

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Rodrigo Samir Lopes Martins da Silva

*A geometria analítica com a aplicação de vetores para a
resolução de problemas*

Natal

2024

Rodrigo Samir Lopes Martins da Silva

*A geometria analítica com a aplicação de vetores para a
resolução de problemas*

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentada ao curso
PROFMAT, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE
em Matemática.

Orientador: Prof Dr Edgar Silva
Pereira.

Natal

2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Rodrigo Samir Lopes Martins da.
A geometria analítica com a aplicação de vetores para a resolução de
problemas / Rodrigo Samir Lopes Martins da Silva. - 2024.
86 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte,
Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Edgar Silva Pereira.

1. Matemática - Dissertação. 2. Geometria - Dissertação. 3. Vetores -
Dissertação. 4. Ensino médio - Dissertação. 5. Geogebra - Dissertação. I.
Pereira, Edgar Silva. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título “ A geometria analítica com a aplicação de vetores para a resolução de problemas “ apresentado por Rodrigo Samir Lopes Martins da Silva e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadoras abaixo especificada:

Prof^o . Dr . Edgar Silva Pereira

Orientador

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof^o . Dr . Fagner Lemos de Santana

Examinador interno

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof^o . Dr . Otto Augusto de Moraes Costa

Examinador Externo

IFRN – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Natal

2024

Dedico esse trabalho ao meu pai, Roberto Lopes Martins e à minha mãe, Maria Audenora das Neves Silva Martins (*in memoriam*) pelo incentivo na minha formação acadêmica e por toda a dedicação na minha educação pessoal.

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de mostrar que a utilização de vetores no estudo de Geometria Analítica no ensino médio, apresenta uma vantagem em não só simplificar o entendimento dos conceitos e demonstrações, como também agilizar a resolução de problemas, otimizando o tempo - um fator muito relevante em concursos como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O trabalho destaca que a grande maioria dos livros didáticos de matemática disponíveis não trata desse assunto com a abordagem necessária nem tampouco vetorial, com isso, este trabalho pode ser usado por professores, estudantes olímpicos, de pós graduação, de graduação e para aqueles que almejam concursos militares ou que desejam aprender mais sobre geometria analítica e vetores.

Nesta dissertação, fizemos um apanhado histórico sobre a geometria analítica, da sua origem até os dias atuais, desenvolvemos a teoria básica de geometria analítica até retas, e o estudo básico de vetores até produto vetorial. Para esse objetivo utilizamos o software Geogebra para representar e elucidar algumas representações geométricas e vetoriais a fim de uma total compreensão sobre tal tópico.

Palavras-chave: Matemática, Geometria, Vetores, Ensino Médio, Geogebra

Abstract

This paper aims to show that the use of vectors in the study of Analytical Geometry in high school has an advantage in not only simplifying the understanding of concepts and demonstrations, but also speeding up problem solving, optimizing time - a very relevant factor in competitions such as the National High School Exam (ENEM). The paper highlights that the vast majority of available mathematics textbooks do not address this subject with the necessary approach, nor do they address it in a vectorial manner. Therefore, this paper can be used by teachers, Olympic students, graduate students, undergraduate students, and those who are aiming for military competitions or who wish to learn more about analytical geometry and vectors.

In this dissertation, we have made a historical overview of analytical geometry, from its origins to the present day, we have developed the basic theory of analytical geometry up to straight lines, and the basic study of vectors up to the vector product. For this purpose, we have used the Geogebra software to represent and elucidate some geometric and vector representations in order to fully understand this topic.

Keywords: Mathematics, Geometry, Vectors, high school, Geogebra.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força que me foi concedida para poder concluir mais uma etapa da minha formação profissional.

Agradeço também, a minha esposa Beatriz Rosado, e aos meus amigos de turma do mestrado pelo incentivo dado diariamente nas aulas, nas provas e na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Maria Audenora das Neves Silva Martins (*in memoriam*) e Roberto Lopes Martins pelo amor, cuidado e dedicação a minha educação formal.

A minhas irmãs Roberta Lopes, Raissa Daniela e Ralina Carla pela dedicação e ajuda em todo o período deste curso.

A todos os professores do programa que me ajudaram na conclusão deste curso, em especial ao meu orientador Prof Edgar Silva Pereira pela prestatividade, dedicação, cuidado e disponibilidade durante todo o período de orientação.

Aos meus colegas de trabalho que me ajudaram de forma direta ou indiretamente com incentivo para a conclusão do trabalho.

Índice de Figuras

Figura 1.1	15
Figura 1.2.....	17
Figura 1.3	17
Figura 1.4	18
Figura 1.5	19
Figura 1.6	20
Figura 1.7	20
Figura 2.1	21
Figura 2.2	22
Figura 2.3	23
Figura 2.4	24
Figura 2.5	25
Figura 2.6	26
Figura 2.7	27
Figura 3.1	35
Figura 3.2	39
Figura 3.3	42
Figura 3.4	43
Figura 3.5	43
Figura 4.1	45
Figura 4.2	46
Figura 4.3	47
Figura 4.4	48
Figura 4.5	51
Figura 4.6	51
Figura 4.7	52
Figura 4.8	53
Figura 5.1	55
Figura 5.2	55
Figura 5.3	56
Figura 5.4	57
Figura 5.5	59
Figura 5.6	60
Figura 5.7	67
Figura 5.8	69
Figura 5.9	71
Figura 6.0	73
Figura 6.1	74
Figura 6.2	75
Figura 6.3	76
Figura 6.4	77
Figura 6.5	78

Sumário

INTRODUÇÃO

1. UMA BREVE HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

2. ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DO PLANO CARTESIANO

2.1 - Conceitos primitivos

2.1.1 – O ponto

2.1.2 – A reta

2.1.3 – O plano

2.2 – Plano cartesiano

2.3 – Distância entre dois pontos

2.4 – Ponto médio de um segmento

2.5 – Condição de alinhamento entre três pontos

3. O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DA RETA

3.1 – Equação geral da reta

3.2 – Equação reduzida de uma reta

3.3 – Equação segmentária da reta

3.4 – Posições relativas entre retas

3.5 – Distância entre ponto e reta

3.6 – Equação paramétrica da reta

3.7 – Posições relativas entre retas e planos

4. VETORES NO PLANO

4.1 - História dos vetores – A origem

4.2 - Segmentos orientados

4.3 - Vetores – noção intuitiva

4.4 - Vetores – conceito

4.5 - Vetores equipolentes

5. OPERAÇÕES COM VETORES

5.1 - Adição com vetores

5.2 - Produto escalar entre vetores

5.3 - Projeção ortogonal de um vetor sobre outro

5.4 - Area de paralelogramos e triângulos

5.5 - Aplicação na Física em áreas afins.

5.6 – Sugestão de atividades

5.7 - Comparação do método analítica e vetorial

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Introdução

A história da geometria analítica nos servirá de base para estudarmos e entendermos sua importância, aplicação e desdobramentos em diversas áreas do conhecimento. Para este trabalho, trabalharemos a geometria analítica através de uma ótica vetorial, fazendo a conexão didática entre o método analítico e o método vetorial. Para visualizarmos e representarmos melhor algumas situações, utilizaremos o software Geogebra, que nos servirá para representar geometricamente e vetorialmente diversos exemplos de geometria analítica e vetores. Esse software é gratuito e pode ser utilizado de forma bastante intuitiva conforme a janela de álgebra que será mostrada em cada item a ser representado.

Este trabalho objetiva apresentar uma nova perspectiva sobre o estudo da geometria analítica no ensino médio através de vetores. Atualmente, o conteúdo de vetores é ministrado no componente curricular da física, para o estudo de cinemática, grandezas vetoriais, mecânica e outros conteúdos correlatos. Seria oportuno o estudo de vetores no ensino médio através do componente de matemática, tendo em vista que é uma ferramenta matemática.

Uma das motivações para a escolha desse tema vem do ensino médio, no qual o conteúdo de geometria analítica restringe-se até o estudo da circunferência, excluindo-se o estudo das cônicas. Como consequência disso, quando o estudante ingressa na UFRN, em Licenciatura em Matemática, na disciplina de Geometria Analítica, existe uma certa dificuldade na abordagem vetorial, pois é vista muito superficialmente no ensino médio, e detalhe, aplicado à física, não à matemática.

Sendo assim, essa dificuldade em relação ao conceito de vetores em ensino superior, serviu de motivo para a abordagem como tema deste trabalho.

Nestes anos, atuando como professor de matemática do ensino médio da rede pública e privada do Rio Grande do Norte, seguimos referencial curricular do ensino médio, que nos orienta a ensinar, em geometria analítica, conteúdos de ponto, reta, circunferência. Os livros e o material de referência não trazem uma abordagem de geometria analítica através de vetores. Por isso, confeccionamos um trabalho que servirá de material.

Este trabalho foi desenvolvido para utilização de professores de Matemática. Dividimos em 6 capítulos, onde no primeiro descrevemos alguns aspectos históricos da

geometria, especificamente da geometria analítica, onde levantaremos alguns pontos sobre o histórico da mesma.

No segundo capítulo iremos conceituar alguns pontos relevantes sobre o estudo da geometria analítica.

No terceiro capítulo iremos conceituar sobre as retas, operações, aplicações e no quarto capítulo faremos a introdução ao estudo de vetores, conceitos, exercícios e aplicações.

No quinto capítulo faremos uma retomada das operações com vetores, até produto vetorial.

No último capítulo explicaremos o projeto pedagógico no qual iremos nos delimitar, que é o estudo de geometria analítica através de vetores no ensino médio colocando em discussão o método analítico e vetorial.

Capítulo 1

Uma breve história da Geometria Analítica

De acordo com Malta (2015), a geometria analítica é uma área da matemática que, através de processos únicos, estabelece as relações existentes entre a álgebra e a geometria já conhecida pelos gregos há cerca de dois milênios. Desse modo, uma reta, uma circunferência ou uma figura geométrica qualquer podem ter suas propriedades estudadas, através de métodos algébricos. A geometria analítica possui origens na Grécia Antiga e desemboca no mundo moderno.

Para Santos (2013), a matemática originalmente foi a ciência dos números e das grandezas que eram limitadas pelos números naturais. Algumas civilizações já conheciam as frações já. As relações entre medidas, áreas e volumes se iniciaram na Mesopotâmia, Egito, Índia e China, civilizações essas que detinham conhecimento que para época, e até para os dias atuais, eram bem avançados em geometria, aritmética e astronomia.

O autor afirma que o pontapé inicial da geometria se deu através da comparação entre as medidas retilíneas e curvilíneas. Os egípcios e os babilônicos foram precursores no estudo do círculo, primeiro passo para o estudo da Geometria. Os babilônicos encontraram uma aproximação para π como sendo $3 + \frac{1}{8}$, ultrapassando os egípcios nesse sentido. Vale também lembrar que eles também encontraram alguns resultados que Tales¹ só veio encontrar mil anos depois, e já estavam familiarizados com o teorema de Pitágoras².

Howard Eves afirma:

“As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuísse. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da Geometria foram passados aos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores.” (EVES, 1992, p.7)

¹ Tales de Mileto foi um filósofo pré-socrático, astrônomo, matemático, engenheiro e comerciante da Grécia Antiga, fundador da Escola Jônica, nasceu em 625 a.C e morreu em 546 a.C.

² Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego jônico creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo. Na sua maioria, as informações sobre Pitágoras foram escritas séculos depois da sua morte, de modo que há pouca informação confiável sobre ele.

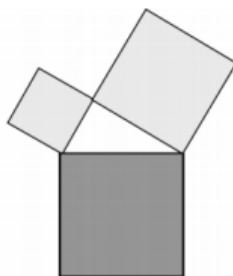
Boyer (1956) afirma que Tales e Pitágoras deram grandes contribuições para diversos campos do conhecimento, dentre esses, podemos citar os aportes dados à geometria naquele período que foram de grandes relevâncias para o desenvolvimento do que temos hoje da geometria analítica. Tales fez grandes contribuições à geometria, muito pouco para a álgebra e aritmética. Já Pitágoras foi mais longe nesse sentido. Ele e os seus discípulos se debruçaram em estudar e aprofundar o conceito de número, relacionar tempo e espaço, e resolveram alguns problemas antigos sempre com a ideia de que era possível associar um número ao apelo geométrico.

Desde a era pitagórica e de Tales (570 a.C) até o século XVII, período de efervescência do desenvolvimento científico do velho continente europeu, houve grandes matemáticos que propuseram diversas teorias revolucionárias que tiveram impactos na geometria. Dentre tais teorias, podemos citar o atomismo físico, criado em meados do século V a.C. Também conhecido por atomismo de Demócrito³ consistia em procurar uma origem racional para todo o universo e a natureza.

Segundo Germano (2020), o enunciado do Teorema de Pitágoras diz: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, onde, em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e os catetos são os outros dois lados que restaram.

A figura abaixo sintetiza de maneira geométrica o enunciado do Teorema de Pitágoras.

Figura 1.1 – Representação geométrica do teorema de Pitágoras



Fonte: Marconi Coelho

³ Demócrito nasceu em Abdera no ano de 460 a.C. e morreu em 360 a.C. Foi um filósofo pré-socrático e pluralista, e o mais destacado discípulo de Leucipo na Escola de Abdera e ajudou-o a formular a teoria dos átomos.

Segundo Santos (2013):

“ Tales e Pitágoras são em grande parte os responsáveis pelo “clima intelectual” na Grécia durante o século VI a.C., a partir do qual a matemática propriamente dita surgiu, mas suas contribuições estavam mais em seu ponto de vista abstrato e em seu arranjo dedutivo de material do que em qualquer novidade da matéria. As obras desses homens não sobreviveram, mas foram considerados os primeiros matemáticos a ser fundadores da geometria demonstrativa. “

De acordo com Garbi (2006), vale lembrar de um outro matemático importante: Euclides. Há poucas informações sobre ele, desde seu nascimento até sua morte. Crê-se que o mesmo tenha sido discípulo de Platão⁴, devido à similaridade da ótica de enxergar o mundo. Em meados de 300 a.C., Euclides escreveu sua importantíssima obra, Os Elementos, que, segundo Eves, compreendia geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega

Garbi (2006) afirma:

“Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos.” (GARBI, 2006, p.49)

A ideia da incomensurabilidade, ou seja, de tentar medir algo através da razão de duas grandezas e perceber que o número obtido era irracional de fato regeu e direcionou muitas ideias e estudos desde a Grécia Antiga aos dias atuais, sendo sempre um grande questionamento na época, havendo sempre uma busca por um apelo geométrico a esse conceito. No avanço cronológico da humanidade, os gregos de forma muito rigorosa e cuidadosa, distinguiram os casos em que os números obtidos eram racionais e irracionais.

Em meados do século XVII, começou uma grande revolução no pensamento científico em diversos campos do conhecimento. Aqui neste trabalho vamos nos deter ao período mais recente do desenvolvimento da geometria analítica, talvez o de maior relevância para essa área, pois nasceu ali a defesa de que o método matemático seria o modelo de estudo para aprender e adquirir conhecimento nas mais diversas áreas.

⁴Segundo Germano (2020), “Ele era grego, nasceu em 427 a.C. e morreu em 347 a.C., foi um dos mais importantes filósofo de todos os tempos e suas teorias, chamadas de platonismo. Concentra-se na distinção de dois mundos: o visível e o invisível. Os grandes matemáticos da época, ou foram alunos de Platão, ou eram seus amigos. Platão defendia a teoria dos cinco elementos, onde o fogo era o tetraedro, o ar octaedro, a água icosaedro, a terra o cubo e o Universo o dodecaedro, sendo sólidos geométricos regulares. Esses sólidos ficaram conhecidos como ‘Poliedros de Platão’ “.

A geometria analítica foi desenvolvida de forma independente no século XVII, segundo a história, por dois matemáticos franceses: René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

René Descartes foi um matemático e filósofo francês que contribuiu para a geometria analítica em 1637 com seu pequeno texto chamado *A Geometria* como um dos apêndices do *Discurso do Método*. Essa obra foi considerada marco inicial da filosofia moderna. Nela, Descartes defende o método matemático como modelo para adquirir conhecimento em todas as áreas. Ele criou princípios matemáticos capazes de analisar propriedades do ponto, da reta, e da circunferência, determinando a distância entre eles, localização e coordenadas, tudo isso através da relação da álgebra a da geometria. Uma frase que marca bem o que Descartes propunha com seu método na geometria é a seguinte:

“Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento de comprimentos de certos segmentos basta para a construção.”

Na figura abaixo, apresentamos o busto de Descartes.

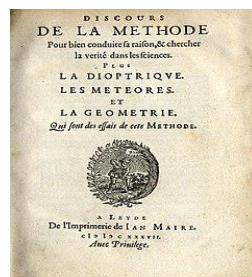
Figura 1.2: René Descartes



Fonte: Bokstaz

Na imagem abaixo, segue uma foto da folha de rosto da primeira edição do *Discurso sobre o Método*, de 1637.

Figura 1.3: Folha de rosto da primeira edição do *Discurso sobre o Método*, de 1637.



Fonte: Ian Maire

Já o seu contemporâneo, Pierre de Fermat, matemático e também filósofo, contribuiu para a geometria analítica através do pequeno texto intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, de 1636, o qual só foi publicado em sua totalidade de maneira póstuma quase meio século depois, em 1679.

Abaixo segue uma foto do busto de Pierre de Fermat.

Figura 1.4: Pierre de Fermat



Fonte: Didier Descouens

Lamentavelmente, Fermat não publicou seus artigos sobre geometria analítica em vida. Somente de maneira póstuma, seu filho, Samuel Fermat, que divulgou não só os artigos referentes a geometria analítica, mas outros que foram importantíssimos para o avanço da matemática no século XVII.

Assim, para Savóis (2014) compreendeu-se que essa obra de título, *uma teoria geral sobre os lugares geométricos*, apresentou uma visão crítica sobre matemática da época. Ele apresenta uma outra maneira de estudar as cônicas já exploradas na antiguidade, através de equações indeterminadas que foram introduzidas por Diofanto⁵.

Para Savóis (2014):

(...) a principal obra de Diofanto, chamada *Arithmetica*, consta ter sido escrita em 13 livros, dos quais apenas os seis primeiros chegaram até nós. Alguns consideram Diofanto o pai da Álgebra, uma vez que ele introduziu em seu trabalho a ideia de equação algébrica expressa por símbolos. Na solução de equações, Diofanto manipulava um único símbolo para representar as incógnitas e chegava às respostas, comumente, pelo método da tentativa, que consiste em assumir para alguma das incógnitas um valor preliminar que satisfaça algumas condições.

⁵ Diofanto de Alexandria foi um importante matemático grego do século III a.C. Viveu em uma importante cidade que era centro de atividades matemáticas da Grécia antiga. Não se sabe muito sobre a vida desse matemático.

No mesmo período, de forma quase simultânea, Descartes organizava a edição dos apêndices do seu livro *Discurso do Método* que são *A geometria*, e os tratados da *Introdução à Geometria*. Neste trabalho, objetivamos elencar a relação de ambos os matemáticos Fermat e Descartes. Quanto ao início dos estudos sobre geometria analítica, não iremos nos restringir em analisar a prioridade das descobertas, e sim os impactos delas para a geometria.

Houve um momento em que a geometria analítica se cruzou com a filosofia. Reverberou como as ideias de Descartes e seu sistema de coordenadas cartesianas influenciaram o pensamento filosófico da época, abrindo caminho para uma nova forma de entender o mundo.

Leonardo da Vinci e M.C. Escher utilizaram os princípios da geometria analítica para criar obras de arte impressionantes.

Segundo Santos (2013):

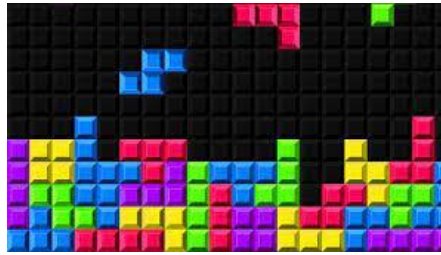
[...] “ Por meio da história constata-se que as ideias que fundamentam a Geometria Analítica surgiram em meio a muitos problemas enfrentados pelo homem, tais como a descoberta dos números irracionais, dos incomensuráveis, os paradoxos de Zeno, o método da exaustão, a ideia de continuidade, questões filosóficas e crenças religiosas. “

Segundo Zanardini et al. (2016), a relevância da geometria analítica continua sendo uma ferramenta essencial em diversas áreas, desde a engenharia até a computação. Princípios da geometria analítica são aplicados em jogos populares, como xadrez, tetris e jogos de labirinto, batalha naval dentre outros.

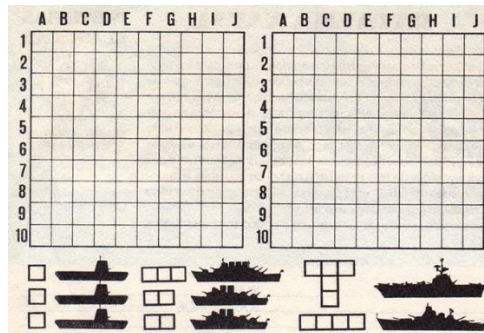
Figura 1.5: Foto de um tabuleiro de Xadrez.



Fonte: Unicentro

Figura 1.6: Foto do jogo *Tetris*.

Fonte: NEOFEED

Figura 1.7: Foto do jogo *Batalha Naval*

Fonte: Educamais

Capítulo 2

Estudo do Plano Cartesiano

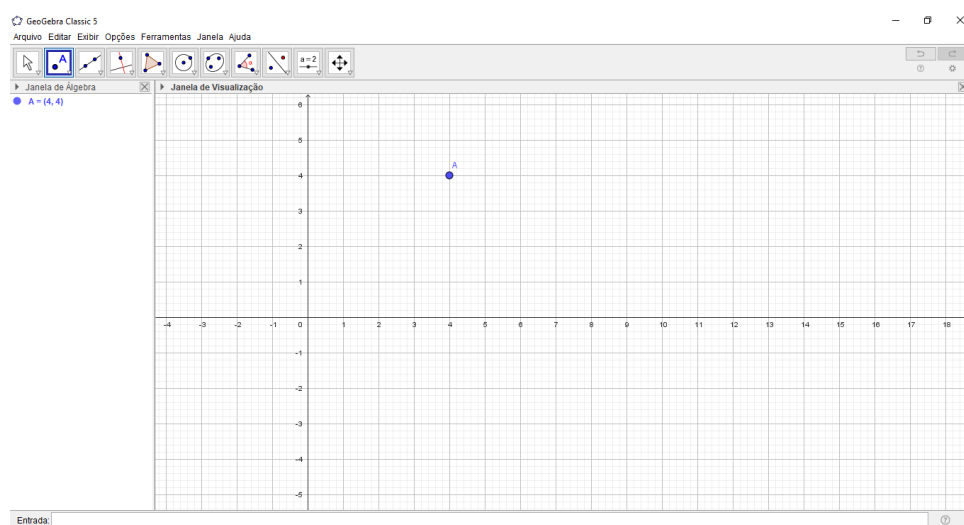
2.1 – Conceitos primitivos

A geometria analítica surgiu da ideia de integrar a álgebra e a geometria. Um conjunto de pontos em um plano coordenado podem formar retas, curvas, círculos, com isso, conclui-se que todas essas representações partem da ideia primitiva do ponto. Em resumo, podemos entendê-las como conjuntos de pontos. Abaixo faremos algumas ilustrações através do software Geogebra.

2.1.1 – O ponto

O ponto é um objeto que não possui definição, dimensão e forma. Por isso, é impossível encontrar qualquer medida nele, como comprimento, largura, altura, área, volume etc, ou seja, é adimensional. As figuras geométricas são formadas a partir de um conjunto de pontos. Tradicionalmente representamos o ponto com um “pingo” ou uma bolinha, mas vale ressaltar que isso é apenas uma representação geométrica. Abaixo faremos a representação de um ponto através do software Geogebra utilizando o plano cartesiano que iremos definir a seguir.

Figura 2.1 - Exemplo de um ponto $A(4,4)$ no plano cartesiano

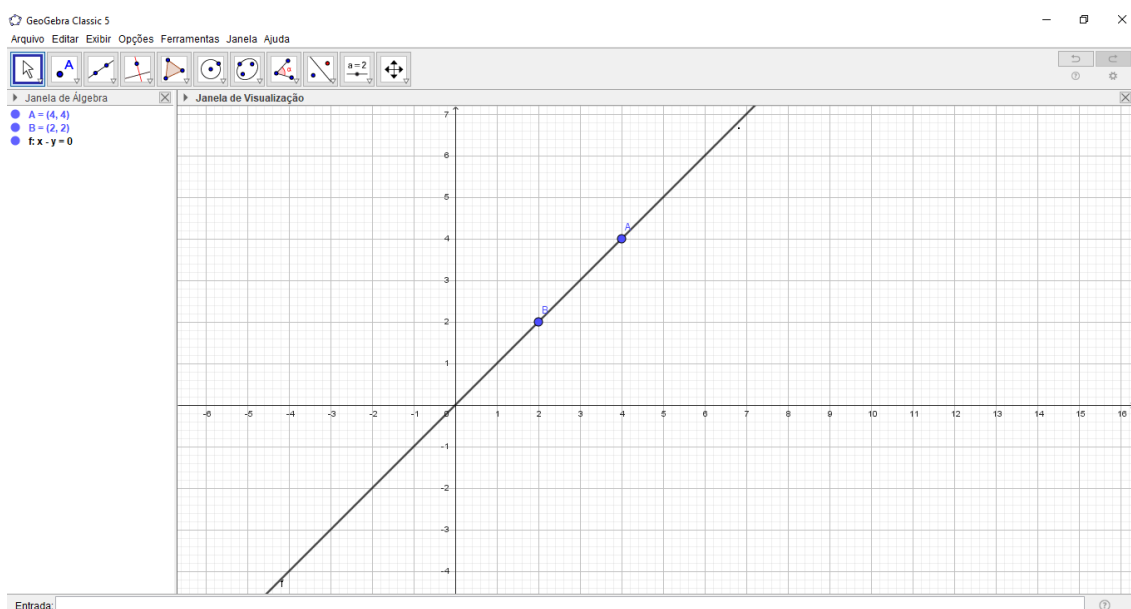


Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.2 – A reta

A figura geométrica formada através de um conjunto de pontos na mesma direção, é chamada de reta. Sobre uma reta é possível medir a distância entre dois pontos. Entretanto, não é possível medir a largura da reta, pois os pontos que a formam não possuem dimensões. Por esse motivo, dizemos que a reta é um objeto unidimensional, ou seja, que possui uma única dimensão. Existem outras figuras unidimensionais que são as semirretas e os segmentos de reta, que, respectivamente, são uma parte da reta que possui começo, mas não possui fim, e uma parte da reta que possui ponto de partida e ponto de chegada. Abaixo faremos a representação de uma reta no plano cartesiano através do software Geogebra.

Figura 2.2 - Abaixo uma reta $y = x$ passando pelos pontos $A(4,4)$ e $B(2,2)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.3 – O plano

Plano é uma figura geométrica de duas dimensões que é formado pela reunião de infinitas retas, todas elas perpendiculares a uma mesma reta, chamada de reta normal, organizadas lado a lado. É um dos conceitos primitivos da geometria, como não existe definição de reta, ponto e plano, possuímos apenas uma ideia de como são essas figuras.

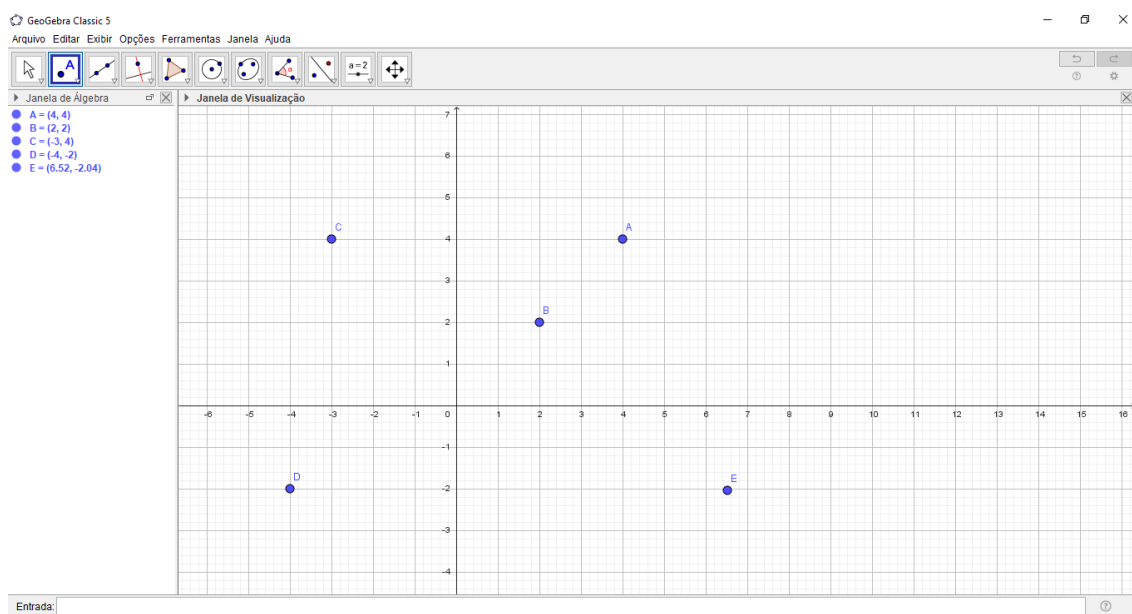
2.2 – O plano Cartesiano

O plano cartesiano é uma malha quadriculada, em que cada ponto está relacionado a dois números reais, localizados em eixos, o eixo das abscissas e o das ordenadas. Segundo Rizzo (2022),

"O plano cartesiano é um instrumento matemático utilizado para localização de pontos. Os eixos no plano cartesiano são retas perpendiculares chamadas de eixo das abscissas (ou eixo do x) e eixo das ordenadas (ou eixo do y). Cada ponto do plano cartesiano possui uma coordenada em relação ao eixo das abscissas e uma coordenada em relação ao eixo das ordenadas. As coordenadas de cada ponto são representadas por um par ordenado (x,y) ."

O plano cartesiano é utilizado para representações de diversos objetos matemáticos, como por exemplo: funções. É bastante utilizado para diversas áreas do conhecimento, inclusive foi primordial para a invenção do GPS (System Position Global) que é um sistema de posicionamento global. Segue abaixo uma imagem feita através do software Geogebra que representa um exemplo do plano cartesiano.

Figura 2.3 – Representação do plano cartesiano.

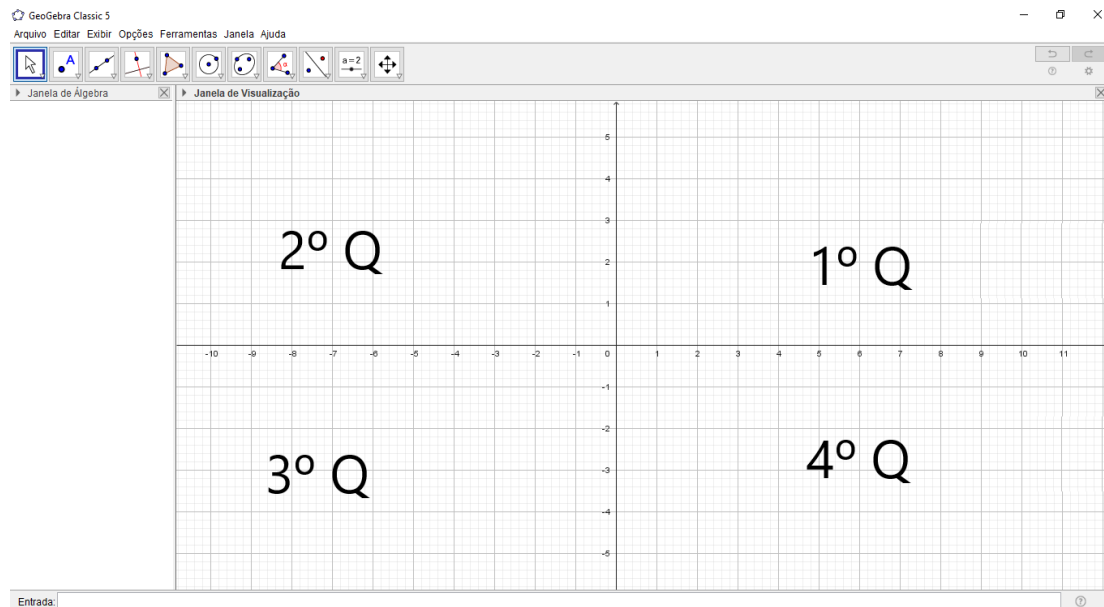


Fonte: Elaborada pelo autor.

O eixo das abscissas é simbolizado por eixo " x " e o eixo das ordenadas é chamado de eixo " y ", os dois eixos são perpendiculares, ambos os eixos funcionam como uma reta numérica. O eixo " y " funciona verticalmente, e o eixo " x " horizontalmente.

O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes, numerando-se de forma circular, no sentido anti-horário conforme a figura abaixo feita através do software Geogebra.

Figura 2.4 – Representação dos quadrantes



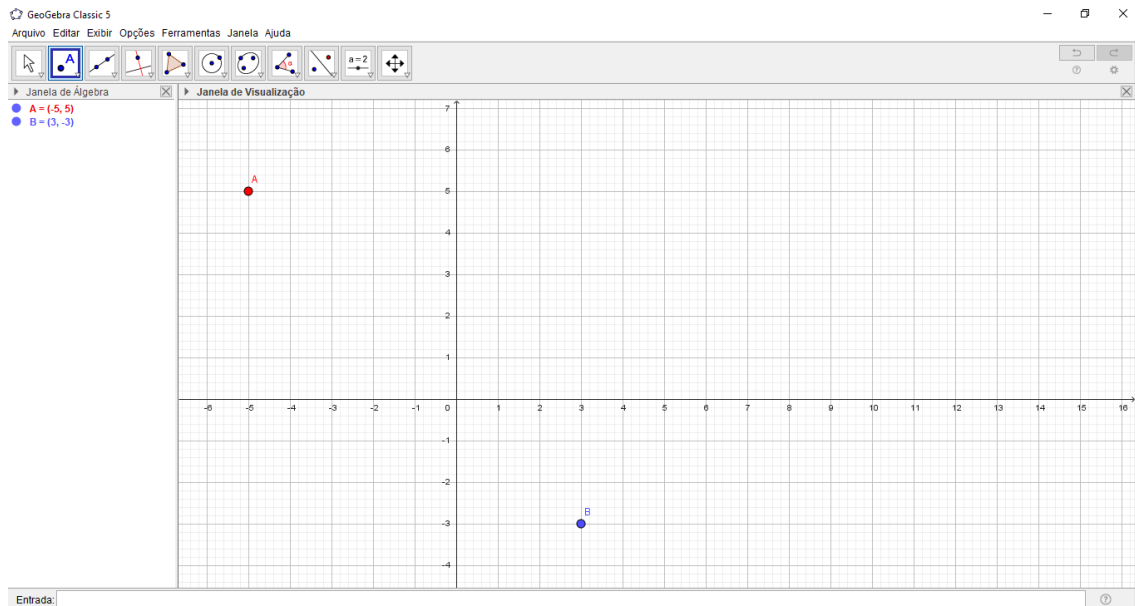
Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro quadrante, os valores de x e y são positivos, no segundo quadrante, apenas y é positivo e x negativo, no terceiro quadrante, o x é negativo e o y negativo e no quarto quadrante o x é positivo e o y negativo. Vejamos alguns exercícios com resolução para sedimentarmos os conceitos.

Cada ponto dessa malha quadriculada é chamado de par ordenado (x, y) que possui relação com um número real no eixo x e o outro no eixo y . Todo ponto do plano cartesiano é chamado de par ordenado e esse está localizado em um dos quadrantes, ou sobre um dos eixos coordenados.

Exemplo 2.1: Considere os dois pontos em destaque no plano cartesiano feito através do software Geogebra.

Figura 2.5 – Representação de dois pontos no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em quais quadrantes estão, respectivamente, o ponto vermelho $(-5, 5)$ e o azul $(3, -3)$?

- a) 1° e 2°
- b) 2° e 3°
- c) 3° e 4°
- d) 1° e 4°
- e) 2° e 4°

Resolução

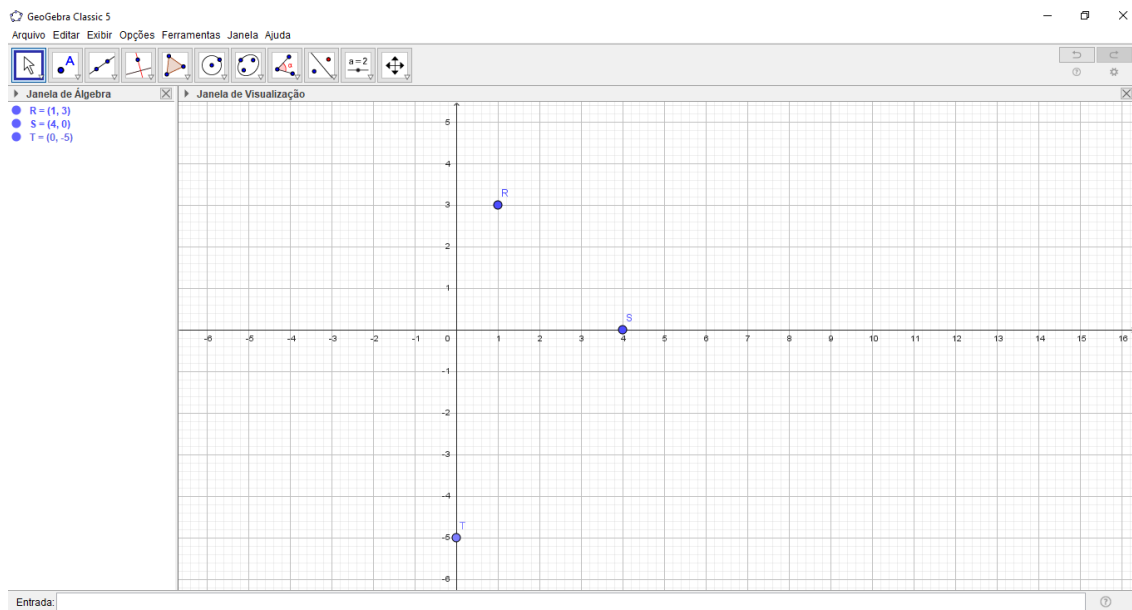
O ponto $(-5, 5)$ está no 2° quadrante, em que os valores de x são negativos e os de y são positivos.

O ponto $(3, -3)$ está no 4° quadrante, em que os valores de x são positivos e os de y são negativos.

Alternativa E"

Exemplo 2.2: Observe o plano cartesiano abaixo feito através do software Geogebra.

Figura 2.6 – Representação de três pontos no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quais as coordenadas dos pontos R, S e T respectivamente?

- a) (1,3) , (4,0) e (0,-5)
- b) (3,1), (0,4) e (-5,0)
- c) (0,3), (4,1) e (0,5)
- d) (1,3), (0,4) e (1,-5)
- e) (0,3), (4,4) e (1,-5)

Resolução

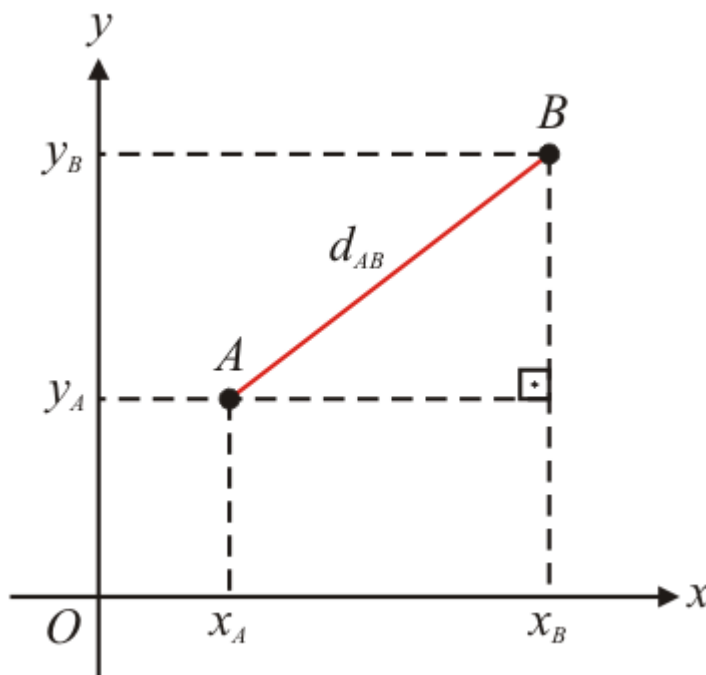
A coordenada horizontal do ponto R é 1, e a coordenada vertical é 3. Assim, as coordenadas desse ponto são (1,3). A coordenada horizontal do ponto S é 4 e a coordenada vertical é 0. Assim, as coordenadas desse ponto são (4,0). A coordenada horizontal do ponto T é 0 e a coordenada vertical é -5 . Assim, as coordenadas desse ponto são (0,-5).

Alternativa A

2.3 - Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos no plano cartesiano é representada pelo comprimento de um segmento de reta, o qual conseguimos mensurar usando o teorema de Pitágoras. A seguir uma representação gráfica.

Figura 2.7 – Distância entre dois pontos no plano cartesiano.



Fonte: O Baricentro da Mente

Tomando $A (X_A, Y_A)$ e $B (X_B, Y_B)$ pontos do plano cartesiano, temos que a distância entre os pontos A e B é o comprimento do segmento de reta AB representado por d_{AB} , mas podemos observar que o triângulo ABC é retângulo, pois por definição os eixos coordenados são perpendiculares, e o segmento de reta AC é paralelo ao eixo x , e o segmento BC é paralelo ao eixo y , logo por semelhança, são perpendiculares entre si, sendo possível aplicar o teorema de Pitágoras.

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$

$$d_{AB}^2 = (Yb - Ya)^2 + (Xb - Xa)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(Yb - Ya)^2 + (Xb - Xa)^2}$$

Vejamos um exemplo resolvido abaixo sobre distância entre dois pontos:

Exemplo 2.3: Calcule a distância entre os pontos $A(3,5)$ e $B(6,1)$.

Substituindo os valores das coordenadas na fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{(Yb - Ya)^2 + (Xb - Xa)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (5 - 1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{9 + 16}$$

$$d_{AB} = \sqrt{25}$$

$$d_{AB} = 5$$

Exemplo 2.4: (UFRGS - 2014) A distância entre os pontos $A(-2, y)$ e $B(6,7)$ é 10. O valor de y é:

- A) -1
- B) 0
- C) 1 ou 13
- D) -1 ou 10
- E) 2 ou 12

Resolução

Alternativa C.

Como a distância do ponto A até o ponto B é 10, então:

$$d_{AB}^2 = (Xb - Xa)^2 + (Yb - Ya)^2$$

Sabemos que $d_{AB} = 10$ e podemos substituir também os valores das coordenadas dos pontos que já são conhecidos, logo:

$$10^2 = (6 - (-2))^2 + (7 - y)^2$$

$$100 = (6 + 2)^2 + 49 - 14y + y^2$$

$$100 = 8^2 + 49 - 14y + y^2$$

$$100 = 64 + 49 - 14y + y^2$$

$$100 = 113 - 14y + y^2$$

$$0 = - 100 + 113 - 14y + y^2$$

$$0 = 13 - 14y + y^2$$

Encontramos uma equação do 2º grau, logo calcularemos discriminante:

$$y^2 - 14y + 13 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = - 14$$

$$c = 13$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (- 14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13$$

$$\Delta = 196 - 52$$

$$\Delta = 144$$

Agora utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1}$$

$$y' = \frac{14 + 12}{2} = 13$$

$$y'' = \frac{14 - 12}{2} = 1$$

2.4 – Ponto médio de um segmento

Definimos o ponto médio como o ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio resultando em dois segmentos de mesmo comprimento. A fórmula para determinar o ponto médio de um segmento de reta num plano, com os pontos finais $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ é:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

No espaço cartesiano de três dimensões, a fórmula do ponto médio é:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$$

Vale lembrar que em um plano cartesiano, três pontos não colineares determinam um plano. Podemos considerar esses três pontos formando um triângulo, e o baricentro desse triângulo será o ponto médio desses três pontos. O baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo, uma mediana de um triângulo é um segmento de reta que parte de um dos vértices e encontra o ponto médio do lado oposto em relação à esse vértice.

Quando um ponto A possui uma mesma distância em relação a outros dois pontos B e C, dizemos que A é equidistante dos pontos B e C.

Vejamos abaixo alguns exemplos resolvidos sobre ponto médio.

Exemplo 2.5: (PUC-RJ - 2015) O ponto $B = (3, b)$ é equidistante dos pontos $A = (6, 0)$ e $C = (0, 6)$. Logo, o ponto b é:

- a) 1
- b) 6
- c) 3
- d) 2
- e) 0

Resolução:

Alternativa correta: c) 3.

Se os pontos A e C são equidistantes do ponto B , quer dizer que os pontos estão situados à mesma distância. Logo,

$$d_{AB} = d_{CB}$$

e a fórmula para calcular é:

$$d_{AB} = d_{CB}$$

$$\sqrt{(Yb - Ya)^2 + (Xb - Xa)^2} = \sqrt{(Yc - Yb)^2 + (Xc - Xb)^2}$$

1º passo: substituir os valores das coordenadas.

$$\sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - b)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (6 - b)^2}$$

$$\sqrt{(3)^2 + (-b)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6 - b)^2}$$

$$\sqrt{9 + b^2} = \sqrt{9 + (6 - b)^2}$$

2º passo: determinar as raízes e encontrar o valor de b .

$$(\sqrt{9 + b^2})^2 = (\sqrt{9 + (6 - b)^2})^2$$

$$9 + b^2 = 9 + (6 - b)^2$$

$$b^2 = 9 - 9 + (36 - 12b + b^2)$$

$$b^2 = 36 - 12b + b^2$$

$$12b = 36 + b^2 - b^2$$

$$12b = 36$$

$$b = 36 \div 12$$

$$b = 3$$

Exemplo 2.6: (Unesp - 2012) O triângulo PQR , no plano cartesiano, de vértices $P = (0, 0)$, $Q = (6, 0)$ e $R = (3, 5)$, é

- a) equilátero.
- b) isósceles, mas não equilátero.
- c) escaleno.
- d) retângulo.
- e) obtusângulo.

Resolução:

Alternativa correta: b) isósceles, mas não equilátero.

1º passo: calcular a distância entre os pontos P e Q .

$$D_{PQ} = \sqrt{(Y_p - Y_q)^2 + (X_p - X_q)^2}$$

$$D_{PQ} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$D_{PQ} = \sqrt{(-6)^2 + 0}$$

$$D_{PQ} = \sqrt{36}$$

$$D_{PQ} = 6$$

2º passo: calcular a distância entre os pontos P e R .

$$D_{PR} = \sqrt{(Y_p - Y_r)^2 + (X_p - X_r)^2}$$

$$D_{PR} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$D_{PR} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$$

$$D_{PR} = \sqrt{9 + 25}$$

$$D_{PR} = \sqrt{34}$$

3º passo: calcular a distância entre os pontos Q e R .

$$D_{QR} = \sqrt{(Yq - Yr)^2 + (Xq - Xr)^2}$$

$$D_{QR} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$D_{QR} = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2}$$

$$D_{QR} = \sqrt{9 + 25}$$

$$D_{QR} = \sqrt{34}$$

4º passo: julgar as alternativas.

- a) ERRADA. O triângulo equilátero possui as medidas dos três lados iguais.
- b) CORRETA. O triângulo é isósceles, pois dois lados têm a mesma medida.
- c) ERRADA. O triângulo escaleno possui as medidas dos três lados diferentes.
- d) ERRADA. O triângulo retângulo possui um ângulo reto, ou seja, de 90°. O triângulo em questão não satisfaz o teorema de Pitágoras.
- e) ERRADA. O triângulo obtusângulo possui um dos ângulos maior que 90°. Aplicando a leis dos cossenos, encontra-se ângulo agudo oposto ao lado que mede 6, logo o triângulo é acutângulo.

2.5 – Condição de alinhamento entre três pontos

Para três pontos serem colineares, ou seja, alinhados, podemos utilizar a construção gráfica determinando os pontos de acordo com suas coordenadas posicionais. Outra maneira de verificar o alinhamento de três pontos no plano é obtida através de uma ferramenta matemática para a verificação, o determinante de uma matriz 3x3, através do método de Sarrus.

Miranda, Grisi, Lodovici (2015, p.9) afirmam que “ O determinante de uma matriz quadrada é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real.”

Sejam três pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ serão colineares se o determinante da matriz abaixo for zero.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vejam os um exemplo:

Exemplo 2.7: Verifique se os pontos $A(1,3)$, $B(2,1)$ e $C(4,-3)$ são colineares.

Resolução:

Substituindo os valores e calculando o determinante pela regra de Sarrus temos,

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det M = 1.1.1 + 3.1.4 + 1.2.(-3) - [4.1.1 - (-3).1.1 + 1.2.3]$$

$$\det M = 1 + 12 - 6 - [4 - 3 + 6]$$

$$\det M = 7 - [7]$$

$$\det M = 0$$

Com isso, conclui-se que, como o determinante resultou em zero, os pontos A , B e C são colineares, ou seja, estão alinhados.

Caso desejarmos calcular a área de um triângulo ABC formado pelos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, basta utilizar a seguinte fórmula:

$$A = \frac{1}{2} |\det M|$$

Sendo $|\det M|$ o determinante da matriz formada pelos pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, com a terceira coluna composta de 1's.

Capítulo 3

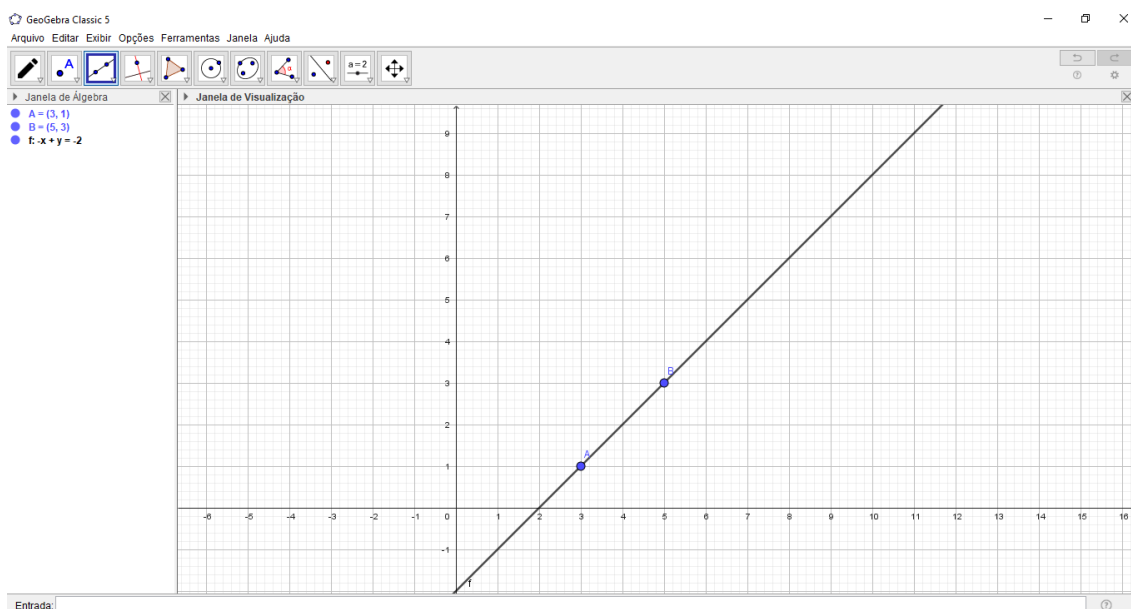
Estudo da Reta

3.1 – Equação geral da reta

A equação geral de uma reta é representada algebricamente por $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes reais e a ou b são diferentes de zero. Para determiná-la, precisamos de dois pontos distintos da reta. Através de alguns cálculos, é possível determinar qual reta passa por esses pontos, que é única. A representação geométrica de uma reta, conhecendo a sua equação geral, é feita encontrando dois pontos pertencentes à essa reta.

Vejamos abaixo uma representação gráfica da reta $x - y - 2 = 0$ que passa pelos pontos $A(3,1)$ e $B(5,3)$ através do software do Geogebra.

Figura 3.1 – Representação de uma reta passando por dois pontos no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 – Equação reduzida de uma reta

Considere $ax + by + c = 0$ como sendo a equação geral de uma reta não vertical, ou seja, $b \neq 0$. Isolando y na equação geral obtemos,

$$y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$$

Fazendo,

$$m = -\frac{a}{b} \quad e \quad n = -\frac{c}{b}$$

Teremos,

$y = mx + n$ que é a equação reduzida da reta.

m é chamado de coeficiente angular e n é chamado de coeficiente linear.

Vejamos a seguir um exemplo resolvido sobre determinação da equações gerais e reduzida de uma reta.

Exemplo 3.1: (IF-RS 2017) A equação da reta que passa pelos pontos A(0,2) e B(2, -2) é:

- a) $y = 2x + 2$
- b) $y = -2x - 2$
- c) $y = x$
- d) $y = -x + 2$
- e) $y = -2x + 2$

Resolução:

Utilizando a equação reduzida e as coordenadas do ponto A,

$$Y = ax + b$$

$$2 = a \cdot 0 + b$$

$$b = 2$$

Utilizando as coordenadas do ponto B e substituindo o valor de $b=2$:

$$Y = ax + b$$

$$-2 = a \cdot 2 + 2$$

$$-2 = 2a + 2$$

$$-2 - 2 = 2a$$

$$-4 = 2a$$

$$a = \frac{-4}{2}$$

$$a = -2$$

Montando a equação:

$$Y = ax + b$$

$$Y = -2x + 2 \text{ (Equação reduzida)}$$

$$Y + 2x - 2 = 0 \text{ (Equação geral da reta)}$$

Gabarito: e)

3.3 – Equação segmentária da reta

Determinar a equação da reta e compreender seus coeficientes é muito importante para o entendimento do seu comportamento, sendo possível analisar sua inclinação e os pontos onde intercepta os eixos do plano.

Sobre as retas temos os seguintes tipos de equação: geral, reduzida, paramétrica e segmentária. Sobre essa última, iremos falar agora.

Considere uma reta do plano de equação $ax + by = c$. Para obtenção da equação segmentária da reta basta dividir toda a equação por c , obtendo:

$$\frac{a \cdot x}{c} + \frac{b \cdot y}{c} = \frac{c}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$$

Substituímos as frações $\frac{c}{a}$ por p e $\frac{c}{b}$ por η , obtemos a fórmula:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\eta} = 1$$

Concluimos:

$$\begin{cases} p = \frac{c}{a} \\ \eta = \frac{c}{b} \end{cases}$$

Que é a equação na forma segmentária da reta.

$\frac{c}{a}$ é a abscissa do ponto de interseção com o eixo x .

$\frac{c}{b}$ é a ordenada do ponto de interseção com o eixo y .

Exemplo 3.2:

Obtenha a equação segmentária da reta, sabendo que $p = 2$ e $\eta = 3$.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\eta} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

3.4 – Posições relativas entre retas

Considere as retas, $r: y = mx + n$, e a reta $s: y = px + q$. Temos as seguintes situações abaixo.

- i) Se $m = p$, e $n \neq q$ as retas serão paralelas
- ii) Se $m = -\frac{1}{p}$ ou $m \cdot p = -1$, as retas serão perpendiculares.
- iii) Se $m \neq p$, mas $m \neq -\frac{1}{p}$ e $m \cdot p \neq -1$, as retas serão concorrentes.
- iv) Se $m = p$ e $n = q$, as retas serão coincidentes.

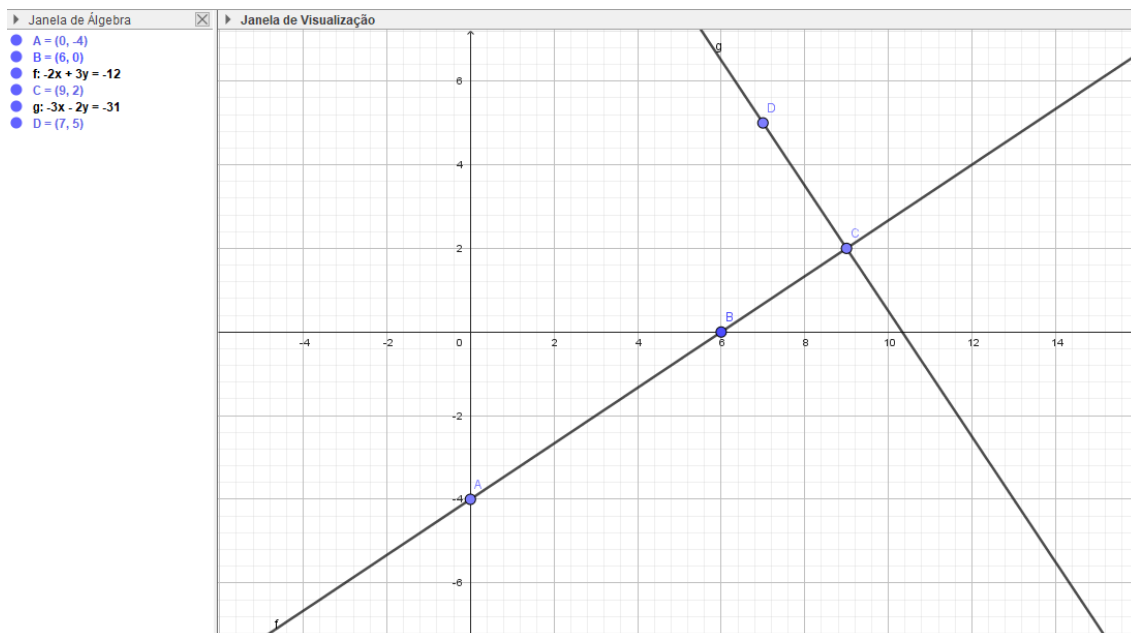
3.5 – Distância entre ponto e reta

A distância entre um ponto e uma reta é calculada usando-se a ideia de que, seja um ponto $P(x, y)$ que não pertence a reta r , para calcularmos a distância, basta traçar uma reta t perpendicular à reta r passando pelo ponto P e encontrar sua equação. Em seguida, calcular o ponto de intersecção da reta t com a reta r chamado de Q , depois calcular a distância entre P e Q .

Para estabelecer a distância entre os dois necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto. A figura a seguir construída através do Software Geogebra nos permite entender graficamente o que foi explanado acima.

Na imagem abaixo temos a reta r dada pela equação $-2x + 3y = -12$ e a reta s dada pela equação $-3x - 2y = -31$, e os pontos $A(0, -4), B(6, 0), C(9, 2)$ e $D(7, 5)$. Os pontos D e C pertencem a reta s e os pontos A, B e C pertencem a reta r . A distância entre o ponto D e a reta r é a menor distância entre D e um ponto de r . Podemos calcular essa distância através do Software Geogebra, encontrando 3,61 o que podemos constatar com a fórmula que iremos desenvolver a seguir.

Figura 3.2 – Representação gráfica da distância entre um ponto e uma reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a equação geral da reta $s: ax + by + c = 0$ em que a, b e c são coeficientes reais e a ou b são diferentes de zero e a coordenada do ponto $P(x_0, y_0)$, conseguimos chegar à expressão capaz de calcular a distância “ d ” entre o ponto P e a reta s :

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Essa expressão surge de uma generalização feita, podendo ser utilizada nas situações em que envolve o cálculo da distância entre um ponto qualquer e uma reta.

Exemplo 3.3 : Dado o ponto $D(7, 5)$ e $r: -2x + 3y = -12$. Estabeleça a distância entre D e r utilizando a expressão dada anteriormente.

Temos que:

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ y_0 = 5 \\ a = -2 \\ b = 3 \\ c = -12 \end{cases}$$

$$d = \frac{|-2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + (-12)|}{\sqrt{((-2)^2 + 3^2)}}$$

$$d = \frac{|-14 + 15 + (-12)|}{\sqrt{(4 + 9)}}$$

$$d = \frac{|+ 1 - 12|}{\sqrt{(13)}}$$

$$d = \frac{|-11|}{\sqrt{(13)}}$$

$$d = \frac{11}{\sqrt{(13)}}$$

$$d = \frac{11}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13^2}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

$$d = \frac{11\sqrt{13}}{13} \cong \frac{39,661064}{13} \cong 3,61$$

3.6 – Equações paramétricas da reta

Dentre as várias maneiras de representar uma reta vistas anteriormente, veremos agora a forma paramétrica. O detalhe dessa representação é que podemos definir uma reta através de um parâmetro que chamamos de t , uma terceira variável, além das coordenadas cartesianas que já utilizamos. Vamos a seu conceito:

Seja $A(x_0, y_0)$ um ponto do plano e o vetor $v = (a, b)$ não-nulo. Da Geometria decorre que existe uma única reta r com a direção de v e que contém A . Falar que r tem a mesma direção de v , é o mesmo que afirmar que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v . Assim, um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r , se e somente, se,

$$\vec{AP} = t \cdot v, \text{ para algum valor real } t.$$

Ou, em termos de coordenadas,

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b)$$

Uma reta r é chamada de parametrizada quando está descrita na forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t = f(t) \\ y = y_0 + b \cdot t = g(t) \end{cases}$$

Onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções do primeiro grau e dependentes do parâmetro t .

Exemplo 3.4:

Por exemplo, seja uma reta r definida como:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$$

Se fizermos, para $t = 2$, temos:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 4)$$

Vemos que o ponto $(3, 4)$ é um ponto desta reta.

É interessante transformarmos uma equação paramétrica em uma equação reduzida da reta e vice-versa.

3.7 – Posições relativas entre reta e plano

A reta é um elemento geométrico de comprimento infinito, com uma dimensão somente. O plano é um elemento geométrico ilimitado com duas dimensões. A relação posicional entre uma reta e um plano pode ter todos os pontos de uma reta em comum, algum ponto em comum ou nenhum ponto em comum.

A posição relativa entre duas figuras é estudada dentro de um espaço fornecido, não necessariamente tridimensional. Uma reta possui três possibilidades de relação com o plano, vejamos detalhadamente a seguir.

3.7.1 – Reta contida no Plano

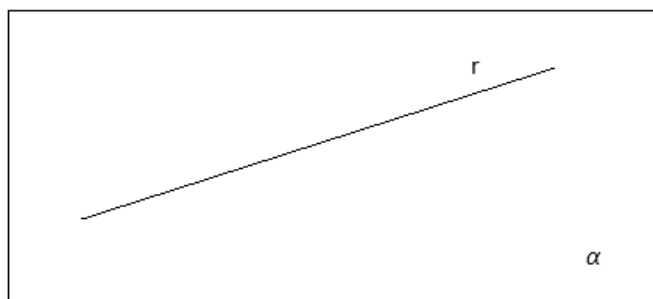
Quando todos os pontos de uma reta estão no plano, dizemos que esse objeto está contido no plano, ou podemos dizer que o plano contém a reta, que é a mesma nomenclatura usada na teoria de conjuntos. O que nos ampara nessa afirmação é o postulado da inclusão de Euclides, que diz que “Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então ela está contida no plano.” Fato esse que não precisa ser provado

já que os postulados de Euclides eram como axiomas, verdades absolutas, e compõem a base da geometria euclidiana.

Euclides de Alexandria nasceu no século III a.C e morreu em data indeterminada. Foi um professor, matemático platônico e escritor grego, com o título de “Pai da Geometria”. Escreveu várias obras, dentre elas, a sua principal obra “Os Elementos” que serviu como base para toda a futura geometria, batizada de geometria Euclidiana.

Segue abaixo uma representação usando o software Paint 3D.

Figura 3.3 : Reta “r” contida no plano α .

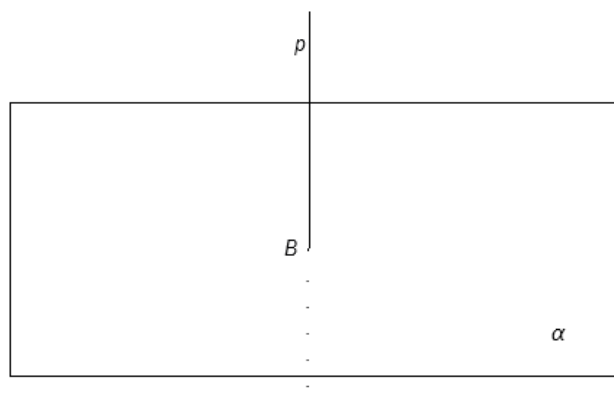


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7.2 – Reta e plano concorrentes:

Quando uma reta e um plano possuem um único ponto em comum, tal reta é dita reta secante ao plano, podemos confirmar isso através do postulado da existência de Euclides, que diz que “Existem infinitos pontos contidos em um plano e também fora dele.” E usando também o postulado de Euclides da determinação que diz que dois pontos distintos determinam uma reta que passa por eles, prova-se assim a existência de uma reta com apenas um ponto comum ao plano. Segue abaixo uma representação usando o software Paint 3D.

Figura 3.4 - Reta "p" secante ao plano α através do ponto B.

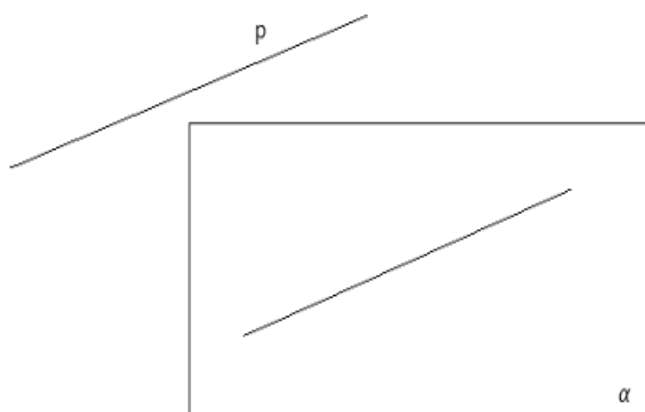


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7.3 – Reta e Plano paralelos

Essa posição ocorre quando eles não possuem nenhum ponto em comum. Com isso, concluímos a propriedade de paralelismo entre reta e plano que podemos entender como, se uma reta p não pertence e nem concorre ao plano α em um ponto, mas é paralela a uma outra reta r contida nesse plano, então a reta p é paralela ao plano α . Segue abaixo uma representação usando o software Paint 3D.

Figura 3.5 – Reta p é paralela à reta r , que pertence ao plano α , logo, p é paralela a α .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 4

Vetores no Plano

4.1 – História dos Vetores - A origem

A história dos vetores podemos citar, o livro *Principia Mathematica* (1687) aparece no primeiro corolário, essa obra foi escrita pelo grande físico Isaac Newton (1642 – 1727), nessa obra o autor abordou bastante os conceitos de velocidade, força que hoje sabemos que são grandezas vetoriais. Um estudo mais aprofundado sobre isso só veio a surgir no final do século XIX e início do século XX.

Nas primeiras duas décadas do século 19, o estudo de vetores ganhou notoriedade com as representações geométricas de números complexos como vetores no plano bidimensional, ou seja, como vetores em duas dimensões através dos matemáticos Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean Robert Argand (1768 – 1822) e Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Em 1827, August Ferdinand Möbius publicou em seu pequeno livro, *The Barycentric Calculus*, segmentos de reta que eram chamados por letras do alfabeto, vetores na essência, mas não no nome. Ele mostrou algumas operações o que seria posteriormente chamado de vetor.

No século XIX, William Rowan Hamilton inventou os quatérnios para representar números em três dimensões, introduzindo o conceito moderno de vetor. Houve um desenvolvimento da álgebra vetorial abstrata através de Hermann Grassmann, mas seu trabalho foi inicialmente ignorado. James Clerk Maxwell, famoso físico, promoveu a análise vetorial como método para física.

Neste capítulo, em algumas seções haverá mais exemplos que outras devido ao grau de relevância de tal tópico para o entendimento do todo.

4.2 – Segmentos Orientados

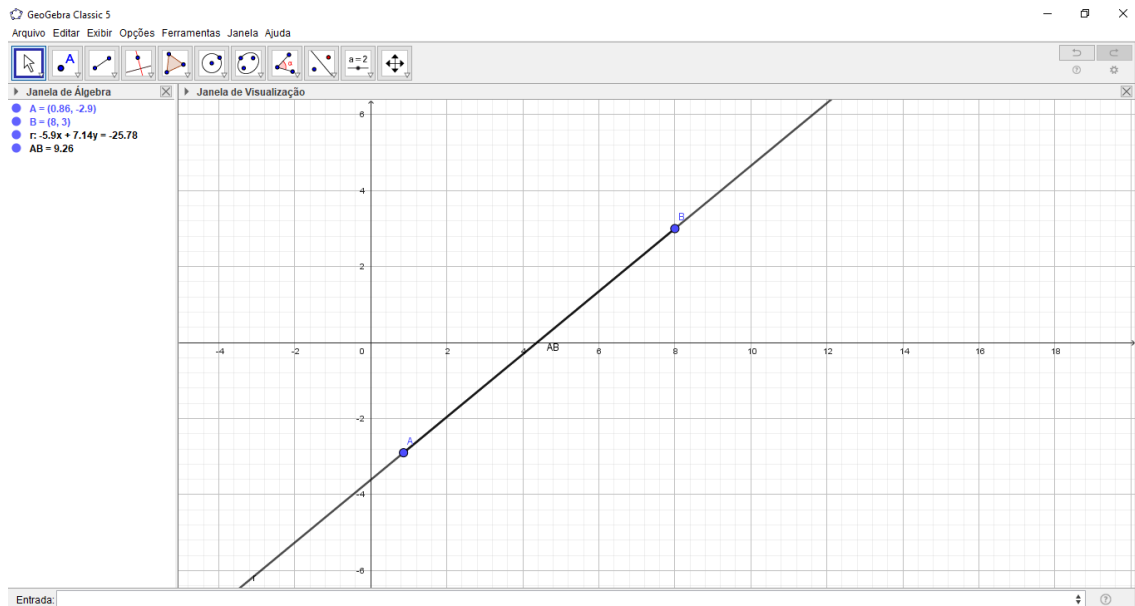
Segundo Konzen (2024), o conceito de segmento orientado é muito importante na definição de vetores. Como o próprio nome já induz, trata-se em definir uma orientação a um dado segmento de reta. Antes, portanto, vamos primeiro definir o que entendemos por um segmento.

4.2.1 – Definição de segmento de reta:

“ Sejam dados dois pontos A e B sobre uma reta r . O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de *segmento de reta* e é denotado por AB . A reta r é chamada de *reta suporte* e os pontos A e B de *pontos extremos*. “ (Konzen, 2024)

Vejamos um exemplo abaixo feito através do software Geogebra.

Figura 4.1 – Um segmento AB de uma reta (direção) r .



Fonte: Elaborada pelo autor

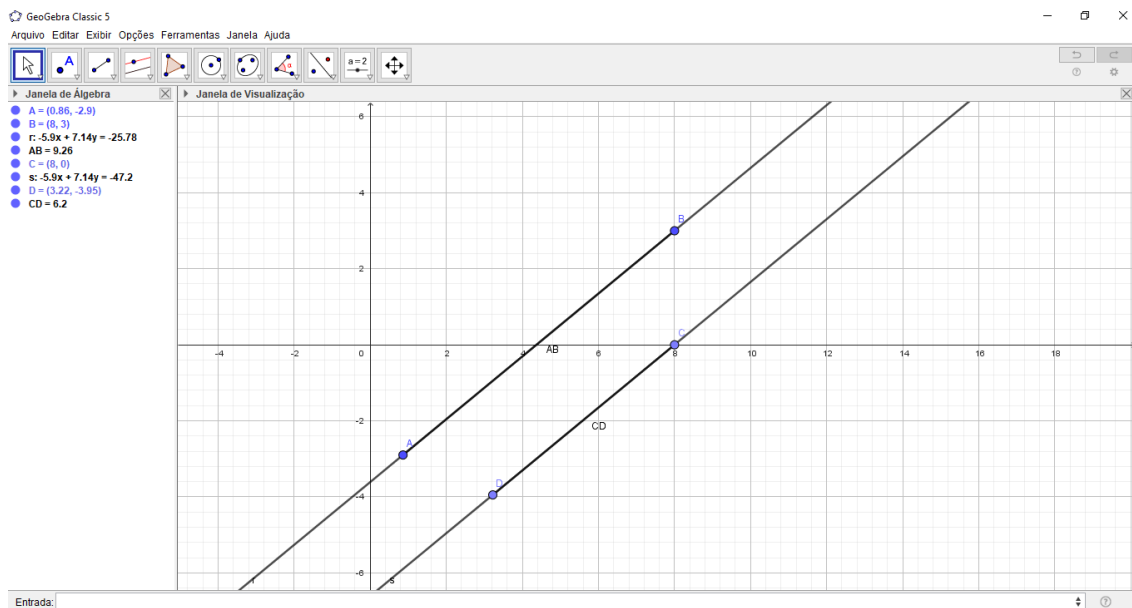
4.2.2 – Comprimento e direção

A nomenclatura do tamanho de um segmento AB é denotado por $|AB|$ e por conceito é a distância entre seus pontos extremos A e B . Resumidamente, é o tamanho do segmento. Como por exemplo, vide a figura 4.1, $|AB| = 9.26$.

Sobre direção, podemos afirmar que,

“ A direção de um segmento AB é a direção da sua reta suporte, i.e. a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B . Conclui-se que dois segmentos AB e CD têm a mesma direção, quando suas respectivas retas suportes são paralelas ou coincidentes.” (Konzen, 2024)

Vejamos um exemplo abaixo feito através do software do Geogebra.

Figura 4.2 – Segmentos de mesma direção $r||s$.

Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.3 – Segmento nulo

Se dois pontos extremos C e D forem coincidentes, chamamos o segmento CD de nulo, logo, $CD = 0$. A sua representação gráfica é um ponto, tendo em vista que seus extremos coincidem. Segmentos nulos não possuem direção definida, isso decorre do fato de existirem várias retas de diferentes direções que passam pelo mesmo ponto.

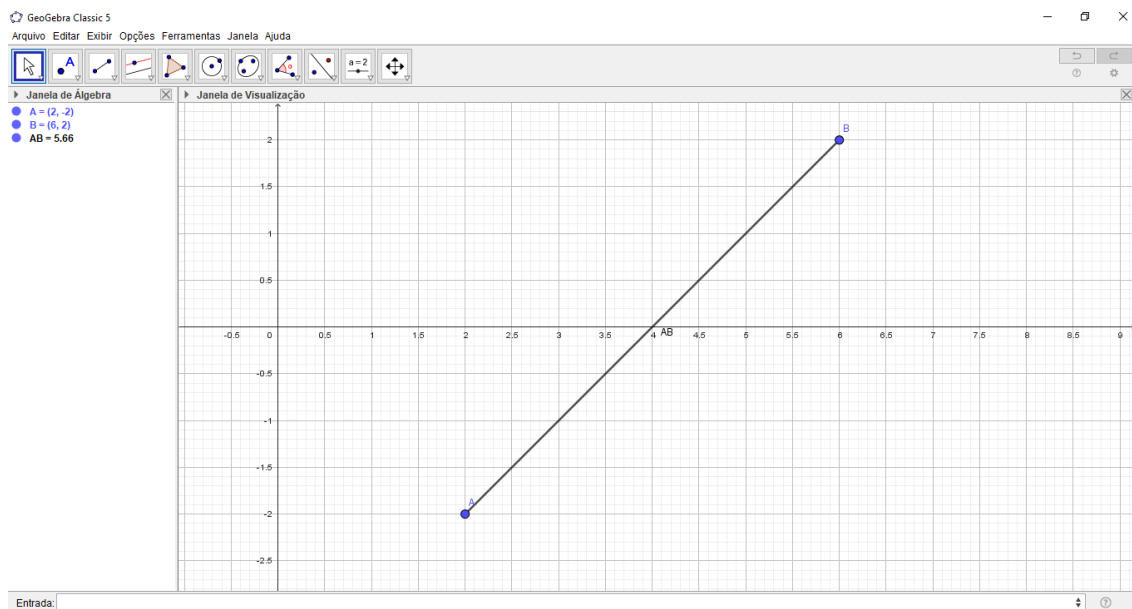
4.2.4 – Conceito de segmento orientado

Conseguimos observar que dados dois pontos C e D , o segmentos de reta CD e DC coincidem, mas agora podemos entender que, se considerarmos como ponto de partida (origem) o ponto C , e como ponto de chegada (extremidade) o ponto D , logo, podemos associar um sentido ao segmento, ponto de partida (origem) e ponto de chegada (extremidade). Ao considerarmos isso, estamos definindo um segmento orientado.

Definindo melhor, um segmento orientado \overrightarrow{CD} é um segmento definido pelos pontos C e D , sendo C o ponto de partida (origem) e D o ponto de chegada (extremidade). Os conceitos de direção e comprimentos são análogos aos conceitos de segmentos. O sentido de um segmento orientado é dado a partir de qual ponto extremo será considerada a origem e qual será a extremidade.

Vejamos abaixo um exemplo de segmento orientado feito através do software Geogebra.

Figura 4.3 – Segmento orientado \overrightarrow{AB} de direção diagonal e tamanho $|\overrightarrow{AB}| = 5.66$



Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.5 – Segmentos orientados equipolentes

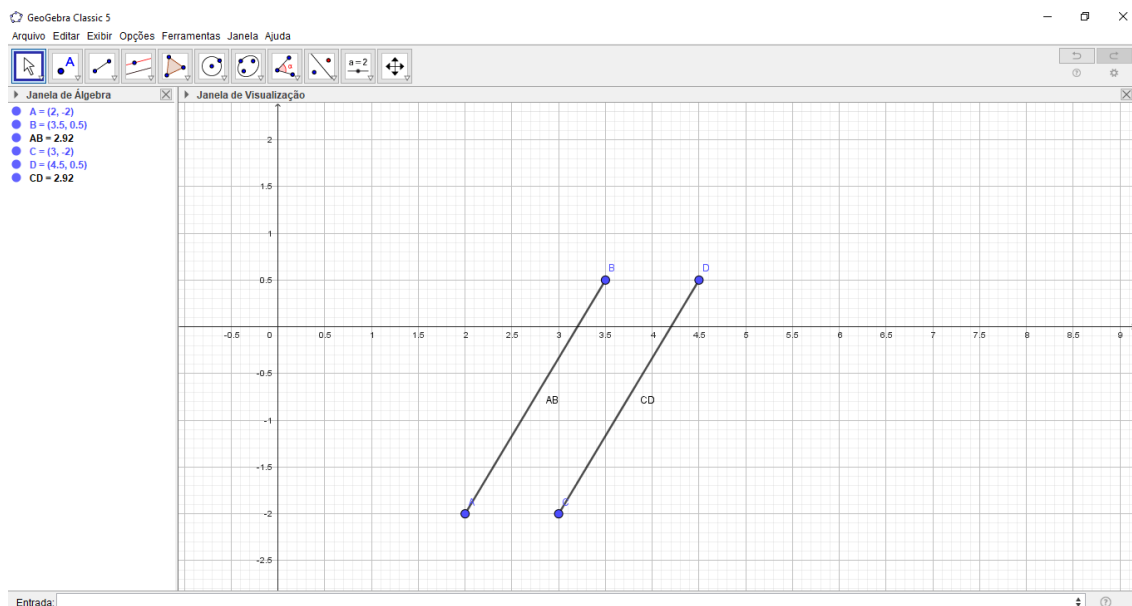
Caso dois segmentos orientados não nulos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} possuam a mesma direção, mesma orientação de sentido e mesmo tamanho, são chamados de segmentos orientados equipolentes. Nesse caso, usaremos a notação $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ para indicar a equipolência. A relação possui as seguintes propriedades.

- i) Relação Reflexiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$
- ii) Relação Simétrica: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$
- iii) Relação Transitiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \text{ e } \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

Dado um segmento orientado \overrightarrow{AB} , definimos a *classe de equipolência* de \overrightarrow{AB} como o conjunto de todos os segmentos equipolentes ao segmento \overrightarrow{AB} e é representante desta classe, a qual é denotada por $[\overrightarrow{AB}]$.

Vejamos abaixo um exemplo de segmentos orientados equipolentes feitos através do software Geogebra.

Figura 4.4 – Representação de dois segmentos orientados equipolentes \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} no sentido diagonal.



Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos agora alguns exercícios sobre segmentos orientados.

Exemplo 4.1: Complete as lacunas:

a) Seja r a reta determinada pelos pontos A e B. O segmento AB é o conjunto de _____ pertencentes a r e que estão _____ A e B (inclusive)

b) O comprimento de um segmento AB é definido como a _____ entre A e B é denotada por _____.

c) Chamamos de _____ de um dado segmento AB , a reta determinada pelos pontos A e B.

d) AB é dito ser um segmento nulo, quando A e B são pontos _____

Resolução:

a) Pontos ; entre

b) Distância, $|AB|$

c) Reta suporte

d) Coincidentes

Exemplo 4.2: Complete as lacunas.

- a) Segmento orientado é um segmento com _____ definido,
- b) Em um segmento orientado \overrightarrow{AB} , A é chamado de _____ e _____.
- c) Se as retas AB e CD são paralelas ou coincidentes, então \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm a mesma _____.
- d) O comprimento de um segmento orientado \overrightarrow{AB} é definido como o comprimento do segmento _____.
- e) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm _____ quando os segmentos AC e BD não se interceptam (se interceptam)

Resolução:

- a) Sentido
- b) Ponto de origem; ponto de extremidade
- c) Direção
- d) $|AB|$
- e) O mesmo sentido (sentidos opostos) ; não se interceptam (se interceptam)

Exemplo 4.3: Mostre que se $AC \sim CB$, então C é o ponto médio do segmento AB .

Se $AC \sim CB$ então $C \in AB$. Como $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$, conclui-se que C é o ponto médio de AB .

4.3 – Vetores – Noção intuitiva

Existem grandezas, chamadas escalares, cuja compreensão envolve apenas valores numéricos. Dentre essas grandezas, podemos citar como por exemplo, a massa de um objeto é de 3 kg, o tempo de queda de um móvel é de 12 segundos, a altura de prédio é de 19 metros, todos esses exemplos são grandezas que não necessitam de outra informação para serem compreendidas.

Existe outro tipo de grandeza, chamadas de grandezas vetoriais, ou simplesmente chamadas de vetores, que são grandezas que necessitam de mais informações para serem compreendidas em sua totalidade. Nesse tipo de grandeza, necessitamos do seu sentido, direção e módulo. Como por exemplo, a velocidade de um móvel, só é entendida em sua totalidade se soubermos do seu módulo, sentido e direção.

4.4 – Conceito de Vetor

4.4.1 – Definição de segmento orientado

Segundo Boulos e Camargo (2004, p.7), “Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos no espaço. A é dito origem, B extremidade do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos. Observe que se $A \neq B$, (A, B) é diferente de (B, A) . “

i) Dois segmentos geométricos AB e CD possuem o mesmo comprimento, se e somente se, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) tiverem o mesmo comprimento.

ii) Suponhamos que (A, B) e (C, D) sejam não nulos. Então concluímos que (A, B) e (C, D) têm a mesma direção $AB \parallel CD$. Se no caso, concluímos que (A, B) e (C, D) são paralelos.

Definição de vetor

Miranda, Grisi, Lodovici (2015, p.9) afirmam que “O conjunto de todos os segmentos orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido é dito vetor.”

Coordenada de um vetor

Sejam os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ não nulos no plano cartesiano, podemos dizer que o vetor \overrightarrow{AB} , é:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

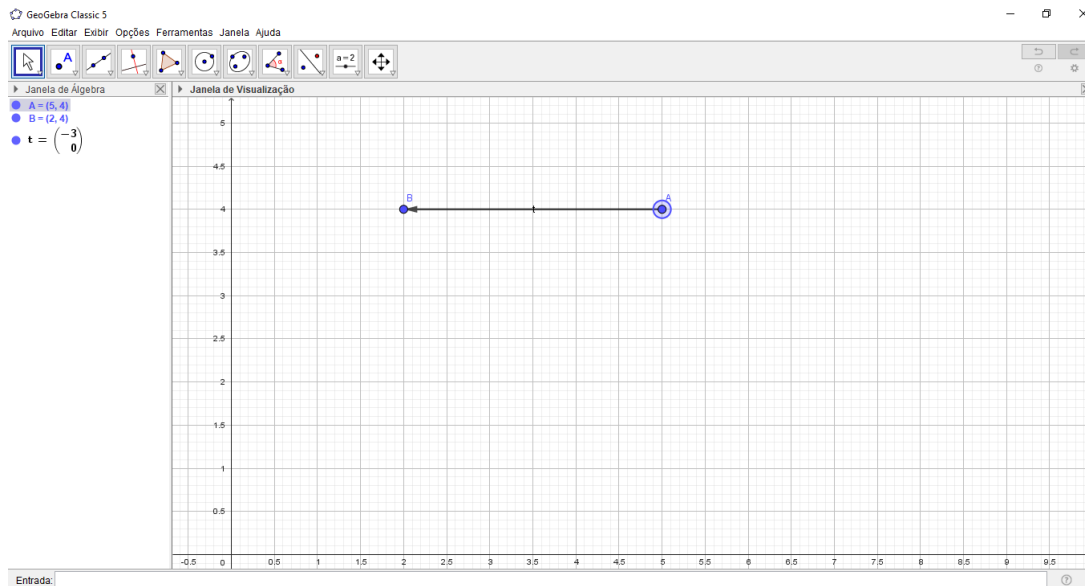
Abaixo vejamos alguns exemplos de vetores feitos através do Software Geogebra.

Figura 4.5 – Vetor \vec{u} formado no plano cartesiano entre os pontos $A(4,1)$ e $B(10,4)$, de módulo $3\sqrt{5}$ u.c (unidades de medida), direção diagonal, sentido para direita.



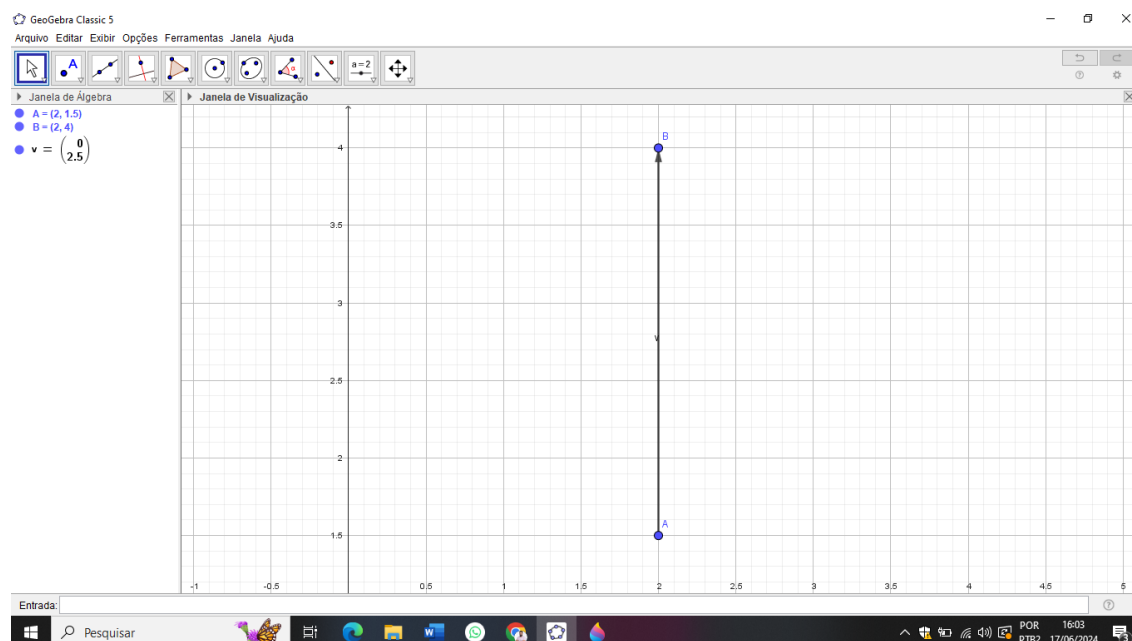
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.6 – Vetor \vec{t} formado no plano cartesiano entre os pontos $A(5,4)$ e $B(2,4)$, de módulo 3 u.c (unidades de medida), direção horizontal, sentido para esquerda.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.7 – Vetor \vec{v} formado no plano cartesiano entre os pontos $A(2,1.5)$ e $B(2,4)$, de módulo 2.5 u.c (unidades de medida), direção vertical, sentido para cima.



Fonte: Elaborada pelo autor

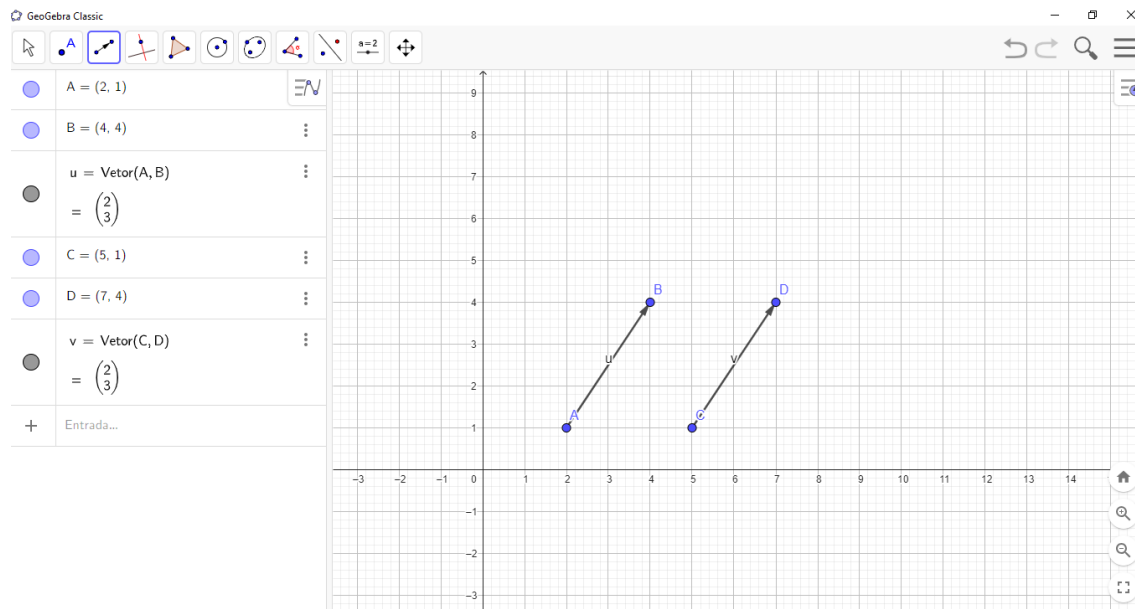
4.4.2 – Definição de norma de um vetor

Chamaremos de norma (ou módulo, comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um dos seus representantes, indica-se a norma do vetor \vec{u} por $\|\vec{u}\|$. Se $\|\vec{u}\| = 1$, dizemos que o vetor \vec{u} é unitário. Se o vetor \vec{u} tiver coordenadas (a, b) no plano cartesiano, dizemos que a norma de \vec{u} será $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. tiver

4.5 – Vetores equipolentes

Quando segmentos orientados possuem a mesma direção, sentido e módulos, dizemos que são chamados vetores equipolentes, abaixo represento dois vetores com tal propriedade através do Software Geogebra.

Figura 4.8– Vetor \vec{u} formado no plano cartesiano possui módulo de $\sqrt{13}$ u.c (unidades de medida), direção diagonal, sentido para cima e o vetor \vec{v} formado no plano cartesiano e possui módulo igual a $\sqrt{13}$ u.c (unidades de medida), direção diagonal, sentido para cima, são chamados de vetores equipolentes.



Fonte: Elaborada pelo autor

Capítulo 5

Operação com Vetores

5.1 - Adição de Vetores

Neste capítulo, algumas definições foram retiradas do livro “Geometria Analítica – Um tratamento vetorial” de Boulos & Camargo, e das notas de aula da Professora Ana Paula Jahn do IME – USP.

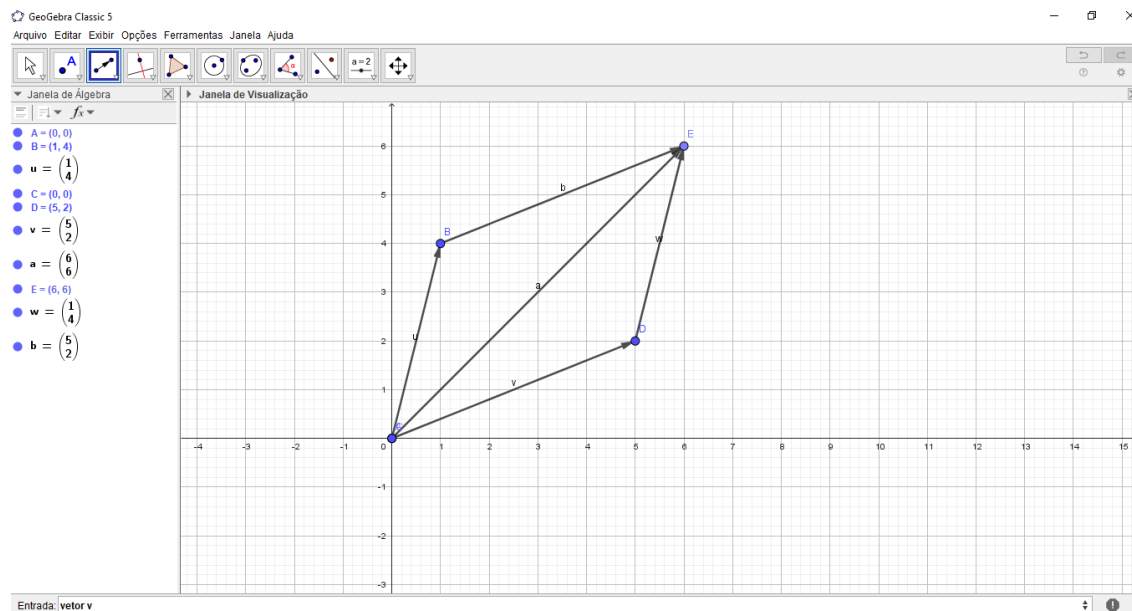
Utilizaremos a notação \vec{u} e \vec{v} para representar vetores. A operação de adição entre um par de vetores \vec{u} e \vec{v} , será definida através da regra do paralelogramo com os seus representantes. Devemos nos atentar em escolher a origem do segundo coincidindo com a extremidade do primeiro.

Definição da regra do paralelogramo:

Para somar dois vetores \vec{u} e \vec{v} através dessa regra tomamos como representantes desses vetores que começam num ponto em comum A , como na figura 5.1. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto E . Logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal \overrightarrow{AE} é a soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} . (Miranda; Grisi ; Lodovici, 2015)

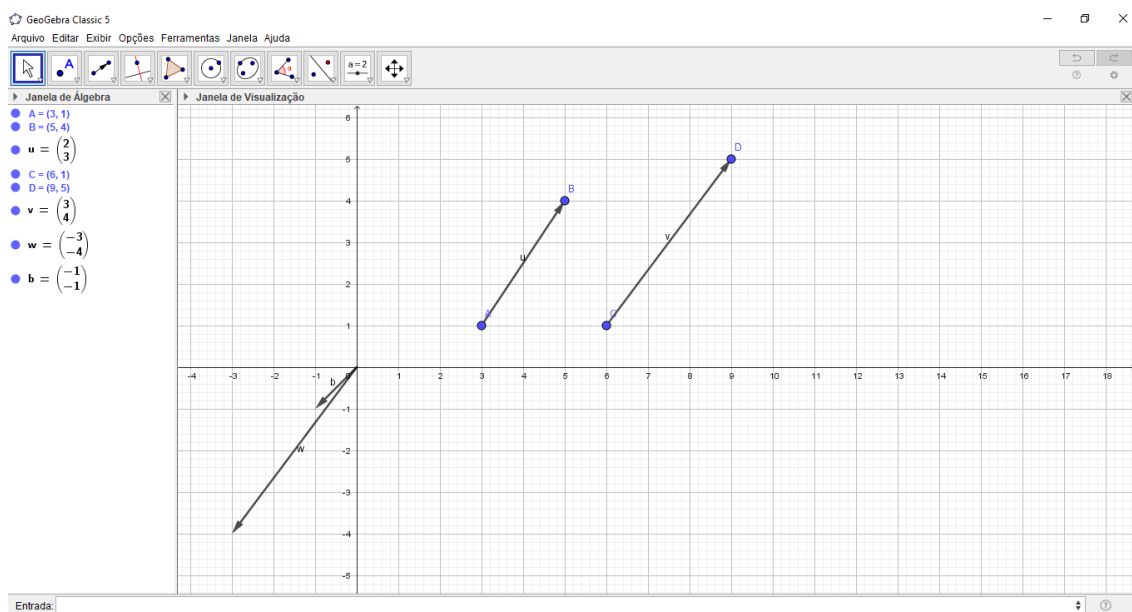
Através dessa regra, dois vetores são somados, desenhando-se um paralelogramo, onde os vetores são colocados formando dois lados adjacentes de um paralelogramo. A diagonal do paralelogramo que passa pelo ponto de intersecção das extremidades dos vetores, representa a soma vetorial dos dois. Essa técnica não só intuitiva como também facilita o entendimento das grandezas vetoriais através de diferentes óticas. Vejamos a seguir um exemplo feito no Software Geogebra.

Figura 5.1 – Adição vetorial dos vetores \vec{u} e \vec{v} através da regra do paralelogramo, o vetor \vec{a} é o vetor soma de $\vec{u} + \vec{v}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.2 – Adição vetorial dos vetores \vec{u} e \vec{w} , sendo o vetor \vec{w} igual a " $-\vec{v}$ " através da regra do paralelogramo, o vetor \vec{b} é o vetor soma " $\vec{u} + \vec{w}$ " que é equivalente ao vetor soma $\vec{u} + (-\vec{v})$



Fonte: Elaborada pelo autor

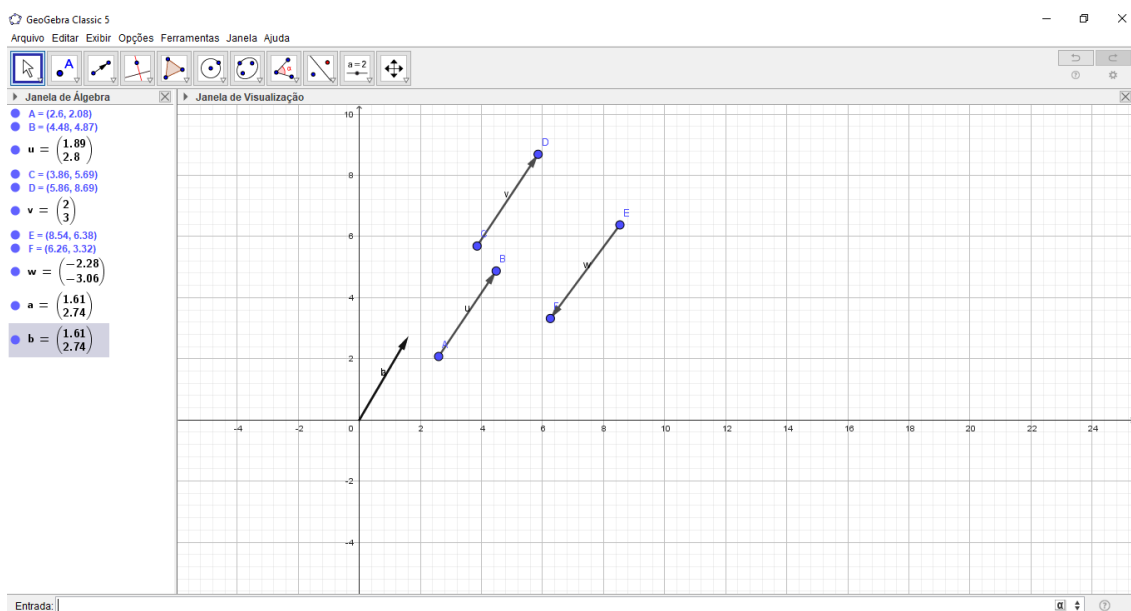
Vejamos agora, as propriedades, da adição de vetores. As propriedades a seguir não serão demonstradas, mas a figuras feitas com o software Geogebra são elucidativas.

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores no plano.

i) Propriedade Associativa :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Figura 5.3 – Propriedade associativa da soma vetorial, sendo $\vec{a} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e $\vec{b} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

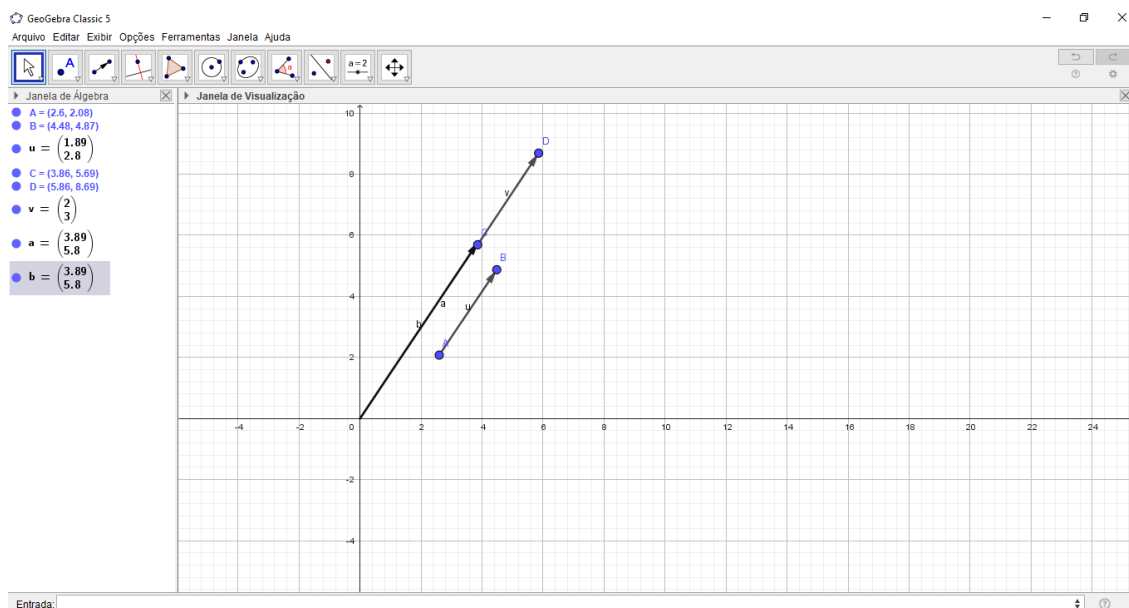


Fonte: Elaborada pelo autor

ii) Propriedade Comutativa:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Figura 5.4 – Propriedade associativa da soma vetorial, sendo $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{v} + \vec{u}$



Fonte: Elaborada pelo autor

iii) Elemento Neutro:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Observação: Lembre-se que todo representante do vetor nulo tem origem e extremidade coincidente, logo,

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

iv) Elemento Oposto:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Com essa propriedade, conseguimos definir a subtração de vetores, como sendo a soma vetorial de um vetor com o do outro oposto. Logo,

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Vejamos agora, alguns exemplos de operações entre vetores feitas através do software Geogebra e outras analiticamente.

Exemplo 5.1: Prove as “leis do cancelamento” da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} + \vec{w}$$

Primeiro, iremos somar nos dois lados da igualdade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$ o vetor oposto do vetor \vec{u} . Assim,

$$(-\vec{u}) + \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w} + (-\vec{u})$$

Pela propriedade associativa de adição de vetores temos,

$$(-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w}$$

Da propriedade do elemento oposto resulta,

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w}$$

Ou, pela propriedade comutativa,

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{w} + \vec{0}$$

E, finalmente, pela propriedade do elemento neutro,

$$\vec{v} = \vec{w}$$

c.q.d

Exemplo 5.2: Prove que,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

Primeiro, vamos somar nos dois membros da igualdade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ o vetor oposto ao vetor \vec{v} ,

$$(-\vec{v}) + \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v})$$

Pela propriedade associativa temos,

$$(-\vec{v} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (-\vec{v})$$

E, por último, pela propriedade do elemento oposto temos,

$$\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

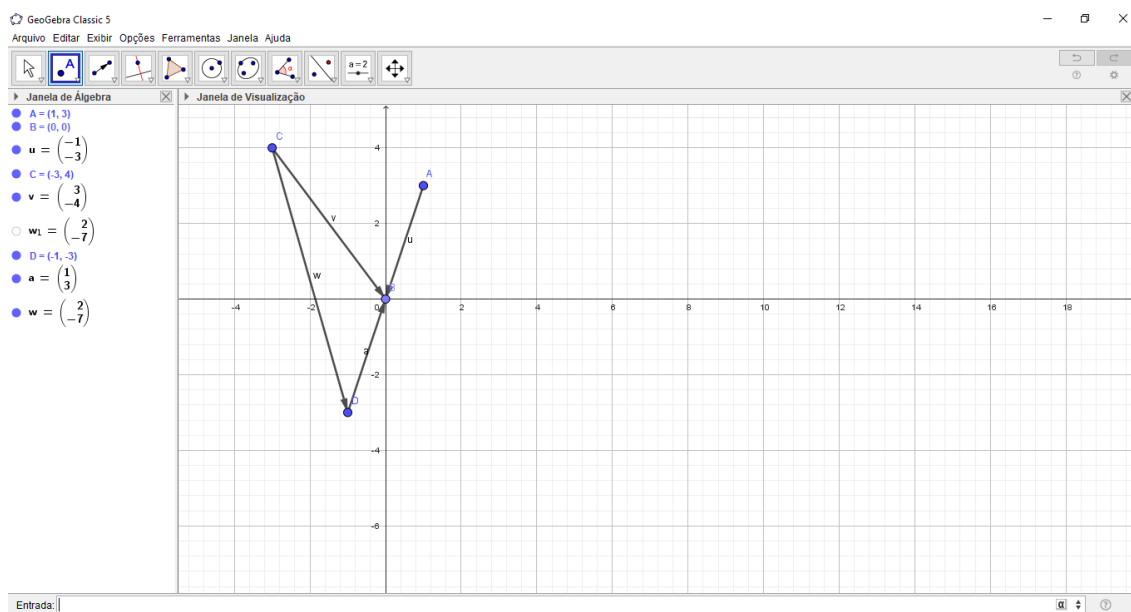
c.q.d

Exemplo 5.3: Dado os vetores $\vec{u} = (1,3)$ e o vetor $\vec{v} = (-3,4)$, determine o resultado das seguintes operações:

i) $\vec{u} + \vec{v}$

Primeiro, chamaremos de vetor \vec{a} o vetor simétrico, que é um vetor com a mesma norma, mesma direção mas de sentido contrário ao vetor \vec{u} , com isso, usando a regra do paralelogramo, unindo a extremidade do vetor \vec{v} com a dor vetor \vec{a} , temos a ligação entre os outros dois extremos como o vetor soma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, conforme a figura abaixo, podemos calcular através do software Geogebra.

Figura 5.5 – Representação gráfica do vetor soma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ através da regra do paralelogramo.



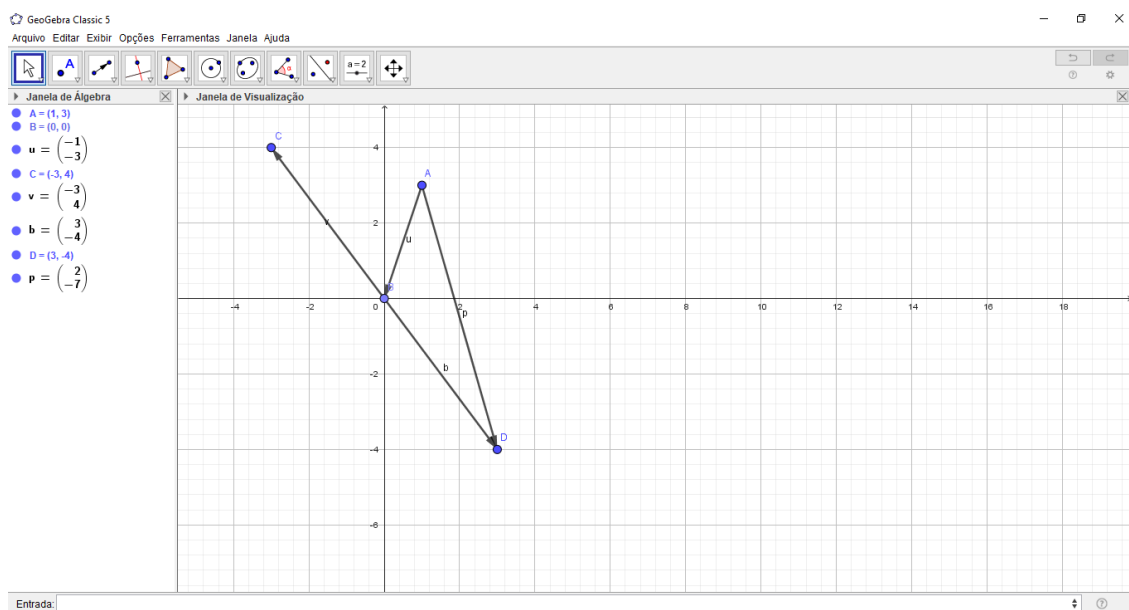
Fonte: Elaborada pelo autor

ii) $\vec{u} - \vec{v}$

Seja $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{p}$. Através da propriedade associativa de adição de vetores, logo, através do software Geogebra, fazendo o vetor \vec{b} como o vetor simétrico a \vec{v} , aplicando a regra do paralelogramo, concluímos que,

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + \vec{b} = \vec{p}$$

Figura 5.6 – Representação gráfica do vetor diferença $\vec{u} + \vec{b} = \vec{p}$ através da regra do paralelogramo.



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\text{iii) } \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \text{ u.c (unidades de comprimento)}$$

$$\text{iv) } \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ u.c (unidades de comprimento)}$$

5.1.1 - Lei dos cossenos para soma entre vetores

Sejam \vec{u}, \vec{v} dois vetores no plano, e θ o ângulo formado entre esses vetores. Dessa forma, temos:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

Vejamos agora um exemplo resolvido.

Exemplo 5.4: Determine $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ dos vetores $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (3,1)$ que formam um ângulo de 8.13° .

Primeiro vamos calcular a norma dos vetores \vec{u} e \vec{v} ,

$$\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 1^2 \quad \text{e} \quad \|\vec{v}\|^2 = 3^2 + 1^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = 5$$

$$\|\vec{v}\|^2 = 10$$

Substituindo na fórmula, temos que,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 5 + 10 + 2 \cdot 5^2 \cdot 10^2 \cdot \cos 8.13^\circ$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 15 + 5000.0,98$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4915$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{4915}$$

5.2 – Multiplicação de vetores por um escalar

Iremos definir a operação que para cada número real β e a cada vetor \vec{v} associa um vetor indicado por $\beta \cdot \vec{v}$ tal que,

Se $\beta = 0$, ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\beta \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (por definição)

Se $\beta \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, logo $\beta \cdot \vec{v}$ é caracterizado por,

i) $\beta \cdot \vec{v} \parallel \vec{v}$

ii) $\beta \cdot \vec{v}$ e \vec{v} tem o mesmo sentido, se $\beta > 0$ e sentido contrário de $\beta < 0$

iii) $\|\beta \cdot \vec{v}\| = |\beta| \cdot \|\vec{v}\|$

Vejamos agora, as propriedades para multiplicação de um escalar por um vetor. Neste trabalho omitiremos as demonstrações.

i) $b \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = b \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3$

ii) $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V^3$

iii) $1\vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V^3$

iv) $a(b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v} = b \cdot (a \cdot \vec{v})$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V^3$

Vejamos agora alguns exemplos acerca da multiplicação de vetores por um escalar.

Exemplo 5.5: Prove a regra de sinais para os itens a seguir:

i) $(-a) \cdot \vec{v} = -(a\vec{v})$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V^3$

Devemos provar que $(-a) \cdot \vec{v}$ é o vetor oposto do vetor $a \cdot \vec{v}$, para isso, pela definição de vetor oposto, é suficiente mostrar que a soma $(-a) \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{v}$ é o vetor nulo. Vejamos:

Usando a propriedade associativa para multiplicação, temos,

$$a(-\vec{v}) + a \cdot \vec{v} = a(-\vec{v} + \vec{v})$$

Aplicando a propriedade de elemento oposto,

$$a(-\vec{v} + \vec{v}) = 0 \cdot \vec{v}$$

E, por último, aplicando a propriedade do vetor nulo,

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}, \text{ c.q.d}$$

$$\text{ii)} \quad a \cdot (-\vec{v}) = -(a\vec{v}) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall \vec{v} \in v^3$$

Devemos mostrar que $a(-\vec{v}) + a \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para concluir que $a(-\vec{v})$ é oposto de $a \cdot \vec{v}$, porém,

$$a(-\vec{v}) + a \cdot \vec{v} = a(-\vec{v} + \vec{v})$$

E, por propriedade,

$$a(-\vec{v} + \vec{v}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad , \text{ c.q.d}$$

$$\text{iii)} \quad (-a) \cdot (-\vec{v}) = a\vec{v} \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall \vec{v} \in v^3$$

Usaremos os itens i) e ii):

$$(-a) \cdot (\vec{v}) = -[a(-\vec{v})]$$

Usando a regra de sinais, temos,

$$-[a(-\vec{v})] = -[-(a\vec{v})] = a\vec{v}, \quad \text{c.q.d}$$

5.3 – Produto escalar entre vetores

O produto escalar entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é o número $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ dado por,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Se } \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \quad \text{Se } \vec{u} \neq 0 \text{ e } \vec{v} \neq 0$$

Considerando θ a medida em radianos do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} .

Com isso, podemos concluir que se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, podemos escrever,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

Caso os vetores sejam tridimensionais, aplica-se a mesma regra para as suas coordenadas também.

A partir da definição para $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, temos,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Perceba que vem da própria definição que,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\text{Pois, } \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Vejamos agora as proposições acerca do produto escalar entre os vetores $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ e qualquer α real, as quais não serão demonstradas,

- i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ii) $\vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$
- v) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vetores perpendiculares)

Vejamos agora alguns exemplos resolvidos sobre o produto escalar entre vetores.

Exemplo 5.6:

Determine a medida em radianos do ângulo formado entre os vetores

$$\vec{u} = (2,3) \text{ e } \vec{v} = (4,-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5)) = (8 - 15) = -7$$

$$\cos \theta = \frac{-7}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{-7}{\sqrt{533}} = -\frac{7\sqrt{533}}{533}$$

$$\theta = \text{ARC cos} \left(-\frac{7\sqrt{533}}{533} \right) \cong 1,87 \text{ rad} \cong 107,5^\circ$$

Exemplo 5.7: Mostre que,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Basta usar a definição de norma e as propriedades:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \quad \text{c.q.d} \end{aligned}$$

Exemplo 5.8: Ache a medida em radiano do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,10,200)$ e $\vec{v} = (-10,1,0)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,10,200) \cdot (-10,1,0) = 1 \cdot (-10) + 10 \cdot 1 + 200 \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$\vec{u} \perp \vec{v}, \text{ e } \theta = 90^\circ \text{ (em graus)}$$

5.4 – Áreas de triângulos e quadriláteros

Para calcular a área de triângulos e quadriláteros formados por vetores no plano cartesiano, precisamos primeiro definir o conceito de produto vetorial.

5.4.1 – Produto vetorial entre dois vetores no espaço

Segundo Miranda, Grisi, Lodovici (2015, p.77) “ O produto vetorial de $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$ (num sistema de coordenadas cartesiano), denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, é o vetor perpendicular aos vetores u e v obtido pelo seguinte determinante formal:”

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Caso os vetores \vec{u} ou \vec{v} sejam nulos, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, o mesmo ocorre se \vec{u} ou \vec{v} tiverem a mesma direção ou se um deles for o vetor oposto ao outro. Caso contrário teremos os dois casos abaixo:

i) Se \vec{u} e \vec{v} forem linearmente dependentes, ou seja, são múltiplos (colineares), logo,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

Como \vec{u} e \vec{v} são colineares, o ângulo $\theta = 0$, e $\sin 0^\circ = 0$, logo,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin 0^\circ$$

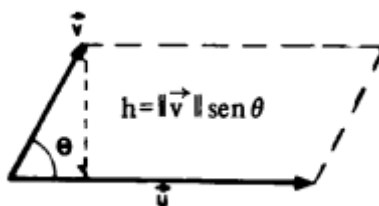
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0$$

Então,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

ii) Se \vec{u} e \vec{v} forem linearmente independentes, ou seja, não são múltiplos (não colineares), logo,



$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot h$$

Obs: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} .

Sendo $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ a área do paralelogramo definido pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , e θ o ângulo formado entre os dois vetores.

5.4.2 – Produto vetorial de vetores como ternos ordenados:

O produto vetorial entre dois vetores é definido como,

$$(v_1, v_2, v_3) \times (p_1, p_2, p_3) = (v_2 \cdot p_3 - v_3 \cdot p_2, v_3 \cdot p_1 - v_1 \cdot p_3, v_1 \cdot p_2 - v_2 \cdot p_1)$$

5.4.3 – Área de um triângulo

A área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo formado por dois vetores não paralelos.

Seja $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, a área do triângulo formada por esses três pontos, será dado por,

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(A - B) \cdot (C - B)\|$$

Caso os pontos A, B e C estejam em três dimensões, a fórmula também é válida.

Vejamos alguns exemplos abaixo acerca do produto vetorial.

Exemplo 5.9: Determine a área do triângulo formado pelos pontos $A = (2,1,0)$, $B = (-1,2,1)$ e $C = (0,3,0)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \|(A - B) \cdot (C - B)\| \\ A &= \frac{1}{2} \cdot \|(3, -1, -1) \cdot (1, 1, -1)\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|(-1 \cdot (-1) - (-1 \cdot 1), -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot 1 - (-1 \cdot 1))\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|(2, 2, 4)\| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{24}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \text{ u.a (unidade de área)}$$

Exemplo 6.0: Determine a área do paralelogramo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , tais que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, e 120° a medida do ângulo entre esses dois vetores.

$$A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 12 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\sqrt{3} \text{ u. a (unidade de área)}$$

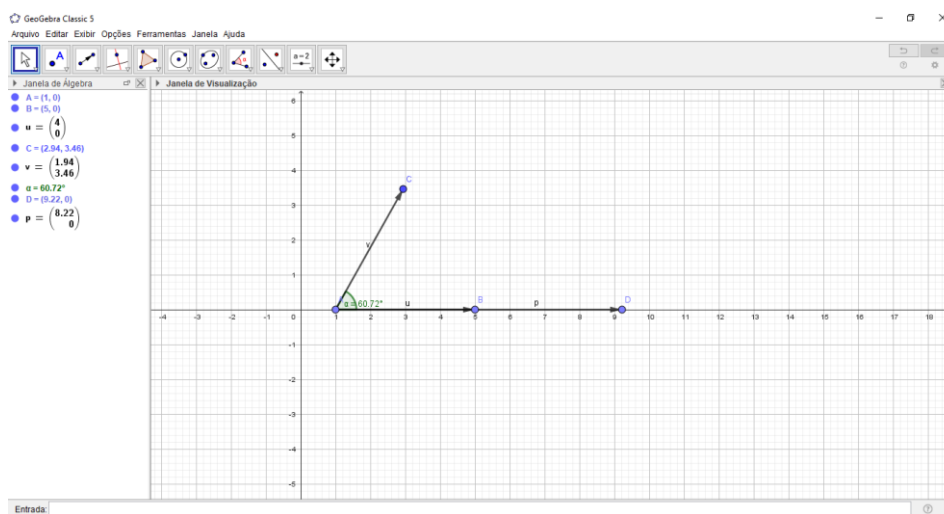
5.5 – Projeção ortogonal de um vetor sobre outro

Segundo Miranda, Grisi, Lodovici (2015, p.73) “ Dados um vetor não nulo \vec{u} , e \vec{v} um vetor qualquer, então a projeção ortogonal $\text{Proj}_u \vec{v}$ de \vec{v} em \vec{u} existe e é única:”

$$\vec{p} = \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} = \text{Proj}_u \vec{v}, \quad \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \text{ o produto escalar entre os vetores } \vec{u} \text{ e } \vec{v}.$$

Vejamos um esboço abaixo feito através do software Geogebra.

Figura 5.7 – Representação gráfica da projeção do vetor \vec{v} sobre \vec{u} , sendo $\vec{p} = \text{Proj}_u \vec{v}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Usando as propriedades de produto escalar vistas nesse trabalho chegamos à definição acima. Iremos omitir a demonstração.

5.5.1 – Projeção de um vetor sobre um vetor unitário

Se \vec{u} for unitário, isto é $\|\vec{u}\| = 1$ u.c (unidades de comprimento), substituindo na fórmula anterior, temos que,

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$$

O módulo do vetor projeção é:

$$\|\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \left\| \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} \right\| = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \|\vec{u}\| = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

Com isso, podemos concluir que o valor absoluto do produto escalar entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} (com \vec{u} unitário) representa o módulo da projeção de \vec{v} sobre \vec{u} .

Vejamos alguns exemplos resolvidos acerca da projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

Exemplo 6.1: Determine a projeção de \vec{v} sobre \vec{u} , sabendo que \vec{u} e \vec{v} são ortogonais.

Vamos considerar $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (vetor nulo). O que faz sentido, pois como $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$, $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{0}$. $\vec{u} = \text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.

Exemplo 6.2: Determine a projeção de \vec{v} sobre \vec{u} , sabendo que \vec{u} e \vec{v} são colineares.

Nesse caso, $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v}$ e $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u}$, de fato $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}$, logo

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \frac{\langle k\vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \frac{k \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \frac{k \cdot \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = k\vec{u} = \vec{v}, \quad \text{c.q.d}$$

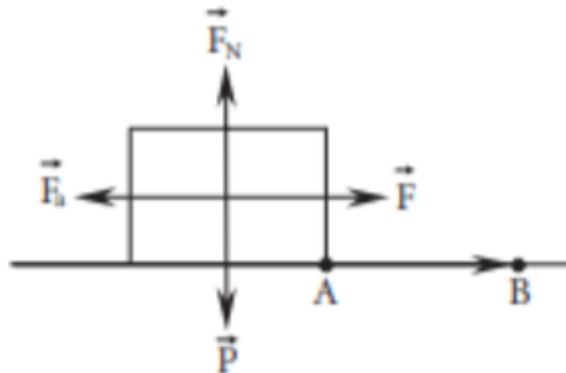
Analogamente para $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u}$.

5.6 – Aplicações na Física e algumas demonstrações em matemática

O exemplo a seguir foi retirado do livro VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA de Paulo Winterle, 2ª edição, Editora Pearson.

Exemplo 6.3: Calcular o trabalho realizado pelas forças constantes \vec{F} , \vec{F}_A , \vec{F}_N e \vec{P} e pela força resultante, para deslocar o bloco de A até B, sabendo que $|\vec{F}| = 10 \text{ N}$, $|\vec{F}_A| = 8 \text{ N}$, $|\vec{P}| = 3 \text{ N}$, $|\vec{F}_N| = 3 \text{ N}$, $d = \overline{AB}$ e $|d| = 10 \text{ m}$.

Figura 5.8 – Representação das forças vetoriais



Fonte: VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Solução:

a) $w_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$ (Fórmula do trabalho de uma força constante)

$$w_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

θ é o ângulo entre a força \vec{F} e o deslocamento \vec{d} .

$$w_F = |10| \cdot |10| \cdot \cos 0^\circ$$

$$w_F = |10| \cdot |10| \cdot 1$$

$$w_F = 100 \text{ joules}$$

b)

$$w_F = |\vec{F}_A| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

θ é o ângulo entre a força \vec{F}_A e o deslocamento \vec{d} .

$$w_F = |8| \cdot |10| \cdot \cos 180^\circ$$

$$w_F = |8| \cdot |10| \cdot (-1)$$

$$w_F = -80 \text{ joules}$$

c)

$$w_F = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

θ é o ângulo entre a força \vec{P} e o deslocamento \vec{d} .

$$w_F = |3| \cdot |10| \cdot \cos 90^\circ$$

$$w_F = |3| \cdot |10| \cdot (0)$$

$$w_F = 0 \text{ joules}$$

d)

$$w_F = |\vec{F}_N| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

θ é o ângulo entre a força \vec{F}_N e o deslocamento \vec{d} .

$$w_F = |3| \cdot |10| \cdot \cos 90^\circ$$

$$w_F = |3| \cdot |10| \cdot (0)$$

$$w_F = 0 \text{ joules}$$

O exercício abaixo foi retirado da prova de vestibular para o ingresso na Universidade Estadual do Piauí do ano 2015.

Exemplo 6.4: (UESPI - 2015) Um bloco de 2 Kg é puxado com velocidade constante por uma distância de 4m em um piso horizontal por uma corda que exerce uma força de 7N fazendo um ângulo de 60° acima da horizontal. Sabendo que $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,86$, o trabalho executado pela corda sobre o bloco é de:

- a) 14 J
- b) 24 J
- c) 28 J
- d) 48,1 J
- e) 56 J

Solução:

Substituindo os dados na fórmula do trabalho de uma força constante visto no exemplo anterior, temos que,

$$w_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

$$w_F = |7| \cdot |4| \cdot \cos 60^\circ$$

$$w_F = 28 \cdot 0,5$$

$$w_F = 14j$$

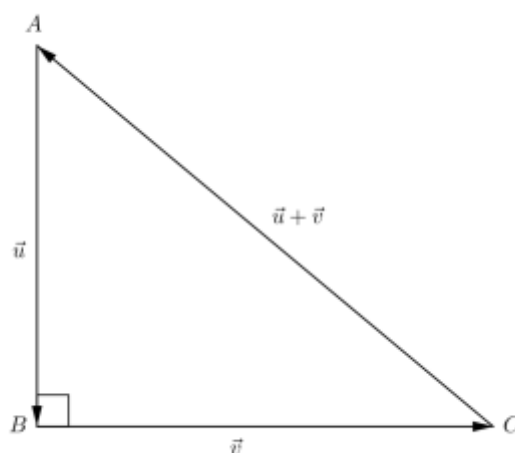
Portanto, a alternativa correta é letra a).

Os exemplos a seguir foram retirados das dissertações de mestrado da UFPB “Aplicando as propriedades dos vetores a problemas de geometria clássica” de Félix Ferreira da Silva Neto, 2014 e da UFG “Introdução ao estudo de vetores e aplicações no ensino médio” de Marcelo Rigonatto, 2018.

Exemplo 6.5: Mostre que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se, e somente se, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. Isso diz que o teorema de Pitágoras se aplica apenas ao triângulo retângulo.

Solução:

Figura 5.9 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Félix Ferreira da Silva Neto

Da figura acima, temos,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}, \text{ ou seja,}$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Elevando o vetor \overrightarrow{CA} ao quadrado, temos que:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Pois,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Portanto, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$, c.q.d.

Exemplo 6.6: (Possível abordagem em \mathbb{R}^3) Mostre que as diagonais do cubo de vértices $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,2)$ e $C = (2,0,0)$, $D = (0,2,0)$, $E = (0,2,2)$, $F = (2,2,0)$, $G = (2,0,2)$ e $H = (2,2,2)$ não são perpendiculares.

Solução:

Vamos considerar as diagonais BF e AH . Dessa forma, temos os vetores \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{AH} onde,

$$\overrightarrow{BF} = (2,2,0) - (0,0,2) = (2,2,-2)$$

$$\overrightarrow{AH} = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$$

Seja θ o menor ângulo entre os vetores \overrightarrow{BF} e \overrightarrow{AH} . Pela definição de produto interno, temos,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{BF}\| \cdot \|\overrightarrow{AH}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{4 + 4 - 4}{\sqrt{12}\sqrt{12}}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{12}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

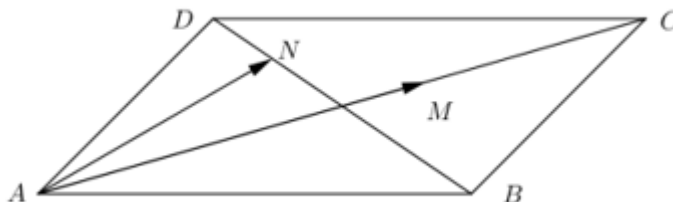
Portanto,

$$\cos \theta = \cos^{-1} \frac{1}{3} \cong 70,53^\circ$$

Logo, as diagonais do cubo não são perpendiculares.

Exemplo 6.7: Prove que as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio de ambas

Figura 6.0 – Paralelogramo ABCD.



Fonte: Félix Ferreira da Silva Neto

Solução:

Sejam M e N os pontos médios de AC e BD respectivamente (figura 6.0), vamos provar que $M = N$.

Do paralelogramo $ABCD$ temos que,

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$$

e

$$2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD}$$

Então como:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{i})$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{ii})$$

Analogamente,

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$$

Somando as expressões (i) e (ii), obtemos,

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

Mas,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$$

Donde segue que,

$$2(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BN}$$

$$2(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}) = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})$$

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$$

$$N - A = M - A$$

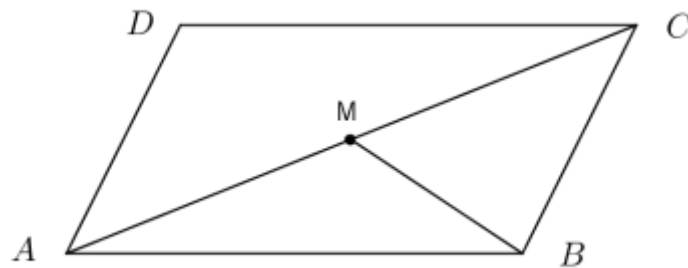
$$M = N \quad , \quad \text{c.q.d}$$

Com isso, provamos que as diagonais do paralelogramo $ABCD$ têm o mesmo ponto médio.

Outra Solução:

Consideremos o paralelogramo $ABCD$ (figura 6.1), de diagonais AC e BD e seja M o ponto médio de AC . Como M é ponto médio de AC , equivale dizer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$. Provaremos que M também é ponto médio de BD .

Figura 6.1 – Paralelogramo $ABCD$



Fonte: *Fonte: Félix Ferreira da Silva Neto*

De acordo com a figura 6.1, tem-se,

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$$

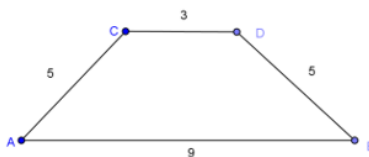
Como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, conclui-se que M é ponto médio de BD .

5.7 – Sugestão de Atividades

Diante dos exemplos feitos acima, iremos deixar como sugestão de atividade, os exercícios abaixo que foram retirados da tese de mestrado da UFC de título “Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas de ensino básico” de Crispiano Barros Uchôa, 2015.

1. Prove que em um triângulo as medianas se encontram em um mesmo ponto.
2. Prove que as medianas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto, e que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.
3. Determinar o ângulo entre as diagonais do trapézio abaixo.

Figura 6.2 – Trapézio ABCD



Fonte: Crispiano Barros Uchôa

4. Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares.
5. Mostre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é a semi - diferença das medidas das bases.
6. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não – paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das duas bases.

5.8 – Comparação do método analítico e vetorial

Após a apresentação dos conceitos expostos nos capítulos anteriores, iremos propor e resolver alguns exercícios. Para cada um dos exercícios, iremos resolver pelo método tradicional analítico (geometria analítica) apresentado na maioria dos livros didáticos, e também através da abordagem vetorial vista nesse trabalho. Logo após as resoluções, iremos propor uma reflexão quanto aos métodos.

Os exercícios abaixo foram retirados e adaptados da tese de mestrado da UNIRIO de título “A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio” de Alexandre Salvatore Dias, 2018.

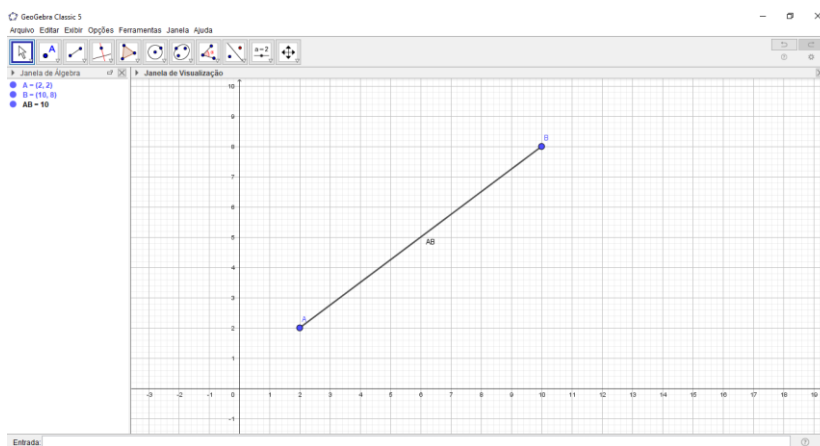
Utilizaremos nos exercícios o auxílio do software Geogebra para melhor visualização e compreensão dos cálculos.

Exemplo 6.8: Determine a distância entre os pontos $A(2,2)$ e $B(10,8)$ através do método analítico e também pelo método vetorial.

Solução:

Método analítico:

Figura 6.3 – Representação dos pontos A e B no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor

Como $A(2,2)$ e $B(10,8)$, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos vista no capítulo 2 na seção 2.3, temos,

$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \quad (i)$$

Com d_{AB} sendo a distância entre os pontos A e B .

Sendo,

$$\begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 2 \\ x_B = 10 \\ y_B = 8 \end{cases}$$

Substituindo os valores na fórmula (i), temos,

$$d_{AB} = \sqrt{(8 - 2)^2 + (10 - 2)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

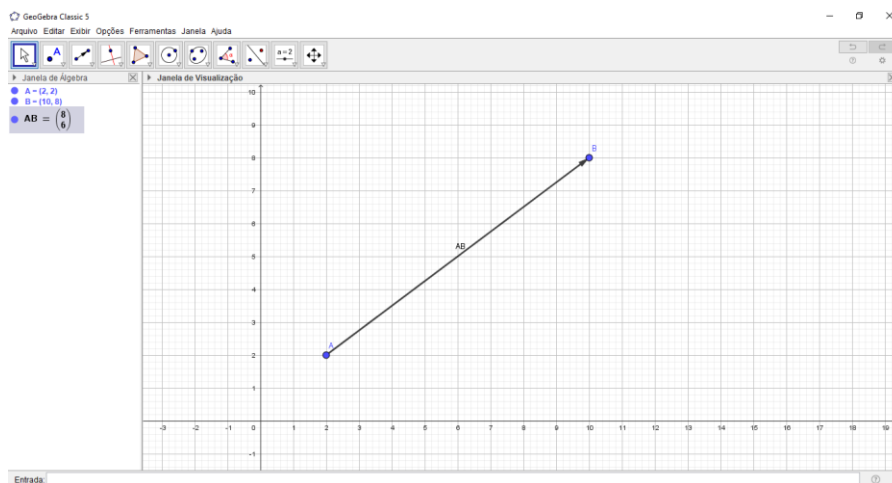
$$d_{AB} = \sqrt{36 + 64}$$

$$d_{AB} = \sqrt{100}$$

$$d_{AB} = 10 \text{ u. c (unidades de medida)}$$

Método vetorial:

Figura 6.4 – Representação do vetor \overrightarrow{AB} .



Fonte: Elaborada pelo autor

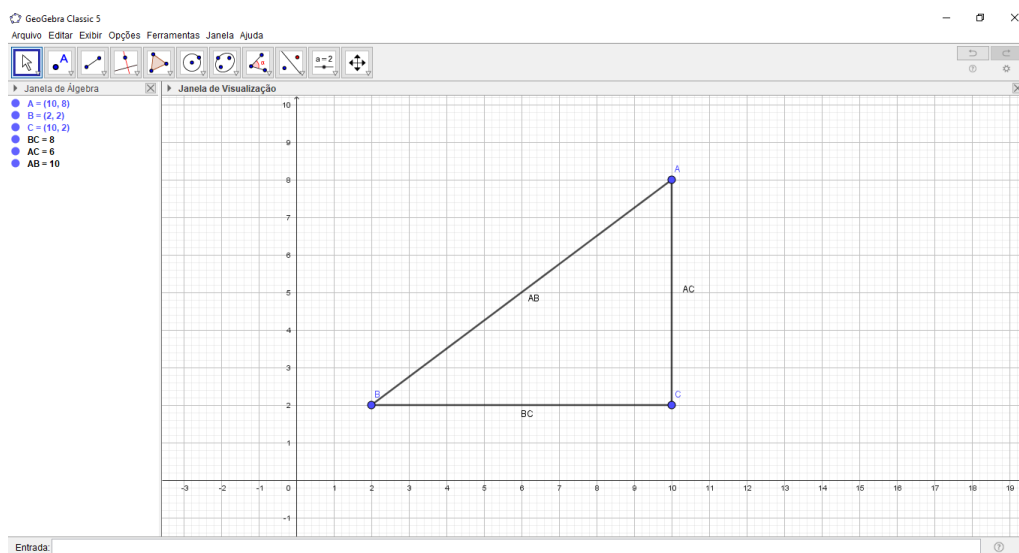
Utilizando o conceito de norma de um vetor visto no capítulo 4 na seção 4.4.3, iremos considerar o vetor \overrightarrow{AB} (figura 6.3) como o vetor que começa em A e termina em B, como A (2,2) e B (10,8), temos que,

$$\overrightarrow{AB} = (8 - 2, 10 - 2) = (6, 8)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ u. c (unidades de medida)}$$

Exemplo 6.9: Calcule a área do triângulo ABC formado pelos pontos A(10,8), B(2,2) e C(10,2) no plano cartesiano através do método analítica e também pelo método vetorial.

Figura 6.5 – Representação do triângulo ABC no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor

Solução:

Método analítico:

Iremos utilizar a fórmula vista no capítulo 2, na seção 2.5 para o cálculo de área de um triângulo no plano cartesiano.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Substituindo os pontos do plano na matriz, temos,

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando o método de Sarrus para o determinante de uma matriz 3x3, temos,

$$\begin{vmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Det = (10 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \cdot 2) - (10 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \cdot 8)$$

$$Det = (20 + 80 + 4) - (20 + 20 + 16)$$

$$Det = (104) - (56)$$

$$Det = 48$$

Como $A = \frac{1}{2} |Det|$, temos,

$$A = \frac{1}{2} |48| = 24 \text{ u. a (unidades de área)}$$

Método vetorial:

Para o cálculo, utilizaremos o conceito de área de um triângulo através dos pontos no plano cartesiano vistos no capítulo 5, na seção 5.4.3.

A área de um triângulo formado pelos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$,

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(A - B) \cdot (C - B)\|$$

Consideraremos os vetores $A = (10, 8)$ e $B = (2, 2)$ e $C = (10, 2)$, logo,

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(10 - 2, 8 - 2) \cdot (10 - 2, 2 - 2)\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(8, 6) \cdot (8, 0)\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|(8, 6) \cdot (8, 0)\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|6 \cdot 0 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 8 - 8 \cdot 0, 8 \cdot 0 - 6 \cdot 8\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|0 - 48\|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|48\| = 24 \text{ u. a (unidades de área)}$$

Exemplo 7.0: (UFMG - 2002) Os pontos $A = (2, 6)$ e $B = (3, 7)$ são vértices do triângulo ABC , retângulo em A . O vértice C está sobre o eixo OX . A abscissa do ponto C é:

a) *nda*

- b) 8,5
- c) 9
- d) 8
- e) 9,5

Solução:

Método analítico:

Iremos utilizar o conceito de coeficiente angular de uma reta e a condição de retas perpendiculares, vistas no capítulo 3, seção 3.2 e 3.4.

Como $A = (2,6)$ e $B = (3,7)$, e o ponto $C (x_c, y_c)$ está localizado no eixo OX , logo o $y_c = 0$, com isso, podemos concluir que $C (x_c, 0)$.

Seja m_r o coeficiente angular da reta r formada pelos pontos A e B , temos que,

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 6}{3 - 2} = 1$$

$$r : y = m_r x + n$$

Seja m_s o coeficiente angular da reta s formada pelos pontos A e B , temos que,

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 6}{x_c - 2} = \frac{6}{x_c - 2}$$

$$s : y = m_s x + p$$

Como $r \perp s$, pois o triângulo ABC é retângulo em A , pela definição de retas perpendiculares, temos que,

$$m_r \cdot m_s = -1$$

$$1 \cdot \frac{6}{x_c - 2} = -1$$

$$-6 = x_c + 2$$

$$x_c = 8$$

Método vetorial:

Iremos utilizar o conceito de vetores visto no capítulo 4 na seção 4.4. e de produto escalar visto no capítulo 5 na seção 5.3.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 2, 7 - 6) = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (x_C - 2, 0 - 6) = (x_C - 2, 6)$$

Como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$, logo,

$$1 \cdot (x_C - 2) + 1 \cdot (-6) = 0$$

$$x_C = 8$$

Exemplo 7.1: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(4,3)$ e $B(9,6)$ em um plano cartesiano.

Solução:

Método analítico:

Utilizaremos o conceito de equação da reta vista no capítulo 3 nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

A reta é tipo $r: y = ax + b$ (i), então,

$$A(4,3) \Rightarrow r \Rightarrow 3 = a \cdot (4) + b$$

$$B(9,6) \Rightarrow r \Rightarrow 6 = a \cdot (9) + b$$

Resultando no sistema de equações abaixo,

$$\begin{cases} 3 = 4a + b \\ 6 = 9a + b \end{cases}$$

Aplicando o método da adição, temos que,

$$\begin{cases} 3 = 4a + b \cdot (-1) \\ 6 = 9a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = -4a - b \\ +6 = +9a + b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3 = -4a - b \\ +6 = +9a + b \\ \hline +3 = +5a + 0 \end{array}$$

Resolvendo a equação resultante,

$$+3 = +5a + 0 \Rightarrow 5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

Substituindo o valor de a na equação $3 = 4a + b$, temos que,

$$4\left(\frac{3}{5}\right) + b = 3$$

$$\frac{12}{5} + b = 3$$

$$b = 3 - \frac{12}{5}$$

$$b = \frac{15 - 12}{5}$$

$$b = \frac{3}{5}$$

Substituindo o valor de a e de b na equação (i), temos que,

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \text{ (forma reduzida)}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow 5y = 3x + 3$$

$$3x - 5y + 3 = 0 \text{ (forma geral)}$$

Método vetorial:

Para tal método, utilizaremos conceitos de vetores vistos no capítulo 4 e de equação paramétrica vistas no capítulo 3.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (9 - 4, 6 - 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (5, 3) = (a, b) \text{ e } A(4, 3) = (x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 5t \cdot (-3) \\ y = 3 + 3t \cdot (5) \end{cases} \text{ (forma paramétrica)}$$

Resolvendo o sistema de equação acima, temos que,

$$\begin{array}{r} -3x = -12 - 15t \\ +5y = +15 + 15t \quad + \\ \hline -3x + 5y = 3 \end{array}$$

E,

$$-3x + 5y = 3$$

$$+3x - 5y + 3 = 0 \text{ (forma geral)}$$

Exemplo 7.2: Prove que as retas $r: 2x - y + 1 = 0$ e $s: x + 2y - 10 = 0$ são perpendiculares.

Solução:

Método analítico:

Para esse método, iremos utilizar o conceito de reta e de retas perpendiculares vistas no capítulo 3.

$$\text{Reta } r : y = m_r x + n$$

$$2x - y - 1 = 0$$

$$-y = -2x + 1 \cdot (-1)$$

$$y = 2x - 1$$

$$m_r = 2$$

$$\text{Reta } s : y = m_s x + p$$

$$x + 2y - 10 = 0$$

$$2y = -x + 10 : (2)$$

$$y = -\frac{x}{2} + 5$$

$$m_s = -\frac{1}{2}$$

Verificando se,

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Substituindo os valores na equação, temos que,

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Logo, as retas r e s são perpendiculares.

Método vetorial:

Utilizaremos nesse método o conceito de produto escalar visto no capítulo 5 e de vetores visto no capítulo 4 com conceito de par ordenado visto nos capítulos 2 e 3.

Iremos encontrar dois pontos quaisquer da reta r através de sua equação,

Reta r :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2)$$

De forma análoga, iremos calcular dois pontos quaisquer da reta s através de sua equação da reta,

Reta s :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow C(0, 5) \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow D(2, 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = D - C = (2, -1)$$

Como,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0$$

$$(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) = (0, 0) = 0$$

Logo, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

6. Considerações Finais

De maneira geral, podemos constatar que o método vetorial (vetores) em relação ao método analítico (geometria analítica) possui uma resolução mais simplificada, cumprindo assim com objetivo deste trabalho que é otimizar a preparação e o tempo para os alunos que almejam o ENEM, vestibulares, olimpíadas, concursos militares e públicos.

Percebemos um ganho intelectual para aqueles que se submetem a aprender vetores de uma maneira aplicada à geometria analítica, de forma a gerar uma atratividade, rapidez e interesse maior aos alunos para resolver questões sobre geometria analítica. O uso do software Geogebra foi essencial para o entendimento e compreensão sobre tais métodos.

A elaboração desse trabalho, permitirá elevar o nível das aulas dos professores que assim o utilizarem como material didático, e também levará a um melhor desempenho aos estudantes que utilizarem esse material para sua preparação.

Fizemos um apanhado histórico sobre a origem da geometria analítica até os dias atuais, e também construímos uma teoria básica de geometria analítica até retas, estudo de vetores até produto vetorial, e deixamos como sugestão de atividades propostas algumas questões sobre geometria clássica que podem ser demonstradas através de vetores.

REFERÊNCIAS

ANTÔNIO, M. et al. Universidade Federal do Rio Grande - FURG Edital 15 - CAPES GEOMETRIA ANALÍTICA. [s.l: s.n.]. Disponível em: <http://www.sabercom.furg.br/bitstream/1/1331/1/Geometria_Analitica.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2023.

Bokstaz, Busto de René Descartes en el Palacio de Versailles, 2011, fotografia, 450x600 pixels. Disponível em: <https://depositphotos.com/br/photo/descartes-sculpture-at-versailles-palace-in-paris-city-13976962.html> Acessado em 22 de julho de 2023.

BOULOS, P.; Carmargo, I.D. **Geometria Analítica – Um tratamento vetorial**. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 2004.

BOYER, B. C. (1956). **History of Analytic Geometry its Development from the pyramids to the Heroic Age**. Princeton Juntion N.J: Yeshiva University.

DIAS, A. S. **A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio**. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, P.67, 2018.

Didier Descouens, Busto de Pierre de Fermat, 2018, fotografia, 4.248 × 4.136 pixels. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capitole_Toulouse_-_Salle_Henri-Martin_-_Buste_de_Pierre_de_Fermat.jpg Acessado em 22 de julho de 2023

Educamais, foto do jogo Batalha Naval, 2023, fotografia, 684x465 pixels. Disponível em: <https://educamais.com/wp-content/uploads/2020/03/batalha-naval.png> em 22 de julho de 2023.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**, v.3. São Paulo, 1992.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GERMANO, C.G.G.O. **Geometria Analítica e Vetores no Ensino Médio**. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, p.85, 2020.

Ian Maire, Folha de rosto da primeira edição do Discurso do Método de René Descartes, s.n , fotografia, 429 × 584 pixels. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg Acessado em 22 de julho de 2023

JAHN, Ana Paula Jahn. **Projeção ortogonal de vetores**. 2024. Notas de aula. Não paginado.

KONZEN, Pedro Henrique de Almeida. **Vetores**. 2024. Notas de aula. Não paginado

LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 1. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MALTA, A.D. **O surgimento da geometria analítica no século XVII: debate histórico sobre questões referentes á sua descoberta**. Tese (Mestrado em História). Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, p.161, 2015.

MIRANDA, Daniel.; GRISI, Rafael; LODOVICI, Sinuê. **Geometria Analítica e Vetorial**: Volume 9. Universidade Federal do ABC. Santo André: UFABC, 2015. Disponível em: <https://encr.pw/7J54l> . Acessado em 15 out. 2024.

Neofeed, foto do jogo Tetris, 2023, imagem, 260x484 pixels. Disponível em: <https://neofeed.com.br/wp-content/uploads/2023/04/tetris-game-filme.jpg> Acessado em 22 de julho de 2023.

NETO, F. F. S. **Aplicando as propriedades dos vetores a problemas de geometria clássica**. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. P.19-34, 2014.

O Baricentro da Mente, Distância Entre Dois Pontos No Plano, 2013, imagem, 260x484 pixels. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html> Acessado em 21 de julho de 2024

RIGONATTO, M. **Introdução ao estudo dos vetores e aplicações no ensino médio**. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Goiânia. P.74-82, 2018.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico. I **CEMACYC**, Santo Domingo, Republica Dominicana, p. 1-10, 6 nov. 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/4068/1/CastroCaminhosCemacyc2013.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2023.

SAVÓIS, J.N. **Método para resolver equações Diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais**. Tese (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, p.97, 2014.

UCHÔA, C. B. **Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do ensino básico**. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. P 37. 2015

Unicentro, foto de uma pessoa jogando xadrez, 2020, fotografia, 2048x1024 pixels. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/08/06/como-o-xadrez-pode-contribuir-para-melhorar-a-qualidade-de-vida/> Acessado em 22 de julho de 2023.

ZANARDINI, R. A. D. et al. Contextualização da geometria analítica na educação a distância, 298, 2016, Curitiba. Congresso. Curitiba: 2016. P.1-8.