Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino †

por

Francisco Ferreira de Paulo

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino

por

Francisco Ferreira de Paulo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPE

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva - UFRPE

Dezembro/2013.

Agradecimentos

A **Deus**, por ter me estendido as mãos nos momentos de dificuldades, proporcionando-me saúde, discernimento, disposição, coragem, atitude e sabedoria para seguir em frente, sem esmorecimento. Muito obrigado por todas as bênçãos que me fizeram acreditar, durante esta caminhada, que ao seu lado sempre é mais fácil e confortável. Com Ele tudo é possível;

Em especial à minha mãe **Marieta Rufino**, ao mostrar que estudar é o caminho mais curto para se vencer, honestamente, na vida. Ela que tanto me incentivou e ensinou a ser justo coerente e digno;

Ao meu inesquecível pai **José Ferreira** *(in memorian)*, que enquanto pôde me proteger assim o fez, além de sua lição de vida, pela forma como respeitava o próximo, pelos atos de solidariedade praticados. Atitudes dignas de um grande ser humano;

Aos meus irmãos **Marcelo, Vasconcelos, Maria da Conceição, Damião e Juliana**, pela união, cumplicidade e companheirismo, mas principalmente pela ternura, meiguice e carinho com que sempre me trataram; Aos meus avôs **José Rufino, Ana Porfírio e Antônia Ferreira**, por tudo que representaram; Aos meus amigos de uma forma geral, por estarem perto quando precisei e principalmente ao estimado **Flávio Alves** por sua colaboração na intricada arte de formatar textos; Aos meus companheiros de curso, em especial, **Marcelo Calcinha, Herbert Sousa, Antônio Geraldo, Fernando Viana e Sílvio Orleans** pela amizade construída, pela solidariedade, bem como pelas gratificantes aulas particulares que me deram;

Aos meus professores, pelos conhecimentos transmitidos durante todo o curso e pela paciência que tiveram para lidar com as dificuldades surgidas. Em particular à professora **Flávia Jerônimo**, pela sabedoria em lidar com as adversidades; Ao meu professor orientador, **Dr. Manassés Xavier**, bem como à banca examinadora, também composta pelos professores doutores Uberlandio Severo e Tarciana da Silva, pela paciência, pelo compromisso, pela responsabilidade que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho; À minha filhinha **Maria Clara**, por em tão pouco tempo encher de alegria e felicidade toda a família. Principalmente porque ela me proporcionou enxergar a vida com mais doçura e responsabilidade: mil beijos!

E, por último, à minha amada e querida esposa **Mylene Jacome**, por todo amor demonstrado, pela compreensão e paciência da ausência, pela solidariedade e comprometimento para se superar nos momentos de cansaço e dificuldade e, especialmente, pela ternura com que me presenteou durante todo esse tempo. A ela, por merecimento, dedico este trabalho.

"Ninguém pode conceber tão bem uma coisa e fazê-la sua, quando a aprende de um outro, em vez de a inventar ele próprio"

René Descartes

Dedicatória

Aos professores Vanita Leitão e Raimundo Valmiro Pinto (ambos in memorian), por tudo aquilo que me proporcionaram, ensinaram, e principalmente pela grande lição de humildade e honestidade oferecidas em todas as ocasiões de aprendizado - os dois serão sempre lembrados como grandes amigos e mestres.

Dedico!

Resumo

O tema que ora estudamos “Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino” procura, diante da riqueza de opções, priorizar a pesquisa com materiais concretos e de fácil acesso ao aluno e ao professor. Assim, fizemos um breve histórico da origem e das teorias necessárias às aplicações do cálculo de probabilidade, envolvendo jogos de azar com moedas, dados e baralhos, proporcionando, assim, um trabalho de forma concreta e útil para a aprendizagem significativa do aluno.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos de azar. Cálculo de Probabilidades. Seguros.

Abstract

The theme that sometimes we study “A Historical Analysis of the Development and Use of Materials Probability concrete For your Teaching ” demand, considering the wealth of options, prioritize research with concrete materials and easy access to the student and the teacher. So we did a brief history of the origin and theories necessary for the calculation of probability applications involving gambling with coins, dice and playing cards, thus leading to a more concrete and useful way for meaningful student learning.

Keyword: Gambling. Calculation of Probabilities. Insurance.

Sumário

Introdução

A probabilidade é um dos ramos matemáticos mais fascinante. Contendo uma imensa variedade de aplicações práticas, o seu uso em atividades como os jogos, por exemplo, evidenciam o seu elevado teor interdisciplinar. A nossa intenção ao desenvolver esta atividade de cunho bibliográfico é oferecer uma visão panorâmica do desenvolvimento e de algumas explicações pertinentes ao cálculo de probabilidades. É uma atividade que exige, inicialmente, uma vasta pesquisa em busca das principais ideias que norteiam o desenvolvimento deste interessantíssimo campo do saber. Entre os mestres que tanto contribuíram para o surgimento e o fortalecimento do cálculo de probabilidade nos últimos séculos destaca-se Fermat. Apesar de sua capacidade nata para o cálculo, Fermat praticava a matemática apenas como um divertimento. Alias, foi como divertimento que trocando cartas com Pascal desenvolveu, em conjunto, as ideias mais importantes da probabilidade, as quais ainda hoje são usadas nos compêndios especializados. Sem a menor intenção de esgotar o tema estudado, consideramos que este trabalho proporciona uma grande contribuição ao cálculo probabilístico, sobretudo em relação ao seu gradativo desenvolvimento histórico. Ou seja, será feita uma breve descrição das principais descobertas e inovações que possibilitaram o surgimento deste intrigante ramo matemático.

Tomando como ponto de partida a revisão bibliográfica do tema proposto, neste trabalho realiza-se uma análise pormenorizada de autores importantes que consolidaram o desenvolvimento deste ramo matemático. A Probabilidade não é apenas mais um ramo matemático. Afinal já se consolidou como um campo do saber independente, ou seja, uma área possuidora dos seus próprios conceitos e paradigmas. Certamente, para o senso comum, esta constatação ainda não é tão visível. No entanto, com as inovações alcançadas no século XX, a Probabilidade ganhou uma linguagem própria, a qual lhe credencia como uma área autônoma e plenamente capaz.

Como já se deduz diante das ideias apresentadas, o principal objetivo deste trabalho de conclusão de curso é realizar uma breve análise histórica do desenvolvimento da probabilidade, bem como prestar orientação para a utilização de materiais concretos para o ensino da probabilidade.

Aliás, tudo isto será realizado através de uma análise histórica apta a esmiuçar ao máximo as contribuições importantes realizadas por matemáticos notáveis tais como Pascal, Fermat, Laplace e Kolmogorov. Além disto, a intenção subjacente (a qual também motiva a realização deste trabalho de conclusão de curso) é fornecer um material de pesquisa aos professores dos Ensinos Fundamental e Médio, proporcionando assim o acesso a uma fonte de pesquisa que esclareça dúvidas, sobretudo apresentando respostas às indagações normalmente feitas pelos alunos ao desenvolvimento da Probabilidade.

Como não esgota todas as possibilidades teóricas e práticas, certamente a pesquisa realizada possui algumas limitações quanto ao desenvolvimento das ideias por meio do cálculo. No entanto, esta não será uma fraqueza ou uma lacuna que deva receber correções. Afinal a linguagem simplificada é a principal virtude desta investigação que visa ser uma leitura agradável, ou seja, palpável para todos os públicos, incluindo-se o aluno leigo e carente de conhecimento. Sendo assim, este não é um trabalho destinado aos conhecedores do tema, mesmo que sirva como uma boa fonte de leitura e revisão. No entanto, um texto introdutório do tipo perfil enciclopédico, o qual habilite o professor e o aluno receber de maneira mais simples e direta o conhecimento necessário ao desenvolvimento da habilidade matemática na realização do cálculo probabilístico.

Nos últimos anos, o ensino da Matemática passou por muitas experimentações oriundas das críticas que apontam as suas lacunas e falhas. Evidentemente o desafio que precisa ser superado em sala de aula para que o ensino alcance um patamar de eficácia ideal às necessidades de uma educação cidadã e inclusiva ainda é um desafio que não será superado tão facilmente. Com certeza, falta de bons profissionais no mercado, além das inúmeras mazelas oriundas da péssima gestão da educação no Brasil, finalizam-se neste ambiente repleto de dificuldades das mais variadas naturezas e matizes. Apesar das incertezas que imperam em relação à qualidade do ensino da Matemática no Brasil, verifica-se que muita coisa já é perpetrada para que o aluno domine as habilidades essenciais do cálculo durante o seu aprendizado. Afinal não faltam esforços de bons professores, os quais se dedicam exaustivamente nesta labuta tão árdua nos Ensinos Fundamental e Médio tanto nas redes públicas como no ambiente privado de ensino.

Como já foi dito, este trabalho não vai exaurir todas as possibilidades que circundam o estudo deste tema tão intrigante e rico de possibilidades. Contudo, a sua contribuição no surgimento de uma nova abordagem pedagógica no ensino da Matemática, sobretudo da Probabilidade, é algo que não pode ser dissociado dos resultados que aqui serão alcançados ao término de tudo. Aliás, para que isto seja obtido, visam-se os seguintes objetivos na construção do texto desta pesquisa:

1º Apresentar o resumo histórico do cálculo de probabilidades;

2º realizar uma revisão dos principais conceitos que norteiam a prática do cálculo de probabilidades; em seguida;

3º exibir algumas ideias pertinentes aos dados e aos jogos de cartas e as suas relações com o cálculo de probabilidades; e

4º explanar algumas regras dos jogos de cartas que são evidenciados pelo cálculo de probabilidades e

5º evidenciarem as relações que são estabelecidas entre o cálculo de probabilidades com os seguros. No geral, estas são as principais metas que norteiam a realização desta pesquisa.

Capítulo 1

Um breve resumo histórico do cálculo de probabilidades

Como qualquer disciplina, o cálculo de probabilidades não surgiu por acaso. No geral, o seu desenvolvimento resume-se numa constante tentativa de eliminar o acaso das explicações de origem transcendental de todas as coisas realizadas pelo homem no seu cotidiano. Por essa razão, não é à toa a versatilidade deste fértil campo do saber, o qual se reverbera em diversos tipos de estudos desenvolvidos nos últimos 500 anos por inúmeros pesquisadores (VIALI, 2004).

Um dos primeiros nomes associados ao cálculo de probabilidades é o de **Luca Pacioli** (Sansepolcro, 1455 - 1517). Entre as suas ideias mais interessantes destaca-se a sua técnica para a divisão de um prêmio de um jogo de dados inconcluso. Porém, com a expansão marítima, o uso da probabilidade como ferramenta administrativa também é aplicada na indústria dos seguros, sobretudo dos navios mercantes que navegavam com maior frequência os mares naqueles tempos, ou seja, nos séculos XV e XVI.

Girolamo Cardano (Pavia, 1501 - Roma, 1576) é um dos nomes mais importantes no desenvolvimento do estudo matemático das probabilidades por que a sua curiosidade proporcionou descobertas bem interessantes neste campo matemático. Ele iniciou o estudo das probabilidades associando-as ao arremesso de dados (ROQUE, 2012). Nas suas pesquisas, ele concluiu que a distribuição de 2 dados deve ser obtida dos 36 pares ordenados de resultados possíveis e não apenas dos 21 pares (não-ordenados).

Viciado em jogos de azar, Cardano dedicou grande parte de seu tempo no estudo dos jogos. De fato, em sua autobiografia, ele confessa ter jogado diariamente xadrez por mais de quarenta anos e dados por mais de vinte e cinco anos. É fato que na época em que ele viveu, ou seja, no século XVI, um dos passatempos favoritos era o jogo. Evidentemente, ele jogava valendo dinheiro e, além disso, aproveitou esta atividade quando ainda era estudante universitário para se manter. Estes foram fatores que contribuíram para que focasse algum tempo no desenvolvimento de técnicas para obter maior lucro em suas atividades e, consequentemente, melhorando os meios de arrumar sua manutenção. Juntando o útil ao necessário, Cardano começou então a estudar os jogos de azar procurando meios que pudessem maximizar os seus ganhos. A sua principal contribuição ao cálculo probabilístico resume-se no livro *Liber* de Ludo *Aleae* (o livro dos jogos de azar), o qual, na verdade, é apenas um pequeno manual de jogador (GIANELLA, 2006).

Cardano também ensinava neste livro a trapacear. Mas o que importa isso em face do vanguardismo da sua obra? De qualquer maneira, ele foi um dos matemáticos que mais se dedicaram à relação da probabilidade com os jogos de azar. *Liber* de Ludo *Aleae* trata dos jogos de uma maneira muito abrangente. Neste livro, é feito um estudo detalhado sobre os jogos, o qual os agrupa por diferentes características: 1º jogos que usam a força, habilidades e sorte; e 2º aqueles caracterizados como jogos de azar - como as cartas, os dados e o gamão. Uma característica desse livro é que ele se apresenta como a ligação entre a matemática e a diversão. É um manual de jogos de azar, na sua essência, especificando que em alguns jogos a habilidade do jogador também influencia o resultado, pois as cartas geralmente ficam escondidas (VIALI, 2004). Cardano também faz uma abordagem estatística da probabilidade, podendo inclusive ter sido o primeiro a fazer isso.

> Na parte técnica do livro, Cardano discutiu equiprobabilidade, esperança (o montante correto da aposta a ser feita por um jogador que tem p de ganhar a importância s), estabeleceu a lei $P_n = P^n$, que dá a probabilidade de que um evento de probabilidade P ocorra independentemente n vezes sucessivas, achou tábuas de probabilidades para dados e usou a chamada lei dos grandes números (de modo rudimentar) - questão em que foi o pioneiro (PAIVA, 1995, p. 75).

Outro grande matemático italiano de renome que estudou as probabilidades de maneira assídua foi **Tartaglia (Brescia, 1500 - Veneza, 1557)**. Nicolo Fontana de Brescia, ou seja, Tartaglia foi um matemático cujo nome é associado à tabela triangular, o conhecidíssimo "Triângulo de Pascal" (GIANELLA, 2006). Ele também é o autor de um tratado genérico de números e medidas, o qual foi publicado pela primeira vez em 1543.

Nascido em 17 de agosto de 1601, em Beaumont-de-Lomagne na França, **Pierre de Fermat** foi um matemático amador que se notabiliza por suas sensacionais descobertas nos mais variados ramos matemáticos. Aliás, aparentemente o seu "amadorismo" contribuiu para que as suas inúmeras descobertas proporcionassem muitas inovações. Tanto é que não é à toa o seu imenso reconhecimento nos dias de hoje, apesar de sua dedicação recreativa à matemática como um todo (VIALI, 2004).

Como um autêntico autodidata, Fermat destacou-se na matemática sem manifestar interesses acadêmicos ou profissionais. Afinal, como jurista e magistrado da corte francesa do século XVIII os seus trabalhos com os números era apenas um passatempo, um divertimento. Pelo menos foi um passatempo que transmitiu um valioso legado ao porvir, sobretudo no campo do cálculo probabilístico. Se como jurista e magistrado ele é reconhecido como um profissional mediano, como matemático é apontado como um dos maiores mestres de todos os tempos, mesmo que não tenha recebido o devido reconhecimento em vida. Aliás, é notório o seu desapego com a matemática, principalmente avaliando-se a sua extensa correspondência com famosos pesquisadores que viveram na mesma época, além das suas inovações que só foram publicadas postumamente, incluindo-se as suas ideias mais importantes na área das probabilidades.

Além de sua dedicação à matemática e da sua atuação profissional no campo jurídico, Fermat também é reconhecido como um exímio poeta. Durante toda sua vida profissional atuou na corte de Toulouse. Apesar do pouco tempo livre, aproveitou-se bem das horas de folga para estudar a matemática nos mais variados ramos. O seu interesse pela matemática é registrado pela primeira vez em suas correspondências e nos seus escritos pessoais com a data de 1629, quando os seus estudos preliminares sobre a obra de Apolônio sobre lugares planos se finaliza. A sua contribuição à geometria é feita de maneira magnífica, ao reconstruir as principais ideias de Apolônio, inclusive acrescentando valiosos comentários e observações próprias.

Como já foi dito, Fermat não publicou nenhum de seus trabalhos matemáticos em vida. No momento, o que sabe ao seu respeito origina-se dos seus escritos que foram publicados pós-morte, incluindo-se uma vasta e interessantíssima correspondência com inúmeros matemáticos da França e da Europa do século XVII. Entre os seus contatos mais importantes destacam-se a troca de correspondências com Torricelli, Roberval, Huygens e, sobretudo, com Blaise Pascal, com o qual estabeleceu os alicerces da Teoria da Probabilidade moderna. As cartas escritas por Fermat para a troca de ideias com outros pesquisadores foram tão importantes que não é por acaso a inclusão delas nos estudos sobre, por exemplo, teoria dos números, principalmente através do "Pequeno Teorema de Fermat" - o qual é um dos alicerces mais importantes no desenvolvimento desta teoria. Além disto, a Fermat atribui-se o estabelecimento de um novo ramo da matemática: a Geometria Analítica. Inclusive entre os seus escritos póstumos notabiliza-se a "Introdução aos Lugares Planos e Sólidos", o qual desenvolve de maneira meticulosa os conceitos mais importantes de geometria analítica.

Filho de uma família rica, seu pai era um bem sucedido mercador de couros, o qual foi nomeado para o cargo de segundo cônsul na cidade de Beaumont-de-Lomagne. Teve boas oportunidades para estudar e assim o fez. Por influência de sua mãe (oriunda de uma família de juristas) formou-se em direito. No entanto, estudou a matemática muito mais por satisfação, ou seja, desafio pessoal e sem menor propósito de realizar descobertas ou inovações. Mesmo assim, o seus estudos foram sérios e consistentes.

Agora, qual realmente é a contribuição deste renomado amante da matemática à Teoria das Probabilidades? Neste campo, a contribuição de Fermat foi muito importante. Tudo começa por volta de 1654, quando o escritor francês Chevalier De Méré (1607 - 1684), intrigado com certos resultados nos jogos de azar, dirigiu-se a Blaise Pascal (1623 - 1662) em busca de respostas. Este, por sua vez, interessou-se pelo assunto. Mas, sem obter resultados concretos, começou a corresponder-se com Pierre de Fermat. Até então a probabilidade era um assunto desconhecido por Fermat, que passou a estudar tais situações:

Numa determinada partida, dois jogadores apostam 32 moedas cada um deles. O total será ganho por aquele que primeiro obtiver três vezes, seguidas ou não, o número em que apostou de uma das 6 faces do dado. O jogo foi interrompido quando um jogador já tinha duas saídas do seu número e o outro apenas uma.

Como dividir as 64 moedas que estavam em jogo? Dito de outra maneira: se em oito lances consecutivos de um dado, um jogador deve tentar obter o um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido, como deveria o jogador ser indenizado?

Numa das cartas trocadas, Fermat responde uma das dúvidas demonstrando que a primeira probabilidade é $0,516$, enquanto que a segunda é $0,491$. Assim, a sequência de sete cartas trocadas entre Pascal e Fermat deu origem à teoria das probabilidades como ciência. À medida que as correspondências aconteceram, nasceram novos conceitos, entre os quais se destaca os métodos clássicos da análise combinatória.

Diante do desafio imposto, Fermat cria as regras matemáticas que descrevem com maior precisão as leis do acaso. Posteriormente, ambos, Fermat e Pascal, determinaram as regras essenciais da probabilidade. Interessantemente, Pascal chega até se convencer de que poderia utilizar os resultados desta pesquisa conjunta para justificar a crença em Deus! Em uma carta datada de 24 de agosto de 1654, endereçada a Pascal, Fermat discute o seguinte problema: dois jogadores A e B, quando A precisa de 2 pontos para ganhar e B 3 pontos, o jogo será certamente decidido em quatro jogadas. Para saber quem tem mais chance de ganhar, o matemático escreve todas as combinações possíveis entre as letras A, que representa uma jogada em favor do jogador A e B, que representa uma em favor do jogador B:

01	$AAAA$
02	$AAAB$
03	$AABA$
04	$AABB$
05	$ABAA$
06	$ABAB$
07	$ABBA$
08	$ABBB$
09	$BAAA$
10	$BAAB$
11	$BABA$
12	$BABB$
13	$BBAA$
14	$BBAB$
15	$BBBA$
16	$BBBB$

Assim, sendo, em um total de 16, têm-se 11 casos favoráveis para A contra 5 favoráveis para B, visto que a ocorrência de 2 ou mais A é favorável para A e a ocorrência de 3 ou mais B para B. A solução dada por Pascal é a seguinte: suponhamos que cada um dos jogadores aposte a mesma quantia, 32 Pistolas (moeda da época), aquele que tirar primeiro três vezes, seguidas ou não, o número que aposta no dado, de 1 a 6, ganhará, num total de quatro partidas. Suponhamos, também, que o primeiro jogador tenha ganhado duas partidas e o segundo apenas uma. Como dividir, se a partida for interrompida agora, as 64 Pistolas? Pascal explica que, se o jogo terminar empatado então cada um fica com 32 Pistolas. Logo o primeiro jogador já as tem. Porém, como ele ainda pode ganhar, deve-se partilhar as outras 32 pistolas, ficando o primeiro jogador com 48 e o segundo com 16.

Um problema de probabilidade relacionado ao exímio Fermat também envolve os jogos azar. Proposto por Pascal, trata-se da seguinte questão: uma pessoa quer tirar 6 no dado em 8 jogadas. Suponhamos que ela tenha feito 3 tentativas e falhado. Quanto de dinheiro ela poderia apostar em seu sucesso, ou seja, tirar um 6 na quarta jogada? Fermat raciocinou da seguinte maneira: a chance de se tirar um 6 no dado é de 1/6, logo ela poderia apostar 1/6 do dinheiro, não obtendo sucesso, na segunda tentativa, ela deveria apostar 1/6 do que sobrou do dinheiro, isto é, 5/36, e assim por diante, tendo que apostar na quarta tentativa 125/1296 de seu dinheiro.

Interessantemente isto tudo ilustra o modo descompromissado com que Fermat tratava a probabilidade. Afinal ele resolvia apenas os problemas postulados por Pascal. Diante destas últimas considerações, conclui-se que Fermat era amador apenas na teoria, pois, na prática, ele ajudou a desenvolver a Probabilidade de uma maneira simplesmente inimaginável até o momento.

Normalmente associa-se a doutrina das probabilidades às correspondências frequentes entre **Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1605 - 1665)** e **Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 1623 - Paris, 1662)**. No geral, as descobertas que estas duas grandes mentes alcançaram no fértil debate travado em forma epistolar possibilitaram avanços significativos ao cálculo de probabilidades. Inclusive Alguns estudiosos...

> ...atribuem a origem da Teoria das Probabilidades às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat. Essa divergência se deve ao fato de as correspondências serem publicações póstumas (ROTUNNO, p.18, 2007).

Apesar da comunhão das ideias entre esses dois estudiosos verifica-se que Pascal...

> Pascal interessou-se, especialmente, pelos problemas relacionados à divisão correta do prêmio em situações em que um jogo pudesse ser interrompido antes de seu final. Percebeu que estava diante de problemas complexos e que, em fundo, equivaliam a determinar a probabilidade que cada jogador tem de ganhar, em cada momento, conforme a evolução do jogo. Pascal decidiu expor as suas reflexões a Fermat, que também se interessou pelo assunto. O desfecho desse contato é um apanhado de sete cartas, com reflexões conjugadas, em que ambos relatam métodos da análise combinatória. Num contexto empírico, Pascal resolve o problema utilizando proporções, enquanto Fermat utiliza combinação (ROTUNNO, p.18, 2007).

Mesmo diante de resultados tão sugestivos para um campo matemático tão fértil verificou-se que...

> ...nem Pascal nem Fermat publicaram suas correspondências, ou sequer os resultados a que chegaram. O impulso definitivo ao nascimento e expansão do cálculo das probabilidades só foi dado em 1657, por Huygens. Estimulado pela leitura da correspondência entre os dois matemáticos, publica um pequeno folheto, o primeiro tratado dedicado exclusivamente à Teoria das Probabilidades, chamado "De rattiociniis in ludo aleae" (Sobre o raciocínio nos jogos de azar), em que relata o conteúdo das cartas e evidencia o grande mérito das reflexões nelas contidas (ROTUNNO, p.18, 2007).

Tão importante quanto estes dois grandes estudiosos foi Christiaan Huygens. Ele é apontado como o primeiro pesquisador que deu tratamento científico à probabilidade. Aliás, antes dele, o comum era associar este tema aos jogos. Em 1657, ele escreveu um livro sobre a teoria das probabilidades. Apesar de suas descobertas neste campo, ele é mais reconhecido por suas pesquisas no campo da astronomia e, sobretudo, da Física, as quais se tornariam suas grandes áreas de empenho.

Interessantemente no seu trabalho com astronomia Christiaan **Huygens** (Haia, 1629 - 1695) necessitava de uma marcação de tempo precisa no deslocamento dos corpos. Aliás, isso estimulou Huygens a lidar com esse problema com mais seriedade. Em 1656, ele patenteou o primeiro relógio de pêndulo, aumentando a exatidão da marcação de tempo consideravelmente, tomando como ponto de partida na construção desse mecanismo os resultados testados no cálculo de probabilidades.

> Depois disso, apenas em 1713, foi publicado postumamente o primeiro livro inteiramente dedicado à Teoria das Probabilidades. De autoria de Jakob Bernoulli (1654-1705), esta obra traz uma parte dedicada à reedição do trabalho de Huygens sobre jogos de azar, e a outra relacionada a permutações e combinações, chegando ao teorema de Bernoulli sobre as distribuições binomiais (ROTUNNO, p.18, 2007).

Jakob Bernoulli (Basileia, 1654 - 1705) tratou o assunto como um ramo da matemática em uma obra póstuma "Arte da Conjectura", que foi publicado postumamente em 1813. Em 1778, **Daniel Bernoulli** (Groningen, 1700 - Basileia, 1782) introduziu ao debate sobre o cálculo de probabilidades o princípio do produto máximo das probabilidades de um sistema de erros concorrentes. Aliás, ele complementou boa parte das ideias produzidas até o momento, refinando ainda mais o debate. Dessa maneira, conjectura-se que:

> A obra de Bernoulli traz, pela primeira vez, a Probabilidade vista como algo pessoal, suscetível a variações em função do conhecimento individual. Durante o século XVII, novas formulações sobre aplicações do Cálculo de Probabilidades foram apresentadas. Os estudos dos jogos de azar despertaram a possibilidade de prever, em certo grau, acontecimentos futuros a partir de dados que podemos observar. Inicia-se, nessa fase, a busca por uma organização de informações do passado que permitissem prever o futuro e, consequentemente, interferir nele. No início do século XVIII havia-se acumulado um conjunto de conhecimentos teóricos sobre Probabilidade. Contudo, é no início do século XIX que ocorre um avanço, tanto em sua formulação teórica como na aplicação da Probabilidade. Um trabalho importante foi elaborado por **De Moivre**, realizado em 1730. Sua obra demonstra um interesse especial em desenvolver métodos matemáticos e generalizações para a Teoria das Probabilidades. É interessante notar que, para De Moivre, a estabilidade da frequência relativa era uma ação divina - o homem simplesmente a detectava e estudava (ROTUNNO, p.19, 2007).

Pierre Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 1749 - Paris, 1827), em 1774, ele fez a primeira tentativa de deduzir uma regra para a combinação de observações dos princípios da teoria das probabilidades. Além disso, ele também criou uma fórmula para a lei da facilidade de erros.

Como foi muito comum entre vários estudiosos que se dedicaram ao cálculo das probabilidades, este tema não era o carro-chefe dos estudos de Laplace. O seu principal objeto de estudo foi a mecânica celeste. Desse jeito, o cálculo probabilístico foi apenas uma ferramenta usada para atingir os seus objetivos de pesquisa. Além disso, é dele a célebre frase: "É notável que uma ciência que começou com considerações sobre os jogos de azar pudesse ter se elevado ao nível dos mais importantes assuntos do conhecimento". Sendo assim, a sua obra-prima é o *Traité de Mecanique Celeste*.

Como se sabe, a teoria da probabilidade nasce do estudo dos jogos de azar e das pesquisas pertinentes ao cálculo dos riscos envolvidos nos seguros. Mesmo assim, em 1812, surge o clássico *Théorie analytique des Probabilités* que é produzido devido a necessidade de Laplace em estudar a probabilidade de erros em dados de observações experimentais bem como em outros tópicos como demografia, por exemplo. Esta obra, além de reunir e sistematizar boa parte do que era previamente conhecido sobre o assunto, traz contribuições próprias deste pesquisador, muitas das quais serviram de fonte até para avanços em outros campos da matemática, como a ideia de função geradora e a de transformada. Um dos pontos altos do livro é a aplicação da probabilidade ao método dos quadrados mínimos, justificando a conveniência de seu uso. Por essa razão, indica-se que:

> Laplace foi o primeiro a aproveitar esses conhecimentos já existentes sobre probabilidade. Suas obras "Teoria Analítica de Probabilidade" de 1812 e "Ensaio Filosófico sobre Probabilidade" de 1825 colocaram a Probabilidade, definitivamente, no quadro matemático. São obras reconhecidas como a Teoria Clássica da Probabilidade, conceitos básicos, desenvolvidos de forma precisa, em dez princípios fundamentais. Laplace acreditava num determinismo absoluto e considerava seu uso indispensável para a vida civil. [Inclusive] a concepção determinista de Laplace permitiu saltar de um tratamento causal a uma concepção estatística dos acontecimentos. Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade. Depois dos trabalhos de Laplace e de seus contemporâneos, o tema da Teoria das Probabilidades sofreu um aparente abandono. Nesta etapa, ou seja, início do séc. XIX multiplicaram-se os estudos sobre as aplicações da Probabilidade e suas possíveis interpretações na sociedade. Os estudos dessas informações permitiam conhecer condições e funcionamentos próprios da sociedade. No entanto, alimentou-se a ideia de que, como na Física, o comportamento humano poderia ser regido por leis estatísticas e probabilísticas. Como consequência, muitas aplicações foram efetuadas de modo incorreto, provocando juízos sem fundamento e conclusões errôneas (ROTUNNO, p. 21, 2007).

Apesar de suas grandes contribuições em diversos ramos do cálculo, Laplace não tinha a matemática como um fim, mas como um meio para chegar a resultados expressivos na astronomia. Mesmo sem dedicação exclusiva à matemática, ele contribuiu muito com o desenvolvimento desta nova área da matemática.

No século XX, o cálculo das probabilidades ganha maior afinco com os estudos de **Andrei Kolmogorov** (Moscou, 1903 - 1987). Aliás, ele deu formalidade à probabilidade, ou seja, sistematizou todas as pesquisas que foram feitas anteriormente em torno deste tema, proporcionando melhor entendimento deste valioso objeto de pesquisa. Desse jeito, indica-se que:

> Ao longo do século XX, o desenvolvimento dos modelos probabilísticos e estatísticos tem ocupado um posto relevante ao lado da Matemática determinista. Desenvolvem-se paralelamente. Por isso, possuem códigos diferentes; ao passo que um estuda a ordem, o outro se ocupa com a desordem. [Diante disso,] a Combinatória, a Probabilidade e a Estatística, presentes em nosso cotidiano, inter-relacionam-se, proporcionando assim uma filosofia do azar, do aleatório e do acaso. Desempenham um papel importante na compreensão acerca da natureza. A presença marcante da Estocástica em nossas vidas influencia a forma de pensarmos e de agirmos, nos instrumentaliza para que tomemos decisões quando somente dispomos de dados afetados pela incerteza, situações que permeiam nosso cotidiano. Com o desenvolvimento matemático ocorrido nos últimos séculos, a Teoria das Probabilidades deu um salto definitivo. Em 1933, Andrei Kolmogorov formula a primeira apresentação axiomática à Teoria das Probabilidades. Apoiado em resultados conhecidos neste domínio e também nos trabalhos de Borel e Lebesgue, Kolmogorov percebeu que era possível associarem-se probabilidades e medidas (ROTUNNO, p. 22, 2007).

Na sua formulação, os conjuntos de resultados são interpretados como eventos e a probabilidade propriamente dita como uma medida numa classe de conjuntos. Sendo assim, uma probabilidade é um número entre 0 e 1; a probabilidade de um evento ou proposição e seu complemento, se somados, valem até 1; a probabilidade condicionada ou conjunta de dois eventos ou proposições é o produto da probabilidade de um deles e a probabilidade do segundo, na primeira. Como se nota, esses axiomas formam a base para a teoria da probabilidade matemática. De modo geral, aponta-se que:

> Os axiomas de Kolmogorov tornaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, sobretudo sob o aspecto teórico. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo cientifico, seja nas ciências humanas ou nas políticas (ROTUNNO, p. 22, 2007).

Aprofundando ainda mais o debate e os resultados dos estudos de Kolmogorov, **Richard Threlkeld Cox** (Baltimore, 1898 - 1991) atribuiu maior formalidade à probabilidade prática. Na proposta de Cox, a probabilidade é entendida como uma primitiva (isto é, não analisada posteriormente) e a ênfase está em construir uma associação consistente de valores de probabilidade a proposições. Em suma os axiomas da probabilidade formam a base para a teoria da probabilidade matemática. Por sinal, constata-se que...

> ...atualmente, pode-se constatar que nada mais pode ser concebido como consensual e definitivo nas Ciências. O mundo está realmente estocatizado e, a cada dia, esta característica se acentua. Contemporaneamente, das informações que circulam nos nossos meios de comunicação, muitas possuem uma base estocástica. A Teoria das Probabilidades encontra-se presente nas sondagens de opiniões, nos fundos de previdência, na genética, nas companhias de seguros, nos esportes, etc. (ROTUNNO, p. 23-24, 2007).

Foi nesse estágio de desenvolvimento que a teoria das probabilidades é uma representação dos conceitos probabilísticos em termos formais - isso é, em termos que podem ser considerados separadamente de seus significados. Esses termos formais são manipulados pelas regras da matemática e da lógica, e quaisquer resultados são então interpretados ou traduzidos de volta ao domínio do problema. Houve pelo menos duas tentativas com sucesso de formalizar a probabilidade, que foram as formulações de Kolmogorov e a de Richard Threlkeld Cox. Na formulação de Kolmogorov, conjuntos são interpretados como eventos e a probabilidade propriamente dita como uma medida matemática numa classe de conjuntos.

Um efeito da teoria da probabilidade no cotidiano está na avaliação de riscos e no comércio de matérias-primas. Os governos geralmente aplicam métodos de probabilidade na regulação ambiental onde é chamada de "análise de caminho", e estão frequentemente medindo o bem-estar usando métodos que são estocásticos por natureza, e escolhendo projetos baseados no seu efeito provável na população como um todo. Por este ensejo, afirma-se que...

> ...em relação à Probabilidade, que não devemos percebê-la somente como meio de uma definição Matemática, pois estaremos desprezando seu caráter estocástico, deixando de considerar as percepções aleatórias trazidas pelo azar. Seu significado conceitual não pode estar baseado simplesmente em definição Matemática, como habitualmente ocorre com outros conceitos (ROTUNNO, p. 24, 2007).

De fato, não é correto dizer que estatísticas estejam envolvidas na modelagem em si, dado que, normalmente, estimativas de risco são únicas ("one-time") e, portanto, necessitam de modelos mais fundamentais como, por exemplo, para determinar "a probabilidade de ocorrência de outro atentado terrorista como o de 11 de setembro em Nova York". Uma lei de números pequenos tende a se aplicar a todas estas situações e à percepção dos efeitos relacionados a tais situações, o que faz de medidas de probabilidade uma questão política.

Um bom exemplo é o efeito nos preços do petróleo da probabilidade percebida de qualquer conflito mais abrangente no Oriente Médio - o que contagia a economia como um todo. A estimativa feita por um comerciante de comodidades de que uma guerra é mais (ou menos) provável leva a um aumento (ou diminuição) de preços e sinaliza a outros comerciantes aquela opinião. Da mesma forma, as probabilidades não são estimadas de forma independente nem, necessariamente, racional. A teoria de finança comportamental surgiu para descrever o efeito de tal pensamento em grupo ("groupthink") na definição de preços, política, paz e conflito.

Uma aplicação importante da teoria das probabilidades no dia a dia é a questão da confiabilidade. No desenvolvimento de muitos produtos de consumo, tais como automóveis e eletro - eletrônicos, a teoria da confiabilidade é utilizada com o intuito de se reduzir a probabilidade de falha que, por sua vez, está estritamente relacionada à garantia do produto. Outro bom exemplo é a aplicação da teoria dos jogos, uma teoria rigorosamente baseada na teoria das probabilidades, à Guerra Fria e à doutrina de destruição mútua assegurada.

Em suma, é razoável pensar que a descoberta de métodos rigorosos para estimar e combinar probabilidades tem tido um impacto profundo na sociedade moderna. Assim, pode ser de extrema importância para muitos cidadãos compreender como estimativas de chance e probabilidades são feitas e como elas contribuem para reputações e decisões, especialmente em uma democracia.

Capítulo 2

Revisando o cálculo básico de probabilidades

2.1 Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios são todos aqueles que realizados repetidas vezes, sob as mesmas condições, produzem resultados imprevisíveis, ou seja, os resultados não podem ser previstos com certeza absoluta. De maneira mais didática, aponta-se que os experimentos aleatórios são todos aqueles cujos resultados dependem exclusivamente do acaso.

A imprevisibilidade, a variação desses resultados, entre um experimento e outro se dá por uma infinidade de causas que fogem ao nosso controle. Aliás, essas várias causas denominamos de acaso. Portanto, quando falamos de acaso, estamos nos referindo a algo que não podemos controlar ou exercer alguma interferência. Vejamos alguns exemplos:

1º Lança-se uma moeda e observa-se a face que fica voltada para cima ao cair;

2º Lança-se um dado e observa-se o número da face que fica voltada para cima;

3º De um baralho de 52 cartas, retirar duas cartas e observar o seu naipe;

4º Observar o tempo que um aluno leva para ir de ônibus de sua casa até a escola em que estuda.

2.2 Espaço amostral equiprovável

Conforme enunciamos acima, não podemos interferir no experimento aleatório de tal forma que possamos prever antecipadamente os seus resultados, mas podemos formar um conjunto com todos os resultados possíveis. Ao conjunto destes possíveis resultados denominamos Espaço Amostral, e iremos aqui representá-lo por "S ".

Espaço amostral equiprovável de um experimento aleatório é aquele cujos elementos têm a mesma chance de ocorrer.

Exemplos:

a) Lança-se uma moeda e observa-se a face que fica voltada para cima ao cair.

$$S = \{\text{cara, coroa}\}.$$

b) Ao Lançar um dado e observar o número da face que fica voltada para cima.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

É difícil, em algumas situações, descrever os elementos que compõe o conjunto do espaço amostral. Em algumas situações é possível, pelo menos, calcular quantas são as possibilidades, ou seja, o número de elementos do conjunto. Por exemplo:

c) De um baralho de 52 cartas retiram-se duas cartas e observam-se o seu naipe.

$$n(S) = \frac{51 \cdot 52}{2} = 1326.$$

2.3 Eventos

Considerando um experimento aleatório, cujo espaço amostral é S, chamamos de evento todo subconjunto de S.

Podemos representar um evento por qualquer letra maiúscula do alfabeto. Entretanto, iremos escolher para representar um evento a letra E. A seguir falaremos de alguns eventos especiais.

2.3.1 Evento união

Sejam A e B dois eventos. O evento $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem. Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A ou o evento B.

2.3.2 Evento intersecção

Sejam A e B dois eventos. O evento $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Dizemos que $A \cap B$ é a intersecção entre o evento A e o evento B.

2.3.3 Evento complementar

Seja A um evento. O evento $\overline{A}$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer.

2.3.4 União de n eventos

Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ uma sequência de eventos. Então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer. Dizemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ é a união dos eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

2.3.5 Intersecção de n eventos

Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ uma sequência de eventos. Então,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem simultaneamente.

2.4 Definição de Probabilidade

No modelo, que foi adotado por vários matemáticos como Cardano, Pascal e Laplace, no estudo dos jogos de azar, considera-se a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, desde que o espaço amostral seja equiprovável.

Portanto, realizado certo experimento aleatório com espaço amostral equiprovável S e evento E, definimos:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

2.5 Propriedades das probabilidades

a) $P(S) = 1$

Prova: Podemos facilmente perceber que o evento coincide com o espaço amostral e, portanto, o número de elementos do evento é igual ao número de elementos do espaço amostral, ou seja: $n(E) = n(S)$. Dessa forma:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1.$$

■

b) $0 \leq P(E) \leq 1$

Prova: Seja o evento E, e assim:

$$\varnothing \subset E \subset S.$$

Logo,

$$P(\varnothing) \leq P(E) \leq P(S),$$

portanto,

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

■

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Prova:

$$S = A + \overline{A}$$
$$P(S) = P(A) + P(\overline{A})$$
$$1 = P(A) + P(\overline{A})$$
$$1 - P(A) = P(\overline{A})$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

■

d) $P(\varnothing) = 0$

Prova:

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0.$$

■

e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova: Como $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$.
Como $(A - B)$ e B são mutuamente excludentes, então:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, então:

$$P(AUB) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

Portanto:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

■

2.6 Probabilidade condicional

Vamos considerar o experimento aleatório que aprecia o lançamento de três moedas e observar a sequência de faces voltadas para cima. Avaliando o evento aparecer as três faces voltadas para cima iguais, teremos dois resultados favoráveis de um total de oito resultados possíveis. No entanto, se tivéssemos a informação de que a face obtida na primeira moeda é cara, teríamos o espaço amostral reduzido para quatro resultados possíveis e o evento para apenas uma situação favorável. Nesta situação descrita, houve uma redução tanto do espaço amostral quanto do evento e, quando situações como esta ocorrerem, dizemos que a Probabilidade é condicional.

Seja S um espaço amostral e consideremos dois eventos A e B. Com o símbolo $P(A \ / \ B)$ indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A \ / \ B)$ é a probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido. Quando calculamos $P(A \ / \ B)$, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.

$$P(A \ / \ B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemplo: No lançamento de dois dados, sabe-se que se obteve nas faces voltadas para cima a soma dos pontos iguais a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos.

Resolução:

O espaço amostral é: $S = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \rightarrow n(S) = 5$.
O evento é: $E = \{\text{faces iguais}\} = \{(3,3)\} \rightarrow n(E) = 1$.
Portanto, a probabilidade desejada é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \therefore P(E) = \frac{1}{5}.$$

Poderíamos resolver utilizando o conceito de probabilidade condicional, conforme vimos na teoria, vejamos:
Temos dois eventos a considerar:

$$E_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \therefore n(E_1) = 5.$$

$$E_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \therefore n(E_2) = 6.$$

$$E_1 \cap E_2 = \{(3,3)\} \therefore n(E1 \cap E2) = 1.$$

Como sabemos que ocorreu o evento E_1, o evento E_2 só poderá ocorrer na intersecção de E_1 com E_2, isto é, o par $(3,3)$. Assim, temos que:

$$P(E2 \ / \ E1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)} \therefore P(E_2 \ / \ E_1) = \frac{1}{5}.$$

2.7 Probabilidade de eventos independentes

Relembrando que dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral S são independentes, quando a ocorrência de A não depende de B. Como consequência desta definição podemos também afirmar que:

$$P(A \ / \ B) = P(A).$$

Ou seja, A independe de B, se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.

É lógico que, se A não depende de B ($P(A) > 0$), então B também não depende de A, pois:

$$P(B \ / \ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A \ / \ B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

Em resumo, se A independe de B, então B independe de A e, além disso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \ / \ A) = P(A) \cdot P(B).$$

Isso sugere a definição que dois eventos são denominados independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemplo 1: Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos, ocorrem pelo menos duas caras e ocorrem resultados iguais nos três lançamentos. Mostre que esses dois eventos são independentes.

Resolução:

Espaço amostral: $S = \{(k,k,k),(k,k,c),(k,c,k),(k,c,c),(c,k,k),(c,k,c),(c,c,k),(c,c,c)\} \rightarrow n(S) = 8$.
Evento A: ocorrerem pelo menos duas caras $=\{(k,k,k),(k,k,c),(k,c,k),(c,k,k)\} \rightarrow n(A) = 4$.
Evento B: ocorrerem resultados iguais nos três lançamentos $= \{(k,k,k),(c,c,c)\} \rightarrow n(B) = 2$.
Evento $A \cap B = \{(k,k,k)\} \rightarrow n(A \cap B) = 1$.

Vamos agora calcular as probabilidades correspondentes aos eventos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{1}{8}.$$

Portanto:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B).$$

O que comprova que os eventos A e B são independentes.

Observação 1 *Poderíamos generalizar esta relação para n eventos, ou seja, dados n eventos independentes do mesmo espaço amostral então:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cap P(A_2) \cap P(A_3) \cap \ldots \cap P(A_n).$$

2.8 Teorema da multiplicação

A definição de probabilidade condicional proporciona uma relação muito importante que é o Teorema da multiplicação que diz o seguinte: Sejam S um espaço amostral finito (não vazio) e A e B eventos de S.
Como

$$P(B\ /\ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\ /\ A).$$

Se A e B forem eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Exemplo 1: Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, a urna II contem 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

Resolução:

Como cada urna é selecionada ao acaso, a probabilidade é de $\frac{1}{2}$ para cada urna I e II.

Para a urna I a probabilidade de sair bola vermelha é $\frac{2}{5}$ e de sair bola branca é $\frac{3}{5}$, já para a urna II a probabilidade de sair bola vermelha é $\frac{4}{9}$ e de sair bola branca é $\frac{5}{9}$.

Dada a urna escolhida, escrevemos as probabilidades condicionais de extrairmos da mesma uma bola de determinada cor.
Sejam:
U_1: o evento escolher urna I, e
V: o evento escolher bola vermelha Estamos interessados no evento $(U_1 \cap V)$, e utilizando o teorema da multiplicação: $P(U_1 \cap V) = P(U_1) \cdot P(V \ / \ U_1)$, e como $P(U_1) = \frac{1}{2}$ e $P(V \ / \ U_1) = \frac{2}{5}$, então:

$$P(U_1 \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5},$$

portanto

$$P(U_1 \cap V) = \frac{1}{5}.$$

2.9 Lei binomial das probabilidades

A distribuição binominal é uma forma de generalizar os resultados obtidos em um ensaio de Bernoulli e, consequentemente, de calcular a probabilidade a ele associado.

Vamos considerar então uma sequência de n ensaios de Bernoulli com p a probabilidade de sucesso em cada ensaio e q a probabilidade de fracasso. Assim, para calcular a probabilidade de ocorrer exatamente k sucessos, nos n ensaios, basta operacionalizar a fórmula:

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Esta fórmula pode ser facilmente deduzida, vamos seguir o raciocínio:

Sejam os eventos:

A_i: ocorre sucesso no i-ésimo ensaio, e assim $P(A_i) = p$.

B_i: ocorre fracasso no i-ésimo ensaio, e assim $P(B_i) = q$.

Como são realizados n ensaios e queremos que ocorra k sucessos então evidentemente que serão $(n-k)$ fracassos, já que dois resultados apenas são possíveis. Desta forma podemos também concluir que os eventos mencionados são independentes.

Agora com a ajuda da análise combinatória podemos calcular o número de enuplas nessas condições:

$$p_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A probabilidade que ocorra cada enupla ordenada de k sucessos (S) e $(n-k)$ fracassos (F) é dada por:

$$(p \cdot p \cdot p \cdot \ldots p) \cdot (q \cdot q \cdot q \cdot \ldots q) = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Portanto:

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Exemplo 1: Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e seis brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento e repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Resolução:

Em cada ensaio, vamos considerar como sucesso o resultado "bola vermelha", e fracasso "bola branca".
Dessa forma:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ e } q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Como $n = 6$ e $p = 3$, então:

$$P_3 = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

$$P_3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{144}{625}.$$

Capítulo 3

A probabilidade envolvida nos dados

Não é preciso ter imaginação fértil para se concluir que as diversões de hoje não são as mesmas de antes. A história registra que os dados foram instrumentos muito usados pelo homem, ao longo da história, em suas atividades recreativas.

Jogar era uma diversão apreciada na antiguidade e os dados foram instrumentos usados para se praticar esse passatempo. O misticismo que acompanhava os povos antigos contribuiu para se creditar aos dados um meio de ligação entre o homem e os deuses que eles cultuavam.

Arqueólogos derrubaram, ou pelo menos puseram em dúvida, algumas hipóteses que tentavam explicar o surgimento dos dados. Essas hipóteses foram ao longo do tempo levantadas, entretanto escavações recentes comprovam que no Egito (2000-AC) e na China (600-AC) existiram dados equivalentes aos modernos. Estes fatos, relativamente recentes, colocam em dúvida todas estas hipóteses e repõe em discussão este tema ora discutido.

Os dados são invenções muito antigas, isto é fato. O homem dessa época encontrou neles uma boa opção de diversão, fato que contribuiu para sua popularidade e divulgação. Heródoto e Sófocles expuseram suas opiniões a respeito do surgimento dos dados. Enquanto o primeiro afirmava que tal fato ocorreu na Lídia (Ásia menor) o segundo dizia ter sido Palamedes, para divertir o exército grego na guerra de troia, o inventor.

Inicialmente os dados eram bem rudimentares e tinham características bem simples. As conchas do mar, provavelmente, foram um dos primeiros materiais a serem usados neste fim, pois possuíam dois lados e poderiam ser lançados com duas opções de resultados.

Figura 3.1: Fonte: https://www.google.com.br/search?

O próximo passo nessa transformação é o astrágalo que passa a ser mais assiduamente usado pelo fato de oferecer mais possibilidades ao espaço amostral já que proporcionava 4 situações possíveis de resultados em sua queda (o plano, o côncavo, o convexo e o sinuoso).

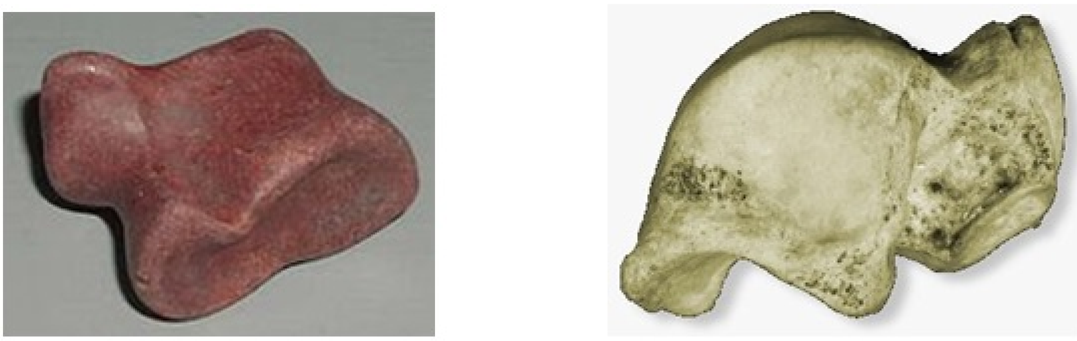


Figura 3.2: Fonte: https://www.google.com.br/searchgs

De forma geral tem-se a impressão que o dado é unicamente a figura geométrica espacial de seis faces congruentes numeradas com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 (com iguais chances de aparecer), também denominado cubo, hexaedro regular ou bozó.

Figura 3.3: Fonte: http://q7mo.blogspot.com.br/2010/06/desafio-cubos-x.html

Entretanto há outros tipos de dados, sendo os cinco sólidos de Platão os mais comuns, São eles: O tetraedro regular (4 faces congruentes), o hexaedro regular (6 faces congruentes), o octaedro regular (8 faces congruentes), o dodecaedro regular (12 faces congruentes) e o icosaedro regular (20 faces congruentes).

Os dados podem ser coloridos, numerados com números, figuras, desenhos, letras, animais dentre tantas outras formas que eles podem assumir. Inicialmente eram

Figura 3.4: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

fabricados a base de ossos (com maior frequência), madeiras, pedras dentre outros materiais. Entretanto evoluíram e hoje são construídos a base de plásticos muito mais resistentes e duradouros.

Podemos falar também dos dados que ficam dentro de outro dado. Esses dados duplos, onde o externo é transparente e oco traz por dentro outro dado com o mesmo número de lados. Podem-se criar jogos que envolvam operações com os números que aparecam nos dois simultaneamente.

Figura 3.5: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

Trataremos dos cubos honestos, com maior ênfase, que se caracterizam por possuírem as seis faces numeradas de 1 a 6 e com iguais chances de ocorrerem em um lançamento. Trabalharemos também com os dados não honestos.

Figura 3.6: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

Os dados desonestos ou viciados são os que apresentam possibilidades não equitativas para os resultados num lançamento. Podemos obter esse efeito realizando modificações em sua estrutura, como por exemplo, colocar duas faces numeradas com o mesmo número e deixar de colocar o número que deveria realmente ocupar esta posição. Outra maneira de viciar um dado é modificando o centro de gravidade dele por meio do aumento ou diminuição do peso de uma das faces.

No estudo da Teoria da Probabilidade, os dados, são importantes ferramentas para tornar mais fácil o seu entendimento. Pode-se utilizá-los como material concreto, deixando assim as aulas mais ricas, agradáveis e dinâmicas, proporcionando ao aluno compreender sem maiores dificuldades à aplicação da probabilidade.

3.1 Problemas propostos para discussão envolvendo dados

1 - Um dado honesto foi lançado uma vez e observada à face voltada para cima. Qual a probabilidade de sair nesta face número par?

Figura 3.7: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

Resolução: Neste caso, o espaço amostral é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \therefore n(S) = 6$$

$$E = \{2, 4, 6\} \therefore n(E) = 3$$

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

2 - No lançamento de dois dados honestos, qual a probabilidade de ter ocorrido números iguais nas faces voltadas para cima?

Figura 3.8: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

Resolução:

$$\begin{aligned} S = \{ & (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),\\ & (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),\\ & (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),\\ & (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),\\ & (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),\\ & (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\} \end{aligned}$$

$$n(S) = 36.$$
$$E = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\} \quad \therefore \quad n(E) = 6.$$
$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,16667 = 16,67\%.$$

3 - No lançamento de um dado, sabe-se que apareceu um número par. Qual a probabilidade desse número ser primo?

Figura 3.9: Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Dado

Resolução:

Temos aqui uma situação de probabilidade condicional, pois o espaço amostral ficou reduzido por uma condição.

Assim:

$$S = \{2,4,6\} \therefore n(S) = 3$$
$$E = \{2\} \therefore n(E) = 1$$
$$P(E) = \frac{1}{3} = 0,333 = 33,33\%.$$

4 - Um dado é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:

a) Ocorrer número par;
b) Ocorrer número maior ou igual a 5.

Figura 3.10: https://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&site=imghp&tbm

Resolução:
Sabemos que $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Por outro lado,

$$P_1 = k,\ p_2 = 2k,\ p_3 = 3k,\ p_4 = 4k,\ p_5 = 5k,\ \text{e } p_6 = 6k.$$

Como:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1,$$

temos,

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$$

$$21k = 1 \therefore k = \frac{1}{21}.$$

a) $P = P_2 + P_4 + P_6 = 12k$, ou seja, $P = 12 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$.

b) $P = P_5 + P_6$, então, $P = 5k + 6k = 11k$. Portanto

$$P = 11 \cdot \frac{1}{21} = \frac{11}{21}.$$

5 - O poliedro abaixo, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo

Figura 3.11: Fonte:

Se esse dado for lançado duas vezes, qual a probabilidade de que ocorram números iguais nas faces que ficaram em contato com o solo?

Resolução:

Temos uma situação em que é possível descrever o espaço amostral, mas não é viável. Assim pode-se saber qual o total de possibilidades:

$$n(S) = 30 \cdot 30 = 900,$$

no primeiro lançamento temos 30 possibilidades, do 1 ao 30, fato que se repete no segundo lançamento.

$$n(E) = 30 \cdot 1 = 30.$$

No primeiro lançamento temos 30 resultados possíveis. Já no segundo, devemos ter o resultado repetido. Portanto, uma possibilidade.

$$P(E) = \frac{30}{900} = \frac{1}{30} = 0,0333 = 3,33\%.$$

6 - No lançamento de dois dados, sabe-se que se obteve nas faces voltadas para cima a soma dos pontos iguais a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos?

Resolução:

Método 1

O espaço amostral é: $S = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Rightarrow n(S) = 5$.
O evento é: $E = \{\text{faces iguais}\} = \{(3,3)\} \Rightarrow n(E) = 1$.

Portanto, a probabilidade desejada é

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \therefore P(E) = \frac{1}{5}.$$

Método 2

Poderíamos resolver utilizando o conceito de probabilidade condicional, conforme vimos na teoria. Vejamos:

Temos dois eventos a considerar:
$E_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \therefore n(E_1) = 5$
e,
$E_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \therefore n(E_2) = 6$.
Portanto,

$$E_1 \cap E_2 = \{(3,3)\} n(E_1 \cap E_2) = 1.$$

Como sabemos que ocorreu o evento E_1, o evento E_2 só poderá ocorrer na intersecção de E_1 com E_2, isto é, o par $(3,3)$.

Assim, temos que:

$$P(E_2 \;/\; E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{5}.$$

3.2 Problemas propostos para discussão envolvendo moedas

Mesmo sabendo que as moedas são casos particulares de dados, onde apresentam duas faces diferentes (uma das exigências para considera-las honestas), achamos melhor destacar uma seção de exercícios envolvendo apenas moedas, pois além de apresentarem uma riqueza muito grande de possibilidades de aplicação, também podem ser encontradas facilmente no bolso de um aluno ou do professor.

Portanto apresentamos uma sequência de aplicações de outro material concreto, as moedas com uma cara e uma coroa.

1 - Ao lançarmos uma moeda duas vezes sucessivamente, qual é a probabilidade de que aconteçam duas caras voltadas para cima?

Resolução:

$$S = \{(cara; coroa),(cara; cara),(coroa, cara),(coroa, coroa)\} \therefore n(S) = 4.$$

Figura 3.12: http://www.nsrnews.com.br/wp-content/uploads/2012/07/R-1.jpg

$$E = \{(cara, cara)\} \therefore n(E) = 1.$$
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

2 - Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos, ocorrem pelo menos duas caras e ocorrem resultados iguais nos três lançamentos. Mostre que esses dois eventos são independentes.

Figura 3.13: http://www.nsrnews.com.br/wp-content/uploads/2012/07/R-1.jpg

Resolução:

Espaço amostral:

$S = \{(k,k,k),(k,k,c),(k,c,k),(k,c,c),(c,k,k),(c,k,c),(c,c,k),(c,c,c)\} \Rightarrow n(S) = 8.$

Evento A: ocorrerem pelo menos duas caras

$\{(k,k,k),(k,k,c),(k,c,k),(c,k,k)\} \Rightarrow n(A) = 4.$

Evento B: ocorrerem resultados iguais nos três lançamentos

$\{(k,k,k),(c,c,c)\} \Rightarrow n(B) = 2.$

Evento $A \cap B = \{(k,k,k)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1.$

Vamos agora calcular as probabilidades correspondentes aos eventos:

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}.$

Portanto:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B).$$

Isto comprova que os eventos A e B são independentes.

3 - Lança-se uma moeda exatamente 10 vezes, e observa-se a face voltada para cima. Qual a probabilidade de observarmos cara nos 10 lançamentos?

Figura 3.14: http://www.nsrnews.com.br/wp-content/uploads/2012/07/R-1.jpg

Resolução:

Temos eventos independentes já que o resultado de um deles não interfere nos outros resultados. Dessa forma:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \ldots P(A_{10})$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

4 - Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos ao menos uma cara?

Figura 3.15: http://www.nsrnews.com.br/wp-content/uploads/2012/07/R-1.jpg

Resolução:

Sabemos que

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$

No entanto, estamos interessados em calcular

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 - P_0$$

Vamos agora calcular P_0:

$$P_0 = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64}.$$

Finalmente

$$P = 1 - \frac{1}{64} \Rightarrow P = \frac{63}{64}.$$

Capítulo 4

A probabilidade nos jogos de cartas

É preciso entender que estamos em busca de caminhos que encurtem a distância entre o aluno e o conhecimento da probabilidade. Aliás, nesse propósito faremos uso de técnicas que facilitem o alcance dessa meta. Para tanto, procedimentos didáticos adequados devem ser utilizados, sobretudo para elucidar de que maneira Cardano agia. Sendo assim, com o objetivo de proporcionar o melhor entendimento sobre as probabilidades por parte dos alunos, devemos relacionar as aulas com aplicações cotidianas. Podemos demonstrar ao estudante as chances reais de uma pessoa ganhar na loteria: quina, sena, loto-fácil. Afinal, o uso de materiais concretos deixam as aulas mais dinâmicas e envolventes.

Dentre as ferramentas que podemos usar como facilitador nesta tarefa, destaca-se o baralho. Com certeza, ele é um importante material didático, que pode ser usado em sala de aula para a melhor apreensão e compreensão de espaço amostral e eventos na Probabilidade.

O baralho de jogo normalmente é constituído por 52 cartas (espaço amostral), sendo 26 vermelhas (copas e ouros) e 26 pretas (paus e espadas). Possui 4 naipes: copas (13 cartas), ouros (13 cartas), paus (13 cartas) e espadas (13 cartas). Em cada naipe, há um A (ás), um 2, um 3, um 4, um 5, um 6, um 7, um 8, um 9, um 10 e uma trinca de três figuras: valete (J), dama (D) e rei (K).

Figura 4.1: http://www.papodebar.com/quem-inventou-o-baralho-e-os-naipes/

Observe agora as cartas dos naipes de ouros, de paus, de espadas e de copas, respectivamente.

Como se deduz, podemos ter vários eventos num só baralho. Citemos alguns exemplos:

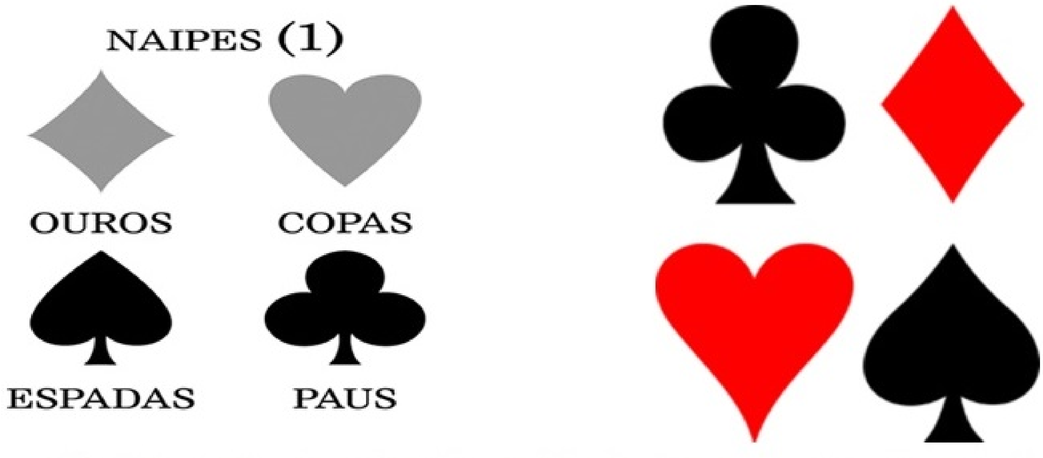


Figura 4.2: http://www.papodebar.com/quem-inventou-o-baralho-e-os-naipes/

Figura 4.3: http://www.esbocosermao.com/2009/07/origem-do-baralho.html

1º Ao retirarmos ao acaso uma carta do baralho, temos 50% de chance da carta ser preta ou vermelha, pois são 26 cartas pretas ou 26 cartas vermelhas entre as 52 cartas;

2º Outro tipo de evento que ocorre no baralho é a chance de tirarmos ao acaso uma carta e obtermos um determinado naipe. A probabilidade verificada é de 13 em 52, isto é 25% de chance;

3º Se optarmos por retirar o três de ouros, as chances se tornam bem pequenas, pois teremos 1 em 52, que resulta em 1,9% de chance de o evento ocorrer.

Como já foi dito, a utilização de materiais concretos pelo professor permitirá tornar a sua aula mais dinâmica e com alto grau de rendimento, bem como tornará a vida do aluno mais fácil, pois ele terá de forma prática, palpável e divertida uma maneira bem eficaz de entender o que recomenda a teoria estudada. Isso, aliás, é um diferencial que não se pode desprezar na busca de se atingir uma aula com melhores resultados e rendimentos.

Outra carta presente no baralho é o coringa, que em muitos jogos funciona como equivalente a qualquer outra carta, ou seja, pode substituir qualquer uma carta.

Figura 4.4: http://br.freepik.com/fotos-gratis/carta-de-baralho_18571.htm

4.1 Problemas propostos para discussão

1 - De um baralho de 52 cartas, três são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as 3 sejam de copas?

Resolução:

Calculando o espaço amostral S, encontramos:

$$n(S) = C_{52,3} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{132600}{6} = 22100.$$

O espaço amostral será formado por um conjunto de três cartas quaisquer, ou seja, uma combinação de 52 cartas, tomadas três a três.

Seja o evento E: sair três cartas do mesmo naipe copas, assim:

$$n(E) = C_{13,3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286.$$

O evento "retirar três cartas de copas" corresponde a escolher três cartas de um total de 13, ou seja, uma combinação de 13 cartas, tomadas três a três.

Dessa forma, podemos concluir que:

$$P(E) = \frac{286}{22100} = \frac{11}{850}.$$

2 - Sabemos que um baralho é composto de 52 cartas, onde temos a representação de quatro naipes: copas, ouro, paus e espadas. Dessa forma, cada naipe é representado por 13 cartas. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, três cartas de um mesmo naipe sem reposição.

Resolução:

Figura 4.5:

(P_1) A primeira carta pode sair de qualquer naipe, portanto temos 52 possibilidades de retirada: $P_1 = \dfrac{52}{52}$

(P_2) Para a segunda carta temos as opções correspondentes ao mesmo naipe da primeira carta, assim teremos 12 possibilidades pois já saiu uma na primeira retirada: $P_2 = \dfrac{12}{51}$

(P_3) Obedecendo ao mesmo raciocínio, terceira carta naipe de copas, temos: $P_3 = \dfrac{11}{50}$.

Dessa forma a probabilidade será dada por:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{6864}{132600} = 5,17\%.$$

Portanto, a probabilidade desejada é de 5,17%.

3 - De um baralho de 52 cartas, depois de totalmente embaralhado, tiram-se cartas à sorte. Calcular a probabilidade de ao extrair três cartas serem todas de ouros e entre elas figurar o Ás.

Resolução:

Esta probabilidade pode ser encontrada pelo produto $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$, pois são eventos independentes.

$P_1 = \dfrac{1}{52}$, probabilidade de sair a carta ás de ouros;

$P_2 = \dfrac{12}{51}$, probabilidade de sair uma carta de ouro, não sendo ás;

$P_3 = \dfrac{11}{50}$, probabilidade de sair uma carta de ouro, não sendo ás nem a da jogada anterior.

Assim:

$$P = \frac{1}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{132}{132600} = \frac{11}{11050} = 0,099\%.$$

4 - Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade da carta retirada ser um **ÁS** ou uma carta de **COPAS**?

Resolução:

Sejam:

S: Retirada de uma carta $\therefore n(S) = 52$.

A: sair um ás $\therefore n(A) = 4$.

Logo, $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

B: sair uma carta de copas $\therefore n(B) = 13$.

Portanto, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, consequentemente, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{52}$.

Usando a formula do evento união:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

temos:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Capítulo 5

Alguns jogos e suas regras

5.1 O jogo de buraco

Para uma partida do jogo de buraco, utilizam-se dois baralhos de 52 cartas mais os coringas. A partida pode ser disputada em contagem individual (com dois ou três jogadores) ou em duplas (com quatro ou seis jogadores) que deverão sentar-se em posições alternadas.

Antes de iniciado o jogo devem os competidores decidir qual a pontuação que a partida deve ter (1.500, 3.000 ou 5.000). Nesta modalidade de jogo, cada carta vale uma pontuação e além das cartas também pontuam a batida (100 pontos), a canastra real (200 pontos) a canastra simples ou suja (100 pontos). Ao término da partida todas as cartas, perdedor ou ganhador, usadas na formação dos jogos devem ser reunidas e contadas com a seguinte pontuação: curinga 20 pontos; ás 15 pontos; 2, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei 10 pontos e 3, 4, 5, 6 e 7 valem 5 pontos cada carta. As cartas que ficam nas mãos dos jogadores após um deles bater, inclusive as do seu companheiro, devem ser contadas e subtraídas dos pontos obtidos. A dupla que não conseguir pegar o morto também paga (perde) mais 100 pontos.

Depois de embaralhadas, as cartas serão distribuídas aos jogadores, após serem cortadas pelo jogador à direita do carteador, uma a uma, ou duas a duas, em sentido horário, fechadas, onze cartas para cada participante. O jogador à esquerda do carteador separará vinte e duas cartas em dois montes de onze cartas cada um, estes dois montes serão colocados a parte do jogo, com a face voltada para baixo, e recebem o nome de morto. Para seis jogadores são três mortos. As cartas que sobrarem serão colocado no centro da mesa com a face virada para baixo.

O primeiro jogador dará início ao jogo comprando (retirando) uma carta das que sobraram e foram colocadas no centro da mesa e caso esta carta não lhe interesse ele e apenas ele, terá a oportunidade de comprar uma segunda carta, para tal deverá descartar a carta comprada antes de colocá-la junto das outras na sua mão e manifestar sua intenção. As cartas descartadas, com a face virada para cima, passam a formar um monte no centro da mesa, paralelo ao monte de compras, e recebe o nome de lixo (ou bagaço).

Na sua vez, cada jogador, após comprar do monte de compras poderá, antes de descartar, descer ou baixar jogos. Se preferir o jogador poderá comprar a carta de cima do lixo, deixando de comprar no monte de compras, mas se assim proceder deverá comprar (pegar) todas as cartas que compõem o lixo e descartar uma carta. As sequências (grupos de cartas de um mesmo naipe) são grupos de, no mínimo, três cartas e no máximo seis cartas, sempre do mesmo naipe. Quando passam a ter mais de seis cartas as sequências recebem o nome de canastras, podendo então ir de ás a rei. Nas sequências e canastras, o 2 pode ser de um naipe diferente, e quando isso acontece é chamado de curinguinha. Uma canastra é chamada de simples ou suja quando entre as cartas está um curinga ou um curinguinha.

As lavadeiras (ou tripas) são grupos de três ou mais cartas de um mesmo valor, por exemplo: valete de paus, valete de ouros, e valete de copas. As lavadeiras podem crescer a chegar a se transformar numa canastra, simples se usar um curinga ou real se não usar um curinga. O parceiro de quem desceu jogos na mesa poderá adicionar cartas aos jogos já baixados em sua vez de jogar. O jogador que conseguir descer todas as suas cartas pegará o morto. Se para pegar o morto ele descer todas as suas cartas e não houver feito o descarte poderá continuar jogando e descendo jogos até proceder ao descarte. Se para pegar o morto ele tiver feito descarte, deverá esperar até a próxima rodada para usar o morto. Quando uma dupla conseguir descer todas as cartas do morto a partida estará terminada e se procederá a contagem dos pontos.

O jogo só termina quando forem atingidos os pontos combinados no início dele. Caso não se chegue a esta pontuação, então se repete a partida até que se declare um vencedor.

A Seguir, colocamos uma sequência das principais canastras e outras jogadas importantes do buraco:

Canastra suja: é uma sequência simples, com sete cartas ou mais, entre as quais um coringa (o 2 é o coringa do buraco). Neste tipo de canastra a pontuação vale 100.

Figura 5.1: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Canastra limpa: é uma sequência simples, com sete cartas ou mais, e sem apresentar entre elas um coringa. Neste tipo de canastra a pontuação vale 200.

Figura 5.2: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Canastra de 500: é uma extensão da limpa, mas vai do dois ao ás, formando assim uma sequencia de 13 cartas. O nome dessa canastra já diz quantos pontos vale 500.

Figura 5.3: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Canastra real: tem formação composta por 14 cartas, começa no ás e termina também no ás. Está é a mais difícil canastra de ser realizada e por esse motivo vale 1000 pontos.

Figura 5.4: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Outros exemplos de canastras, suja, limpa, de 500 ou real.

Figura 5.5: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Temos a seguir a constituição de uma mesa de jogo de buraco, as respectivas posições que devem ser ocupadas pelos jogadores e cada elemento do jogo.

Figura 5.6: Fonte: http://netcartas.com.br/buraco/

Figura 5.7: Fonte: http://netcartas.com.br/buraco/

5.2 Problemas propostos para discussão

1 - Numa partida de buraco, disputada por quatro jogadores, um deles recebeu as onze cartas no inicio do jogo e percebeu que estas cartas formavam uma canastra de 500 pontos. Então, qual é a probabilidade de que esta canastra seja formada por cartas de ouros?

Resolução:

Figura 5.8: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Como no jogo são usados dois baralhos então existem 8 possibilidades de canastras de 500 pontos. Dessa forma:

$$n(S) = 8.$$

Das 8 possibilidades do espaço amostral duas satisfazem ao evento, pois são dois baralhos e assim duas canastras de copas. Dessa forma:

$$n(E) = 2.$$

Portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%.$$

2 - Qual a probabilidade de uma canastra limpa, do naipe de copas e com sete cartas, começar pelo seis e terminar por dama?

Resolução:

Figura 5.9: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

O espaço amostral será construído por:

$$\begin{aligned} S = \{&(A,2,3,4,5,6,7),(2,3,4,5,6,7,8),(3,4,5,6,7,8,9),\\ &(4,5,6,7,8,9,10),(5,6,7,8,9,10,J),(6,7,8,9,10,J,Q),\\ &(7,8,9,10,J,Q,K),(8,9,10,J,Q,K,A)\} \end{aligned}$$

Portanto, o espaço amostral terá 8 elementos, ou seja:

$$n(S) = 8.$$

Já o único elemento que satisfaz ao evento é $E = \{(6, 7, 8, 9, 10, J, Q)\}$, e assim sendo há um único elemento, ou seja:

$$n(E) = 1$$

Finalmente:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%.$$

3 - Uma canastra real, formada por 14 cartas do ás ao ás, está disposta sobre a mesa de uma partida de buraco. Qual a probabilidade que seja de paus? Resolução:

O espaço amostral será formado por uma sequência de ás a ás e como são 4 naipes, teremos assim 4 resultados possíveis.

$$n(S) = 4.$$

Já o evento é constituído de uma única possibilidade, ou seja, a sequência de ás a ás de paus.

$$n(E) = 1.$$

Figura 5.10: Fonte: http://www.jogatina.com/dicas-jogar-buraco-online.html

Dessa forma:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

4 - A regra permite ao jogador que inicia uma partida de buraco comprar uma carta nas que ficaram sobrando na mesa e caso não lhe agrade pode descartá-la e comprar outra. Supondo-se que esse jogador faça essa compra num monte formado por dois baralhos completos (104 cartas), qual a probabilidade que ele compre essas duas cartas e seja do mesmo naipe?

Resolução:

O espaço amostral permite que se compre estas duas cartas de 5356 maneiras diferentes, ou seja:

$$n(S) = \binom{104}{2} = \frac{104!}{2! \cdot 102!} = \frac{104 \cdot 103}{2} = 5356.$$

Já o evento é formado pelos pares que tenham os elementos iguais. Devemos ter duas cartas de copas, duas de ouros, duas de paus ou duas de espadas. E como há 26 cartas de cada naipe para escolher duas, então:

$$n(E) = 4 \cdot \binom{26}{2} = 1300.$$

Portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1300}{5356} = 0,2427\%.$$

$$P(E) = 24,27\%.$$

5.3 O jogo de Pôquer

Um dos jogos de azar mais fascinantes é o pôquer, tanto que já foi fonte de inspiração para diversos filmes e livros. Luis Fernando Veríssimo, em O Analista de Bagé, escreve um divertidíssimo texto denominado Pôquer Interminável, sendo este apenas um pequeno exemplo de como o tema é muito explorado.

Já sabemos que a probabilidade começa a adquirir a forma de hoje quando jogadores compulsivos procuraram estudar caminhos de ganhar mais dinheiro no jogo de azar. É verdade também que sempre se jogou por lazer. Prazer e sobrevivência são motivos fáceis de entender e aceitar. O que é difícil de conceber é o jogo por outros motivos, em especial, a cobiça e o vício. É bom que fique bem claro que não são esses os motivos que nos leva a propor o uso desses jogos em sala de aula. O objetivo é apenas mostrar que as chances de sucesso nos jogos de azar são mínimas, você joga quase na certeza de que vai perder e o operador do jogo será sempre ganhador.

Temos sim o propósito de fornecer informações sobre o jogo de pôquer tal que proporcione ao aluno um bom material para, partindo dele, se estudar e entender a probabilidade bem como o sentido matemático do jogo. É também possível mostrar àqueles que jogam (e sempre perdem) e alimentam a indústria da ilusão do lucro fácil que em resumo, nem o aluno nem ninguém vai ganhar no pôquer ou em qualquer outro jogo porque aprendeu a calcular as probabilidades envolvidas. No máximo, será esperto o suficiente para não se arriscar a perder.

O mais famoso e procurado jogo de azar, o pôquer é o queridinho dos cassinos e pode ser jogado por duas ou mais pessoas seguindo um conjunto de regras. Pôquer é o nome dado a inúmeros jogos de cartas em que os jogadores apostam na força das suas cartas, é um jogo que envolve um "pote" comunitário, que incorpora as apostas efetuadas pelos jogadores e cujo valor é destinado ao jogador com a mão de valor mais alto quando todas as cartas são mostradas, ou ao jogador que tenha feito uma aposta que seus adversários não queiram igualar.

É importante que antes de tratarmos de qualquer aplicação de probabilidade se conheça pelo menos as regras básicas e essenciais que o regem, como funcionam as apostas e seus limites, os valores das várias combinações de cartas.

Há vários tipos de pôquer. No entanto, vamos escolher para exemplificação o Texas Holdem que sem dúvida é o mais jogado. É claro que começar a jogar é muito mais fácil e totalmente diferente de começar a ganhar. Lembre que é um jogo de azar e mesmo a combinação experiência e habilidade não serão suficientes para ganhar se não acompanhar um pouquinho de sorte.

Veja um resumo das principais regras do pôquer:

1º O pôquer é jogado com um baralho comum e sem o coringa, ou seja, com 52 cartas. Não tem um naipe (13 cartas) superior ao outro, todas as cartas possuem o mesmo valor independente do naipe.

2º O jogo é geralmente disputado por um total de 6 a 10 participantes e de forma especial pode ser também formado por dois jogadores.

3º As cartas possuem pesos diferente sendo o ás a que assume o maior valor. Em ordem crescente os valores das cartas são assim dispostos:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, R, A.$$

Mesmo sendo a carta de maior valor, no pôquer, pode o A (ás) também completar a jogada 2, 3, 4, 5 funcionando neste caso como o um.

5º Quando utilizado no jogo o coringa assume a carta de menor valor.

6º O limite de cada aposta é combinado no começo do jogo, cabendo à mesa estipular este valor. Pode-se também aumentar o valor da aposta. Neste caso, o jogador, pode inclusive apostar todas as suas fichas.

No site Clube do Poker (2013) há um resumo bastante prático de como se desenrola uma partida de pôquer. Então vejamos:

No Texas Holdem, cada jogador recebe duas cartas fechadas, que só ele pode ver. Também, cinco cartas abertas são dispostas na mesa. Cada mão é definida pela combinação de cinco cartas entre as sete que são disponíveis ao jogador (cinco na mesa mais as duas da mão).

No Texas Holdem há quatro rodadas de relance. No “Limit”, uma aposta e três relances são possíveis em cada rodada. Cada jogador pode: abrir, passar (check), apostar, seguir ou relançar.

Antes de dar as cartas, dois blinds (o Small Blind SB ou o Big Blind BB) são colocados na mesa pelos jogadores que estão à esquerda de quem faz o crupier (reconhecido por um “botão”, colocado na frente dele, nas mesas de Pôquer online).

Cada um recebe duas cartas abertas. Quem deve se manifestar primeiro é o jogador à esquerda do Big Blind: ele pode cair fora, apostar, ou relançar o Big Blind. A rodada continua com os outros jogadores: cada um pode tomar uma dessas três decisões.

No final da primeira rodada, o crupier coloca no centro da mesa três cartas abertas e visíveis a todos: é o Flop. A segunda rodada de apostas começa: dessa vez, quem começa é o jogador sentado à esquerda do “botão” (crupier). Ele pode apostar ou passar se ninguém ainda apostou. A partir do momento que alguém aposta, não é mais possível passar, só se pode seguir, relançar ou cair fora.

Depois do fim da segunda rodada, o crupier coloca mais uma carta aberta no centro da mesa: é o Turn. A terceira rodada começa. No jogo “Limit”, o nível da aposta dobra no Turn (por exemplo no Limited 1$ - 2$, a aposta passa a 2$). Quem começa é de novo o jogador sentado à esquerda do "botão". Depois do fim da terceira rodada, o crupier abre e coloca no centro da mesa uma quinta e última carta: o River. Segue-se então a última rodada de apostas.

Quando a rodada acaba, o último jogador que abriu ou relançou é quem deverá mostrar o jogo. Se for o melhor, ele ganha as fichas. Se não, o que tem o melhor jogo o mostra e pega as fichas. Os outros não têm obrigação nenhuma de mostrar os jogos deles. Façamos uma breve dissertação das jogadas do Texas Hold'em, começando com a melhor mão até a mais fraca.

O pôquer possui diversos tipos de jogos e em qualquer situação elas mantêm a mesma classificação para as mãos. Assim no Texas Holdem também vale esta sequencia a seguir, da melhor mão de todas para a mais fraca. A melhor de todas as mãos envolve um straight flush ou sequência real.

1º Sequência Real: cinco cartas em sequência numérica de 10 a A do mesmo naipe.

Figura 5.11: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

2º Sequência Flush: cinco cartas em sequência numérica do mesmo naipe.

Figura 5.12: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

3º Four of a Kind: Quatro cartas iguais com naipes iguais ou não. Se mais de um jogador estiver com esta combinação ganha aquele que tiver a combinação com as mais altas cartas.

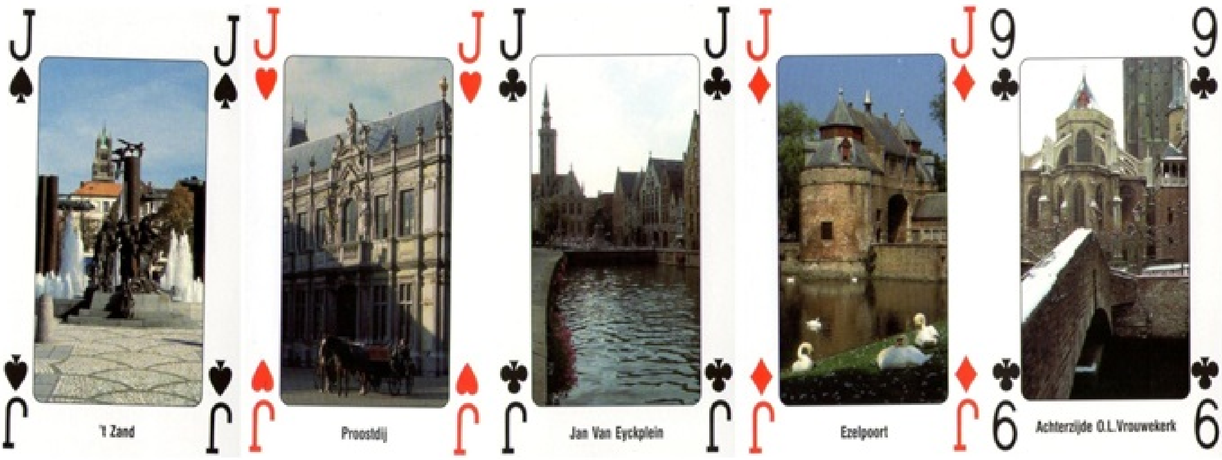


Figura 5.13: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

4º Full: A combinação de um par e três iguais, do mesmo naipe ou não. Se mais de um jogador fizer este jogo, o que tiver a trinca com cartas maiores é que vence.

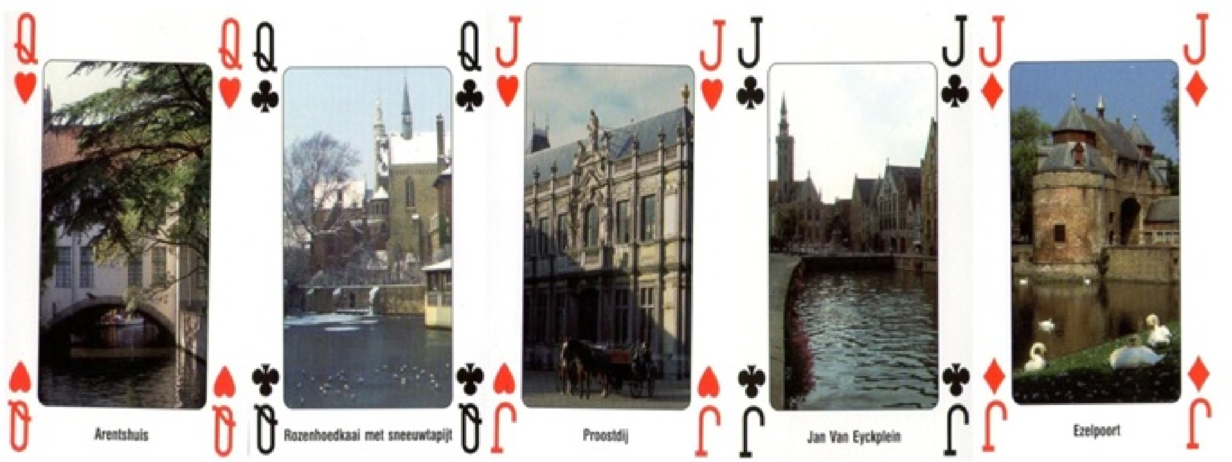


Figura 5.14: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

5º Flush: Quando as cinco cartas forem do mesmo naipe. Quando mais de um jogador estiver com este jogo, então será vencedor aquele que apresentar a carta de maior valor.

Figura 5.15: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

6º Sequência: Situação que apresenta cinco cartas em sequência numérica, independente dos naipes. Para cartas iguais, ganha quem tiver a sequência com cartas maiores.

Figura 5.16: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

Atenção: o As, na sequência numérica, pode ser usado como alto ou baixo, por exemplo:

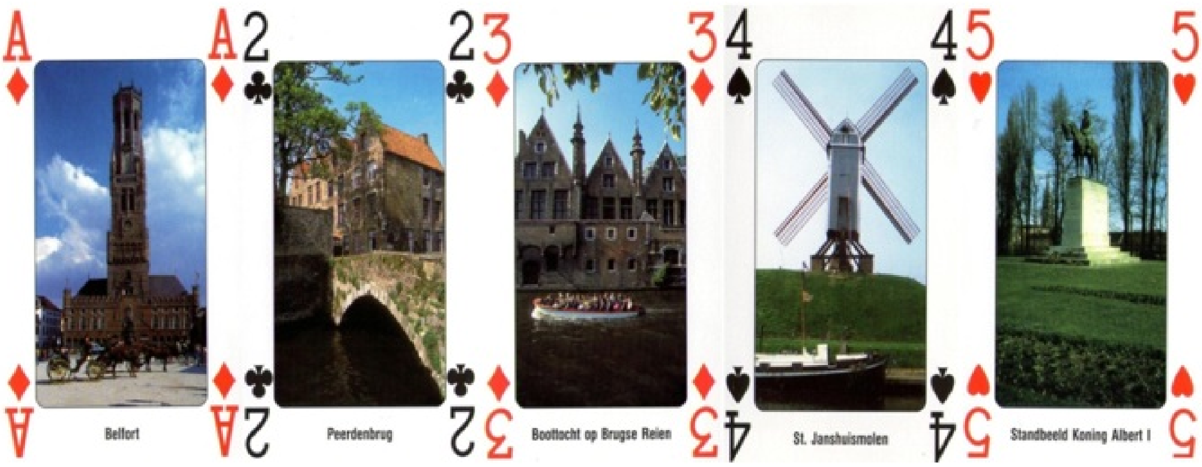


Figura 5.17: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

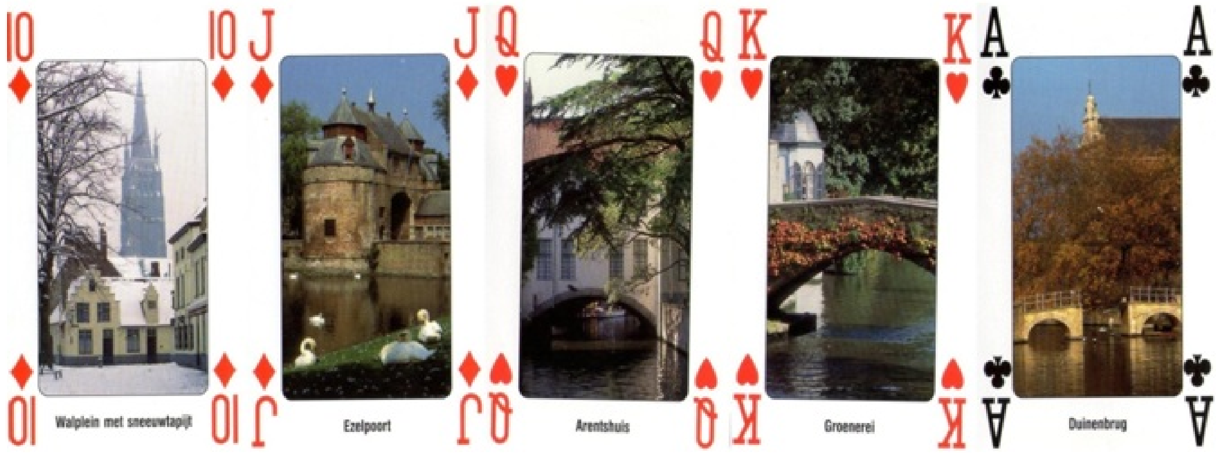


Figura 5.18: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

7 º Trinca simples: Três cartas iguais, com naipes iguais ou diferentes. Em caso de empate ganha quem tiver a trinca com maiores cartas.

Figura 5.19: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

8º Dois Pares: Dois pares de cartas, de naipes iguais ou diferentes. Se mais de um jogador tiver o mesmo par, ganha o que possuir o segundo par com as maiores cartas, e caso permaneça o empate então sairá vencedor o que tiver a quinta carta com maior valor, independente do naipe.

Figura 5.20: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

9º Um Par de Cartas Iguais: Sequência que apresenta um par de cartas, sendo de naipes iguais ou diferentes. Tendo mais de um jogador com o mesmo par, ganhará aquele que possuir a carta de maior valor, dentre as diferentes daquelas que formam o par.

Figura 5.21: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

10º A carta mais alta: neste caso, o desempate é decidido pela carta de maior valor.

No geral, estas são as possíveis combinações que se podem formar no jogo de pôquer, e os respectivos valores que elas ocupam em cada uma das jogadas.

Quando você não tiver um desses jogos e não quiser sair do jogo, jogue com a mais alta carta do baralho.

Figura 5.22: Fonte: Dados da pesquisa (2013).

5.4 Critério de Desempate no pôquer

Quando ocorre um empate de hierarquia entre duas mãos, o jogo recorre às cartas de desempate das mãos. No caso de dois (ou mais), ganhará aquele que tiver a maior carta. Caso continue o empate, haverá uma comparação da segunda maior carta, e assim por diante, até a quinta carta. No caso de quadras, trincas, pares e dois pares, a carta de desempate é aquela que "sobra". Sequência e Straight Flush não tem empate, pois ganha a mais alta.

Em qualquer jogo de Poker básico, os jogadores apostam estrategicamente, utilizando um número de ações disponíveis. As ações são:

Passo - Se não houver aposta na rodada atual de apostas, um jogador pode passar a vez. O ato de passar transfere a possibilidade de ação à pessoa imediatamente próxima ao jogador (no sentido horário). Passar não implica uma renúncia ao pote, mas apenas ao direito presente de apostar. Se todos os jogadores ativos passarem durante uma rodada de apostas, a rodada é considerada completa.

Aposto - Se ainda não houver aposta alguma na rodada de apostas atual, um jogador pode apostar. Se um jogador apostar, o jogador adjacente (no sentido horário), bem como quaisquer jogadores subsequentes poderão desistir, aumentar ou pagar.

Desisto - Ao desistir, você renuncia a qualquer interesse no pote. Um jogador que desiste não pode mais apostar qualquer quantia durante a presente mão do jogo.

Pago - Se tiver havido uma aposta na rodada atual, um jogador poderá pagar. Ao pagar, o jogador igualará a aposta atual do(s) seu(s) adversário(s).

Aumento - Se tiver havido uma aposta na rodada atual, um jogador poderá aumentar. Ao aumentar, o jogador de pôquer deverá não só igualar a aposta atual, mas acrescentar um tanto mais depois. Todos os jogadores subsequentes deverão pagar ou aumentar ainda mais ("re-raise"), de forma a manifestar o seu interesse no pote.

Em cada rodada, as apostas continuam até que todo jogador tenha ou igualado as apostas feitas ou desistido (se nenhuma aposta foi feita, a rodada está completa quando cada jogador tiver passado). Quando a rodada de apostas estiver completa, começa a próxima rodada de distribuição de cartas/apostas ou a mão está completa.

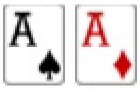
Se a última aposta ou aumento na rodada final de apostas for paga(o), ocorre uma abertura de cartas (showdown). É nesta altura que se determina o vencedor do pote, uma vez que os jogadores mostram as suas mãos, um a um. Pode ocorrer de não haver abertura de cartas. É o caso de quando um jogador aposta ou aumenta, e nenhum dos jogadores ativos escolhe pagar a aposta do jogador (em outras palavras, todos os jogadores desistem). Nesse caso, o jogador que apostou ou aumentou ganha a totalidade do pote.

Qualquer mão que não esteja nas categorias acima, em caso de empate a carta mais alta vence.

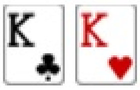
Agora daremos uma pequena ideia como poderemos receber as duas cartas no inicio do jogo. Lembre que jogador é aquele que sabe seguir, mas também parar na hora certa. No site Universidade do Poker (2013), encontramos uma descrição das vinte melhores mãos iniciais do pôquer Texas Holdem que passamos agora a descrevê-las.

Uma das chaves para ser um jogador de Texas Holdem é saber quais as mãos jogáveis e quais são descartáveis. Esta lista com as melhores mãos iniciais para o Texas Holdem é um bom lugar para começar a aprender. Observe que há algumas divergências sobre as mãos que são as melhores, e isso depende em parte do seu nível de habilidade e estilo de jogo. E uma grande mão inicial pode deixar de ser uma boa mão quando as cartas da mesa forem abertas. Um erro comum de principiantes é apostar com qualquer mão, na esperança que ela se torne boa com as cartas da mesa, chamamos isso de uma mão DRAW, ou seja, uma mão incompleta.

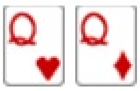
As vinte melhores mãos iniciais:



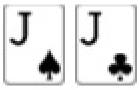
Par de ases



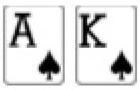
Par de reis



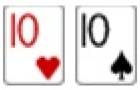
Par de damas



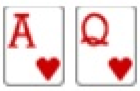
Par de valetes



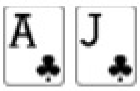
Ás e K do mesmo naipe



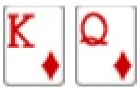
Par de dez



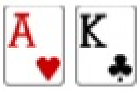
Ás e Q do mesmo naipe



Ás e J do mesmo naipe

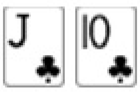


K e Q do mesmo naipe

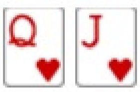


Ás e K de naipes diferentes

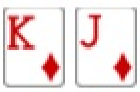
Par de 9



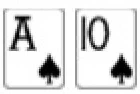
J e 10 do mesmo naipe



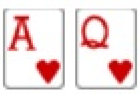
Q e J do mesmo naipe



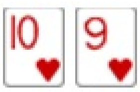
K e J do mesmo naipe



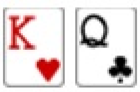
Ás e 10 do mesmo naipe



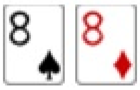
Ás e q do mesmo naipe



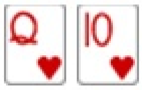
10 e 9 do mesmo naipe



K e Q naipes diferentes



Par de 8



Q e 10 do mesmo naipe

O mais importante é entrar com mãos fortes, evitar a tentação de mãos DRAW, um aspecto característico de jogadores profissionais é o fato deles não desperdiçarem suas fichas com mãos fracas, desistem das mãos o quanto for preciso. Se você tem a sensação que sua mão inicial é fraca e que não deve entrar na rodada, você provavelmente está correto. Descarte suas cartas e espere por uma mão melhor.

5.5 Problemas propostos para discussão

1 - Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.

Figura 5.23: Fonte: Clube do Poker 2013..

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra

Figura 5.24: Fonte: Clube do Poker 2013..

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

a) 624

b) 676

c) 715

d) 720

e) 840

i. Os conjuntos devem ser formados por 5 cartas, sendo 4 de mesmo valor e uma de outro valor qualquer.

ii. Há 13 escolhas diferentes de quadra (quatro cartas de valor 2, quatro de valor 3 e assim sucessivamente).

iii. Para cada quadra escolhida, restam $52 - 4 = 48$ cartas, dentre as quais uma poderá completar o conjunto de 5 cartas.

iv. Então, há $13 \times 48 = 624$ resultados distintos em que se poderá obter uma quadra, retirando-se cinco cartas desse baralho.

2 - De um baralho de pôquer (7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, ouros, paus, espadas) saca-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

Resolução:

Temos ao todo $4 \times 8 = 32$ cartas, das quais escolheremos 5, assim:

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5! \cdot 7!} = 201.376 \text{ resultados.}$$

b) Quantas são as extrações nas quais se forma um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?

Resolução:

- Para escolher o grupo do par temos 8 possibilidades.
- São 4 naipes e preciso escolher 2, assim:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

modos de escolher os naipes das duas cartas do par.

- Precisamos agora escolher as outras 3 cartas dentre as 7 que ficaram. Assim:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

modos de escolher os grupas das outras três cartas.

- Chegou a vez de escolher os naipes dessas 3 cartas, que se distribuem de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ modos diferentes.
- Portanto o resultado é:

$$R = 8 \times 6 \times 35 \times 64 = 107520 \text{ resultados.}$$

c) Quantas são as extrações nas quais se forma dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?

Resolução:

Podemos formar os dois pares escolhendo 2 dentre os 8 grupos da seguinte forma:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28 \text{ possibilidades.}$$

Escolhendo os naipes das dos pares: $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$ maneiras.

Para a quinta carta temos 6 modos de escolher o grupo e 4 de escolher o naipe, ou seja: 24 possibilidades.

Portanto a resposta é:

$$R = 28 \times 36 \times 24 = 24192 \ \text{ resultados.}$$

d) Quantas são as extrações nas quais se forma uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?

Resolução:

Há 8 modos de escolher o grupo da trinca. Temos uma combinação de $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca.

Escolher agora as duas outras cartas que podem ser obtidos de $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$ maneiras.

Agora vamos determinar os naipes destas duas cartas, que é igual a $4 \times 4 = 4^2 = 16$ modos.

Portanto a resposta é:

$$R = 8 \times 4 \times 21 \times 16 = 10.752 \text{ resultados.}$$

e) Quantas são as extrações nas quais se forma um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?

Resolução:

Esta situação permite 8 modos de escolher o grupo do four. Na escolha dos naipes das 4 cartas há apenas uma possibilidade já que $\binom{4}{4} = 1$.

Tem-se ainda 7 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher o naipe dessa carta.

Portanto a resposta é:

$$R = 8 \times 1 \times 7 \times 4 = 244 \text{ resultados.}$$

f) Quantas são as extrações nas quais se forma um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?

Resolução:

Para a formação do full hand devemos ter uma trinca e um par, sendo que há 8 opções de escolha da trinca e $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca.

Agora é a vez de escolher o grupo do par, sendo 7 estas possibilidades. Temos $\binom{4}{2} = 6$ modos de escolher os naipes das cartas do par.

Portanto a resposta é:

$$R = 8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1344 \text{ resultados.}$$

g) Quantas são as extrações nas quais se forma uma sequência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?

Resolução:

Temos apenas 4 tipos de sequências: começando no 7 e terminando no valete, começando no 8 e terminando na dama, começando no 9 e terminando no rei e começando no 10 e terminando no ás.

Escolhido o tipo da sequência agora se escolhe o naipe que tem $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ possibilidades, entretanto temos que descontar as que apresentam todos os naipes iguais, ou seja, $1024 - 4 = 1020$.

Portanto a resposta é:

$$R = 4 \times 1020 = 4080 \;\; \text{resultados.}$$

h) Quantas são as extrações nas quais se forma um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?

Resolução:

Primeiro vamos escolher os grupos não consecutivos das cartas, que corresponde a $\binom{8}{5} - 4 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} - 4 = 56 - 4 = 52$. (Observe a alternativa anterior que justifica o - 4, pois são as situações em que os grupos são consecutivos).

Quanto ao naipe são escolhidos de $\binom{4}{1} = 4$ maneiras.

Portanto a resposta é:

$$R = 52 \times 4 = 208 \text{ resultados.}$$

i) Quantas são as extrações nas quais se forma um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todos do mesmo naipe)?

Resolução: Conforme vimos na "letra g" temos 4 modos de formar grupos de cartas consecutivas Também encontramos modos para se escolher um único naipe.

Portanto a resposta é:

$$R = 4 \times 4 = 16 \text{ resultados.}$$

j) Quantas são as extrações nas quais se forma um "royal straight flush" (10,valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

Resolução:

Neste caso há de se discutir apenas o naipe, pois a sequência é única, igual a 1. Como são 4 os modos de escolher o naipe único, então:

$$R = 1 \times 4 = 4 \text{ resultados.}$$

3 - Se quiséssemos calcular a probabilidade de qualquer um desses eventos ocorrer bastaria calcular o espaço amostral e dividir o número de elementos de cada evento pelo número de elementos do espaço amostral. Consideremos, nesse exemplo, um baralho completo, ou seja, 52 cartas.

E o espaço amostral é:

$$n(S) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2598960.$$

a) Um par: $\dfrac{13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{\binom{52}{5}} = 0,42$

b) Dois pares: $\dfrac{\binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 11 \times 4}{\binom{52}{5}} = 0,048$

c) Trinca: $\dfrac{13 \times \ 4 \times \binom{12}{2} \times 4^2}{\binom{52}{5}} = 0,021$

d) Full house (par e trinca): $\dfrac{13 \times 4 \times 12 \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,0014$

e) Four of a kind: $\dfrac{13 \times 4 \times 12}{\binom{52}{5}} = 0,00024$

f) Straight: $\dfrac{10 \times 4^5}{\binom{52}{5}} = 0,0039.$

g) Flush: $\dfrac{4 \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,0020.$

h) Straight flush: $\dfrac{10 \times 4}{\binom{52}{5}} = 0,000015.$

i) Royal flush: $\dfrac{4}{\binom{52}{5}} = 0,000002.$

j) Nenhuma mão especial: $\left(\binom{13}{5} - 10\right) \times \dfrac{(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} = 0,50$

Capítulo 6

Um pouco de história dos prêmios nos seguros

O seguro é a opção moderna e mais empregada no gerenciamento do risco. É realizado através de um contrato de garantia entre duas pessoas físicas ou jurídicas (ROCHA, 2010).

De acordo com o Código Civil Brasileiro (CCB-2002), em seu artigo 757, "Pelo contrato de seguro, o segurador se obriga, mediante o pagamento do prêmio, a garantir interesse legítimo do segurado, relativo à pessoa ou coisa, contra riscos predeterminados".

De um lado, encontra-se o segurador, ou seja, a pessoa que recebe um pagamento com o intuito de asseverar o bem de um terceiro que por alguma razão corre algum tipo de risco. Do outro lado, há o segurado, isto é, a pessoa que se encontra realizando o seguro. O contrato estipulado entre estas duas partes distintas tem no prêmio o valor que salvaguarda de riscos o bem protegido. Dito de outro modo, o prêmio é o preço que o segurado pagará ao segurador para que ele tenha o seu bem garantido contra eventuais riscos predeterminados em contrato. O documento que determina todas as cláusulas e condições do contrato chama-se apólice (RIBEIRO, 2009).

Como há riscos para as partes, verifica-se que o contrato de seguro é especulativo ao mesmo tempo em que se baseia no princípio da boa fé. Para que tudo funcione de maneira adequada, o segurado não pode omitir informações, pois é baseando-se nas suas respostas que se calcula o prêmio a ser pago ao segurado. As seguradoras de posse de tais informações (e com o valor do somatório de todos os prêmios) constroem as suas reservas monetárias suficientes para cobrir todas as suas obrigações (ROCHA, 2010).

No geral, não é de conhecimento público a maneira como se calcula o prêmio do seguro. Além disso, existem diversas técnicas para que o cálculo de prêmio de seguro realize-se a contento. No entanto, normalmente a sua arquitetura envolve vários parâmetros estatísticos, os quais proporcionam maior fidelidade e equilíbrio entre as múltiplas variáveis contratuais (RIBEIRO, 2009).

Ao lado disso, a SUSEP (Superintendência de Seguros Privados) não define uma maneira fixa para a elaboração do cálculo do prêmio do seguro. Dessa maneira, verifica-se que as seguradoras possuem liberdade para estabelecer os seus próprios valores e preços. Mesmo assim, há uma fórmula geral (bastante simplificada) que demonstra como os prêmios podem ser calculados mediante a importância do bem segurado. Esta fórmula toma como parâmetro as despesas administrativas (na casa dos 10%), a comissão de corretagem (com um valor médio de 15%), a margem de segurança (no patamar dos 3%) e o lucro da seguradora (o qual gira em torno de 5%).

Vamos agora nos apegar às raízes históricas que tratam do surgimento da aplicação da Teoria das Probabilidades aos seguros.

Quando Blaise Pascal e Pierre de Fermat se corresponderam no intuito de alcançarem uma solução ao problema sugerido por Chevalier De Méré, contribuíram de forma decisiva à construção de uma das mais importantes descobertas matemáticas: a Teoria das Probabilidades. Talvez eles não tivessem a dimensão exata do quanto esta iniciativa seria tão importante ao desenvolvimento de uma ferramenta matemática tão útil no estudo do cálculo dos seguros (BERNSTEIN, 1997). Blaise Pascal e Pierre de Fermat contribuíram na construção de regras de probabilidade que abrangiam varias áreas do conhecimento, dentre as quais a previsão de tragédias que ocorressem ao acaso, por exemplo.

De acordo com o financista americano Peter L. Bernstein (1997), "a concepção do controle do risco constitui uma das ideias centrais que distinguem os tempos modernos do passado mais remoto". Dito de outra maneira, os seguros nascem da necessidade que tem o ser humano de administrar os riscos e, consequentemente, proteger a si próprio, as suas coisas ou os seus bens. Com fundamentação erguida sobre as ideias desenvolvidas por Blaise Pascal e Pierre de Fermat, nasce, em 1666, na cidade de Londres a primeira seguradora do mundo moderno, a Insurance Office. Por sinal, o trabalho desenvolvido pelos dois nobres franceses era tão bom que ainda hoje as seguradoras usam a mesma fundamentação de riscos e prêmios adotada por aquela seguradora pioneira no cálculo dos seus prêmios, tomando como base o volume final de sinistros (CAVICHINI, 2010).

Segundo Alexis Cavichini (2010), professor de finanças da Universidade Federal do Rio de Janeiro e organizador do livro A História dos Seguros no Brasil, "Os seguros estão por trás dos grandes acontecimentos que mudaram o mundo". Lógico que esta afirmação tem a força de uma informação cientificamente embasada em pesquisas e estudos. Mas, qualquer cidadão comum sabe que os seguros estão presentes em todos os espaços da vida moderna.

Mas o que fazem as seguradoras não quebrarem, mesmo quando os sinistros são de proporções catastróficas? Certamente se pulverizarem esses prejuízos, todos sobreviverão, mesmo em situações extremas. Vejamos um exemplo: Numa cidade há cinco empresas de taxi tendo cada uma dez veículos e elas combinam que ocorrendo a destruição de algum de seus veículos os prejuízos sejam rateados entre as cinco. Portanto, o prejuízo gerado pela perda de um desses veículos geraria um custo alto para uma só das empresas. Porém, seria relativamente pequeno se dividido para todos (BERNSTEIN, 1997).

O uso de probabilidades no desenvolvimento e aprimoramento dos fundamentos teóricos dos seguros teve início por volta do século XVII, devido ao roubo e naufrágio de cargas e a necessidade do cálculo de pagamento de seguros e anuidades. Mas, antes disso, na antiguidade os comerciantes mesopotâmicos e fenícios pagavam os seguros para aliviarem os supostos prejuízos com as cargas roubadas ou naufragadas. Os seguros surgiram, portanto, como uma tentativa de evitar grandes prejuízos, quando experimentados individualmente. Ou seja, como um risco menos oneroso quando dividido entre os componentes de um grande grupo de solidariedade, composto por uma seguradora (BOYER, 2010).

Em uma entrevista ao Olhar virtual (Revista eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, edição 225 de 14 de outubro de 2008) Alexis Cavichini, professor de finanças da Universidade Federal do Rio de Janeiro e organizador do livro A História dos Seguros no Brasil fala de aspectos importantes deste livro que merecem ser transcritos em alguns pontos importantes.

> Olhar Virtual: O senhor poderia contar rapidamente como esse início dos seguros, desde o Código de Hamurabi, desenvolveu-se até chegar ao Brasil? Depois do Código, os gregos desenvolveram alguns princípios sobre cargas marítimas, como as avarias navais, procedimento similar ao atual. Temos uma passagem sobre a influência dos venezianos, sobretudo mostrando a diferença nos negócios com seguro em relação à Genova. Na sequência, a expansão Ibérica, a vinda da família real portuguesa para a colônia e, finalmente, os seguros no Brasil. A ênfase do livro começa a partir dai, mas é importante mostrar que A historia dos seguros no Brasil não surgiu do nada. Se começássemos apenas nesse momento, deixaremos as pessoas curiosas sobre o que aconteceu antes. Olhar Virtual: Como é atualmente o mercado das seguradoras no Brasil? O mercado de seguradoras é pulverizado. Atualmente, temos 60 grandes seguradoras no país e existe uma quantidade imensa também de corretores - são mais de 40 mil corretores de seguro operando no Brasil, então o publico é muito grande. Além desse mercado de seguradoras, tem uma quantidade imensa de prestadores de serviço. Esse setor cresce numa velocidade impressionante. Só nesse ano (2010) deve crescer em torno de 18%. Para ter uma ideia, o faturamento de seguradoras, considerando apenas as empresas de seguros, as empresas de capitalização e as e as empresas de previdência aberta deve chegar neste ano (2010) em torno de 103 a 108 bilhões de reais. É um movimento expressivo em qualquer parte do mundo. Estamos falando em faturamento, em prêmios recebidos. Além disso, uma grande parte desse dinheiro se transforma em reserva técnica, que as empresas aplicam em títulos públicos, com que compram ações, investem. É um mercado imenso: de seguradoras, corretoras e empresas que prestam serviços para seguradoras (SUSEP, 2013, p.1).

Verifica-se, desse modo, que a origem dos seguros tem uma ligação próxima com a origem da Teoria das Probabilidades. Aliás, os mesmos fundamentos utilizados pela primeira operadora de seguros ainda correspondem aos mesmos mecanismos utilizados no momento (ROCHA, 2010).

Vale lembrar que outras variáveis são consideradas no cálculo do prêmio que cada segurado paga à seguradora, como por exemplo, o preço das peças do carro em questão, quem o conduzirá, onde ele será usado, dentre outros itens. Estas informações aplicam-se ao seguro de automóveis. Mesmo assim, em todos os tipos de seguros a base de cálculo é fundamentada em informações estatísticas e cálculos probabilísticos (RIBEIRO, 2009).

Capítulo 7

Considerações finais

Ao término da pesquisa, verifica-se que o estudo detalhado de todos os aspectos históricos, teóricos e práticos que orientam o estudo da probabilidade em sala de aula é um tema rico e cheio de opções, tanto teóricas quanto práticas. No geral, constata-se que o estudo da probabilidade aqui tratado é o resultado direto de inúmeras pesquisas que foram realizadas tanto de maneira intencional como não intencionalmente. Por sinal, o aspecto amador de seus principais antecessores, entre os quais se inclui Fermat, é uma das características mais marcantes.

Analisar de maneira detalhada um ramo matemático tão rico como a probabilidade é uma atividade complexa. No entanto, é um processo rico em aprendizado, o qual proporcionou uma interessante descoberta de caminhos que a matemática, de maneira universal, segue no desenvolvimento de seus inúmeros ramos. Sendo assim, não é de estranhar que, ao efetuarmos uma pesquisa concentrada principalmente no fortalecimento prático da probabilidade, seja possível realizar um bom resumo teórico e mostrar o seu desenvolvimento em áreas bem distintas.

Aliás, o conjunto de ferramentas oferecido pela Teoria das Probabilidades proporciona uma grande quantidade de descobertas, com utilidades e aplicações práticas em campos bem distintos. Se no início o interesse dos estudiosos das probabilidades centrava-se nos resultados dos jogos de azar e nos cálculos dos prêmios de seguros, hoje envolve inúmeras áreas, com necessidades bem distintas.

Diante disto, nota-se que o ensino de Probabilidade em sala de aula é uma atividade que pode ser feita com facilidade. Dessa forma, não é à toa o fascínio que ela produz, sobretudo entre os estudantes que buscam os conhecimentos matemáticos por opção e prazer. Inclusive, com um pouco de dedicação e de boa vontade, qualquer professor tem plenas condições de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem com o uso de novas metodologias que sejam mais eficazes que os procedimentos tradicionais aplicados no ensino da matemática. Portanto, apesar de suas limitações, esta pesquisa é uma atividade que tenta mostrar alternativas para que a didática em sala de aula seja enriquecida com uma grande quantidade de informações que são indispensáveis ao desenvolvimento das habilidades de cálculo de qualquer aluno.

No Brasil, há limitações quanto ao aprendizado matemático. Mas, com o uso de ferramentas matemáticas apropriadas e a aplicação de exercícios que utilizem objetos concretos do dia a dia a tendência é a diminuição destes enigmas. Entre as mais importantes dificuldades destaca-se a inabilidade em lidar com os conceitos e com fórmulas de maneira prática. Sobretudo considerando-se o elevado valor didático, verifica-se que quanto ao ensino das probabilidades esta dificuldade é superada com facilidade. Evidentemente, isto também depende do interesse que o professor de matemática tem em valorizar o aprendizado em detrimento do cumprimento rígido do programa didático de suas turmas, também importante. Por sinal, as inúmeras cobranças que orientam o ensino de uma disciplina importante como é a matemática, contribuem para criar obstáculos a uma boa aprendizagem.

Diante da grande quantidade de pressões impostas pela sociedade, o professor muitas vezes é forçado a fazer o mais do mesmo. Ou seja, a continuar a ensinar as disciplinas do currículo pensando preferencialmente nos vestibulares. Não que não seja importante cumprir os requisitos mínimos estipulados na grade curricular. Mas, os excessos proporcionam uma situação difícil e que normalmente atrasa o desenvolvimento das habilidades essenciais ao desenvolvimento matemático do aluno. Inclusive não é apenas o professor de matemática que enfrenta este sério desafio todos os dias, os outros também têm essas dificuldades. Os professores de todas as disciplinas, com um pouco de coragem e insistência podem transformar as suas aulas em verdadeiras sessões de aprendizado prático, sem que coloque de lado as questões curriculares.

O nosso trabalho conferiu dificuldades, mesmo assim, foi uma atividade repleta de surpresas. Afinal entender de que maneira uma disciplina complexa como a probabilidade pode ser praticada com maior facilidade no ambiente escolar é uma atividade que proporciona uma grande contribuição ao enriquecimento pedagógico de qualquer professor. Espera-se, além disso, que os resultados enxergados ao término de tudo sejam valiosas contribuições aos métodos didáticos que poderão ser desenvolvidos por companheiros de profissão. Aliás, sabemos o quanto é difícil ensinar matemática em sala de aula lidando todos os dias com uma grande quantidade de cobranças tão diferentes.

De forma leve e discreta tentamos mostrar a existência de meios que façam da Matemática, em geral, e da Probabilidade, em particular, saberes que possam ser trabalhados por profissionais qualificados, desde que eles também estejam dispostos a superar, limitações didáticas novas. Não é menos nobre reconhecer que há algo a aprender com as dúvidas recorrentes dos alunos.

Enfim, espera-se que esta pesquisa contribua na construção de uma nova mentalidade em sala de aula, sobretudo uma que supere as várias barreiras de aprendizado tão comuns em todas as salas de aula.

Referências Bibliográficas

[1] Ação da Vale atinge o menor nível desde 1999, diz jornal. Acessado em: http://economia.uol.com.br/cotacoes/noticias/redacao/2013/06/17/acao-da-vale-e-menor-que-patrimonio-pela-1-vez-desde-1999-diz-jornal.htm, no dia 27 de julho de 2013.

[2] BERNSTEIN, P. L. Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco. Rio de Janeiro: Campus, 1997.

[3] BOYER, Carl B. História da Matemática. 3ª Ed. São Paulo: Blucher, 2010. Brescia. Acessado em: http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2009/10/biografia-de-nicolo-fontana-de-brescia.html, no dia 2 de janeiro de 2013.

[4] CAVICHINI, Alexis. A História dos Seguros no Brasil. São Paulo Suma, 2010.

[5] Como funciona um cassino. Acessado em: http://mundoestranho.abril.com.br/materia/como-funciona-um-cassino, no dia 22 de janeiro de 2013.

[6] Cassinos e jogos. Acessado em: http://veja.abril.com.br/181000/p-102.html, no dia 27 de julho de 2013.

[7] Cassinos. Acessado em: http://www.worldcasinodirectory.com/br, no dia 27 de julho de 2013.

[8] Cassinos luxuosos. Acessado em: http://fazseassim.blogspot.com.br/2012/10/os-10-casinos-mais-luxuosos-do-planeta.html, no dia 22 de janeiro de 2013.

[9] Disciplina jurídica do Jogo e aposta no sistema Brasileiro. Acessado em: http://www.lex.com.br/doutrina_23752422_DISCIPLINA_JURIDICA_DO_JOGO_E_APOSTA_NO_SISTEMA_BRASILEIRO.aspx, no dia 22 de janeiro de 2013.

[10] D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática e História da Matemática. In: Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos. FANTINATO, M. C. C. B. (org.) Niteroi: EDUFF, 2009.

[11] Ensinando probabilidades no ensino médio. Acessado em: http://www.ime.unicamp.br/c̃alculo/ambientedeensino/modulos/history/fermat/fermat.html, no dia 22 de janeiro de 2013.

[12] Estatística e probabilidades no Ensino Médio. Acessado em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Fermat.htm, no dia 22 de janeiro de 2013.

[13] Estatística e probabilidades. Acessado em: http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/Hist_Prob.pdf, no dia 2 de janeiro de 2013.

[14] Estudo das probabilidades. Acessado em: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/estudo-das-probabilidades.htm, no dia 27 de julho de 2013.

[15] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas: UNICAMP, 2004. Fermat. Acessado em: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAuMYAJ/biografia-pierre-fermat, no dia 2 de janeiro de 2013.

[16] GIANELLA, Renato. Teoria das Probabilidades: Aleae Geometria Principia Mathematica (o futuro administrando o presente). São Paulo: Edições Mandacaru Letra e Arte, 2006.

[17] Governo e oposição trocam acusações sobre vaias a Dilma na Copa das Confederações. Acessado em: http://www1.folha.uol.com.br/poder/2013/06/1296620-governo-e-oposicao-trocam-acusacoes-sobre-vaias-a-dilma-na-copa-das-confederacoes.shtml, no dia 27 de julho de 2013.

[18] HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e probabilidade. São Paulo: Editora Atual, 1993. Huygens. Acessado em: http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/huygens/christiaan-huyhens.php, no dia 2 de janeiro de 2013.

[19] HUIZINGA, Johan. Homo Ludens. O jogo como elemento da cultura. Perspectiva: São Paulo, 2000.

[20] LIMA, Elon Lages. Et al. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[21] OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas de. A estatística e a probabilidade nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2006. Dissertação de Mestrado.

[22] OLIVEIRA, Pedro Luiz de. Probabilidades. 2ª Ed. São Paulo: Blucher, 2012.

[23] O cotidiano dos jogos. Acessado em: http://super.abril.com.br/cotidiano/jogo-podemos-apostar-nele-444932.shtml, no dia 27 de julho de 2013.

[24] Os sete melhores cassinos do mundo. Acessado em: http://cybervida.com.br/os-7-melhores-cassinos-do-mundo, no dia 22 de janeiro de 2013.

[25] PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. 2. São Paulo: Editora Moderna, 1995. Probabilidades no Ensino Médio. Acessado em: http://professorwaltertadeu.mat.br/ProfMarcos.htm, no dia 2 de setembro de 2013.

[26] Probabilidades no Ensino Médio. Acessado em: http://profgandhiferrari.files.wordpress.com/2012/07/geometria-plana.pdf, no dia 27 de julho de 2013.

[27] Probabilidade e estatística. Acessado em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Categoria: Probabilidade_e_estat%C3%ADstica http://pt.wikibooks.org/wiki/Probabilidade _e_Estat%C3%ADstica/Probabilidade, no dia 27 de julho de 2013.

[28] RIBEIRO, Amadeu Carvalhaes. Direito de Seguros. Atlas: São Paulo, 2009. ROCHA, Janes. Guia Valor Econômico de Seguros: Pessoa física e bens. Globo: Rio de Janeiro, 2010.

[29] ROQUE, Tatiana. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[30] Resolução do Exame de acesso ao PROFMAT2012. Acessado em: http://www.dme.ufcg.edu.br/pet /arquivos/Resolucao_do_PROFMAT_Pet_Matematica_UFCG_2012.pdf, no dia 27 de julho de 2013.

[31] ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. Estatística e Probabilidade: Um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

[32] VIALI, Lori. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, n. 16, pág. 143-153. São Paulo, 2004.