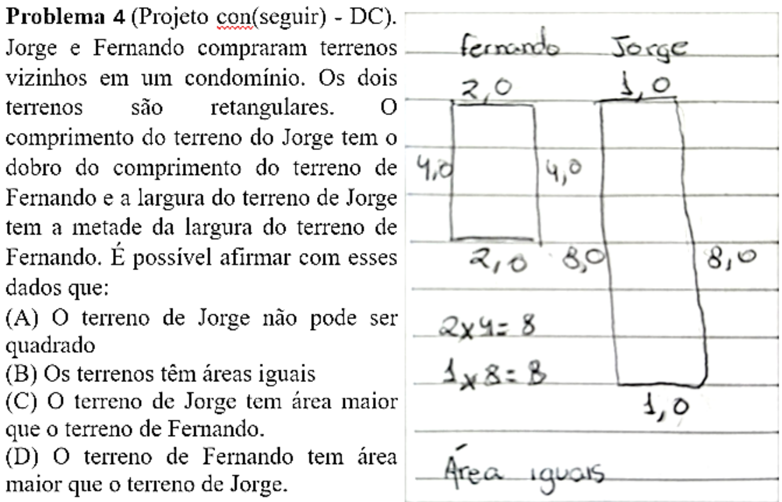
Primeiro.

2 Digamos que tem 2cm o menor

4 e digamos que o maior tem 4cm, então o perimetro do ladrilho maior e o dobro do perimetro do ladrilho menor.

Fonte: Autora.

Figura 66 - Resultado - Sequência Didática 7 - Problema 31



Problema 4 (Projeto con(seguir) - DC). Jorge e Fernando compraram terrenos vizinhos em um condomínio. Os dois terrenos são retangulares. O comprimento do terreno do Jorge tem o dobro do comprimento do terreno de Fernando e a largura do terreno de Jorge tem a metade da largura do terreno de Fernando. É possível afirmar com esses dados que:

(A) O terreno de Jorge não pode ser quadrado

(B) Os terrenos têm áreas iguais

(C) O terreno de Jorge tem área maior que o terreno de Fernando.

(D) O terreno de Fernando tem área maior que o terreno de Jorge.

Fernando Jorge

2,0 1,0

4,0 4,0

2,0 8,0 8,0

2x4= 8

1x8= 8

1,0

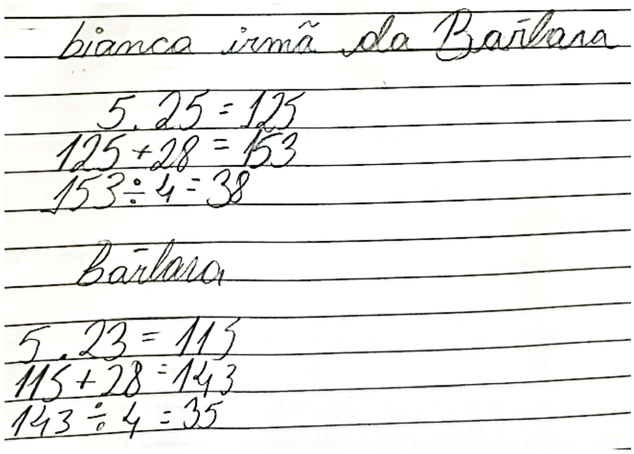
Área iguais

Fonte: Autora.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA 8

Os alunos, no problema 33, demonstraram bastante entusiasmo, mencionaram que realizaram a atividade com seus familiares e mostraram muita animação. Nem sempre realizavam os arredondamentos de forma consistente, muitos questionaram esse procedimento de arredondamento. Aproveitamos essa oportunidade para explicar que os tamanhos diferem entre fabricantes. Esta fórmula serve como um guia e não uma regra absoluta.

Figura 67 - Resultado - Sequência Didática 8 - Problema 33

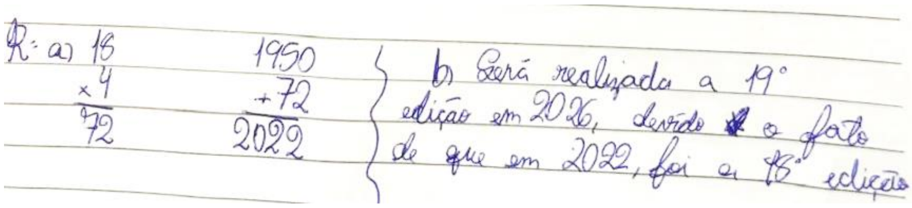


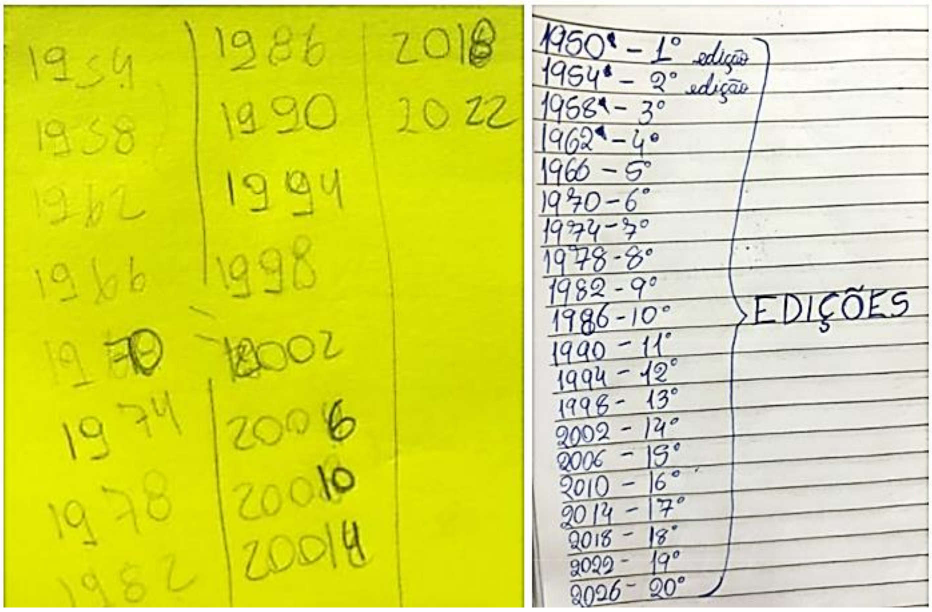
Fonte: Autora.

Quando o tamanho do sapato foi fornecido para que os alunos descobrissem o tamanho dos pés uns dos outros, eles tiveram dificuldade em determinar em qual letra, “N” ou “P”, associar esse valor numérico para atender ao que foi solicitado. Baseado no processo e na estratégia ilustrados na Figura 67, foi sugerido o uso da técnica de 'engenharia reversa' para atingir o resultado. Posteriormente, notaram que resolver a questão era, essencialmente, o mesmo que resolver uma equação linear de primeiro grau de forma convencional. No entanto, ao formalizar o processo, os alunos demonstraram maior dificuldade em compreender.

Os alunos enfrentaram desafios para resolver o problema em razão de um equívoco na interpretação e/ou da falta de atenção durante a análise, decorrente de uma leitura desatenta da questão. Como mostrado na Figura 68, os alunos esqueceram das edições anteriores à guerra, a saber, as três edições que ocorreram nos anos de 1930, 1934 e 1938.

Figura 68 - Resultado - Sequência Didática 8 - Problema 34



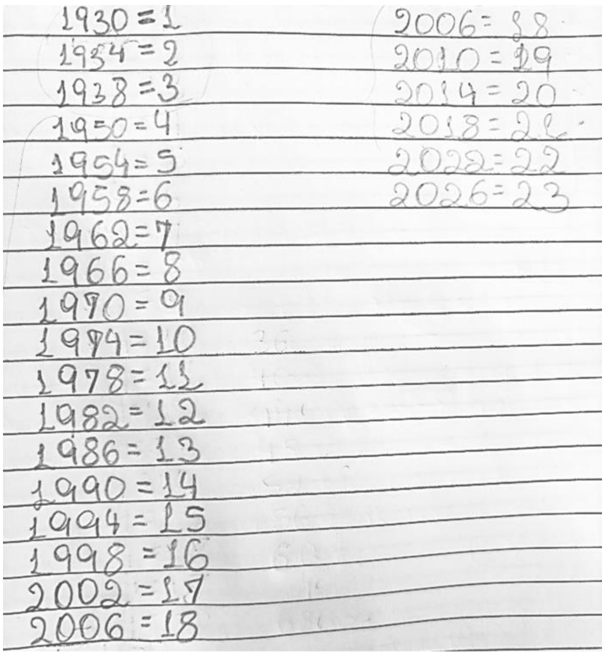


Fonte: Autora.

A professora atuou como mediadora, estimulando os alunos a reconhecerem que, antes de 1950, ocorreram três Copas do Mundo. Ela teve o cuidado de não fornecer respostas diretas, limitando-se a oferecer alguns "insights" que permitissem aos alunos chegarem às soluções por seus próprios meios, como mostra as Figura 69,

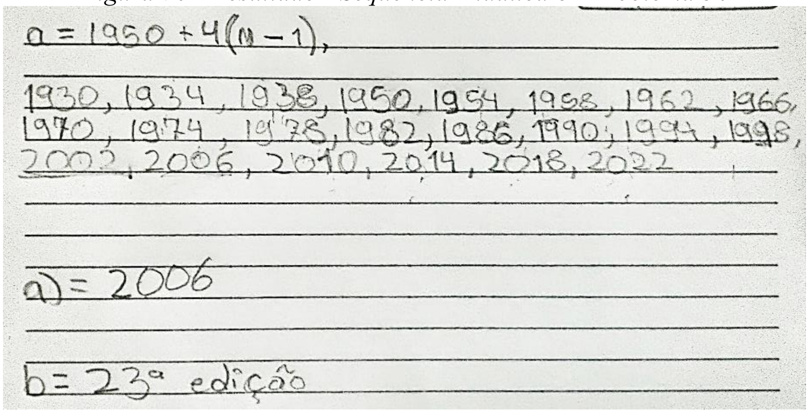
Figura 70 e Figura 71.

Figura 69 - Resultado - Sequência Didática 8 - Problema 34



Fonte: Autora.

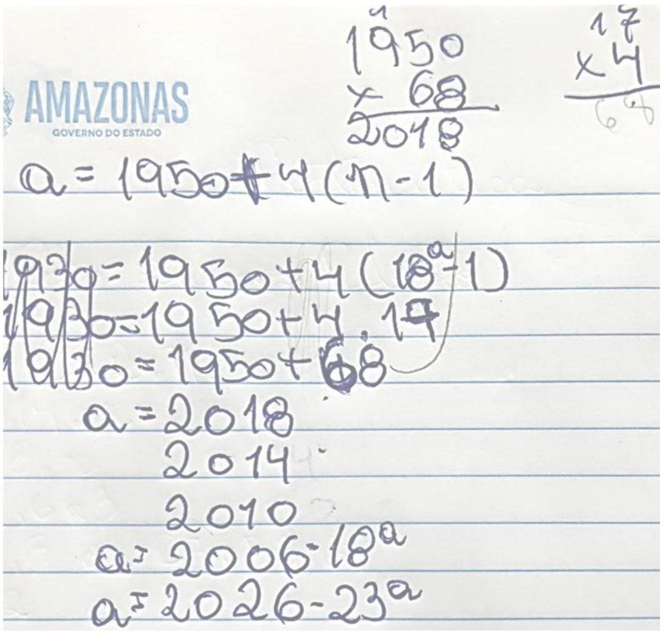
Figura 70 - Resultado - Sequência Didática 8 - Problema 34



Fonte: Autora.

Os alunos se sentiram desafiados a usar a equação mencionada no problema 34. Apenas um aluno (Figura 71) conseguiu aplicá-la com sucesso, apesar de alguns erros, os quais foram corrigidos; os demais também tentaram, mas não obtiveram êxito, optando por desistir dessa estratégia e desenvolver suas próprias abordagens.

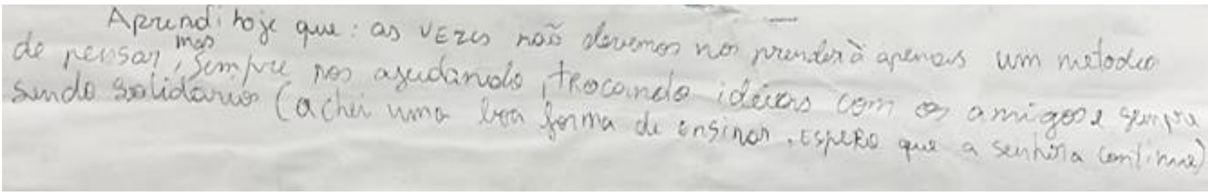
Figura 71 - Resultado - Sequência Didática 8 - Problema 34



Fonte: Autora.

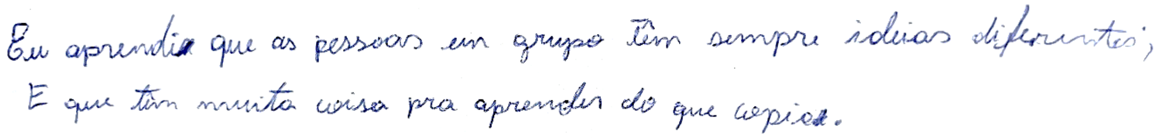
Para concluir, pedimos que os alunos escrevessem suas perspectivas em relação à aprendizagem e à metodologia utilizada. Segue alguns relatos.

Figura 72 - Perspectiva do aluno.


Aprendi hoje que: as vezes não devemos nos prender à apenas um metodo
de pensar, mas sempre nos ajudando, trocando ideias com os amigos e sempre
sendo solidario (achei uma boa forma de ensinar, espero que a senhora continue)

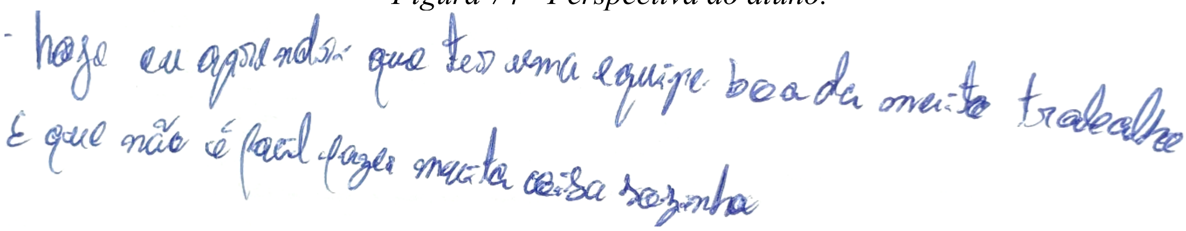
Fonte: Autora.

Figura 73 - Perspectiva do aluno.


Eu aprendia que as pessoas em grupo têm sempre idéias diferentes;
E que tem muita coisa pra aprender do que copiar.

Fonte: Autora.

Figura 74 - Perspectiva do aluno.


- hoje eu aprendi que ter uma equipe boa da muito trabalho
E que não é facil fazer muita coisa sozinha

Fonte: Autora.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pôde-se observar, na prática docente baseada na utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através de Problemas, que essa metodologia promove uma mudança significativa no foco do ensino e aprendizagem, deslocando a atenção dos alunos da simples obtenção de respostas para a concentração nos processos e argumentos que levam às respostas. Isso resulta em um aprendizado mais profundo e significativo.

Por outro lado, observou-se que os alunos enfrentam desafios na compreensão dos termos matemáticos, o que resulta em dificuldade em visualizar e estabelecer conexões com os conceitos matemáticos. Assim, forma-se a crença de que, se tenho dificuldade em resolver problemas matemáticos, é porque não sou da área de Matemática; logo, não gosto de matemática, pois não consigo resolver as questões, a pesquisa detecta que isso normalmente ocorre pela falta de conhecimento de termos matemáticos.

Para abordar essa problemática, é recomendado incentivar a criação de um glossário de termos matemáticos ao longo do ano letivo, funcionando como um minidicionário de matemática para que os alunos tenham à disposição para consultas futuras. Assim como temos o hábito de consultar o significado de palavras durante a leitura de diversos textos, podemos fomentar a cultura de fazer o mesmo ao lidar com textos de matemática. Adicionalmente, a introdução de leitura de revistas, material didático complementar e outros textos com conteúdo matemático pode ajudar os alunos a se familiarizarem com os termos técnicos da disciplina.

Observou-se que Ensinar Através da Resolução de Problemas ajuda a desenvolver habilidades nos alunos, como o pensamento crítico, a capacidade de argumentação e de resolver problemas de forma autônoma. Para isso, é essencial escolher os problemas de forma adequada que atendam ao seu objetivo de aprendizagem e dedicar um tempo maior do que o habitual para o ensino.

A metodologia é bem-estruturada, apoiada por um conjunto claro de passos delineados por Onuchic e Allevato, que ajudam os professores na aplicação de métodos de resolução de problemas na sala de aula. Esses passos oferecem um guia prático para implementar a metodologia de forma eficiente.

Desta maneira, a função do professor se transforma em observar e incentivar o trabalho colaborativo entre os alunos, em um ambiente que promove a cooperação e a troca de ideias. Além disso, o professor passa a atuar como mediador e facilitador da aprendizagem. No entanto, essa abordagem pode apresentar desafios devido a diversos fatores, como turmas compostas por estudantes desmotivados que acreditam não ser capazes de aprender matemática, salas superlotadas e alunos que apresentam grandes lacunas em seu aprendizado. Apesar dessas adversidades, a implementação dessa metodologia é viável e pode ser muito gratificante.

Dado que este trabalho foi baseado, inspirado e fundamentado nos estudos de Onuchic (2021), juntamente com o apoio das sugestões de George Polya (2006), Van de Walle (2009) e Boaler (2019), podemos destacar alguns princípios que resultaram do estudo, da vivência e experiência da aplicação em sala de aula dessa metodologia

ASPECTOS SOCIOEMOCIONAIS**:** Reconhecemos a importância da colaboração entre os alunos, sabemos que a aprendizagem prospera quando os alunos interagem, compartilham ideias e constroem conhecimento juntos. Os alunos desenvolvem suas habilidades socioemocionais, à medida que os alunos aprendem a colaborar, respeitar opiniões divergentes e desenvolver habilidades interpessoais.

ERRAR FAZ PARTE DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM**:** Os alunos são incentivados a ver os erros como oportunidades de crescimento. Quando cometemos erros, estamos no caminho da descoberta. Ao analisar os erros, os alunos podem identificar lacunas na compreensão, ajustar estratégias e melhorar habilidades. Os erros não são algo negativo, mas sim ferramentas que nos ajudam a seguir em frente e aprender.

CONSTRUÇÃO DO SABER PELA PARTICIPAÇÃO ATIVA DOS DISCENTES: Acreditamos que o conhecimento é construído de forma mais significativa quando os alunos estão ativamente engajados em seu próprio aprendizado. Ao envolvê-los em discussões, na resolução de problemas e nas reflexões, estamos a promover uma compreensão profunda e duradoura. A reflexão sobre o processo de aprendizagem permite aos alunos internalizarem conceitos, conectá-los às experiências pessoais e tornar-se agentes ativos na construção do conhecimento.

Esses princípios não apenas moldaram nossa abordagem pedagógica, mas também nutriram um ambiente de aprendizagem enriquecedor e fortalecedor para todos os envolvidos.

Em resumo, a implementação da metodologia de ensino da matemática através da resolução de problemas, enfrenta, de fato, grandes desafios tanto para professores quanto para alunos. No entanto, essa abordagem culmina em um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e engajador. Ela não apenas aprofunda o conhecimento matemático dos alunos, mas também desenvolve competências essenciais para seu crescimento acadêmico e pessoal. Essa metodologia, de fato, propicia uma transformação significativa no foco do ensino: os alunos passam a deslocar sua atenção da mera busca por respostas, para uma concentração nos processos e nas argumentações que fundamentam essas respostas (WALLE, 2009). Dessa forma, o aprendizado se torna não apenas mais profundo, mas também mais significativo. Por outro lado, o papel do professor na implementação dessa metodologia é crucial, envolve muitos desafios e requer muita dedicação.

REFERÊNCIAS

AMAZONAS. **AVAM - CADERNO DE APOIO - MATEMÁTICA – 9o ANO**. V. 1, 2023. Disponivel em: <https://drive.google.com/file/d/1KvrHQa2C5BlT4htkn0wMAgAiBNbDbZTz/view>. Acesso em: 25 Agosto 2023.

ANDRINI, Á.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática, 9**. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ASTH, C. Exercícios sobre retas paralelas cortadas por uma transversal. **Toda Matéria**. Disponivel em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal/>. Acesso em: 17 Junho 2023.

BOALER, J. **Mentalidades matematicas:** estimulando o potencial dos estudantes por meio da matematica criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOALER, J. **O que a matemática tem a ver com isso? Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso**. Tradução de Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2019.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática/Secretaria de Educação de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. BNCC: Base Nacional Comum Curricular, 2018. Disponivel em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 14 junho 2023.

BRASIL. LDB : Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. 7. ed. Brasília, DF: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicos, 2023. Disponivel em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/642419/LDB_7ed.pdf>. Acesso em: 08 Julho 2023.

BRASIL. Saeb. **Ministerio da Educação**, 2023. Disponivel em: <https://download.inep.gov.br/saeb/diretrizes_da_edicao/2023.pdf>. Acesso em: 26 Agosto 2023.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2010.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2002.

ONUCHIC, L. D. L. R. et al. **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação [livro eletronico]**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2022. Disponivel em: <kindle>.

WALLE, J. A. V. D. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula [livro eletrônico]. Tradução de Paulo Henrique Colonesse. 6. ed. Porto Alegre: Penso, 2009. Disponivel em: <Bookshelf>.

WARLES. Questões por descritores. **Blog do Prof. Warles**. Disponivel em: <https://docs.google.com/document/d/1dF0MmT99oDyLYcJSKe4O0rDuQKQt_Tpu/edit?rtpof=true&sd=true>. Acesso em: 17 Junho 2023.

ANEXOS

Algumas sugestões de problemas para aplicação em sala de aula.

Eixos cognitivos: 9N2.1 Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.

PROBLEMA 1 - Manaus, a capital do Estado do Amazonas, segundo o IBGE, tem uma população estimada de 2.063.547 pessoas. Suponha que cada pessoa em Manaus use, em média, $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia.

a) Qual é o consumo total de água em Manaus em um dia?
b) Se cada litro de água tratada custa $5,0 \times 10^{-3}$ reais, quanto custaria para fornecer água para toda a população de Manaus por um dia?
c) Se o orçamento anual para o tratamento de água em Manaus é de $1,0 \times 10^9$ reais, esse orçamento é suficiente para fornecer água para toda a população por um ano?

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

a) Inicialmente, os alunos poderão observar o que acontece com valores menores, como por exemplo:

1 pessoa, consome uma vez $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia.

2 pessoas, consomem duas vezes $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia.

3 pessoas, consomem três vezes $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia.

4 pessoas, consomem quatro vezes $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia

.

.

.

"n" pessoas, consomem "n" vezes $2,2 \times 10^2$ litros de água por dia.

Sendo assim podemos concluir que 2.063.547 pessoas consomem $2.063.547$ vezes $2,2 \times 10^2$.

O professor deve sondar se os alunos compreendem o que é notação científica, a saber, um número em notação científica é apresento da seguinte forma:

$$A = N.10^x$$

Onde:

- (A) é o número que desejamos transformar em notação científica.

- (N) é o número (A) na forma decimal, que se encontra entre $1 \leq N < 10$.
- (x) é o expoente da potência de base 10. Esse expoente é um número inteiro que representa quantas casas decimais tivemos que "andar" com a vírgula para que o número (A) se transformasse em (N). Se o número diminuiu, o expoente é positivo, caso contrário, ou seja, se o número aumentou, o expoente é negativo.

Agora, de posse do conhecimento da teoria, podemos transformar 2.063.547 em $2{,}063547 \times 10^6$, assim temos que:

$$2{,}063547 \times 10^6 \times 2{,}2 \times 10^2$$

Daí, pela propriedade comutativa, temos que:

$$\boxed{2{,}063547 \times 2{,}2} \times \boxed{10^6 \times 10^2}$$

Multiplicação de potência de mesma base, repete a base e soma os expoentes

$$\boxed{4{,}5398034} \times \boxed{10^8}$$

Logo, o consumo total de água em Manaus em um dia é de $4{,}5398034 \times 10^8$ litros de água por dia, ou seja, 453.980.340 litros de água por dia.

b) Como cada litro custa $5{,}0 \times 10^{-3}$ e o consumo total de água em Manaus em um dia é de $4{,}5398034 \times 10^8$. Então, para saber quanto custaria para fornecer água para toda a população de Manaus por um dia, temos que:

$$5{,}0 \times 10^{-3} \times 4{,}5398034 \times 10^8$$

Pela propriedade comutativa,

$$5{,}0 \times 4{,}5398034 \times 10^{-3} \times 10^8$$
$$22{,}699017 \times 10^5$$

Ou seja,

$$2.269.901{,}7.$$

Logo, custaria $R\$$ 2.269.901,7 para fornecer água para toda a população de Manaus por um dia.

c) Como o custo diário é de $R\$\, 22{,}699017 \times 10^5$e considerando os 365 dias um 1 ano, temos que o custo anual seria de:

$$22{,}699017 \times 10^5 \times 365$$
$$22{,}699017 \times 10^5 \times 3{,}65 \times 10^2$$

Pela propriedade comutativa,

$$22{,}699017 \times 3{,}65 \times 10^5 \times 10^2$$

$$82{,}85141205 \times 10^7$$

Se o orçamento anual para o tratamento de água em Manaus é de $1{,}0 \times 10^9$ reais, então o orçamento é suficiente para fornecer água para toda a população por um ano, pois

$$82{,}85141205 \times 10^7 < 1{,}0 \times 10^9$$

$$828.514.120{,}5 < 1.000.000.000$$

PROBLEMA 2[16] (OBMEP) **-** Numa papelaria, pacotes com 500 folhas de papel, cada um, são armazenados em pilhas de 60 pacotes. Cada folha de papel tem espessura de 0,1mm. Ignorando a espessura do papel utilizado para embrulhar os pacotes, o que podemos afirmar sobre a altura de uma pilha?

a) É aproximadamente a sua altura.
b) É aproximadamente a altura de um bebê de um ano.
c)É aproximadamente a altura de uma mesa comum.
d)É aproximadamente a altura de um prédio de dez andares.
e) É aproximadamente a altura de uma sala de aula.

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Como cada folha de papel tem espessura de 0,1mm e em um pacote contém 500 folhas. Podemos calcular a altura de cada pacote da seguinte maneira:

$$0{,}1mm \ \times 500 = 50 \ mm \ ou \ 5 \ cm$$

$$\div 10$$
$$10mm = 1cm$$
$$50mm = 5cm$$
$$\div 10$$

[16] Problema disponível em: https://drive.google.com/file/d/1GzURIN_Aes4NVPtQfMPDyUtQs2FMbZQC/view

Já a altura de cada pilha com 60 pacotes de 500 folhas cada, pode ser calculada:

$$50mm \times 60 = 3000mm \text{ ou } 300 \text{ cm ou } 3m$$

$$\div 10 \qquad\qquad\qquad \div 100$$

$$10mm = 1cm \qquad\qquad 100cm = 1m$$

$$3000mm = 300cm \qquad\qquad 300cm = 3m$$

$$\div 10 \qquad\qquad\qquad \div 100$$

PROBLEMA 3[17] - Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se forem colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos ele ainda poderá carregar?

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Inicialmente podemos pensar quantos tijolos equivale a um saco de areia, ou vice-versa, assim temos que:

$$\div 50 \qquad 50 \, sacos \, de \, areia = 400 \, tijolos \qquad \div 50$$

$$1 \, saco \, de \, areia = 8 \, tijolos$$

Dessa forma, se forem colocados no caminhão 32 sacos de areia, sobram o lugar de 18 sacos de areia, pois $50 - 32 = 18$. E como para cada 1 saco de areia equivale 8 tijolos, temos que:

$$18 \, sacos \, de \, areia = 18 \times 8 = 144 \, tijolos$$

Portanto, se forem colocados no caminhão 32 sacos de areia, ainda poderá carregar 144 tijolos.

---

[17] MENDES, H. D. O.; NETO, I. C.; SILVA, J. J. M. **Lógica 1:** 6º ano. 2. ed. Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2021.

PROBLEMA 4[18] - Quatro cidades A, B, C e D, foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração abaixo:

Figura 75[19]

Fonte: Autora.

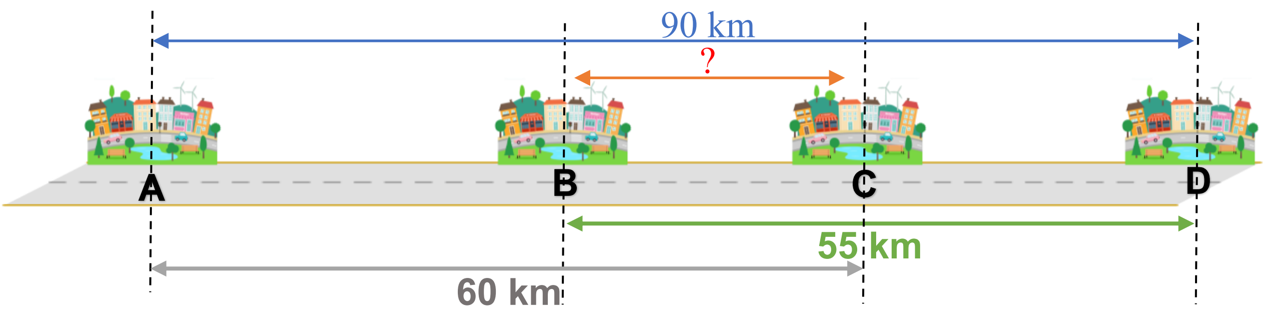
A distância entre A e C é de 60 km e a distância entre B e D é de 55km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última é de 90 km. Qual é a distância entre as cidades B e C?

A) 15km. B) 20 km. C) 25km. D) 5km.

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Observe que a distância de A até D é igual a 90 km, e se somamos a distância de A até C mais B até D, temos um total de 115 km (Figura 76). Portanto, a diferença entre 115 km e 90 km é a distância de B até C, que é igual a 25 km.

Figura 76



Fonte: Autora.

PROBLEMA 5 - Um litro de álcool custa R$ 3,99. O carro de Maria percorre 25km com 3 litros de álcool. Quantos reais Maria gastará com álcool para percorrer 600km?

POSSÍVEL ESTRATÉGIA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

---

[18] OBMEB – Nível 1- disponível em: **https://drive.google.com/file/d/1GzURIN_Aes4NVPtQfMPDyUtQs2FMbZQC/view**

[19] Os elementos que compõem as figuras 75 e 76 foram retirados da internet. Disponível em: https://sl.bing.net/byJYesd8wBo.

Observe que $600 \div 25 = 24$, então podemos iniciar com a seguinte estratégia,

$$24\ \mathrm{x} \quad \begin{array}{c} 3\ litros \rightarrow 25\ km \\ 72\ litros \rightarrow 600\ km \end{array} \quad \mathrm{x}\ 24$$

Dessa forma, o carro de Maria consumirá 72 litros de álcool e como cada litro de álcool custa R$ 3,99, temos que:

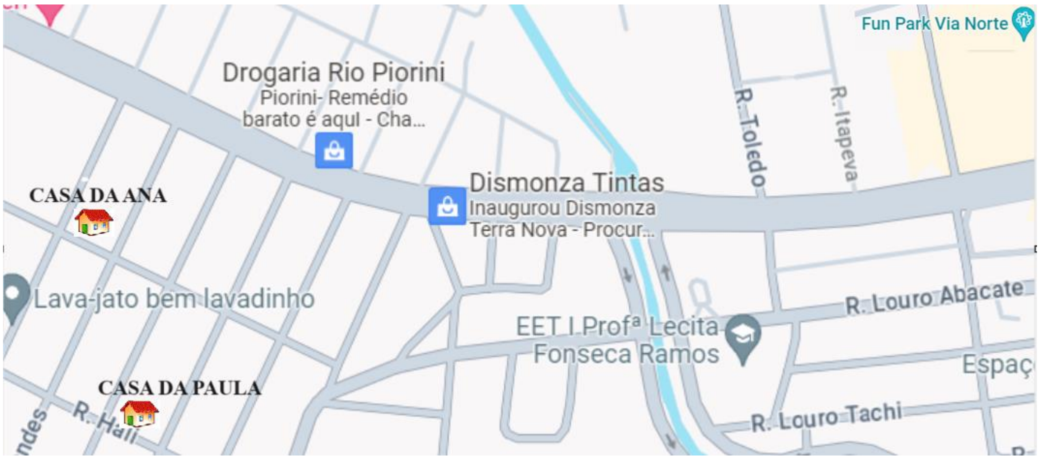
$$R\$\ 3{,}99 \times 72\ litros = R\$\ 287{,}28$$

Portanto, Maria gastará com álcool para percorrer 600 km $R\$\ 287{,}28$.

Eixo cognitivo: 9N2.2 Resolver problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

PROBLEMA 6- Ana e Paula vão ao Fun Park Via Norte juntas, mas Ana vai buscar Paula em casa. Se existem quatro caminhos da casa de Ana para a casa de Paula e três caminhos da casa de Paula para o Fun Park Via Norte, quantos caminhos Ana poderia pegar?

Figura 77- Mapa

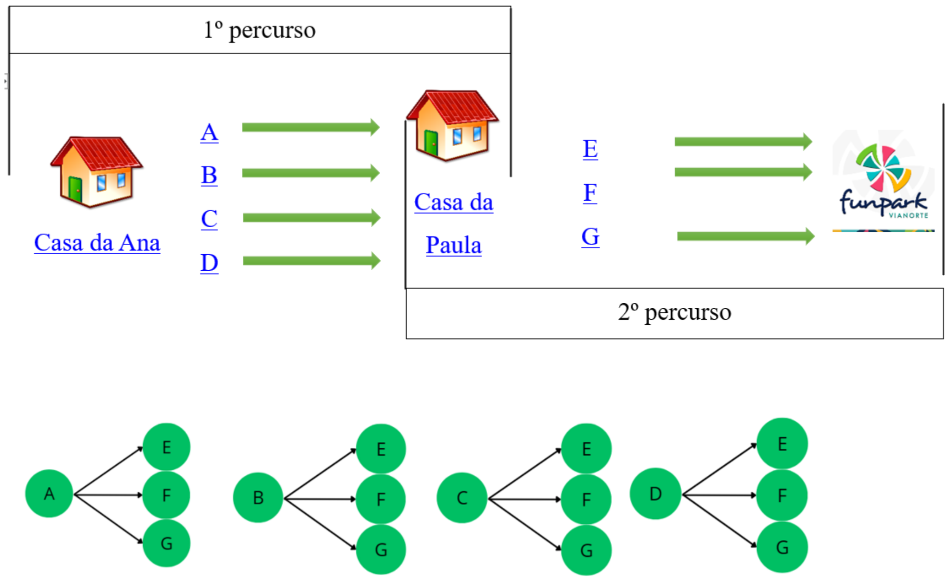


Fonte: https://www.google.com.br/maps/@-3.0013628,-60.0101437,16z?entry=ttu

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Para resolver esse problema, pode-se supor, que a Ana tem o caminho A, B, C e D para ir à casa de Paula e depois, as duas tem os caminhos E, F e G para ir ao Fun Park. Assim, os possíveis caminhos são:

Figura 78



Fonte[20]: Autora.

Observe que as técnicas de contagem nos permitem determinar o número total de opções, sem a necessidade de listar todas as possibilidades individualmente. Portanto, para solucionar um problema que envolve a contagem de elementos, o procedimento é simples: dividimos o problema em decisões e, depois, multiplicamos os resultados obtidos. Ou seja:

- ✓ 1ª decisão: escolher qual o caminho da casa de Ana até a casa da Paula. Como tem 4 caminhos, existem 4 possibilidades de escolha.
- ✓ 2ª decisão: escolher qual caminho seguir da casa de Paula até o Fun Park Via Norte. Como tem 3 caminhos, existem 3 possibilidades de escolha

Uma vez que as decisões são independentes, ou seja, a escolha para o 1º trecho (casa da Ana até casa da Paula) não influencia a escolha do 2º trecho (casa da Paula até o Fun Park Via Norte), tem- se que pelo princípio fundamental da contagem, também chamado de **princípio multiplicativo:**

$$4 \text{ possibilidades } \times 3 \text{ possibilidades} = 12 \text{ possibilidades no total}$$

PROBLEMA 7 Manaus, é uma cidade com um clima bastante quente, dispondo de várias sorveterias, que nos ajuda a refrescar. Glacial, uma das sorveterias mais frequentadas dispõe de

[20] Os elementos, como a casinha e o slogan do FunPark, foram retirados da internet.

cerca de 60 sabores, cinco tipos de caldas e três tipos de casquinhas. De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir, consumindo um sabor de sorvete, uma calda e um casquinha.

A) 900. B) 600. C) 60. D) 15.

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

- ✓ 1ª decisão: escolher o sabor do sorvete. Existem 60 possibilidades;
- ✓ 2ª decisão: escolher a calda. Existem 5 possibilidades;
- ✓ 3ª decisão: escolher o tipo de casquinha. Existem 3 possibilidades.

Portanto, um freguês pode servir-se de $60 \times 5 \times 3 = 300 \times 3 = 900$ maneiras diferentes.

9N2.3 Resolver problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação depercentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.

PROBLEMA 8 - Chama-se ouro 18 quilates à liga que contém 75% de ouro e 25% de outros metais. Um anel feito de ouro 18 quilates têm 9 g de ouro. A massa do anel, em gramas, corresponde a:

a) 12. b) 18. c) 15. d) 36.

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Para determinamos a massa do anel (m) podemos partir de que

$$9g\ de\ ouro \rightarrow 75\%\ da\ massa\ do\ anel$$

Logo,

$$9g \rightarrow 75\%$$
$$m \rightarrow 100\%$$

Pela regra de três simples, temos que:

$$\frac{9}{m} = \frac{75}{100}$$

Propriedade fundamental da proporção: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos

$$75 \times m = 9 \times 100$$

$$75m = 900$$

$$m = \frac{900}{75}$$

$$m = 12g$$

Portanto, a massa do anel corresponde a 12 gramas.

PROBLEMA 9 - Uma promoção é realizada na loja: "O MUNDO DOS ACESSÓRIOS". Na compra de dois artigos ou mais, a loja oferece um desconto de 15 % sobre o preço normal de venda desses artigos. Tiago pode gastar 280 reais. Nessa promoção, o que ele pode comprar?

Loja: O MUNDO DOS ACESSÓRIOS[21]		
Fone de ouvido	Microfone	Ring light
		
265 reais	330 reais	59 reais

a) O Fone de ouvido e o Microfone

b) O Fone de ouvido e o Ring light

c) O Microfone e o Ring light

d) O Fone de ouvido, Microfone e o Ring light

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

Podemos calcular o valor de cada produto com o desconto de 15%. As diferentes formas de representar 15%:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

Como

$$100\% - 15\% = 85\%$$

[21] Os elementos, como o fone de ouvido, microfone e o ring light, foram retirados da internet.

e

$$85\% = \frac{85}{100} = 0{,}85$$

Então, o valor de cada produto com o desconto de 15%, poderá ser a calculado a partir de:

$$\text{Fone de ouvido} \rightarrow 265 \times 0{,}85 = 225{,}25$$
$$\text{Microfone} \rightarrow 330 \times 0{,}85 = 280{,}50$$
$$Ring\ light \rightarrow 59 \times 0{,}85 = 50{,}15$$

Portanto, analisando os resultados, ele pode comprar Fone de ouvido e $Ring\ light$.

PROBLEMA 10 - Fernando atrasou 2 meses o pagamento de um boleto de cobrança no valor de 256,00 e terá que pagar juros pelo atraso. Após o vencimento, o banco cobra uma multa de 5% mais uma mora de R$ 0,08 por dia.

a) Qual é o valor do juro?
b) Quanto Fernando vai ter que pagar ao total?

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

O professor deve verificar se os alunos compreendem tanto o problema quanto os termos envolvidos, como o fato de que um mês comercial possui 30 dias. A partir desse entendimento, os alunos poderão desenvolver estratégias para resolver a questão proposta. Para isso, é essencial organizar os dados apresentados no problema e identificar, claramente, o que está sendo solicitado. Essa organização inicial é um excelente ponto de partida. Ao sistematizar as informações do problema e sua interpretação matemática, temos:

- ✓ São 2 meses de atraso, cada mês comercial tem 30 dias, então temos um total de 60 dias;
- ✓ Valor do boleto era de R$ 256,00;
- ✓ Multa de $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$, então,

$$256 \times 0{,}05 = 12{,}80$$

Ou

Podemos começar calculando mentalmente 10% de R$ 256,00, que resulta em R$ 25,60. Como o que desejamos é encontrar 5%, basta dividir esse valor por 2. Assim, 5% de

R$ 256,00 é igual a R$ 12,80. Os alunos também podem realizar esse cálculo mental por meio da decomposição dos números, como:$25{,}60 = 20 + 5 + 0{,}60$

$$\frac{20}{2} + \frac{5}{2} + \frac{0{,}60}{2} \rightarrow 10 + 2{,}50 + 0{,}30 = 12{,}80$$

- ✓ Mora de R$ 0,08 por dia, como são 60 dias, logo,

$$60\ dias\ \times\ 0{,}08 =\ 60 \times 0{,}08 = 4{,}8$$

Assim, a mora será de R$ 4,80.

Resultado:

Resposta do item a)

Os juros comprados pelo atraso no pagamento: $R\$12{,}80$

Resposta do item b)

O valor original do boleto: R$ 256,00

Os juros comprados pelo atraso no pagamento: $R\$12{,}80$

A mora comprados pelo atraso no pagamento: 4,80.

Portanto, Fernando vai ter que pagar ao total R$ 273,60 (256+12,80+4,80).

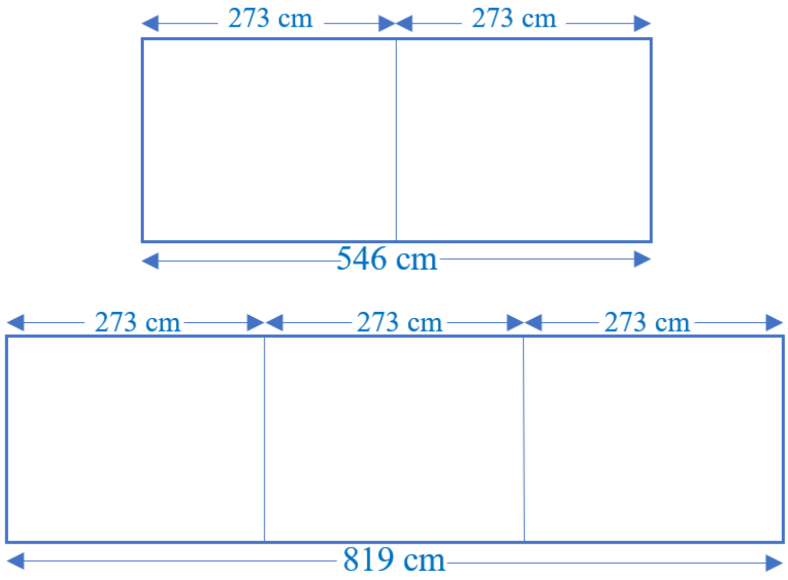
Eixo cognitivo: 9N2.4 Resolver problemas que envolvam as ideias de múltiplo, divisor, máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum.

PROBLEMA 11[22]- Uma máquina de tecido fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizar os cortes necessários, Juliana verificou que sobraram apenas duas peças com as seguintes medidas: 546 cm e 819 cm. O supervisor de produção, ao ser informado das medidas, deu a ordem a Juliana que cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível. Como ela poderá resolver essa situação?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Uma possível estratégia é dividir ao meio o tecido com comprimento de 546, e logo após verificar quantas partes desta cabe na peça de comprimento de medida 819 cm, obtendo assim partes iguais e de maior tamanho.

[22] MENDES, H. D. O.; NETO, I. C.; SILVA, J. J. M. **Lógica 1:** 6º ano. 2. ed. Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2021.



Uma outra perspectiva de estratégia é encontrar o maior número inteiro que divide 546 e 819 ao mesmo tempo, isto é, calcular o m.d.c. entre 546 e 819. Dessa forma, obteremos o valor correspondente ao comprimento desejado. Para isso, decompõem-se os números em fatores primos:

$$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

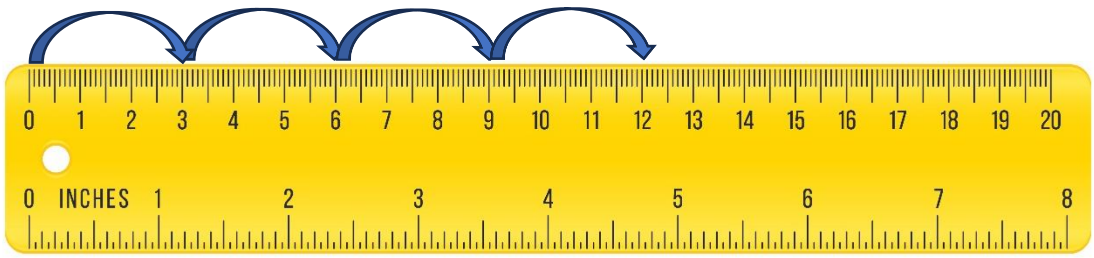
$$819 = 3 \times 3 \times 7 \times 13$$

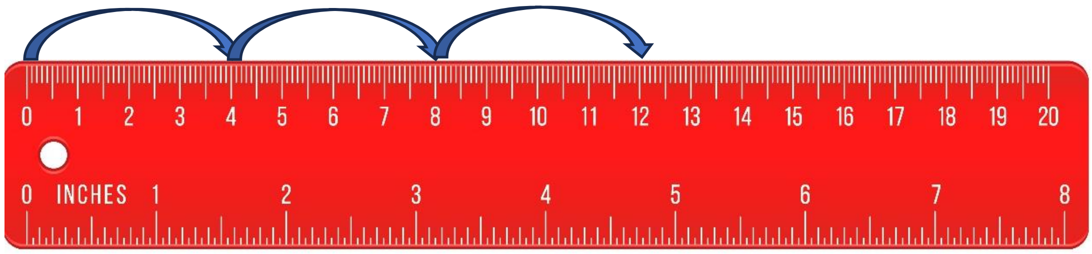
Logo, o m.d.c. (546,819) = $3 \times 7 \times 13$ = 273. Portanto, os retalhos devem ter 273 cm de comprimento.

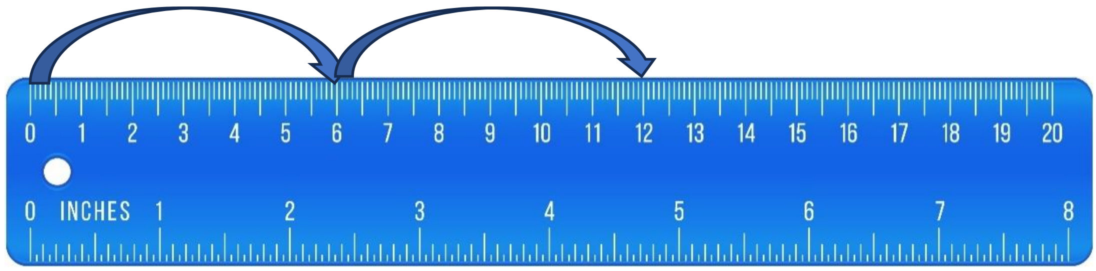
PROBLEMA 12 (PUC-adaptado) Em uma linha de produção, localizada na Zona Franca de Manaus, certo tipo de manutenção é feito na máquina A, a cada 3 dias; na máquina B, a cada 4 dias; e na máquina C, a cada 6 dias. Se foi feita a manutenção nas três máquinas, no dia 2 de janeiro, qual é a próxima data em que as máquinas receberão manutenção no mesmo dia?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA[23]

Este problema pode ser resolvido de forma visual:







Múltiplos de 3 = (0,3,6,9,12,15,18, 21, ...)

Múltiplos de 4 = (0,4,8,12,16,20, 24, ...)

Múltiplos de 6 = (0,6,12,18, 24, 30, ...)

Logo, a próxima manutenção será há 12 dias. Portanto, será no dia 14 de janeiro.

PROBLEMA 13 (UFCS-adaptado) Um país lançou em 02/01/2024 os satélites artificiais A, B e C com as tarefas de fiscalizar o desmatamento em áreas de preservação, as nascentes dos rios

[23] As imagens das réguas estão disponíveis em: https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/color-school-measuring-rulers-in-centimeters-vector-13774422.

e a pesca predatória na Amazônia. No dia 03/01/2024 podia-se observá-los alinhados, cada um em uma órbita circular diferente, tendo a Terra como centro. Se os satélites A, B e C levam, respectivamente, 6, 9 e 10 dias para darem uma volta completa em torno da Terra, qual o número de dias para o próximo alinhamento?

SUGESTÃO DE ESTRATÉGIA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA:

O problema segue o mesmo raciocínio do anterior; porém, o professor precisa se certificar de que os alunos entendem não apenas o problema, mas também os conceitos e termos relacionados a ele. Após os esclarecimentos, podemos sugerir aos alunos que encontrarem dificuldades para resolver o problema que comecem a organizá-lo um de cada vez, por exemplo.

	SATÉLITES		
	A (6 dias)	B (9 dias)	C (10 dias)
1ª volta	6	9	10
2ª volta	12	18	20
3ª volta	18	27	30
4ª volta	24	36	40
5ª volta	30	45	50
6ª volta	36	54	60
7ª volta	42	63	70
8ª volta	48	72	80
9ª volta	54	81	90
10ª volta	60	90	
11ª volta	66		
12ª volta	72		
13ª volta	78		
14ª volta	84		
15ª volta	90		

Por outro lado, para determinar o próximo alinhamento dos satélites A, B e C, precisamos calcular o mínimo múltiplo comum (MMC) dos períodos em que cada satélite completo uma volta em torno da Terra. Podemos notar que os períodos são satélite A: 6 dias, satélite B: 9 dias, satélite C: 10 dias. Portanto, devemos calcular o MMC de 6, 9 e 10.

Decompondo os números 6, 9 e 10 em fatores primos, temos que

$$6 = 2 \times 3$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$10 = 2 \times 5$$

O MMC é encontrado pegando o maior expoente de cada fator, a saber, os fatores nesse caso são 2, 3 e 5. Dai, temos que os que tem maior expoente são: $2^1, 3^2$ e 5. Logo, o MMC é igual a $2 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 9 \times 5 = 2 \times 45 = 90$.

Portanto, o próximo alinhamento dos satélites A, B e C ocorrerá em 90 dias.

PROBLEMA 14[24] Um auxiliar de enfermagem pretende usar a menor quantidade possível de gavetas para acomodar 120 frascos de um tipo de medicamento, 150 frascos de outro tipo e 225 frascos de um terceiro tipo. Se ele colocar a mesma quantidade de frascos em todas as gavetas, e medicamentos de um único tipo em cada uma delas, quantas gavetas deverá usar?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para descobrir o número de gavetas necessárias, precisamos primeiro descobrir quantos frascos de cada tipo deve conter em cada gaveta, para isso deve-se encontrar o maior número inteiro que dívida 120, 150 e 225 ao mesmo tempo, ou seja, o **MDC** (máximo divisor comum) entre 120, 150 e 225, pois esse valor corresponderá ao número de frascos que cada gaveta deve conter.

Assim, decompõem-se os números em fatores primos:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$225 = 3^2 \times 5^2$$

Dessa forma, o número total de gavetas necessárias é a soma dos quocientes da divisão do número de frascos de cada tipo pelo MDC:

- $\frac{120}{15} = 8$ gavetas para o primeiro tipo de medicamento.
- $\frac{150}{15} = 10$ gavetas para o segundo tipo de medicamento.

---

[24] Problema disponível em: https://www.ativamente.net/Pesquisa/resumos/Problemas/Prob_MDC.htm

• $\frac{225}{15} = 15$ gavetas para o terceiro tipo de medicamento.

Portanto, o auxiliar de enfermagem precisará de 33 gavetas para acomodar todos os frascos, com a mesma quantidade de frascos em cada uma delas.

9A2.1 Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa devariação.

PROBLEMA 15 Elis trabalha em uma lanchonete, e é responsável pela compra de polpa da lanchonete. Sabendo que, em média, eles vendem cerca de 30 litros de suco de graviola por dia, e que é gasto 100 g de polpa de graviola para fazer 300ml de suco. Mantendo essa proporção, quantos litros de suco de graviola Elis poderá fazer com 50 kg de polpa de graviola? E por quanto tempo, em média, durará esse estoque?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para resolver essa questão, primeiramente precisamos verificar se os alunos entendem não apenas o problema, mas também os conceitos e termos contido nesse problema, como que

$$1\ litro\ =\ 1000\ ml$$

$$1\ kg\ =\ 1000\ g$$

$$100\ g\ de\ polpa\ \Rightarrow\ 300\ ml\ de\ suco$$

E que queremos saber que

1º Quantos litros de suco de graviola podem ser feitos com 50 kg de polpa?

2º Quanto tempo durará este estoque?

Podemos iniciar pela conversão de unidades.

$$50\times \quad \begin{array}{l} 1\ kg\ =\ 1000\ g \\ 50\ \text{kg}\ = ? \end{array} \quad \times 50$$

Logo, 50 kg de polpa equivalem a 50000 g de polpa.

Observe que

$$500\times \quad \begin{array}{l} 100\ g\ de\ polpa\ \rightarrow\ 300\ ml\ de\ suco \\ 50000\ g\ de\ polpa\ \rightarrow ?\ ml\ de\ suco \end{array} \quad \times 500$$

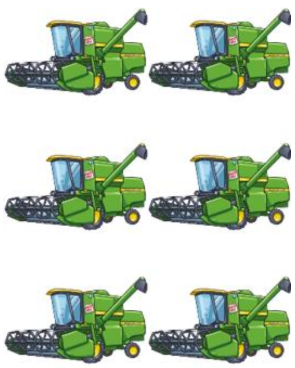
Portanto, 50000 g de polpa equivalem a 150000 ml de suco, convertendo para litros, temos 150 litros de suco.

Agora, temos que calcular o tempo que o estoque durará. Sabemos que a lanchonete vende cerca de 30 litros de suco por dia e temos 150 litros de suco. Daí, devemos dividir 150 por 30. Logo, esse estoque de 150 litros de suco de graviola durará, em média, 5 dias.

PROBLEMA 16 Em uma fazenda chamada "Bom Jardim", **6 tratores** trabalhando no mesmo ritmo colhem uma quantidade x de soja em **30 horas**. Devido a uma antecipação para a exportação do produto, é necessário colher a soja mais rapidamente. Então, para colher essa mesma quantidade de soja em **20 horas**, quantos desses tratores, trabalhando nesse mesmo ritmo, seriam necessários?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA[25]

Os 6 tratores iniciam os trabalhos das 10 primeiras horas.



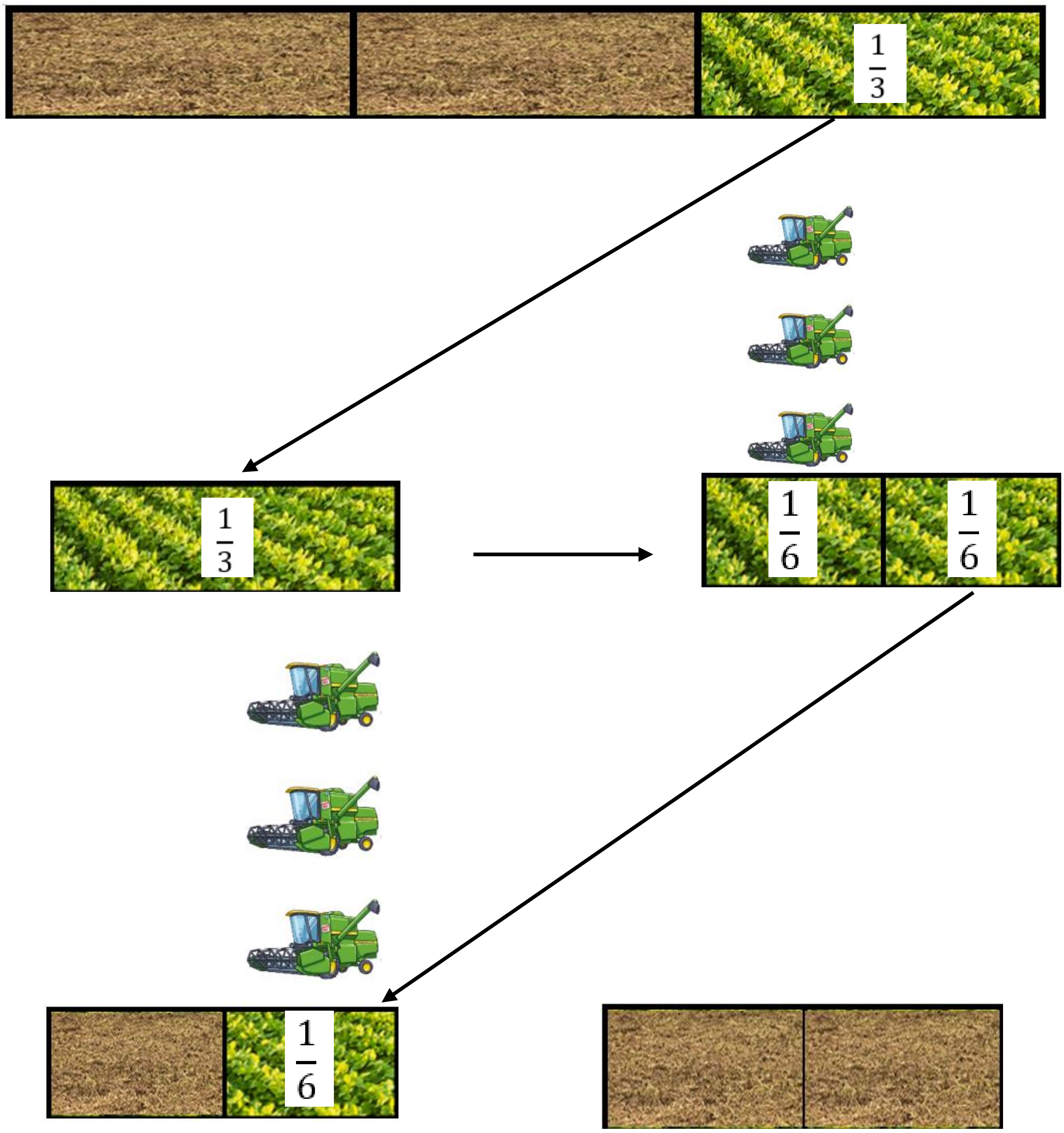
Assim, conclui $\frac{1}{3}$ da colheita da soja. Daí, iniciam mais 10h de trabalho da colheira, fazendo assim mais $\frac{1}{3}$.

[25] As imagens utilizadas para elaboração dessa estratégia de resolução foram retiradas da internet. Disponível em: https://sl.bing.net/cgISihI9Zym.

Desta maneira, executam $\frac{2}{3}$ da colheita em 20h.

Depois, trabalham mais 10h na parte final do campo de soja e completam a colheita nas 30h.

Agora, essa colheita será realizada em apenas 20h abrangendo a mesma quantidade de área para fazer a colheita. Podemos partir da premissa que em 20h os 6 tratores fazem a colheita de $\frac{2}{3}$ da colheita da soja. Então, quantos tratores, a mais, deveríamos pôr para trabalhar durante essas 20 horas para que pudessem colher o restante, que seria $\frac{1}{3}$ da meta da colheita? Se os 6 tratores fazem $\frac{1}{3}$ da colheita em 10 horas, logo 3 tratores fazer a metade de $\frac{1}{3}$ da colheita em 10 horas e mais a outra metade nas outras 10 horas seguintes, completando os $\frac{1}{3}$ restantes em 20 horas de trabalho. Como ilustra as figuras abaixo:



PROBLEMA 17 Ana e Elis tomaram a decisão de adquirir um terreno com área total de 960 m² em conjunto e planejam dividi-lo em dois lotes, um para cada uma, de forma que as dimensões de área sejam proporcionais às quantias que cada uma investiu na compra. Ana fez uma contribuição de R$ 6.000,00, ao passo que Elis contribuiu com R$ 4.000,00. Qual deve ser a área correspondente de cada lote?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Primeiro, precisamos somar as contribuições deles:

- Contribuição total = R$ 6.000,00 (Ana) + R$ 4.000,00 (Elis) = R$ 10.000,00

Vamos calcular a proporção da contribuição de cada um em relação ao total:

- Proporção de Ana = $\frac{\text{Contribuição Ana}}{\text{Contribuição total}} = \frac{\text{R\$ 6000,00}}{\text{R\$ 10000,00}} = \frac{6}{10}$
- Proporção de Elis = $\frac{\text{Contribuição Elis}}{\text{Contribuição total}} = \frac{\text{R\$ 4000,00}}{\text{R\$ 10000,00}} = \frac{4}{10}$

Agora, usando essas proporções, podemos calcular a área que cada um deve receber do terreno de 960 m²:

- Área de Pedro = $960 \times \frac{6}{10} = \frac{960\times6}{10} = 576\ m^2$
- Área de Paulo = $960\ \times \frac{4}{10} = \frac{960\times4}{10} = 384\ m^2$

Portanto, as áreas de cada lote devem ser as seguintes: o lote de Ana deve ter 576 m², enquanto o lote de Elis deve ter 384 m². Dessa forma, a divisão é justa e reflete a contribuição que cada uma fez para a compra do terreno.

9A2.3 Resolver problemas que possam ser representados por um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas.

PROBLEMA 18 [26](BPW). Observe os preços dos ingressos de um show de um cantor numa casa de espetáculo.

[26] Retirado do blog do Prof. Warles. Disponvel em https://docs.google.com/document/d/13zSNzy1Ff8r_RQVui-yQolAnbpUc24GV/edit

Nesse show foram vendidos 200 ingressos, arrecadando um total de R$ 12000,00. A quantidade de ingressos de meia entrada foi de:

A) 160. B) 100. C) 40. D) 20.

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Seja “x” a quantidade de ingressos de meia-entrada e “y” a quantidade de ingressos inteiros. Temos que

$$x + y = 200, em\ que\ 200\ \text{é}\ o\ total\ de\ ingresso\ vendidos$$

$$50x + 100y = 12000, em\ que\ 12000\ \text{é}\ o\ valor\ arrecadado$$

Assim, formamos um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 200\ (\mathrm{I}) \\ 50x + 100y = 12000(II) \end{cases}$$

Podemos resolver esse sistema de equações de várias maneiras, vamos resolver pelo método da substituição.

Da equação (I), podemos expressar $y = 200 - x\ (III)$

Substituindo (III) em (II), temos

$$50x + 100y = 12000$$

$$50x + 100(200 - x) = 12000$$

$$50x + 20000 - 100x = 12000$$

$$50x = 8000$$

$$x = 160\ (IV)$$

Portanto, foram vendidos 160 ingressos de meia-entrada.

Substituindo $(IV)\ em\ (III)$ para encontrar y,

$$y = 200 - 160 = 40$$

Assim, temos 160 ingressos de meia-entrada e 40 ingressos inteiros.

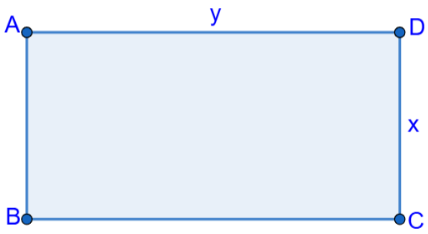
9A2.4 Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau.

PROBLEMA 19 Deseja-se fazer um cercado para minhas galinhas, no formato retangular, com área máxima. O material disponível é suficiente para erguer 16 m de cerca. Quais medidas devem ter os lados do retângulo para que a área seja máxima?

Fonte: Internet

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Seja “x” o comprimento de um lado do retângulo e “y” o comprimento do outro lado.



Podemos iniciar desenhando alguns exemplos de retângulos que podemos formar com o perímetro igual a 16 metros.

Figura 79 - Área = 7 m²

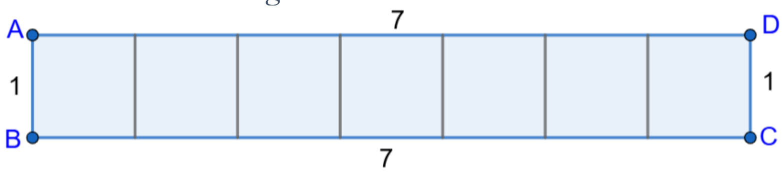


Figura 80 - Área = 12 m²

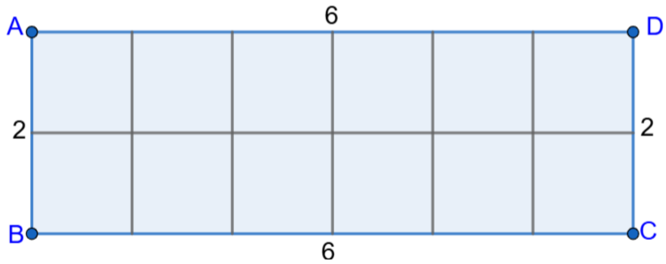


Figura 81 - Área = 15 m²

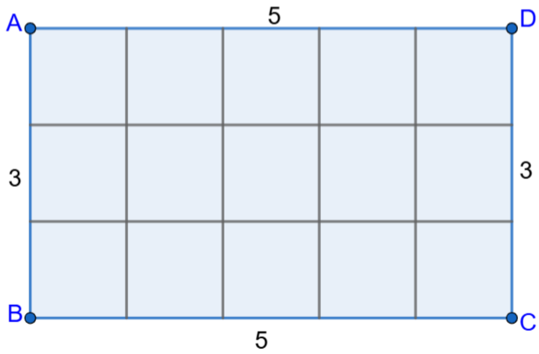
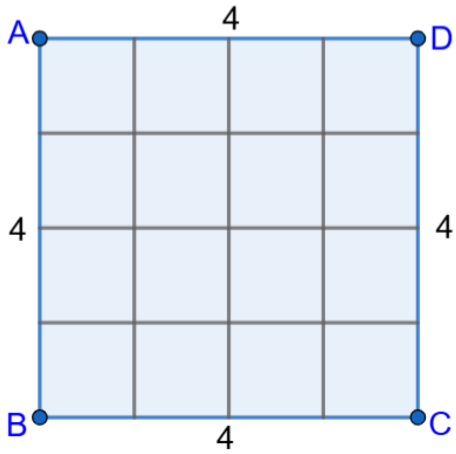


Figura 82 - Área = 16 m²



Assim, podemos visualizar que o retângulo com a maior área, mantendo o perímetro igual a 16 metros, é o quadrado com lado de 4 metros.

Por outro lado, podemos considerar "x" como o comprimento de um lado do retângulo e "y" como o comprimento do outro lado. A relação do perímetro é expressa por:

$$2x + 2y = 16 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x \ (I)$$

A área "A" do retângulo é dada por:

$$A = x \, . \, y \ (II)$$

Substituindo (I) em (II),

$$A = x . y \Rightarrow A = x . (8 - x) \Rightarrow A = 8x - x^2$$

Resolvendo esse polinômio quadrático, que apresenta a forma de uma parábola, concluímos que a área atinge seu valor máximo quando "x" é igual a 4, que corresponde ao vértice da parábola, a qual tem concavidade voltada para baixo.

Portanto, o retângulo com perímetro igual a 16 metros que possui a maior área é o quadrado com lado medindo 4 metros.

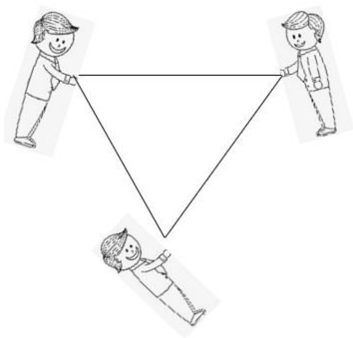
PROBLEMA 20 [27] (Adaptado) Cumprimente antes de iniciar a aula - Trinta alunos iniciaram o ano letivo de 2024. Antes de iniciar a aula, o professor pede para cada aluno cumprimentar, com as mãos, todos os colegas de turma. Quantos cumprimentos haverá ao todo?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA[28]

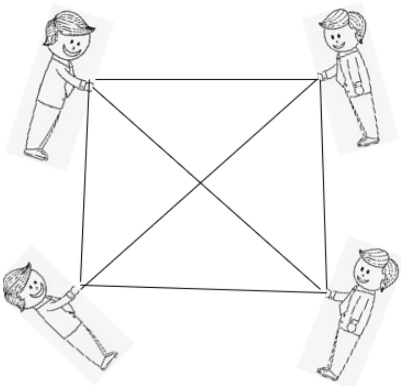
Podemos iniciar com menos alunos para observar o que ocorre, como por exemplo:

Se for 2 pessoas, teremos 1 cumprimento de mãos

Se for 3 pessoas, teremos 3 cumprimentos de mãos



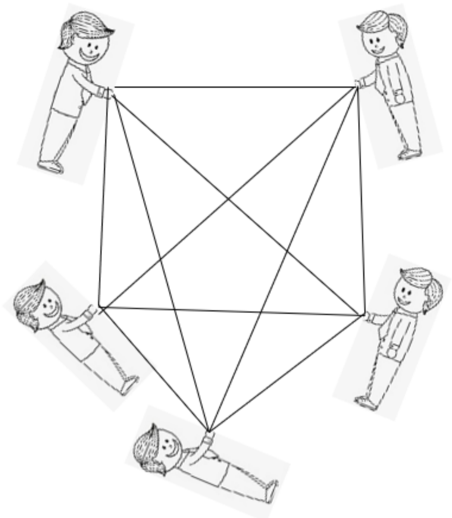
Se for 4 pessoas, teremos 6 cumprimentos de mãos



Se for 5 pessoas, teremos 10 cumprimentos de mãos

[27] ONUCHIC, L. D. L. R. et al. **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021, p. 196.

[28] A imagem do menino, utilizada nessa solução foi retirada da internet.



Podemos observar que cada um cumprimenta uma pessoa a menos que as existentes, logo $n-1$ pessoas. Porém, cada cumprimento é contado duas vezes pelas pessoas que cumprimentam, então $\frac{n-1}{2}$. Isso ocorre quantas vezes for o número de alunos, ou seja, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

9A2.5 Resolver problemas que envolvam função afim.

PROBLEMA 21 O valor médio de venda de Fone de ouvido inclui uma margem de lucro de 22,5 %. O preço sem esta margem é conhecido como “preço de atacado”.

Loja: O MUNDO DOS ACESSÓRIOS[29]		
Fone de ouvido	Microfone	Ring light
		
265 reais	330 reais	59 reais

As fórmulas abaixo apresentam uma relação correta entre o preço de atacado “a” e o de venda “n”?

[29] Os elementos, como o fone de ouvido, microfone e o ring light, foram retirados da internet.

A) $a = n + 0{,}375$ B) $n = a - 0{,}375a$ C) $a = 1{,}375n$ D) $n = 0{,}625a$

9G2.3 Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos internos ou externos de polígonos ou cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos.

PROBLEMA 22 [30](Saeb-adaptado) A configuração do ringue onde se luta o MMA, possui oito lados e foi idealizada pelo brasileiro Rórion Gracie. Essa configuração, evita que um lutador acuado se esconda em um canto de 90° no encontro das cordas, como ocorre no boxe. Considerando o octógono, onde se luta as artes marciais mistas, um polígono regular, quanto mede cada um dos ângulos internos de um octógono regular?

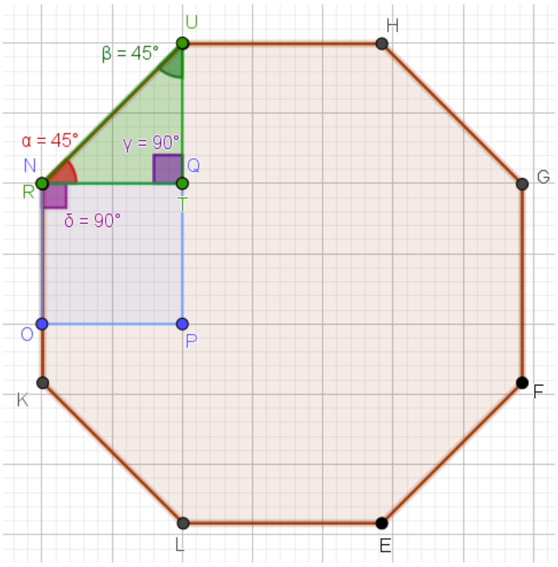
A) 45. B) 80. C) 125. D) 135.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Sugerimos uma abordagem visual na resolução desta questão.

Observe que temos um polígono regular, especificamente um octógono, no qual todos os lados possuem a mesma medida. Assim, qualquer análise realizada em um dos lados será aplicável a todos os demais. É interessante notar que podemos desenhar um triângulo retângulo isósceles apoiado em um dos lados do octógono. Além disso, podemos traçar um retângulo apoiado em outro lado do octógono, conforme ilustrado na figura abaixo:

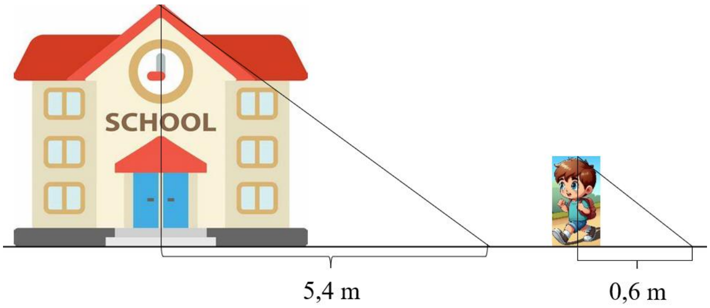
[30] AMAZONAS. **AVAM - CADERNO DE APOIO - MATEMÁTICA – 9o ANO**. Manaus: [s.n.], v. 1, 2023. Disponivel em: <https://drive.google.com/file/d/1KvrHQa2C5BlT4htkn0wMAgAiBNbDbZTz/view>. Acesso em: 25 Agosto 2023.



Assim, podemos observar que o ângulo representado na cor vermelha mede 45°, enquanto o ângulo em lilás mede 90°, formando, dessa maneira, um dos ângulos internos do octógono, cuja soma é 45° + 90° = 135°.

9G2.5 Resolver problemas que envolvam polígonos semelhantes.

PROBLEMA 23 (adaptado do blog) Para determinar a altura de sua escola, um excelente aluno de matemática usou o seguinte recurso: sabendo que sua altura é 1,60 m, mediu a própria sombra e a da escola no mesmo instante, encontrando 0,6 m e 5,4 m, respectivamente.

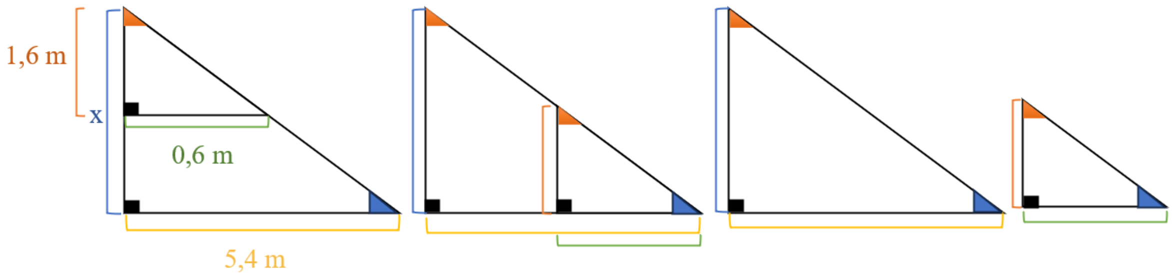


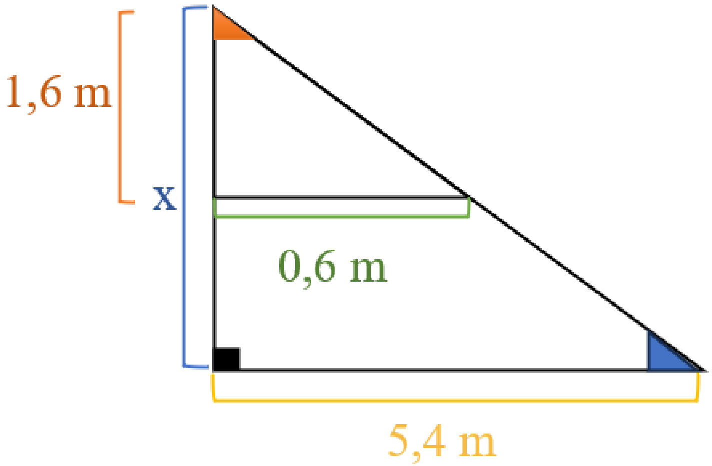
A altura encontrada foi de:

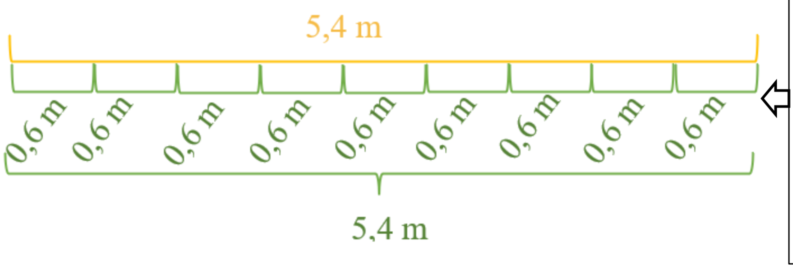
A) 7,6 m B) 2,025 m C) 5,184 m D) 14,4 m

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para determinar a altura da escola, podemos observar que os triângulos formados são semelhantes, no caso A.A.A. Assim, podemos utilizar a semelhança de triângulos. Sabendo que a altura do menino é 1,60 m e sua sombra 0,6, e que a sombra da escola é 5,4 m, supondo que “x” seja a altura da escola em metros, de forma visual, podemos pensar das seguintes formas:



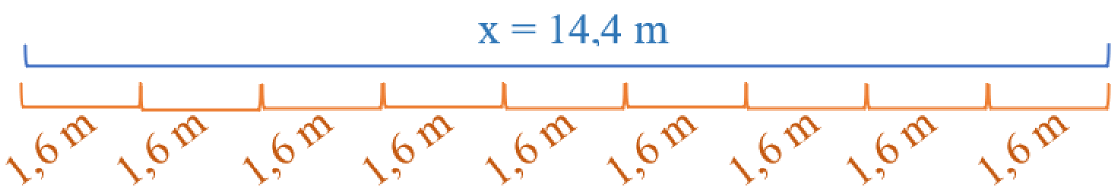




Podemos observar que dentro de 5,4 m cabe 9 vezes o 0,6 m. Assim, temos a relação:

$$\frac{5{,}4\ m}{0{,}6} = 9$$

Portanto, podemos concluir que dentro de x cabe 9 vezes 1,6 m, logo x é igual a 14,4 metros



Algebricamente, podemos calcular a altura da escola da seguinte forma:

Propriedade fundamental das proporções: Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{x}{1,6} = \frac{5,4}{0,6} \rightarrow \underbrace{0,6x} = \underbrace{5,4 \, . \, 1,6}$$

$$0,6x = 8,64 \rightarrow x = \frac{8,64}{0,6} \rightarrow x = 14,4\ m$$

Ou

$$\frac{x}{1,6} = \frac{5,4}{0,6} \rightarrow \frac{x}{\cancel{1,6}} \times \cancel{1,6} = \frac{5,4}{0,6} \times 1,6 \rightarrow x = 9 \times 1,6 \rightarrow x = 14,4\ m$$

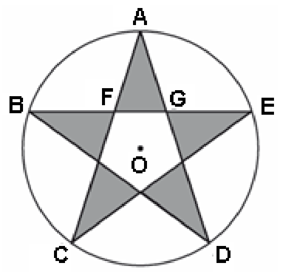
9G2.7 Resolver problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência/círculo (raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).

PROBLEMA 24[31] (adaptado) Na figura a seguir, está representado um modelo geométrico do símbolo da bandeira de uma equipe de futsal.

Neste modelo não está desenhado à escala.

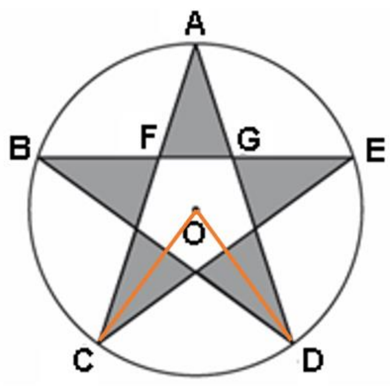
Sabe-se que:

- A, B, C, D e E são pontos da circunferência de centro no ponto O;
- F e G são pontos da corda BE.
- $\overline{AF} = \overline{AG} = 16\ cm$
- $C\hat{A}D = 36°$



Qual é o valor do arco CD? Quanto mede os ângulos da base $\overline{FG}$ do triângulo AFG?

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA



[31]Problema retirado do blog do Prof. Warles. Disponível em https://docs.google.com/document/d/1dF0MmT99oDyLYcJSKe4O0rDuQKQt_Tpu/edit

Para determinar o valor do arco CD e os ângulos da base FG do triângulo AFG, podemos usar algumas propriedades das circunferências e dos triângulos.

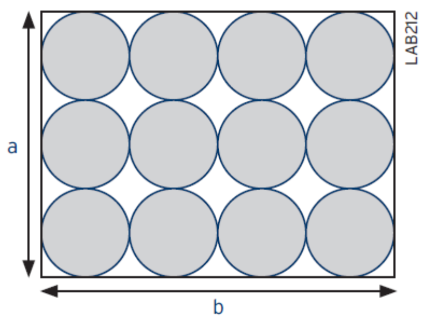
- Valor do arco CD: Temos que a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente. Portanto, se o ângulo central correspondente $C\hat{A}D = 36°$, então o ângulo inscrito $C\hat{O}D = 72°$ (pois 36° é metade de 72°).
- Ângulos da base FG do triângulo AFG: Como os segmentos de reta AF e AG têm a mesma medida (AF = AG = 16, cm), podemos afirmar que o triângulo AFG é isósceles. É importante lembrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°. Em um triângulo isósceles, uma propriedade fundamental é que os ângulos opostos aos lados iguais também são iguais entre si. Portanto, no triângulo AFG, os ângulos opostos aos lados AF e AG, que denominamos como Ângulo $\hat{F}$ e Ângulo $\hat{G}$, são igualmente iguais. Com isso, podemos concluir que:

$$x + x + 36° \ = 180° \Rightarrow 2x + 36° = 180°$$

$$2\text{x} = 180° - \ 36° \Rightarrow 2\text{x} = 144° \Rightarrow \text{x} = \ 72°$$

Portanto, os ângulos da base FG do triângulo AFG medem 72° cada um.

PROBLEMA 25[32] A figura mostra a vista superior de uma caixa, em formato retangular de dimensões *a* e *b*, em cm, que contém 12 círculos idênticos com raio igual a 10 cm e tangentes entre si e à caixa. Somando-se *a* e *b*, obtêm-se:



A) 120 cm. **B)** 140 cm. **C)** 240 cm. **D)** 280 cm.

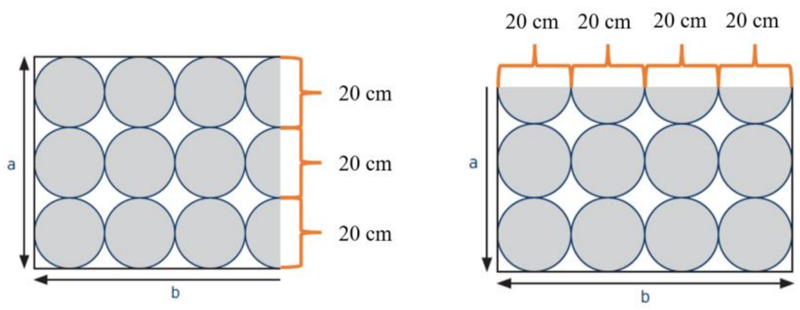
POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Neste problema, o professor pode explorar com os alunos a relação entre o raio, o diâmetro e as medidas envolvidas, além do termo "tangente". Assim, compreendendo tanto o

---

32 Acerta Brasil: Matemática: 9º ano: Ensino fundamental 2 / Obra coletiva. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2020, p.84.

problema quanto os termos envolvidos, bem como a disposição dos círculos dentro da caixa retangular e que o diâmetro é o dobro do raio, podemos observar que os círculos têm um diâmetro de 20 cm, conforme ilustra a figura abaixo.



Assim temos que

$$a = 20\ cm + 20\ cm + 20\ cm = 60\ cm$$

$$b = 20\ cm + 20\ cm + 20\ cm + 20\ cm = 80\ cm$$

Portanto, somando-se a e b, obtemos

$$a + b = 60 \text{ cm} + 80 \text{ cm} = 140 \text{ cm}.$$

9M2.1 Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas (comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade ou volume) em que haja conversões entre unidades mais usuais.

PROBLEMA 26 Dona Joana produziu 10 litros de doce de cupuaçu e vai encher os 35 potes de 250 ml, que tem disponível em casa, para vender na feira. Não havendo desperdício, quantos litros de doce sobrarão depois que ele encher todos os potes?

(A) 1 (B) 1,25 (C) 1,5 (D) 2

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Podemos começar nossa estratégia de solução analisando casos com quantidades menores. Por exemplo, vamos determinar quantos potes podemos encher com 1 litro de doce de cupuaçu.

Assim, sabemos que para cada 4 potes, utilizamos 1 litro de doce de cupuaçu. Portanto, podemos concluir que:

$$1\ litro \to 4\ potes$$
$$2\ litros \to 8\ potes$$
$$3\ litros \to 12\ potes$$
$$4\ litros \to 16\ potes$$
$$5\ litros \to 20\ potes$$
$$6\ litros \to 24\ potes$$
$$7\ litros \to 28\ potes$$
$$8\ litros \to 32\ potes$$
$$\underline{750\ ml \ \to 3\ potes}$$
$$8\ litros\ e\ 750\ ml \to 35\ potes$$

Daí temos que para encher os 35 potes, Dona Joana utilizará 8 litros e 750 ml. Como ela possui 10 litros de doce, agora vamos subtrair a quantidade utilizada do total disponível:

$$10\ litros\ -\ 8\ litros = 2\ litros = 2000\ ml$$

$$\boxed{1\ litro\ =\ 1000\ ml}$$

$$2000\ ml\ -\ 750\ ml = 1250\ ml = 1{,}25\ litros$$

Portanto, depois de encher todos os potes, sobrarão 1,25 litros de doce de cupuaçu.

PROBLEMA 27 A carga máxima que um caminhão pode transportar é de 8 toneladas. O número máximo de sacos de cimento, de 60 kg, que esse caminhão pode transportar, em uma única viagem, é:

A) 131. B) 133. C) 135. D) 137.

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Observe que as unidades de medida são diferentes. Portanto, precisamos primeiro converter tudo para uma única unidade de medida. Lembre-se de que 1 tonelada equivale a 1.000 kg. Assim, como a carga máxima do caminhão é de 8 toneladas, isso corresponde a 8.000 kg.

$$\begin{array}{rl} & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ & 1\,tonelada = 1000kg \\ + & 1\,tonelada = 1000kg \\ \hline & 8\,tonelada = 8000kg \end{array}$$

ou

x 1000

$$1\,tonelada \rightarrow 1000kg$$

$$8\,tonelada \rightarrow 8000kg$$

x 1000

Agora, podemos dividir a carga máxima de 8.000 kg pelo peso de cada saco, que é de 60 kg. Além disso, podemos considerar estratégias alternativas. A seguir, apresento um exemplo:

1 saco de cimento = 60 kg

2 sacos de cimento = 120 kg

3 sacos de cimento = 180 kg

4 sacos de cimento = 240 kg

⋮

10 sacos de cimento = 600 kg

20 sacos de cimento = 1200 kg

30 sacos de cimento = 1800 kg

40 sacos de cimento = 2400 kg

⋮

100 sacos de cimento = 6000 kg

200 sacos de cimento = 12000 kg

Para nos aproximarmos dos 8.000 kg, podemos realizar o seguinte agrupamento:

100 sacos de cimento = 6000 kg

+

30 sacos de cimento = 1800 kg

+

3 sacos de cimento = 180 kg

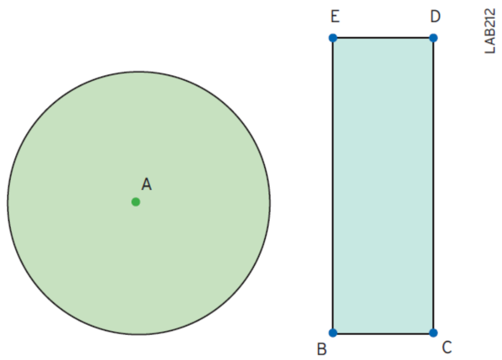
=

133 sacos de cimento = 7880 kg

Como não é possível transportar uma fração de um saco, o número máximo de sacos que o caminhão pode transportar em uma única viagem é 133 sacos.

9M2.2 Resolver problemas que envolvam perímetro de figuras planas.

PROBLEMA 28[33] A figura mostra a vista superior de duas vigas de concreto. A seção transversal de uma delas tem formato circular com centro A e diâmetro de 32 cm, e a outra tem formato retangular (BCDE), em que a medida de um dos lados tem o triplo da medida do lado adjacente. Um pedreiro colocou uma corda em volta delas e percebeu que os comprimentos eram iguais, ou seja, que as duas vigas têm o mesmo perímetro. A medida da base BC da viga retangular é, em cm, igual a:



A) 4π. B) 8π. C) 16π. D) 32π.

Livro: Acerta Brasil, página 55, 9 ano

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Vamos analisar as duas vigas e seus perímetros.

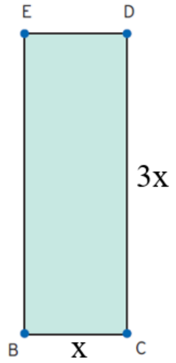
Na viga circular, o diâmetro (d) é igual a 32 cm, logo o raio (r) é igual 16 cm (o raio é metade do diâmetro). Para calcular o perímetro (comprimento da circunferência) de um círculo, usamos a fórmula:

$$C = \pi . d \ ou \ C = 2 . \pi . r$$

[33] Acerta Brasil: Matemática: 9º ano: Ensino fundamental 2 / Obra coletiva. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2020, p.55.

$$C = 32.\pi\ (I)$$

Na viga Retangular, vamos chamar a medida da base $\overline{BC}$ de x cm. Como um dos lados tem o triplo da medida do lado adjacente, a altura $\overline{DE}$ será 3x.



O perímetro de um retângulo é dado pela soma das medidas de seus lados:

$$x + 3x + x + 3x = 8x(II)$$

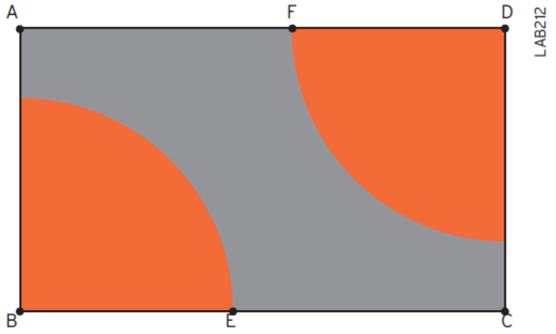
Como os perimetros são iguais, agora, vamos igualar os Perímetros:

$$32.\pi = 8x \Rightarrow x = \frac{32\pi}{8} \Rightarrow x = 4\pi$$

Portanto, a medida da base $\overline{BC}$ da viga retangular é $4\pi\ cm$.

9M2.3 Resolver problemas que envolvam área de figuras planas.

PROBLEMA 29 [34]No quintal retangular ABCD de dimensões 4 metros e 7 metros, conforme a figura, serão plantadas roseiras nos setores circulares laranjas de raio 3 metros. Adote $\pi \cong 3$. A área do quintal em que não serão plantadas roseiras, em cinza, mede:



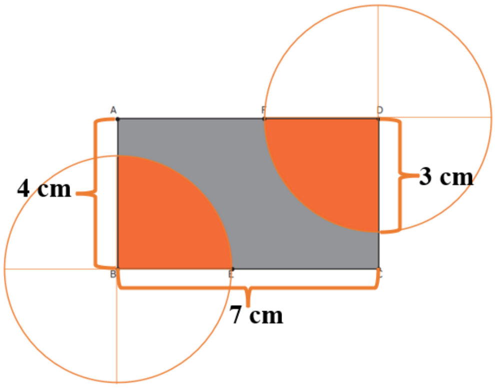
(A) 11,5 m². **(B)** 12,5 m². **(C)** 13,5 m². **(D)** 14,5 m².

Livro: Acerta Brasil, página 87, 9 anos.

[34] Acerta Brasil: Matemática: 9º ano: Ensino fundamental 2 / Obra coletiva. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2020, p.87.

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Observe a figura abaixo:



Note que a parte laranja representa $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ do círculo com raio de 3 metros, onde serão plantadas as roseiras. Para calcular a área do quintal onde não serão plantadas roseiras, podemos calcular a área do retângulo e subtrair dela a área correspondente à metade do círculo.

- Calcular a área A_r total do quintal retangular ABCD:

$$A_r = base\,.\,altura = 4.7 = 28\ cm^2$$

- Calcular a área A_c das roseiras nos setores circulares laranjas:

$$A_c = \frac{\pi.r^2}{2} = \frac{3.9}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}50\ cm^2 \text{ (metade da área do círculo)}$$

- Calcular a área do quintal onde não serão plantadas roseiras. Subtraímos a área das roseiras da área total do quintal:

$$28\ cm^2 - 13{,}50\ cm^2 = 14{,}50\ cm^2$$

Portanto, a área do quintal em que não serão plantadas roseiras, em cinza, mede 14,50 metro quadrado.

9E1.5 – **Calcular** os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana).

PROBLEMA 30 Sejam dois bairros, A e B, de Manaus. O bairro A possui 1000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência de 250 KWh. O bairro B possui 1500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 KWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros é:

A) 275 KWh

B) 280 KWh

C) 287,5 KWh

D) 292,5 KWh

POSSÍVEIS ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Seja a média do Bairro A dada por:

$$Média = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{1000}}{1000} = 250\ kwh$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{1000} = 1000\ \times 250kwh = 250000kwh$$

E a média do Bairro B dada por:

$$Média = \frac{B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1500}}{1500} = 300\ kwh$$

$$\Rightarrow B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1500} = 1500\ \times 300kwh = 450000kwh$$

Então, considerando os dois bairros a média é dada por:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{1000} + B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1500}}{1000 + 1500} = \frac{250000 + 450000}{1000 + 1500}$$

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{1000} + B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1500}}{1000 + 1500} = \frac{700000}{2500} = 280kwh$$

Portanto, o consumo médio mensal de energia elétrica por residência nos dois bairros é $280kwh$.

GEORGE POLYA

Como Resolver um Problema segundo George Polya

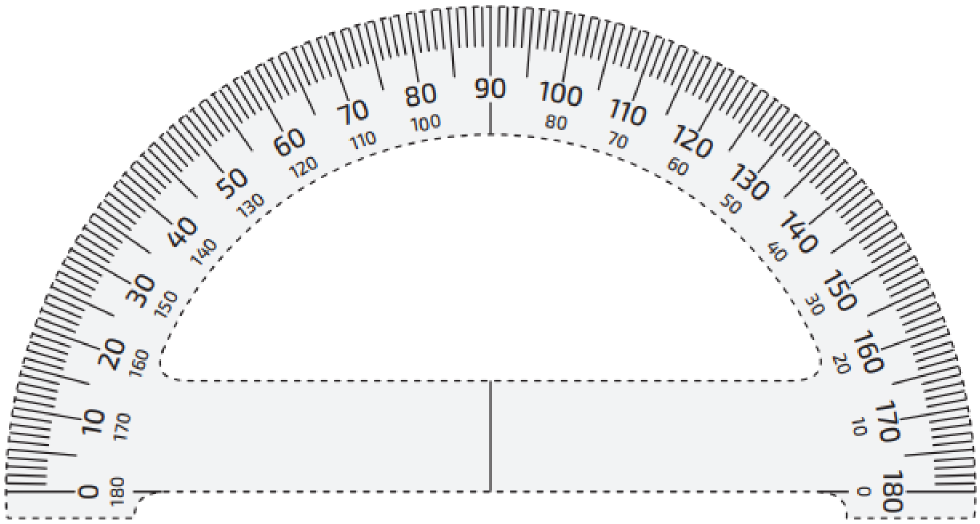
	COMPREENSÃO DO PROBLEMA
Primeiro É preciso compreender o problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionantes? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
	ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposta, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

	Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
	EXECUÇÃO DO PLANO
Terceiro Execute o seu plano.	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
	RETROSPECTO
Quarto Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA, George. A arte de resolver.

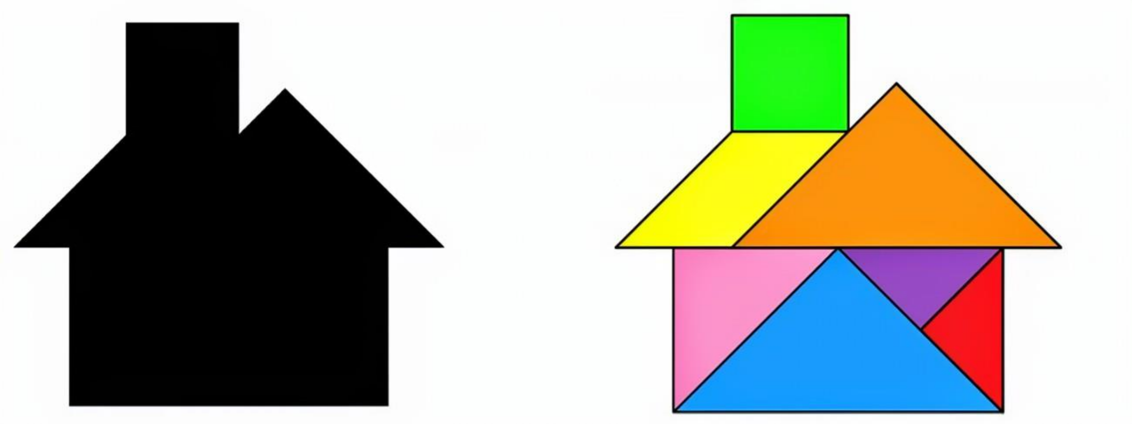
(POLYA, 2006)

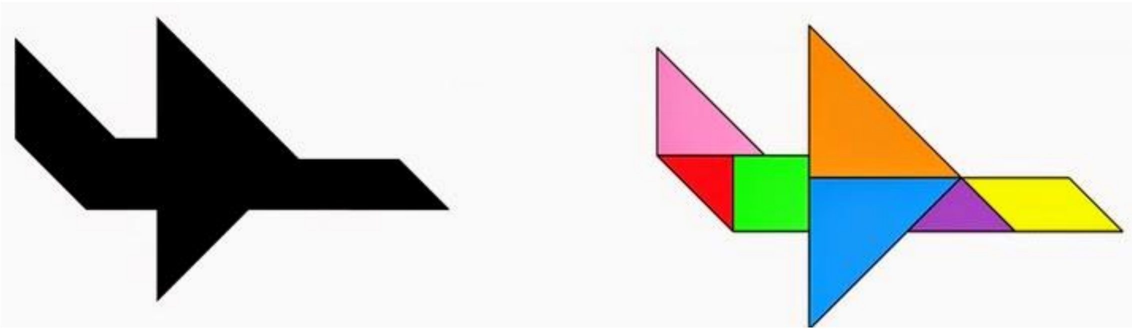
MODELO PARA IMPRESSÃO DO TRANSFERIDOR

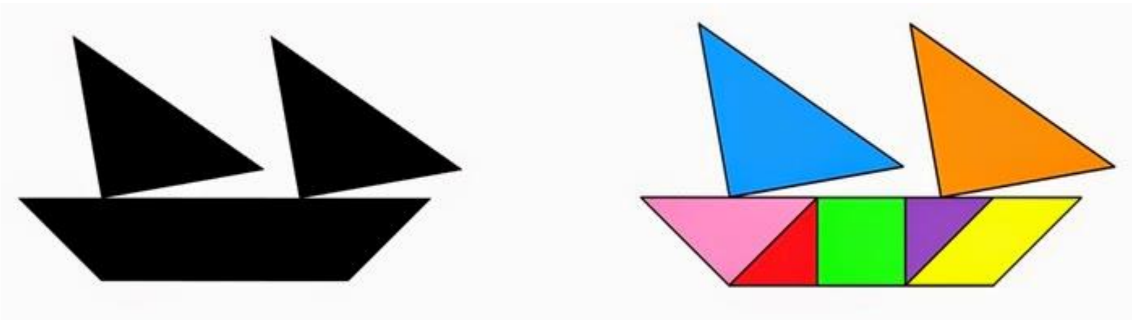


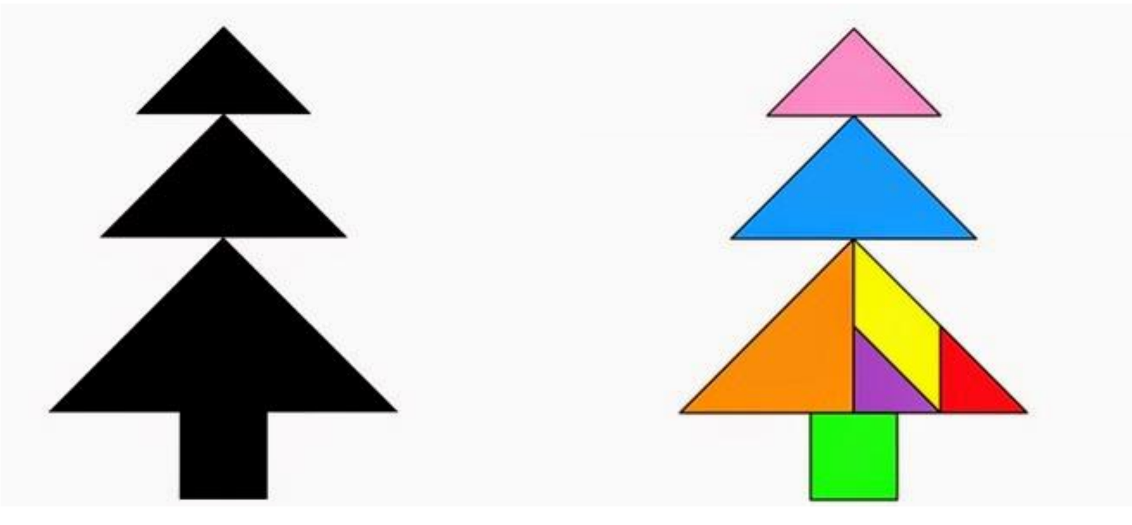
Fonte: [PNLD20_Matematica_Essencial_9ano_PR-www.leonardoportal.com (2).pdf]

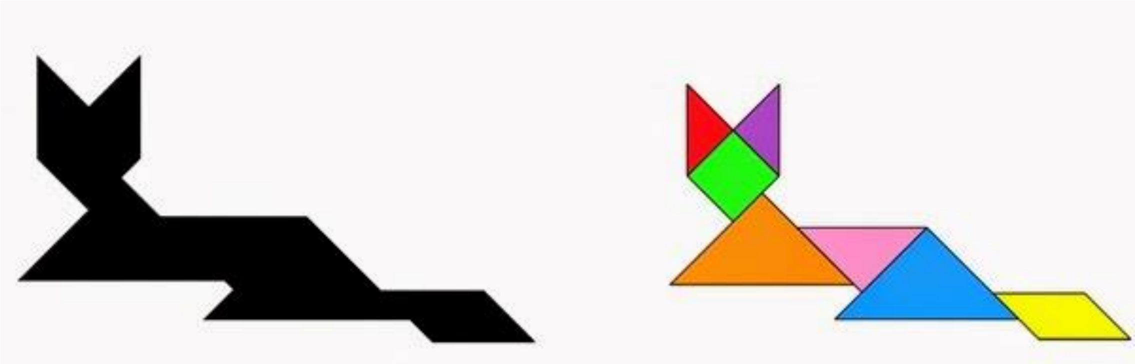
MODELOS DE FIGURAS COM TANGRAM

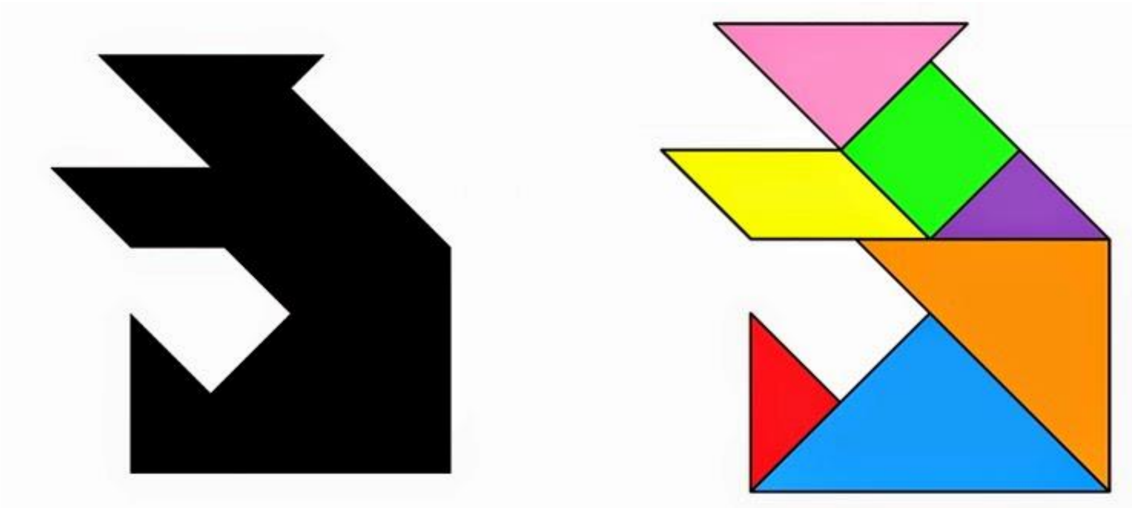












Fonte das figuras: Rosearts- Atividades para imprimir: Tangram- Diferentes figuras com sombra (BRASIL, 1997)(roseartseducar.blogspot.com)