



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**A importância do ensino da metrologia no ensino da
trigonometria**

Francisco das Chagas da Silva

Teresina - 2013

Francisco das Chagas da Silva

Dissertação de Mestrado:

**A importância do ensino da metrologia no ensino da
trigonometria**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

S586i Silva, Francisco das Chagas da.

A importância do ensino da metrologia no ensino
da trigonometria / Francisco das Chagas da Silva. - 2013.

50f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciência da Natureza, 2013.

“Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite”.

1. Trigonometria. 2. Metrologia. 3. Matemática - Estudo
e Ensino. I. Título.

CDD 516.24

Dedico este trabalho aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus amigos e aos meus professores que ao longo desta etapa me incentivaram nas horas difíceis e que me deram forças para seguir com clareza os meus objetivos de nunca desistir perante um obstáculo.

Agradecimentos

A Deus por me iluminar nos momentos em que busquei inspiração.

Aos meus pais pelo esforço e carinho que tanto me dedicaram para que eu conseguisse ter sucesso em meus estudos.

Aos meus irmãos: Julimar Filho, Edilson Alves (in memoriam) e Sérgio Alves, pelo apoio e amizade que tiveram para comigo nesses longos anos de jornada.

Aos meus amigos e, em especial, à Mackléia Mayara, por toda força e ajuda que sem a qual não seria possível a realização desse sonho.

Aos colegas de turma pela valiosa troca de experiências ao longo desses dois anos.

Aos professores e amigos do UFPI, em especial ao professor Dr. Jefferson Leite, pelo companheirismo, força e carinho.

“Sempre afirmo que se você puder medir aquilo de que estiver falando e conseguir expressá-lo em números, você conhece alguma coisa sobre o assunto - mas quando você não pode expressá-lo em número seu conhecimento é pobre e insatisfatório...”.

Lord Kelvin, físico inglês.

Resumo

A necessidade de medir e de quantificar é inerente à natureza humana e confunde-se com a própria história das civilizações. A constituição da metrologia enquanto ciência deu-se da necessidade de se organizar os sistemas de medições para atender aos avanços tecnológicos que demandavam medições cada vez mais precisas. Porém, mesmo com toda relevância da Metrologia, ciência que auxilia vários campos da atividade humana, como a saúde, a ciência, a tecnologia, dentre outras áreas, o que se percebe é que o ensino da Metrologia não tem o espaço merecido nos conteúdos programáticos do Ensino Médio, em especial no ensino da Matemática, disciplina que requer informações metrológicas para o seu pleno desenvolvimento. Assim, este trabalho objetiva ressaltar a importância da metrologia para a promoção de um ensino-aprendizado mais significativo para o aluno, apresentando de que forma a sua aplicabilidade pode contribuir para o ensino da Matemática, mais especificamente no âmbito da trigonometria. Para tanto, será apresentado um percurso teórico que contempla um histórico das medições, a definição e divisões da metrologia e concepções acerca do ensino-aprendizado da Matemática. Será discutida, ainda, a história da trigonometria e as implicações do ensino da metrologia no ensino da trigonometria que facilitam o entendimento por parte dos alunos das unidades que essa utiliza.

Palavras-chave: Ensino-aprendizado. Matemática. Metrologia. Trigonometria.

Abstract

The need to measure and quantify is inherent in human nature and it is intertwined with the history of civilizations. The constitution of metrology as a science came from the need of organizing the measurement systems to meet the technological advances that required more and more accurate measurements. But even with all the relevance of Metrology, the science that supports many fields of the human activity, such as health, science, technology, among other areas, what is seen is that the teaching of Metrology doesn't have a specific space in the high school program contents, particularly in mathematics education, discipline that requires metrological information to its full development. Thus, this paper aims to highlight the importance of metrology for the promotion of a teaching and learning more meaningful to the student, showing how its applicability can contribute to the teaching of mathematics, more specifically in the context of trigonometry. To this end, we present a theoretical path that includes a history of measurements, the definition and division of metrology and conceptions related to the teaching and learning of mathematics. The history of trigonometry and the implications of teaching metrology in the teaching of trigonometry to facilitate the student's understanding of the units that use it will also be discussed.

Keywords: Teaching-learning. Mathematics. Metrology. Trigonometry.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 O ato de medir: aspectos históricos	4
2.1 O Sistema Internacional de Medidas	9
3 Metrologia: definições	14
3.1 Divisões da Metrologia	16
4 Aspectos históricos da trigonometria	20
4.1 Origem da Trigonometria	20
4.2 Primeiras Medições	21
4.3 Outras Personalidades	23
5 Medições na Trigonometria	27
5.1 Razões Trigonométricas	27
5.2 Unidades Usuais	28
6 O ensino-aprendizagem da matemática: limitações e perspectivas	31
Considerações Gerais	36
Referências Bibliográficas	38

Lista de Figuras

2.1	Cúbito (IPEM-SP, 2008)	5
2.2	Pé, Polegada e Palmo(IPEM-SP, 2008)	5
2.3	Braça e Jarda(IPEM-SP, 2008)	6
3.1	Metrologia nos produtos. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.	15
3.2	Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.	18
3.3	Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.	18
3.4	Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.	18
4.1	Eratóstenes	21
4.2	Construção de Eratóstenes	22
4.3	Aristarco de Samos	23
4.4	Distância entre terra e sol	24
4.5	Hiparco de Nicéia	24
4.6	Distância lua e terra	25
4.7	Construção de Hiparco	26
5.1	Semelhança de triângulos	27
5.2	Arco de medida um grau	29
5.3	Arco de medida um radiano	29

Lista de Tabelas

2.1	Equivalências das medidas corporais convertidas em centímetros	6
2.2	Grandezas de base e unidades de base do SI/Fonte: Inmetro	10
2.3	Definições das Unidades de base do SI/Fonte: Inmetro (2012)	12
2.4	Grandezas não contempladas no SI/Fonte: Inmetro (2012).	13

Capítulo 1

Introdução

Medir não é uma atividade recente, inicialmente, as referências eram tidas a partir de simples comparações, que geralmente eram seguidas a partir de modelos pré-acordados. Estes modelos tinham como padrão as partes do corpo humano do governante da região. O padrão mais antigo que se tem notícia é o cúbito, que também tem como referência uma parte do corpo humano: a medida do antebraço até a mão.

Dessa forma, as unidades de medições eram tão numerosas quanto as comunidades espalhadas pelo mundo, o desenvolvimento descontrolado de unidades de medições dificultava o estabelecimento do comércio e o conseqüente progresso das comunidades.

Com a evolução dos tempos e os grandes avanços nas áreas do comércio, pessoas de diferentes regiões com necessidades de fazer negócios umas com as outras, percebeu-se que diferentes unidades de medições eram uma fonte de problemas para toda e qualquer transação, tanto no âmbito comercial, científico ou em qualquer outro existente.

A partir dessa preocupação, o governo Francês, no final do século XVIII, dá instruções à Academia de Ciência de Paris para a criação de um sistema métrico único que fosse baseado em uma constante natural e que pudesse ser compartilhado por todas as outras nações. Esta ideia de universalidade e internacionalidade que o governo propunha para este novo sistema de medidas trazia consigo os próprios ideais da Revolução Francesa que antecederam a decisão governamental: “Liberdade, Igualdade e Fraternidade”. Fazia-se latente o exercício da justiça nas medições para que se fizesse, finalmente, jus à expressão milenar “dois pesos e duas medidas”.

Apesar da não aceitação e da insatisfação de comerciantes e da população em geral frente ao primeiro sistema apresentado: o sistema métrico decimal, os estudos evoluíram

e mais tarde com as devidas alterações e evoluções, este sistema dá espaço para o Sistema Internacional de Medidas, que também teve as suas rejeições, mas que aos poucos com as devidas modificações foi se internacionalizando e se tornando o principal sistema de medições de muitos países.

Percebe-se que a necessidade de medir está atrelada a fatores que influenciam diretamente na qualidade de vida das pessoas, qualidade dos produtos e serviços consumidos, segurança, além de evitar que trabalhos sejam refeitos e, também, evitando os desperdícios.

A metrologia é a ciência que sistematiza as medições, ela está presente no dia-a-dia das pessoas na hora de levantar, com o uso de relógios, despertadores, alarmes; nos procedimentos higiênicos, ao fazer uso de produtos industrializados, que foram previamente medidos; ao se servir em um restaurante com comida a quilo, enfim, a metrologia está imbricada em vários setores da atividade humana. Por estar presente em tantos campos diversificados, a metrologia é considerada uma interciência, que dá suporte e possibilita o pleno desenvolvimento de outras ciências.

Nesse sentido, o amplo campo de atuação desta ciência, que é tão pouco disseminada nos currículos escolares do Ensino Médio, favoreceu ao desenvolvimento deste trabalho. O que se percebe é que a Metrologia é pouco contemplada nos conteúdos programáticos do Ensino Médio, em especial no que diz respeito ao ensino da Matemática, disciplina que requer informações metrológicas para que o seu desenvolvimento seja facilitado.

Assim, este trabalho objetiva ressaltar a importância da metrologia para a promoção de um ensino-aprendizado mais significativo para o aluno, apresentando de que forma a sua aplicabilidade pode contribuir para o ensino da Matemática, mais especificamente no âmbito da trigonometria.

Para contemplar o objetivo proposto, o trabalho foi dividido em quatro partes. A primeira parte diz respeito aos aspectos históricos do ato de medir, ressaltando as primeiras medições, como surgiram as ideias de unificações dos sistemas de medidas, os estudiosos envolvidos nesses processos, bem como os caminhos para se chegar no Sistema Métrico Decimal e, posteriormente, no Sistema Internacional de Medidas.

Esta parte introdutória acerca das medições fez-se necessária para um melhor entendimento da terceira parte do trabalho, que apresenta a sistematização das medições enquanto ciência: a Metrologia. Neste capítulo é abordada a definição de Metrologia, as

suas classificações e, ainda, o campo de atuação de cada uma das áreas da Metrologia. Este capítulo traz, também, aspectos sociais e econômicos relevante no que concerne a aplicabilidade da Metrologia.

É nessa perspectiva que no capítulo seguinte propõe-se, inicialmente, a fazer um breve histórico da trigonometria, ressaltando os estudiosos envolvidos, estabelecendo de que forma ocorreram as primeiras medições e apresentando, ainda, as unidades usuais.

Já o sexto capítulo do trabalho é destinado a uma breve discussão acerca do ensino-aprendizado da Matemática, ressaltando que concepções são integradoras de uma prática que promova um ambiente de aprendizado significativo e que possa, enfim, contribuir para a formação de alunos conscientes, críticos e autônomos para usar o conhecimento adquirido.

Por fim, apresentamos os estudos conclusivos, não na pretensão de encerrar e esgotar a discussão proposta, mas no sentido de contribuir para com o ensino-aprendizado da Matemática através da proposição de práticas e ideias interdisciplinares que possam convergir para um ensino-aprendizado mais significativo.

Capítulo 2

O ato de medir: aspectos históricos

A quantificação é uma necessidade que tem acompanhado a evolução das civilizações desde muito tempo. Porém a ideia de um sistema preciso, invariante, que atenda as especificidades cada vez mais exigentes no âmbito das ciências, da tecnologia e do comércio, é relativamente recente.

As primeiras tentativas de se sistematizar as unidades de medidas foram conduzidas por círculos intelectuais e humanistas do Ocidente europeu ao longo do século XVI, que buscavam na leitura de textos eruditos e da sagrada escritura - Bíblia - a compilação dos pesos, medidas e valores monetários utilizados para estabelecer equivalências com as medidas empregadas à época. De acordo com Dias (1998), este procedimento de comparações foi aplicado na intenção de melhor entender o passado e, ainda, para melhor interpretar os fatos bíblicos.

O estudo das equivalências de medidas não foi suficiente para contemplar a problemática da época, que em decorrência da internacionalização do comércio, precisava de tabelas cada vez mais precisas que pudessem dar conta dos pesos, das medidas e das operações cambiais. Assim, dadas essas necessidades, embora os estudos oriundos dos círculos humanistas tenham sido importantes para o melhor entendimento das relações de pesos, medidas e valores utilizados em textos do passado, os debates destes grupos não constituiriam a base de onde nasceriam as primeiras formulações de um sistema universal de medidas e a possibilidade de sua aceitação pela comunidade.

As relações de medições envolvendo as partes do corpo foi um fator importante para as padronizações no passado e, em alguns casos, continuam recorrentes até os dias de hoje. A unidade mais antiga que se tem registro na história da humanidade é o côvado,

também conhecido como cúbito. Esta medida equivale ao comprimento do cotovelo até a ponta do dedo médio, conforme mostra a figura a seguir:

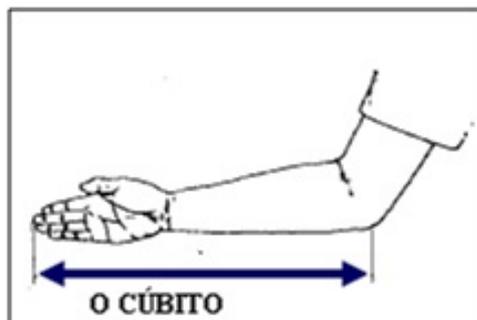


Figura 2.1: Cúbito (IPEM-SP, 2008)

Inicialmente as padronizações de medidas eram divergentes de um grupo para o outro, cada grupo criava as suas padronizações de acordo com os seus costumes, tradições e dimensões baseadas no corpo humano, fato este que dificultava as relações de comércio. Segundo Oliveira e Silva (1968), o corpo do governante era tomado como referência para estabelecer as unidades de medidas. Assim, surgiram medidas que são utilizadas até os dias de hoje, como o pé, a polegada, o palmo, a braça e a jarda, conforme podem ser observados a seguir:

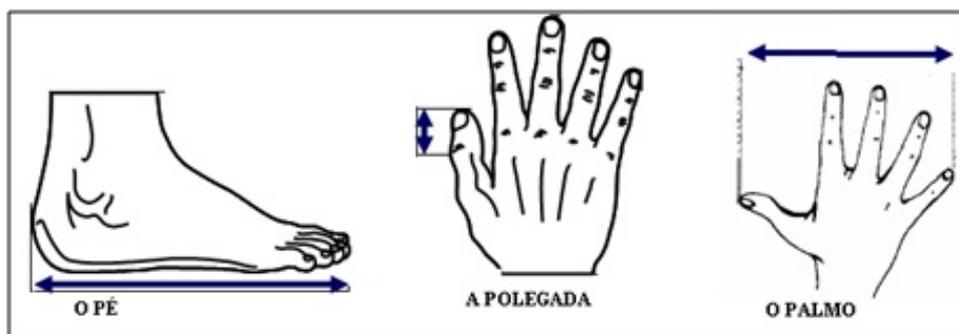


Figura 2.2: Pé, Polegada e Palmo(IPEM-SP, 2008)

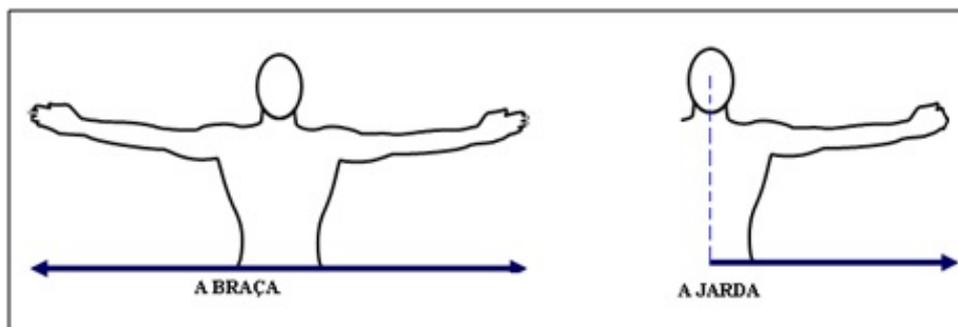


Figura 2.3: Braça e Jarda(IPEM-SP, 2008)

Em um sistema de correspondências, tem-se as seguintes equivalências para as medidas apresentadas:

Polegada	2,54 cm
Palmo	22 cm
Pé	30,48 cm
Braça	2,2 m
Jarda	91,44 cm

Tabela 2.1: Equivalências das medidas corporais convertidas em centímetros

Este sistema de medições, considerando as referências de medidas corporais, refletia a preocupação dos governantes de unificar um sistema que organizasse as relações que envolviam medições, porém, Dias (1998, p. 9) apresenta uma das problemáticas gerada por tal sistemática:

A autoridade política, em suas diversas modalidades, sempre procurou, sobretudo por motivações de índole fiscal, garantir e manter padrões oficiais de medidas, mas sua capacidade de uniformização dificilmente ultrapassava as fronteiras da cidade em que estava sediada ou da região econômica em que predominava.

Assim, dada a divergência de medidas que acarretavam em problemas para as operações comerciais da época, houve a necessidade de se estabelecer um sistema que unificasse as unidades de medidas de forma a tornar as operações mais precisas. Tais esforços foram registrados, principalmente, pelas monarquias inglesa e francesa, que buscavam a uniformização dos pesos e medidas para uma melhor centralização administrativa e fiscal.

As primeiras tentativas de uniformização tanto na Inglaterra (1634) quanto na França (1668) foram fracassadas. A ideia de se utilizar um padrão único, convencional, foi refu-

tada pelos comerciantes, pelos senhores feudais e pela população em geral, que temiam ter seus costumes e cultura abalados pelas decisões da monarquia. Segundo Dias (1998), o projeto de um plano unificador dos pesos e medidas é abandonado pela burocracia real, sendo repassado para a responsabilidade da comunidade científica.¹

Neste contexto propício, destacam-se as seguintes produções:

- Gabriel Mouton (1670) - responsável por criar um sistema básico que era constituído por uma fração da circunferência da terra. A partir desta unidade básica, Mouton deduziu um conjunto de medidas lineares, sujeitas a relações decimais.
- Jean Picard (1671) e Christian Huygens (1673) - a utilização do pêndulo foi proposta como unidade fundamental. Na proposta, a *toesa*² teria seu valor associado à medida da extensão do pêndulo que bate 1 segundo em Paris.

Mesmo com todos os esforços, tanto o sistema baseado na medição de meridianos terrestres, como a variação na oscilação do pêndulo provocadas pelas variações na gravidade terrestre, encontraram problemas de operacionalização, uma vez que as expedições científicas não dispunham de meios para medições mais rigorosas.

Diante desta problemática, o governo francês resolve apoiar oficialmente os estudos de unificação dos padrões de medidas, e fica estabelecido que a Academia de Ciências de Paris lidere a execução dos estudos. Assim, em meados de 1730, a academia envia duas expedições para efetuar a medição de dois arcos do meridiano, um próximo à linha do equador e outro na região polar, tais medições tinham como unidade de equivalência de medida com constante física, a *toesa* parisiense.

Mais uma vez a operação de padronização foi abortada por comerciantes, senhores feudais e pela população da época, que temiam a intervenção do reinado na determinação de suas rendas, no entanto, como fator positivo, tem-se o fato do fortalecimento da relação entre governo e cientistas na tentativa da busca de fundamentos concretos que viabilizassem os estudos das medições.

¹A comunidade científica envolvia a *Royal Society*, de Londres, cujo regimento foi estabelecido em 1662, e a Académie des Sciences, cujo patrocínio real permitiu o início de sessões formais em 1666. Os cientistas de maior prestígio estavam reunidos em cada país, propiciando um ambiente fértil para o debate de ideias e para a realização de programas experimentais que envolvessem a padronização dos pesos e medidas.

²Unidade de medida utilizada na França.

Dada à falta de um sistema que balizasse e padronizasse as medidas, o comprimento do pêndulo que bate à latitude de 45° , fica estabelecido como a base de um sistema universal de medidas, esta determinação foi regida por uma legislação que foi sancionada como projeto de lei sancionada em 1790. Porém, a própria Academia Francesa, incumbida de verificar a viabilidade do novo sistema através de comissões formadas por estudiosos, conclui que o sistema expressa mais dúvidas do que medidas realmente concretas, de acordo com Dias (1998).

Frente à insatisfação da adoção deste sistema, fica decidido em meados de 1791, que o meridiano de Dunquerque até Barcelona, anteriormente medido nas expedições patrocinadas pela realeza, seria tomado como base para um novo sistema de medidas, levando em consideração as seguintes propostas para uma abordagem completa de sistema de medidas, conforme Dias (1998):

1. fixação da extensão do pêndulo que bate o segundo;
2. observação do peso de um volume conhecido de água destilada a 0° ; e,
3. o estabelecimento das relações entre antigas e novas medidas.

Os trabalhos foram executados no sentido de melhor sistematizar a problemática da padronização e a partir dos relatórios entregues à Convenção Nacional, estabeleceu-se o metro³ provisório de 36 polegadas e 11,44 linhas em maio de 1793, estabelecendo também a escala decimal para múltiplos e submúltiplos. Apesar das turbulências e perseguições políticas, o trabalho teve continuidade, e assim, eram aprimorados os estudos que dariam, posteriormente, origem ao Sistema Métrico Decimal. Em 1795, uma comissão denominada Agência Nacional de Pesos e Medidas apresenta um outro protótipo provisório, dessa vez, para o quilograma, mantendo a medida do metro anteriormente apresentada. Com o aperfeiçoamento das medições provisórias, os protótipos foram se constituindo de forma definitiva, sendo o metro definido em 3 pés, 11 linhas 296/1.000 e o quilograma com o valor de 18.827,15 grãos.

Considerando a dificuldade de adaptação da população com o novo sistema, mesmo depois da assinatura de um decreto que tornou obrigatório o ensino deste sistema nas escolas francesas e autorizava a construção de exemplares dos pesos e medidas para serem

³Segundo Dias (1998), o metro teve o seu valor atingido a partir do cálculo da décima milionésima parte do quarto do meridiano.

distribuídos, o sistema continuou com baixa aceitação e encontrou resistências de outros povos em utilizá-lo, fato este que dificultou a sua propagação e promoção para um sistema de proporções universais.

A própria Inglaterra, que inicialmente teria empreendido juntamente com a França no projeto de padronização das medidas, teve uma postura conservadora no sentido da manutenção da nomenclatura antiga, como pode ser percebido ainda nos dias de hoje na Inglaterra, e conseqüentemente, nos Estados Unidos⁴.

Já em Portugal, usavam-se medidas padronizadas que eram difundidas em todo o reino, todas as cidades e vilas eram portadoras dos padrões de unidades, conhecidos como Vara, Côvado, Alqueire, Almude, Canada e Quartilho. Porém, tais padrões foram totalmente perdidos, em 1755, em um incêndio. Dado as condições do incidente, uma comissão é instituída para analisar os antigos forais e frente às deficiências encontradas no sistema, fica estabelecido em 1813, que Portugal passaria a adotar o sistema decimal francês, com a ressalva de permanecer a nomenclatura antiga já utilizada, adotando-se a relação de equivalências entre as medidas. Conduta esta que foi alterada em 1852 quando Portugal adota em caráter completo e definitivo as especificações do sistema métrico decimal, com suas unidades e nomenclaturas.

Mesmo com todas as facilidades trazidas pelo Sistema Métrico Decimal, a evolução da ciência e tecnologia exigia cada vez mais precisão nas operações, o que contribuiu para fazer emergir um sistema mais complexo: O Sistema Internacional de Unidades.

2.1 O Sistema Internacional de Medidas

O SI foi desenvolvido a partir do antigo sistema de medições, que adotava três medidas básicas: o metro, o quilograma e o segundo, visando uniformizar e facilitar as relações de medições. O novo sistema recebeu este nome em 1960⁵ na 11^a Conferência Geral de Pesos e Medidas, com o propósito de se tornar mundialmente aceito e proporcionar um maior desenvolvimento para o ensino e para a ciência no que diz respeito às medições.

⁴As medidas lineares anglo-saxãs têm como unidade de medida a jarda, já a unidade de massa tem como exemplar a libra.

⁵No Brasil, o SI foi adotado em 1962 e ratificado pela Resolução nº 12 de 1998 do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Conmetro), tornando-se de uso obrigatório em todo o Território Nacional.

Sete são as unidades de base do SI, que mantém uma relação de independência entre si e que a partir das quais se derivam todas as outras unidades existentes:

Grandeza de base	Unidade de Base	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	Quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	Ampère	A
Temperatura Termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de Matéria	Mol	mol
Intensidade Luminosa	Candela	cd

Tabela 2.2: Grandezas de base e unidades de base do SI/Fonte: Inmetro

Para melhor detalhamento das unidades do SI, o Inmetro (2012) apresenta as suas definições:

Grandeza / Unidade	Definição da Unidade
Comprimento / Metro	O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.
Massa / Quilograma	O quilograma é a unidade de massa (e não de peso ou força); ele é igual à massa do protótipo internacional do quilograma. A massa do protótipo internacional é sempre igual a 1 quilograma exatamente, $m(K) = 1$ kg.
Tempo / Segundo	O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133. A frequência de transição hiperfina do estado fundamental do átomo de césio 133 é exatamente igual a 9 192 631 770 hertz, $\nu(\text{hfs Cs}) = 9\,192\,631\,770$ Hz

Corrente Elétrica / Ampère	O ampere é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível, e situados à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre estes condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento. A constante magnética μ_0 , também conhecida como a permeabilidade do vácuo, é exatamente igual a $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.
Temperatura Termodinâmica / Kelvin	É a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água. A temperatura termodinâmica do ponto triplo da água é exatamente 273,16 kelvins, $T_{tpw} = 273,16$ K. O zero kelvin é o zero absoluto (quando param os movimentos moleculares)
Quantidade de matéria / mol	É a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilograma de carbono 12; seu símbolo é "mol". Quando se utiliza o mol, as entidades elementares devem ser especificadas, podendo ser átomos, moléculas, íons, elétrons, assim como outras partículas ou agrupamentos especificados de tais partículas. A massa molar de carbono 12 é exatamente igual a 12 gramas por mol, exatamente, $M(12C) = 12$ g/mol.

Intensidade Luminosa / Candela	A candela é a intensidade luminosa, numa dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência 540×10^{12} hertz e que tem uma intensidade radiante nessa direção de $1/683$ watt por esferorradiano. A eficácia luminosa espectral de uma radiação monocromática de frequência 540×10^{12} hertz é exatamente igual a 683 lúmens por watt, $K = 683 \text{ lm/W} = 683 \text{ cdsr/W}$.
--------------------------------	---

Tabela 2.3: Definições das Unidades de base do SI/Fonte: Inmetro (2012)

Existem outras unidades que são derivadas do SI e outras unidades que não pertencem ao SI mas que são de uso comum e frequentes na vida cotidiana e complementam o Sistema Internacional, a respeito dessas unidades fora do SI, o Inmetro (2012), afirma que

é reconhecido que algumas unidades fora do SI ainda são utilizadas em publicações científicas, técnicas e comerciais, e que elas continuarão em uso ainda por muitos anos. Algumas unidades fora do SI são importantes sob o ponto de vista histórico na literatura tradicional. Outras unidades fora do SI, como as unidades de tempo e de ângulo, estão tão enraizadas na história e na cultura humana que continuarão a ser usadas no futuro. (INMETRO, 2012, p. 36).

Dentre essas unidades amplamente utilizadas no cotidiano em nível mundial e que são diferentes daquelas contempladas pelo SI⁶, destacam-se:

⁶As unidades diferem-se daquelas contempladas pelo SI por um fator igual a uma potência inteira de dez.

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo da Unidade	Valor em Unidades do SI
Tempo	Minuto	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	Hora	h	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
	Dia	d	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86.400 \text{ s}$
Ângulo plano	grau	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	minuto	'	$1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
	segundo	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
Área	hectare	ha	$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 104 \text{ m}^2$
Volume	litro	L, l	$1 \text{ L} = 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 =$ $= 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
Massa	Tonelada	T	$1 \text{ T} = 10^3 \text{ kg}$

Tabela 2.4: Grandezas não contempladas no SI/Fonte: Inmetro (2012).

É importante ressaltar que mesmo com um Sistema Internacional que atende às mais variadas especificidades, ele não deve ser considerado um produto pronto, estático, o SI, pela sua própria natureza, deve estar sempre em evolução para que possa acompanhar as diversas demandas na área das medições.

Dada a necessidade de uma ciência que desse conta de sistematizar as especificidades no campo das medições emerge a Metrologia, estabelecendo parâmetros cada vez mais objetivos e técnicos de acordo com a área de aplicação, como será apresentado a seguir.

Capítulo 3

Metrologia: definições

A necessidade de medir é intrínseca da própria natureza humana, desde execuções de atividades rotineiras, presentes no ato de cozinhar, nas compras do dia-a-dia, na dosagem de medicamentos, etc. às especificações criteriosas de produtos, além de atuar como instrumento necessário no campo da ciência, da tecnologia e da inovação.

Assim, quantificar é um ato que de forma sistematizada ou não confunde-se com o próprio processo de evolução das espécies. Portanto, com vistas à padronização do ato de medir, tem-se a metrologia como a ciência da medição, palavra de origem grega (metron - medida; logos - ciência) e que tem como foco principal prover confiabilidade, credibilidade, universalidade e qualidade às medidas. Como as medições estão presentes, direta ou indiretamente, em praticamente todos os processos de tomada de decisão, a abrangência da metrologia é imensa, envolvendo a indústria, o comércio, a saúde e o meio ambiente, para citar apenas algumas áreas. (LONGO, 2005, apud DANTAS, 2007).

A metrologia surge em um cenário onde medições confiáveis são exigidas para garantir a qualidade dos produtos e sucesso nas comercializações, daí a sua importância está diretamente relacionada com os sistemas de padronizações, que coadunados ao sistema maior, o Sistema Internacional, garantem a manutenção da qualidade e excelência na oferta de serviços no que diz respeito aos pesos e medidas.

Outro fator preponderante de confiabilidade das medições repousa no escopo social que a metrologia traz consigo, considerando que ela é uma ferramenta por meio da qual o cidadão pode controlar as medições daquilo que consome, sendo de suma importância para as atividades rotineiras, posto que ela é organizadora da vida em sociedade.

Assim, esta ciência, tão recente no campo científico, contribui para a transformação

da vida em sociedade, tornando-se indispensável para melhorar a oferta de produtos e serviços, tanto no campo econômico, através das políticas de redução de índices de desperdícios, quanto no social, através da garantia da manutenção do direito dos consumidores, possibilitando, assim, o despertar para a construção da cidadania.

É impossível passarmos o dia sem entrar em contato com algum tipo de medição. As medidas envolvem o cotidiano do cidadão sem que, em muitas vezes, sejam percebidas de uma forma direta. Elas estão presentes em quase todas as atividades. Ao realizarmos nossa higiene diária utilizamos produtos industrializados (sabonete, creme dental, shampoo, perfume, etc.) que foram medidos anteriormente (peso, volume, composição química, etc.) e liberados para comercialização. Para o automóvel não ficar sem combustível e nos deixar parados no meio da rua, existe um indicador da quantidade de combustível do tanque que nos orienta para a hora do reabastecimento. Ao utilizarmos um táxi, o taxímetro mede o valor da tarifa em função da distância percorrida. Estes são apenas alguns exemplos da presença da metrologia na vida do cidadão comum. Muitos outros poderiam ser dados a pensar em atividades mais específicas, como a medicina, os transportes, entre outros. Para melhor ilustrar a presença da metrologia no dia-a-dia, temos como exemplo a figura:



Figura 3.1: Metrologia nos produtos. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.

Na figura acima tem-se exemplos da forma como são comercializados produtos pré-medidos, que são aqueles que passam pelo processo de medição sem que o consumidor acompanhe a pesagem da quantidade determinada. A indicação da quantidade deve vir especificada na embalagem, ressaltando que o peso apresentado deve se referir ao peso líquido, não contemplando o peso da embalagem ou do líquido conservante.

3.1 Divisões da Metrologia

A parte da metrologia que trata destas questões averiguando e assegurando o cumprimento dos direitos do público em geral é a metrologia legal. Existem mais duas outras grandes áreas: a metrologia industrial e a metrologia científica.

Inicialmente será apresentada a metrologia legal, considerando que ela está diretamente relacionada com os objetivos elencados neste trabalho, esta categoria da metrologia é responsável por regulamentar e fiscalizar junto aos agentes econômicos os mais diversos tipos de instrumentos de medições que estejam relacionados aos circuitos comerciais, na saúde e na segurança dos cidadãos. Para o VIM (2007, p. 17), a metrologia legal está relacionada às atividades resultantes de exigências obrigatórias, referentes às medições, unidades de medida, instrumentos de medição e métodos de medição, e que são desenvolvidas por organismos competentes.

Para que se possa assegurar a garantia metrológica, o VIM (2007) prevê um conjunto de atividades que compreendem a metrologia legal:

- controle legal dos instrumentos de medições;
- a supervisão metrológica; e,
- a perícia metrológica.

O controle legal dos instrumentos de medições diz respeito à fase de verificação e aprovação do modelo, enquanto que a supervisão metrológica está relacionada ao controle e verificação dos instrumentos de medição desde a fabricação até a utilização, observando se esta utilização se dá de forma correta, em consonância com as leis e regulamentos metrológicos, já a perícia metrológica envolve a apresentação das condições dos instrumentos de medições, observando se eles respondem às exigências já regulamentadas.

Após as fases de inspeções dos instrumentos de medições, para que possam ser usados, eles necessitam de uma portaria (certificado) de aprovação de modelo, o qual é emitido a partir do laudo da perícia metrológica, onde existem as especificações de como foi efetuada a perícia e em que condições o instrumento se encontrava. A partir dos resultados obtidos, a perícia pode indicar ainda a reprovação do instrumento, se este não satisfizer as exigências regulamentares pertinentes.

Assim, dando continuidade ao processo de certificação dos instrumentos de medidas,

selos são disponibilizados para comunicar a situação destes instrumentos. Conforme apresentado pelo VIM (2007, p. 22), são eles:

- Marca de Verificação - Marca colocada em um instrumento de medição, certificando que a verificação do instrumento foi efetuada com resultados satisfatórios. A marca de verificação pode identificar a organização responsável pela verificação e, ainda, indicar o ano ou a data da verificação ou sua data de expiração.
- Marca de Reprovação - Marca colocada em um instrumento de medição, de maneira aparente, para indicar que o instrumento não satisfaz às exigências regulamentares e, ainda, inutilizar a marca de verificação colocada anteriormente.
- Marca de Selagem - Marca destinada a proteger o instrumento de medição contra qualquer modificação, ajuste, remoção de componentes, etc., não autorizados.
- Marca de Aprovação de Modelo (tipo) - Marca colocada em um instrumento de medição certificando que o instrumento está de acordo com um modelo (tipo) aprovado.

Assim como os instrumentos de medições, os produtos também passam por inspeções, e aqueles que passam nos testes recebem a “Marca ou Selo de Identificação da Conformidade do Inmetro”. Para a aprovação, normas técnicas devem ser seguidas na fabricação de produtos pra que eles possam ter uma qualidade aceitável.

Porém, para uma grande gama de produtos não existe a obrigatoriedade de se seguir as normas técnicas. A obrigatoriedade reside para produtos que se fabricados de maneira incorreta ou fazendo uso de matéria-prima de baixa qualidade, podem colocar em risco a saúde e a segurança do cidadão. O Inmetro é o órgão responsável para fiscalizar e definir quais produtos devem ser submetidos a este tipo de tratamento. São exemplos de produtos que devem conter, obrigatoriamente, o Selo de Identificação da Conformidade:

- Brinquedos, que além do selo, devem ser observados a faixa etária a quem se destina o produto, bem como as instruções de uso.



Figura 3.2: Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.

- Camisinhas, outras informações como a data de fabricação e o prazo de validade devem ser observados.



Figura 3.3: Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.

- Gás liquefeito de Petróleo (regulador e mangueira), além do regulador e da mangueira é importante que se analise a qualidade dos botijões, evitando comprar aqueles que se apresentam enferrujados ou amassados. Para garantia da qualidade do produto, o lacre do revendedor deve estar intacto quando da compra.

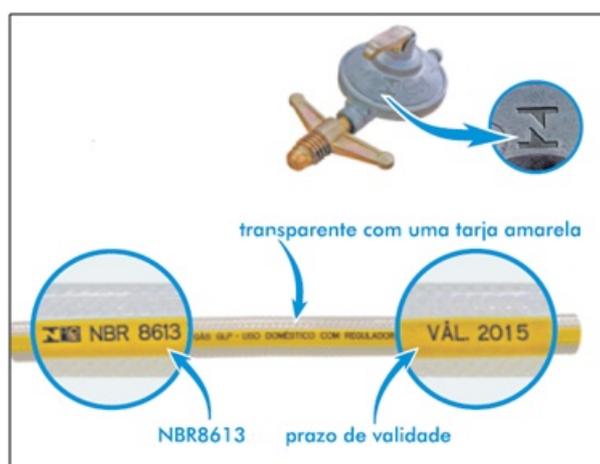


Figura 3.4: Exemplos de selos Inmetro. / Fonte: IPEM, São Paulo, 2012.

Vários outros produtos devem apresentar o Selo de Identificação da Conformidade, para que se tenha assegurado os critérios de qualidade e resguardados os direitos de não exposição do cidadão às situações que ponham em risco a sua saúde e/ou segurança.

A Metrologia Científica trata, fundamentalmente, dos padrões de medição internacionais e nacionais, dos instrumentos laboratoriais e das pesquisas e metodologias científicas relacionadas ao mais alto nível de qualidade, exatidão e/ou incerteza. A exemplo disso tem-se a calibração de termômetros-padrão de mercúrio em vidro e de pirômetros ópticos, as medidas de comprimento utilizando equipamentos a “laser”, a calibração de pesos-padrão e balanças analíticas para laboratórios, dentre outros.

Já a Metrologia Industrial, também chamada de Metrologia Aplicada, abrange aos sistemas de medição responsáveis pelo controle de qualidade dos processos produtivos e pela garantia da qualidade e segurança dos produtos finais. Ela está presente nas medições, na produção e na transformação de bens ou para a demonstração da qualidade metrológica. Como por exemplo, a medição e controle de uma linha de produção de automóveis, ensaios em produtos certificados, tais como brinquedos, extintores de incêndio, fios e cabos elétricos, dentre outros.

Capítulo 4

Aspectos históricos da trigonometria

Neste capítulo serão abordados aspectos históricos da trigonometria, apresentando a sua origem, os principais estudiosos e ainda as relações trigonométricas. Esta discussão faz-se importante, pois a história da trigonometria está relacionada de certo modo com a metrologia, considerando que a trigonometria é o recurso utilizado para realizar medições de distâncias que são difíceis, quiçá impossíveis de serem medidas por outros instrumentos de medidas convencionais.

4.1 Origem da Trigonometria

A origem da trigonometria é incerta, mas tudo sugere que foi na matemática grega, por volta do século IV ou V AC, “a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios” (BOYER, 1974, p. 116).

A comunicação e o transporte por terra, na antiguidade, envolviam grandes dificuldades, pois as vias de acesso entre as localidades eram construídas duramente usando, geralmente, mão de obra escrava. Com isso, para grandes distâncias, era mais fácil estabelecer rotas marítimas que contornassem ilhas e continentes. Assim, com a necessidade de se navegar, surgiu o problema de se determinar a posição de um navio em alto mar.

A palavra Trigonometria, formada por radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medir, tem por significado: medidas dos triângulos, assim, com o seu estudo, podemos calcular as medidas dos elementos dos triângulos.

Devido às necessidades da Astronomia e da navegação, o início da trigonometria se deu em triângulos esféricos¹. O estudo desses triângulos vinha sendo feito desde os pitagóricos na matemática grega. O próprio Euclides, (300 AC), estudou a Geometria Esférica (*os Fenômenos*).

4.2 Primeiras Medições

Na tentativa de resolver o problema da navegação, os gregos se interessaram também, em determinar o raio da Terra e a distância da Terra à Lua. Este último problema implicou no surgimento das primeiras noções de Trigonometria.

O primeiro cálculo da circunferência da Terra foi realizado por Eratóstenes (250 a.C.), o bibliotecário de Alexandria apresentado na figura abaixo. A partir de cálculos simples que dependiam do ângulo formado pela sombra do sol e pela vertical em dois pontos (um ao norte e outro ao sul) e utilizando conhecimentos que hoje se aprende no ensino fundamental. Eratóstenes encontrou, num papiro, indicações de que ao meio-dia a cada 21 de junho, na cidade de Siena, hoje chamada de Assuã, 800 Km ao sul de Alexandria, uma vareta fincada verticalmente no solo não produzia sombra. Ele verifica que o mesmo fenômeno não ocorre no mesmo dia e horário em Alexandria e concluí que para isso acontecer a Terra não deveria ser plana, como alguns acreditavam na época.



Figura 4.1: Eratóstenes

Na figura abaixo, temos Alexandria no ponto A e a cidade de Assuã no ponto B a 800 km e, portanto, essa era a medida do arco AB na figura. Em 21 de junho, solstício

¹Um triângulo esférico é a união de três segmentos geodésicos de uma esfera. As suas propriedades são diferentes das dos triângulos planos e o seu conhecimento é essencial em navegação astronômica, mecânica de precisão e óptica

de verão no hemisfério Norte, o sol incidia diretamente sobre as suas cabeças ao meio dia em Assuã. Portanto, seus raios formavam um ângulo de noventa graus com a horizontal, não produzindo sombra. Em Alexandria, no mesmo momento, os raios do sol formavam um ângulo de $7\frac{1}{2}$ graus com a vertical. Por conta da grande distância do sol, os raios do solares poderiam ser considerados feixes de retas paralelos ao atingirem a Terra e, portanto, os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{A}S$ são iguais, conforme mostra a figura abaixo:

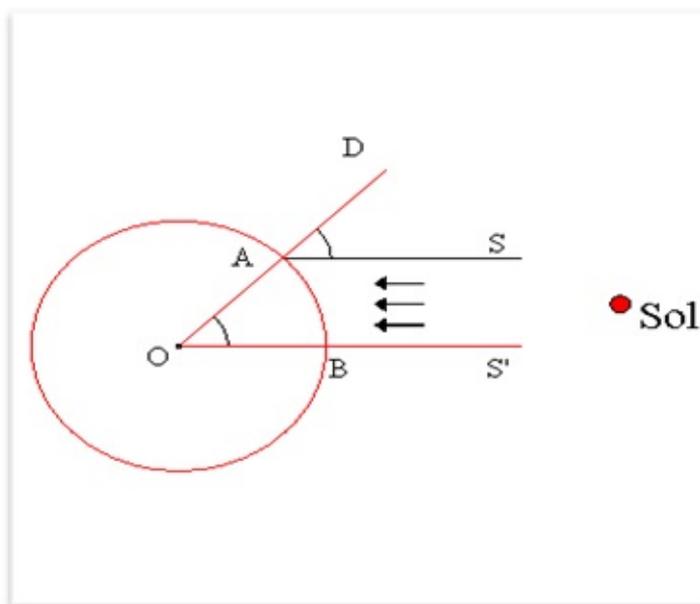


Figura 4.2: Construção de Eratóstenes

Com base nestas observações, como o ângulo no centro da Terra formado pelas linhas que partiam de Alexandria e de Assuã era igual a $7\frac{1}{2}$ graus, determinar o raio da Terra era, simplesmente, resolver a seguinte proporção, já que a circunferência inteira da Terra mede 360° .

$$\frac{7\frac{1}{2}}{360} = \frac{800}{x}$$

O resultado do cálculo feito por Eratóstenes para a circunferência da Terra foi 38400 km, um resultado surpreendente considerando que, muito tempo depois, no período das grandes navegações, os mais renomados geógrafos acreditavam que o valor correto para a circunferência da Terra era aproximadamente de 27200 km. De fato, se Colombo conhecesse uma estimativa melhor (cerca de 39840 km), talvez nunca tivesse se arriscado a viajar para a Índia.

4.3 Outras Personalidades

Além de Eratóstenes, tivemos muitos outros matemáticos que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da trigonometria como, por exemplo, Teodósio (160 a 90 a.C.) que reuniu os conhecimentos gregos em trigonometria no seu livro (Célebre Esférico). Tivemos o astrônomo grego Aristarco que formulou a teoria de que a Terra e a Lua giravam ao redor do sol e calculou, com muita precisão, a distância da Terra ao Sol e à Lua como mostra a figura abaixo.



Figura 4.3: Aristarco de Samos

O método de cálculo utilizado por Aristarco era tão engenhoso que, no século XVII, Joannes Kepler ainda o utilizava em seus trabalhos. Aristarco deduziu, com base na figura a seguir, que:

1. A distância da terra ao sol é maior que 18 vezes e menor que 20 vezes a distância da terra à lua;
2. Os diâmetros do sol e da lua têm a mesma razão que suas distâncias da terra;
3. A razão do diâmetro do sol pelo da terra é maior do que $19 : 3$ e menor que $21,5 : 3$

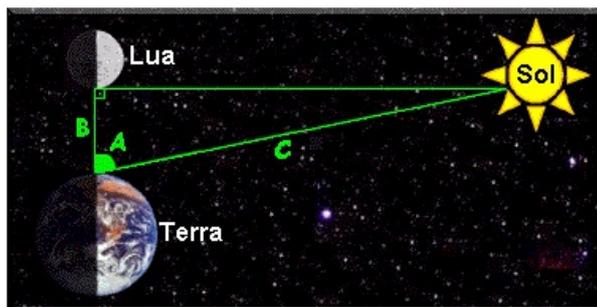


Figura 4.4: Distância entre terra e sol

A figura a seguir mostra Hiparco de Nicéia, astrônomo e matemático grego (160 a 125 aC), considerado o “pai” da trigonometria. Se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas, tratado em doze livros. Ele fez esses cálculos, evidentemente, para usá-los em seus estudos de Astronomia. Pouco se sabe da vida de Hiparco, assim como da maioria dos matemáticos daquela época.



Figura 4.5: Hiparco de Nicéia

Do pouco que se sabe da vida de Hiparco, a maior parte deve-se a Cláudio Ptolomeu (150 dC), astrônomo grego, cuja sua obra cita diversos resultados sobre Trigonometria e Astronomia obtidos por Hiparco e que também são apresentados por vários autores gregos. Hiparco foi o maior astrônomo da época e o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de diversas estrelas e, provavelmente, a ideia de divisão do círculo em 360 partes, usando para isto a tabela de cordas por ele construída.

Hiparcos, durante um eclipse lunar, verificou que era possível determinar a distância a lua. Para isso não foi necessário saber de antemão qual o raio da Terra para efetuar essa medida. Ele encontrou um valor muito próximo do valor médio medido atualmente: 60 vezes o raio da Terra conforme podemos observar abaixo.

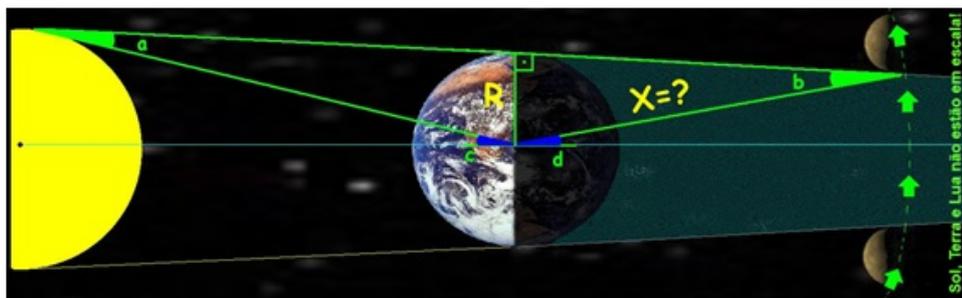


Figura 4.6: Distância lua e terra

Conhecendo-se o período orbital da lua (T) e medindo-se a duração do eclipse (E), calcula-se o ângulo d por regra de três simples:

$$360^\circ \longrightarrow T$$

$$2d \longrightarrow E$$

Daí temos que:

$$d = \frac{360^\circ \cdot E}{2 \cdot T}$$

Sendo o Semi-diâmetro do Sol: $c = 16'$ e pela figura anterior temos:

$$a + b = c + d$$

Como o ângulo a é muito pequeno, podemos concluir que:

$$b \cong c + d$$

e que:

$$X = \frac{R}{\text{sen}(b)}$$

Portanto, sendo R o raio da Terra, hiparcos achou X entre 62 e 74 vezes R .

Os gregos trabalhavam com a corda de arco duplo e não usavam seno de um ângulo. Apesar da corda de um arco não ser o seno, Hiparco escreveu a respeito do cálculo de comprimentos das cordas. Conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco. A figura ilustra o processo feito por Hiparco:

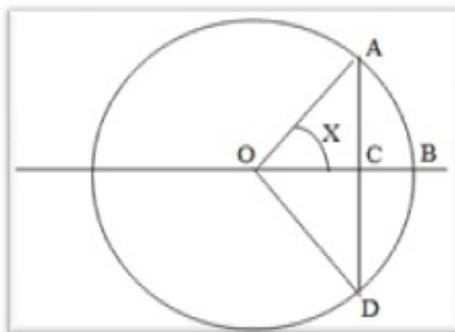


Figura 4.7: Construção de Hiparco

Com influências dos babilônicos, os gregos usavam o raio com comprimento 60 e o círculo foi dividido em 360 partes iguais, desse modo,

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{AC}{OA} = \frac{\text{corda } AD}{2r} \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{AC}{OA} = \frac{\text{corda } AD}{120}$$

Todos os matemáticos gregos que necessitariam de efetuar cálculos com frações (Arquimedes, Ptolomeu etc.) utilizavam as frações sexagesimais babilônicas, daí a razão da escolha do raio 60. No sistema de numeração de base 60, que era o único sistema disponível no momento para manipular frações, foi baseado em 60 de modo que o número de graus correspondente à circunferência de um círculo seria o mesmo que o número de dias em um ano, o que os babilônios acreditavam ser de 360 dias.

Ainda tivemos a contribuição de grandes nomes da matemática mundial (Fourier, Euler). Apesar das deficiências em sua história, a trigonometria é ainda um componente muito importante da matemática. A história marca a progressão de seus usos na astronomia e geometria, os seus avanços como funções trigonométricas e séries no cálculo. O movimento da trigonometria esférica para a trigonometria plana permitiu ainda desenvolvimento e usos na vida cotidiana. A trigonometria no plano foi desenvolvida a partir de necessidades durante o século XVIII. Desde então não houve muita progressão em matéria de trigonometria, mas ela é considerada um componente importante do cálculo e geometria.

Capítulo 5

Medições na Trigonometria

Conforme já vimos, a palavra Trigonometria é composta por três radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medir. Assim, através do estudo da Trigonometria, podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo. E aplica-la em várias situações do cotidiano. Vamos mencionar agora algumas razões trigonométricas, bem como, as unidades utilizadas usualmente para se medir os arcos e ângulos.

5.1 Razões Trigonométricas

Os antigos egípcios e babilônicos já trabalhavam com teoremas sobre as razões dos lados de triângulos semelhantes. As sociedades pré-helênicas estudavam as medidas dos lados do triângulo já que não possuíam o conceito de medida de um ângulo.

A ideia central da Trigonometria agora era associar a cada ângulo x de um triângulo retângulo, alguns valores chamados cosseno de x ($\cos(x)$) e seno de ($\sin(x)$), cuja definição consiste na semelhança de triângulos.

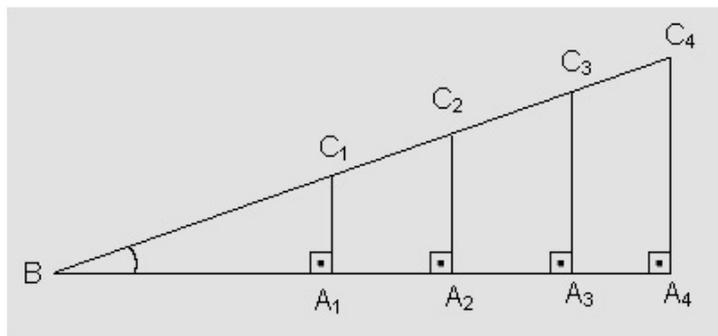


Figura 5.1: Semelhança de triângulos

Na figura acima, os triângulos BC_1A_1 , BC_2A_2 , BC_3A_3 e BC_4A_4 são semelhantes e, portanto, valem as relações:

$$\text{I. } \operatorname{sen}(x) = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4}$$

$$\text{II. } \operatorname{cos}(x) = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4}$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}(x) = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4}$$

As relações acima mostram que as definições de seno, de cosseno e de tangente não dependem do triângulo retângulo particularmente utilizado para defini-las. E pelo Teorema de Pitágoras, obtêm-se, imediatamente, que (IV) $\operatorname{cos}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ é a relação trigonométrica fundamental.

5.2 Unidades Usuais

Em capítulos anteriores, vimos que a metrologia é a ciência das medições e que, em sua história, sempre buscou uma unidade de medida para servir de padrão para outras medidas. Na trigonometria, não foi diferente. Em livros de matemática, é comum encontramos afirmações de que o ângulo reto mede 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad e que o ângulo raso mede 180° ou π rad. Mas, o que significa dizer que um ângulo mede 1° ou que mede 1° rad?

Na antiguidade, acreditava-se que o sol levava 360 dias para completar sua órbita em torno da Terra. E, na tentativa de elaborar um calendário, no ano de 4000 a.C., egípcios e árabes partiam desse pressuposto. Assim, a cada dia o Sol percorria uma parcela dessa órbita, ou seja, um arco de circunferência.

Cada arco percorrido pelo Sol em torno da Terra durante um dia correspondia a um ângulo cujo vértice era o centro da Terra e cujos lados passavam pelas extremidades de tal arco. Assim, esse ângulo passou a ser uma unidade de medida e foi chamado de grau ou ângulo de um grau. Mesmo sabendo, hoje, que é a Terra que gira em torno do Sol, manteve-se a tradição e convencionou-se dizer que o arco de circunferência mede um grau quando corresponde a $1/360$ dessa circunferência conforme mostrado na figura abaixo.

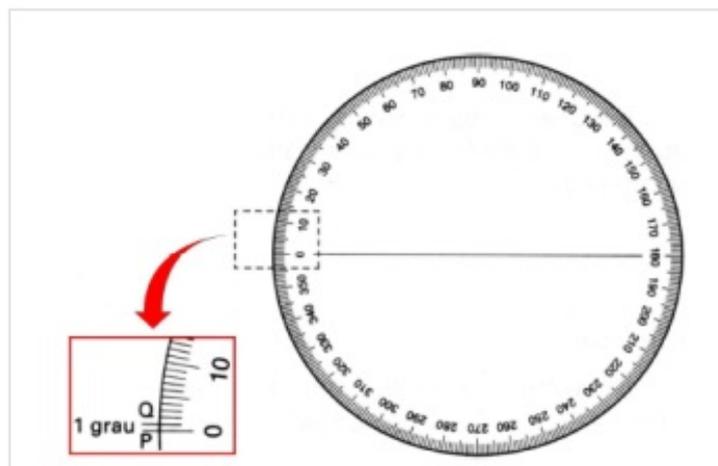


Figura 5.2: Arco de medida um grau

Um exemplo desse sistema utilizado nos dias atuais é a divisão em horas, minutos e segundos para contagem de tempo. O grau reinava absoluto como unidade de medida angular até boa parte do século XIX. Para Kennedy (1992) foi no período de 1870 a 1890 que matemáticos e físicos independentemente consideraram a necessidade de uma nova medida angular. Provavelmente essa nova medida angular surgiu pela necessidade de se expressar ângulos em termos de π para simplificações de fórmulas trigonométricas e em estudos da Física. Assim surgiu o radiano. Essa é a unidade de medida de arco do Sistema Internacional (SI).

Um ângulo de 1 radiano corresponde ao ângulo central de um arco de circunferência cujo o comprimento é igual ao raio R da circunferência que o contém conforme mostra a figura abaixo.

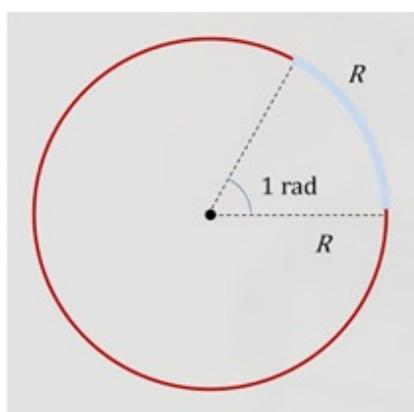


Figura 5.3: Arco de medida um radiano

Como consequência da definição de radiano temos que se S é o comprimento do arco

determinado por um ângulo central de medida igual a α radianos em um círculo de raio R então

$$\alpha \text{ rad} = \frac{S}{R} \rightarrow S = \alpha R$$

Assim, para encontrar o comprimento de um arco de circunferência de um determinado ângulo central, com a medida desse ângulo central dada em radiano, basta usar a fórmula acima. E como um semicírculo é um arco cujo o ângulo central é 180° e o seu comprimento é $S = \alpha R$, podemos concluir que $\frac{\pi R}{R} \text{ rad} = 180^\circ$, ou seja, $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Existem, porém, outras unidades de medidas conhecidas para se medir arcos e ângulos tais como o grado (gr) que foi introduzido junto com o Sistema métrico, durante a Revolução francesa mas, ao contrário do sucesso das outras medidas, “não pegou”. Atualmente, ele é apenas utilizado nos trabalhos topográficos e geodésicos feitos na França.

Capítulo 6

O ensino-aprendizagem da matemática: limitações e perspectivas

A matemática está presente nas mais variadas práticas da atividade humana, facilitando a vida cotidiana e permitindo uma melhor compreensão do mundo. Fora do contexto escolar, o dia-a-dia demanda uma série de conhecimentos matemáticos que as pessoas desenvolvem, muitas das vezes sem nenhuma noção do conhecimento de forma sistematizada: em operações comerciais, desde as simples compras realizadas no mercado da cidade, às grandes operações financeiras gerenciadas em bolsas; na saúde, desde a administração de medicamentos em casa até a precisão necessária para execução de procedimentos médicos; na tecnologia, a partir dos usos possibilitados pelas calculadoras, às novas tecnologias desenvolvidas para facilitar o dia-a-dia das pessoas; enfim, o que se percebe é o cotidiano está permeado de atividades que envolvem a Matemática, como pode ser corroborado, ainda, nas palavras de Rosamund (2009 p. 43):

As crianças não apenas trazem suas experiências escolares prévias em matemática para uma nova situação de aprendizagem, mas também trazem suas experiências de fora dela. Ao longo dos anos escolares, as crianças participam, junto com os adultos e outras crianças, de toda uma gama de práticas matemáticas cotidianas relacionadas ao trabalho e ao tempo livre que podem influenciar sua aprendizagem de matemática na escola, tais como jogar cartas, ajudar com tarefas gerais em casa, planejar um feriado, trabalhar em uma loja ou trabalhar com um irmão mais velho em sua tarefa de casa.

Ao chegar à escola para receber os ensinamentos, a matemática que é imposta aos alunos parece se distanciar daquela que eles têm contato, fato este que acaba deixando os alunos desmotivados e sem muito estímulo para progredir com os conteúdos matemáticos. Durante as aulas, na maioria das vezes, os alunos são motivados a trabalhar, aprender através da exercitação exaustiva e os estímulos para um aprendizado centrado na busca e na descoberta são insuficientes. A respeito desse distanciamento entre a matemática que os alunos trazem consigo e a matemática que é apresentada na escola, Sousa Lima (1991, apud Rabelo, 2002, p.62), afirma que

a matemática, apesar de estar presente constantemente na vida das pessoas, é algo estranho à maioria delas que normalmente não a compreendem chegando mesmo a temer e ou odiá-la. Por isso um grande número de pessoas, mesmo capazes de utilizar sinais verbais, não dão conta de usar os símbolos e raciocínio matemático.

Esta não é uma problemática nova, trata-se da herança do ensino de uma disciplina secular, que ao longo dos anos foi pautado em uma visão estruturalista de “transmissão” de conhecimentos. Esta ideia cristalizada de um ensino de forma mecânica, como já mencionado anteriormente, é centrada na memorização de regras e na execução exaustiva de atividades que pouco contribuem para a formação dos alunos em cidadãos críticos, criativos e capazes de perceber e repensar a realidade que os rodeia.

Esta forma mecânica de ensinar, descontextualizada das reais necessidades dos alunos é inoperante e redutora. Inoperante, pois, a prática desvinculada do real é um fim em si mesma, uma abstração que pouco contribuirá para a formação humanística dos alunos. E redutora pois a forma estática como os conteúdos são repassados, transfere-se para o perfil dos alunos: contribuindo para a formação deles como sujeitos passivos a espera dos ensinamentos, sem nenhuma motivação para desenvolver o próprio pensar.

Esta realidade tem buscado novos rumos, repensando a prática com vistas ao desenvolvimento de um ensino-aprendizado mais significativo que realmente possa atender às reais ambições dos alunos e do meio em que está inserido. Porém, assim como todas as mudanças, o foco do ensino tem mudado paulatinamente.

Até a promulgação da LDB nº 4.024/61, o ensino era dominado pelas bases estruturalistas, embora já houvesse indicativos de transformações desse cenário. Já a década de 70 traz algumas reconduções do foco do ensino, com um grande incentivo para a democratização do conhecimento científico, neste cenário aparecem várias agências de fomento

ao desenvolvimento da ciência e os centros de formação de professores passam a discutir, mesmo que ainda apenas na teoria, novos objetivos para o ensino (PCNEM, 2002). Paralelo a essa situação, a aceleração da industrialização propiciou discussões das implicações políticas e sociais da produção e aplicação dos conhecimentos científicos e tecnológicos, com algum reflexo nas salas de aula¹.

As maiores mudanças são trazidas pela LDB/96, assim como o seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98. Pelo menos no que rege a lei, o ensino passa a ser definido de forma diferente: ela orienta o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no processo de aprendizado, conforme explicitado pelo PCNEM (2002, p. 263).

Assim, para atender às especificações da última lei mencionada, fez-se necessário uma alteração de certas convicções que estabelecem o aluno como sujeito passivo, o professor como sujeito ativo e a escola como mero local do processo de ensino.

O ensino-aprendizado deve contemplar uma prática dinâmica, que admita diferentes formas do pensar e que motive o aluno a pensar e a desenvolver as suas próprias estratégias de aprendizado, o aluno deve fazer parte deste cenário como um agente em potencial pelas práticas que traz consigo através da sua vivência e conhecimento prévio. Já o professor deve atuar como um moderador, que verifica as respostas dos alunos e pode lançar novas perguntas motivando-os a desenvolver o raciocínio. O professor, enquanto agente², deve intervir quando houver a necessidade da sistematização ou apresentação de outras abordagens ou meios facilitadores.

Nesse sentido, professores e alunos são atores fundamentais do processo de ensino-aprendizado de iguais importâncias. Onde o professor contribui não só para a construção de conhecimentos sistematizados, como também para a formação cidadã desses indivíduos. A partir dessa concepção de ensino, tem-se a aprendizagem significativa, que é aquela que

¹Não se deve confundir essa ideia, com a real ou pretensa introdução, em todo o Ensino Médio, de disciplinas técnicas separadas das disciplinas científicas, como preconizado pela Lei n° 5.692/71, cuja perspectiva era a de formar profissionais de nível médio, e que teve resultados frustrantes. (PCNEM, 2002, p. 262).

²Consideramos professor e aluno enquanto agentes por reconhecermos que ambos podem contribuir ativamente para o processo de ensino-aprendizado a partir das práticas e conhecimentos prévios ou sistematizados que cada um traz consigo.

proporciona ao aluno possibilidades de integrar os conhecimentos aprendidos com a sua própria realidade de forma a entendê-la e/ou transformá-la.

A Aprendizagem significativa na visão de Ausubel (1980, apud Rabelo, 2002, p.54) é aquela que envolve um processo onde uma nova informação é relacionada a um aspecto relevante, já existente na estrutura de conhecimento do indivíduo. Nesta perspectiva, um ensino-aprendizado de forma significativa, visa aproximar as práticas de ensino da experiência dos alunos, valorizando os conhecimentos prévios e proporcionando-lhes maior autonomia na construção do saber. Nessa perspectiva, o ensino da metrologia auxiliaria o ensino da matemática, em especial, da trigonometria, trazendo as conexões entre as novas unidades estudadas, como por exemplo, o grau e o radiano com os conhecimentos prévios adquiridos na metrologia.

No que diz respeito ao ensino da Matemática no Ensino Médio, os PCNEM (2002, p. 251), esclarecem que

a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

A matemática deve proporcionar aos alunos capacidades cognitivas e estruturação do pensamento possibilitando que os conhecimentos adquiridos possam ser utilizados para resolver questões do dia-a-dia e, ainda, auxiliar na construção do conhecimento em outras áreas, estabelecendo essas relações, o aluno perceberá que além da dimensão formativa (sistematização dos conhecimentos matemáticos), ele poderá utilizá-la para aguçar o seu senso crítico, estimular a curiosidade, enfrentar com maior propriedade situações rotineiras que envolvam a Matemática, enfim, o aluno perceberá uma maior utilidade e aplicabilidade no aprendizado de conteúdos matemáticos.

Outras contribuições da matemática são ressaltadas pelo PCNEM (2002, p. 251), algumas delas transcendem o âmbito da própria matemática:

- formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos;
- gerar hábitos de investigação;
- proporcionar confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas;
- propiciar a formação de uma visão ampla e científica da realidade;

- perceber a beleza e harmonia;
- desenvolver a criatividade; e,
- desenvolver outras capacidades pessoais.

Assim, despertar essas contribuições, ou parte delas, é desafiador no sentido de que demanda de práticas melhores elaboradas e direcionadas para desenvolvê-las. Nessa perspectiva, será apresentado na seção seguinte a importância da metrologia para a promoção de um ensino-aprendizado mais significativo para o aluno, retomando os estudos feitos anteriormente para observar de que forma a sua aplicabilidade pode contribuir para o ensino da Matemática, mais especificamente no âmbito da trigonometria.

Considerações Gerais

Durante o desenvolvimento desse trabalho, observou-se que as medições estão presentes no cotidiano da sociedade. Segundo Ferreira (2001), a Metrologia é definida como o conhecimento dos pesos e medidas e dos sistemas de unidades dos povos antigos e modernos, e para Dias (1998), Oliveira e Silva (1968) as unidades de medidas usadas antigamente causavam muitos problemas, surgindo a partir daí o Sistema Métrico Decimal que tinha qualidades inegáveis, mas que não foi possível torná-lo universal, sendo substituído pelo Sistema Internacional de Unidades que é mais complexo e sofisticado.

Vimos que, em alguns momentos, a história da metrologia e a da trigonometria confundem-se nessa busca por unidades mais precisas e diversificadas que contribuíssem para o desenvolvimento científico e tecnológico. A trigonometria surgiu da necessidade de se efetuar medições que eram impossibilitadas de serem realizadas através de instrumentos de medidas convencionais.

Porém, o que se percebe é que o estudo da Trigonometria, na maioria das vezes limita-se apenas ao treino exaustivo de cálculos e aplicação de fórmulas que ressaltem as relações trigonométricas. Pouca ou nenhuma atenção é dada às reais aplicações e necessidades do estudo da trigonometria. Com relação a esta preocupação, os PCNEM (20012, p. 257), enfatizam que para que se desenvolvam habilidades e competências em Trigonometria,

o seu estudo *deve estar*^a ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e de análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas áreas ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

^aAlteração nossa. No original: (...) desde que seu estudo esteja ligado (...)

Nesse sentido, o conhecimento da Metrologia figura como um instrumento facilitador

não só no estudo da Trigonometria, mas de vários outros conhecimentos matemáticos e, ainda, de outras ciências. Considerando que o domínio das convenções Metroológicas podem contribuir para o pleno desenvolvimento de estudos que envolvem medições, estes conteúdos deveriam ser contemplados nas grades curriculares do Ensino Médio, considerando, ainda, que esta disciplina contribui para o despertar crítico de cidadãos que são conscientes do seu papel na sociedade enquanto consumidores que estão expostos a todo momento a situações de quantificação, e que em algumas situações, encontram-se alienados ou, na maioria das vezes são lesado em transações comerciais e em outras situações por falta de conhecimento.

Assim, a relação Metrologia e Trigonometria é possível, partindo da ideia de que ambas trabalham com o mesmo foco: medições. De posse dos conhecimentos da Metrologia, envolvendo unidades de medidas, bem como os aspectos históricos e desenvolvimento de cada uma delas, os alunos podem desenvolver com mais eficiência e maior propriedade os conhecimentos em Trigonometria, com entendimentos mais aprofundados das origens do grau, do minuto, do segundo, do radiano, do porquê tais medidas são utilizadas na Trigonometria e qual a real aplicabilidade dos conceitos trigonométricos.

Dessa forma, trabalha-se a aprendizagem significativa, possibilitando que os alunos tenham contato com conteúdos de forma contextualizada e que de fato possam ser relacionadas às suas realidades de forma prática, possibilitando, ainda, a valorização dos conhecimentos que os alunos já trazem consigo, proporcionando-lhes maior autonomia na construção do saber.

Por fim, conforme mencionado anteriormente, a intenção deste trabalho não é esgotar as discussões acerca da temática proposta, mas sim promover a discussão de forma a amadurecê-la no sentido de perceber que a Metrologia pode sim enriquecer os currículos do Ensino Médio de forma a contribuir expressivamente não só com a Matemática, mas com as outras ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B. - *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.
- [2] BRASIL - *Secretaria da Educação Média e Tecnológica*. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.
- [3] DANTAS, A. B. - *Desenvolvimento e avaliação de padrão de torque para calibração de torquímetro em três faixas de medição*. Dissertação de mestrado. UFRN, 2007.
- [4] DIAS, J. L. de M. - *Medida, normalização e qualidade: aspectos da história da metrologia no Brasil*. INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial. Rio de Janeiro, 1998.
- [5] EVES, H. - *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.
- [6] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. - *O minidicionário da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Ed. Nova Fronteira, 2001.
- [7] INMETRO. - *Vocabulário internacional de termos de metrologia geral*. 5ª Ed. Rio de Janeiro. Ed. SENAI, 2007.
- [8] INMETRO. - *Sistema Internacional de unidades: SI*. Duque de Caxias, RJ: INMETRO / CICMA / SEPIN, 2012.
- [9] IPEM-SP. - *Orientações ao consumidor*. Instituto de Pesos e Medidas, São Paulo, 2012. Disponível em www.ipem.sp.gov.br. Acesso em 12 de Março de 2013.
- [10] KENNEDY, E. S. - *História da Trigonometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

-
- [11] LIMA, E. L.; et al. - *A matemática no ensino médio*. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.
- [12] OLIVEIRA, A. M. de; SILVA, Agostinho - *Biblioteca da Matemática Moderna*. 1. ed. São Paulo: Lisa - Livros irradiantes S. A, 1968.
- [13] RABELO, Edmar Henrique. - *Textos matemáticos: produção, interpretação e resolução de problemas*. 3ed. RJ: Vozes, 2002.
- [14] ROSAMUND, Sutherland. - *Ensino eficaz de Matemática*. São Paulo: Artmed, 2009.
- [15] SAMPAIO, H. R. - *Uma abordagem histórico-filosófica na educação matemática: contribuições ao processo de aprendizagem em trigonometria no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - UEL, Londrina, 2008.