



UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES

ALEXSANDRO GOMES FERNANDES

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES

ALEXSANDRO GOMES FERNANDES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Dr. Flávio França Cruz

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Fernandes, Alexsandro Gomes

G633u UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES /
Alexsandro Gomes Fernandes. Juazeiro do Norte-CE, 2024.

79p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da
Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Flávio França Cruz

1.Inscritos em uma circunferência, 2.Maior área, 3.Circunscritos a uma
circunferência, 4.Menor área, 5.Teorema; I.Título.

CDD: 510


UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES

ALEXSANDRO GOMES FERNANDES


Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 15 de Agosto de 2024.


BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **FLAVIO FRANCA CRUZ**
Data: 24/10/2024 15:14:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Documento assinado digitalmente
 **ALEXSANDRO COELHO ALENCAR**
Data: 28/10/2024 09:43:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Documento assinado digitalmente
 **RENATO JUCIANO FERREIRA**
Data: 31/10/2024 08:00:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Renato Juciano Ferreira
Prefeitura Municipal de Juazeiro do Norte (PMJN)

Documento assinado digitalmente
 **FRANCISCO DE ASSIS BENJAMIM FILHO**
Data: 25/10/2024 14:21:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho à minha filha Melissa, que há 11 anos veio para mudar completamente o rumo da minha vida, e à minha esposa, Thalita, que me ensinou a ter confiança no que faço e esperança de mudar os nossos dias.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me fortalecer durante toda essa jornada.

Aos meus pais, Raimundo José Gomes e Maria do Socorro Fernandes Gomes, que tanto fizeram por mim durante minha trajetória de vida. Devo a eles tudo o que sou como pessoa e mais esta conquista.

Aos meus irmãos: Cícera, Geane, Geovani, Jerlândia, Joelma e Renê, por me acolherem quando precisei, me ajudarem em momentos de necessidade, estarem sempre na torcida por mim e se fazerem presentes em minha vida. É uma honra tê-los como irmãos e irmãs.

À minha sobrinha Wanessa, que tem me ajudado bastante e, mesmo estando longe, é a pessoa a quem recorro quando necessito da análise de algum texto, de uma opinião sobre trabalhos acadêmicos ou de ideias para desenvolver algum projeto.

Aos meus colegas do mestrado Adriano, Boaventura, Eduardo, Francisco, Guilherme e Nilvan, pelo aprendizado e parceria. Aprendi muito com vocês.

Aos meus professores, mestres e doutores do programa PROFMAT, que conduziram de forma brilhante esses anos de aprendizado. Em especial, ao professor e orientador Dr. Flávio França Cruz, pela sua humildade, disponibilidade de tempo, valiosas dicas, preciosas contribuições e exemplo profissional.

À minha esposa Thalita, por compreender minha ausência em alguns eventos durante o mestrado, por me ajudar com as correções de provas, por valorizar meus estudos e festejar minhas conquistas.

Aos meus amigos e colegas de trabalho Renato Juciano e Vicente Paula, pela parceria. E a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste sonho.

A todos vocês meu muito obrigado.

“A educação é o grande motor do desenvolvimento pessoal. É através dela que a filha de um camponês se torna médica, que o filho de um mineiro pode chegar a chefe de mina, que um filho de trabalhadores rurais pode chegar a presidente de uma grande nação.” (Nelson Mandela)

Resumo

A presente pesquisa tem como objetivo demonstrar, de forma elementar, que os polígonos regulares maximizam e minimizam, respectivamente, as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência. Os polígonos regulares, presentes em diversos contextos do cotidiano e estudados desde as séries iniciais, desempenham um papel crucial na geometria, seja por seu extenso histórico ou pela exclusividade de aspectos que fundamentam fórmulas e conceitos de grande relevância. O estudo apresenta dois teoremas centrais. Reformulado a partir de uma proposição existente, o primeiro teorema afirma que, entre todos os polígonos inscritos em uma circunferência com a mesma quantidade de lados, os regulares são os de maior área. Já o segundo teorema, inicialmente formulado como conjectura, declara que, entre todos os polígonos circunscritos a uma circunferência com a mesma quantidade de lados, os regulares são os de menor área. É relevante destacar que o primeiro teorema está presente de maneira parcial na 1ª edição do livro Fundamentos de Cálculo do matemático Antônio Caminha, o que já indica o elevado nível da demonstração, e também de forma parcial em um artigo desenvolvido por quatro alunos japoneses do ensino médio, publicado em 2023 na revista Parábola. Embora a demonstração seja correta, precisa e aceita na comunidade matemática, ela utiliza diversos artifícios para alcançar o resultado final, o que a torna menos elementar em alguns pontos e eleva o nível de complexidade. Por outro lado, o segundo teorema, relacionado aos polígonos circunscritos, não foi encontrado na literatura existente. Isso reforça a originalidade desta pesquisa, que desenvolve demonstrações utilizando um novo artifício metodológico. Esse método torna as demonstrações mais acessíveis, mantendo-se dentro do nível de compreensão proposto, permitindo que estudantes do ensino básico compreendam e apliquem esses conceitos em problemas matemáticos e no cotidiano. A pesquisa demonstra de maneira clara e didática que os polígonos regulares possuem propriedades únicas que maximizam e minimizam áreas em contextos específicos de circunferências. Ao reformular e simplificar a abordagem de demonstrações complexas, este trabalho possibilita que estudantes dos anos finais da Educação Básica acessem conceitos fundamentais da geometria e desenvolvam habilidades para aplicá-los tanto na resolução de problemas acadêmicos quanto na vida cotidiana. A contribuição desta pesquisa está em tornar o conhecimento matemático mais acessível, sem perder o rigor teórico, facilitando o aprendizado e a valorização dos conceitos geométricos na formação educacional.

Palavras-chave: Inscritos em uma circunferência, maior área, circunscritos a uma circunferência, menor área, teorema.

Abstract

The present research aims to demonstrate, in an elementary manner, that regular polygons respectively maximize and minimize the areas of polygons inscribed in and circumscribed around a circle. Regular polygons, present in various everyday contexts and studied since the early grades, play a crucial role in geometry, either due to their extensive historical background or the uniqueness of the properties that underpin formulas and concepts of great relevance. The study presents two central theorems. Reformulated from an existing proposition, the first theorem states that, among all polygons inscribed in a circle with the same number of sides, the regular ones have the largest area. The second theorem, initially formulated as a conjecture, declares that, among all polygons circumscribed around a circle with the same number of sides, the regular ones have the smallest area. It is important to highlight that the first theorem appears partially in the first edition of the book *Fundamentos de Cálculo* by mathematician Antônio Caminha, which indicates the high level of the demonstration, and also partially in an article developed by four Japanese high school students, published in 2023 in the journal *Parábola*. Although the demonstration is correct, precise, and accepted by the mathematical community, it uses various techniques to achieve the final result, making it less elementary in some aspects and increasing its level of complexity. On the other hand, the second theorem, related to circumscribed polygons, was not found in the existing literature. This underscores the originality of this research, which develops demonstrations using a new methodological approach. This method makes the demonstrations more accessible, staying within the proposed level of understanding, allowing basic education students to grasp and apply these concepts in mathematical problems and everyday situations. The research clearly and didactically demonstrates that regular polygons possess unique properties that maximize and minimize areas in specific circle contexts. By reformulating and simplifying the approach to complex demonstrations, this work enables students in the final years of basic education to access fundamental geometric concepts and develop skills to apply them in both academic problem-solving and daily life. The contribution of this research lies in making mathematical knowledge more accessible, without losing theoretical rigor, thus facilitating the learning and appreciation of geometric concepts in educational development.

Keywords: Inscribed in a circle, larger area, circumscribed around a circle, smaller area, theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Exemplos de polígonos	17
Figura 2.2	Elementos de um polígono	18
Figura 2.3	Polígonos numerados	19
Figura 2.4	Triângulos semelhantes (caso AA)	21
Figura 2.5	Triângulos semelhantes (caso LLL)	22
Figura 2.6	Triângulos semelhantes (caso LAL)	22
Figura 2.7	Triângulos congruentes (caso LLL)	23
Figura 2.8	Triângulos congruentes (caso LAL)	23
Figura 2.9	Triângulos congruentes (caso ALA)	24
Figura 2.10	Triângulos congruentes (caso LAAo)	24
Figura 2.11	Triângulos congruentes (caso CH)	25
Figura 2.12	Triângulo retângulo	25
Figura 2.13	Relação entre o triângulo e o ângulo de 180°	26
Figura 2.14	Soma dos ângulos internos de um triângulo	27
Figura 2.15	Distância entre vértice e lado oposto de um triângulo	28
Figura 2.16	Triângulo de base b e altura h	29
Figura 2.17	Altura, bissetriz e mediatriz de um triângulo isósceles	29
Figura 2.18	Elementos da circunferência	30
Figura 2.19	Ângulo central e arco	31
Figura 2.20	Perpendicularidade entre raio e corda	31
Figura 2.21	Reta tangente à circunferência	32
Figura 2.22	Retas tangentes à circunferência	33
Figura 2.23	Parte de um polígono inscrito	34
Figura 2.24	Parte de um polígono circunscrito	35
Figura 3.1	Ciclo trigonométrico	36
Figura 3.2	Seno, cosseno e tangente	37

Figura 3.3	Triângulos retângulos semelhantes	39
Figura 3.4	Triângulo retângulo de lados a, b e c	40
Figura 3.5	Ciclo trigonométrico e o sinal do seno, cosseno e tangente	40
Figura 3.6	Triângulo retângulo de lados a, b, c e altura h	42
Figura 3.7	Triângulo acutângulo ABC com altura relativa ao lado AB	43
Figura 3.8	Triângulo acutângulo ABC com altura relativa ao lado BC	43
Figura 3.9	Triângulo retângulo ABC	45
Figura 3.10	Triângulo retângulo ABD obtido a partir do obtuso ABC	46
Figura 3.11	Triângulos retângulos obtidos a partir do triângulo obtuso	47
Figura 3.12	Triângulo obtuso e a diferença de dois arcos	47
Figura 4.1	Polígono de 2^m lados inscrito em uma circunferência	55
Figura 4.2	Polígono de n lados inscrito em uma circunferência	59
Figura 4.3	Polígono regular inscrito transformado em irregular	63
Figura 4.4	Polígono circunscrito com quadrilátero em destaque (1)	65
Figura 4.5	Polígono circunscrito com quadrilátero em destaque (2)	70
Figura 4.6	Polígono regular e polígono irregular	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1	Nome dos polígonos	19
Quadro 2.2	Classificação dos triângulos quanto aos lados	20
Quadro 2.3	Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	21
Quadro 3.1	Quadro de sinais	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO: POLÍGONOS E CIRCUNFERÊNCIA	17
2.1	Definição de polígonos	17
2.2	Elementos de um polígono	17
2.3	Classificação dos polígonos	18
2.4	Triângulos	20
2.4.1	CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS	20
2.4.2	SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS	21
2.4.3	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	22
2.4.4	O TEOREMA DE PITÁGORAS	25
2.4.5	SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS	26
2.4.6	ALGUMAS CEVIANAS	27
2.4.7	ÁREA DE UM TRIÂNGULO	28
2.4.8	CEVIANAS NO TRIÂNGULO ISÓSCELES	29
2.5	Circunferência	30
2.5.1	ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA	30
2.5.2	TEOREMA DA CORDA	31
2.5.3	RETA TANGENTE À CIRCUNFERÊNCIA	32
2.5.4	COMPRIMENTOS DAS TANGENTES	32
2.6	Polígonos inscritos e circunscritos	33
3	REFERENCIAL TEÓRICO: TRIGONOMETRIA	36
3.1	Noções elementares: ciclo trigonométrico	36
3.2	Obtendo a tangente e a relação fundamental da trigonometria	38
3.3	Trigonometria no triângulo retângulo	39
3.4	Redução ao primeiro quadrante	40

3.5	Área do triângulo em função do seno	41
3.6	As leis dos senos	42
3.7	As leis dos cossenos	44
3.8	Soma e diferença de dois arcos	46
3.9	As Fórmulas de prostaférese	50
3.10	Relações do arco metade	52
4	UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES . .	54
4.1	Polígonos inscritos com 2^m lados	54
4.2	Polígonos inscritos com n lados	59
4.2.1	QUANTO MAIS LADOS MAIOR A ÁREA	62
4.3	Teorema dos polígonos regulares inscritos	64
4.4	Polígonos circunscritos com 2^m lados	64
4.5	Polígonos circunscritos com n lados	69
4.5.1	QUANTO MAIS LADOS MENOR A ÁREA	72
4.6	Teorema dos polígonos regulares circunscritos	74
4.7	Polígonos regulares e a BNCC	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

Desde as séries iniciais, ensina-se aos alunos conceitos e definições sobre polígonos. Conhecer profundamente as propriedades dessas figuras é uma preocupação desde a antiguidade, pois quanto mais entendemos, melhor podemos manipulá-las, o que favorece suas aplicações no cotidiano. Eves (2011, p. 80) afirma que "Em 1936 desenterrou-se em Susa, a cerca de 200 milhas da Babilônia, um grupo de tábulas dos Antigos Babilônios. Uma delas compara as áreas e os quadrados dos lados dos polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 7 lados".

Entre os polígonos, os regulares se destacam por algumas propriedades específicas, como serem equiláteros, equiângulos, inscritíveis e circunscritíveis a uma circunferência. Arquimedes, no século III antes da era cristã, fez uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos para determinar o valor aproximado de π , usando o que hoje conhecemos como método da exaustão.

Para fazer isso, Arquimedes, inicialmente, inscreveu e circunscreu hexágonos regulares em uma circunferência de círculo de raio 1. Em seguida, ele duplicou sucessivamente seus números de lados. Assim, ele inscreveu os polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$ lados, cujos semiperímetros são b_n e circunscreu polígonos regulares com $3 \times 2^{n-1}$, cujos semiperímetros são a_n . As sequências b_n e a_n são respectivamente decrescentes e crescentes e temos que $b_n < 2\pi < a_n$. (Roque; Pitombeira, 2012, p. 117)

Analisando tal demonstração à luz da razão, surgiu duas perguntas que daria início a esta pesquisa: dos polígonos inscritos em uma circunferência, seriam os regulares os de maior área? E, entre os circunscritos, os regulares seriam os de menor área? Realizamos estudos bibliográficos com o intuito de obter a maior quantidade possível de informações sobre o nosso objeto de estudo. No livro Fundamentos de Cálculo, no capítulo 3, intitulado Limite e Derivada, Caminha (2015 p. 188) nos faz refletir sobre o seguinte exemplo: "Seja Γ um semicírculo de raio R e diâmetro A_0A_1 . Para cada inteiro $n > 2$, mostre que existe um n -ágono $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ satisfazendo as seguintes

condições: (a) $A_2 \dots A_{n-1} \in \Gamma$. (b) A área de $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ é a maior possível”. A solução apresentada no livro tem sua beleza, entretanto, envolve um nível de conhecimento elevado. Já no site Mathematics, com o título “área máxima de um polígono cíclico quando é um polígono regular” (tradução livre) [4], encontramos um enunciado ainda mais semelhante ao nosso objeto de estudo. A demonstração, assim como no exemplo acima, envolve a desigualdade de Jensen, cuja prova, além de outros assuntos, exige a noção de derivada segunda, conteúdo abordado a partir da graduação em cursos que envolvem o estudo de Cálculo.

Durante os nossos estudos, nos deparamos com artigo da revista Parábola intitulado “Uma prova elementar de que o polígono regular é o maior entre polígonos inscritos em um círculo” [5], desenvolvido por quatro alunos japoneses do ensino médio. Esse artigo se relaciona com o nosso objeto de estudo. Entretanto, apesar de ser uma demonstração correta, precisa e aceita na comunidade matemática, ela utiliza muitos artifícios para chegar ao resultado final, o que a torna menos elementar em alguns pontos e eleva o nível da demonstração.

Diante do exposto, em relação aos polígonos inscritos, observou-se a necessidade de elaborar uma demonstração que envolvesse elementos mais simples, os quais pudessem ser compreendidos por alunos do ensino médio sem muito esforço. Quanto aos polígonos circunscritos, como nada a respeito foi encontrado, buscamos provar a nossa conjectura de que os regulares são os de menor área, procurando sempre utilizar conteúdo do nível médio na esperança de contribuir com a capacitação de alunos dos anos finais da educação básica. Com o objetivo principal de consolidar ou mesmo ampliar o leque de conhecimentos que o aluno já deve possuir antes de se aventurar pelas páginas que compõe a seção 4 desta obra, estruturamos a dissertação da seguinte maneira: após esta introdução, que consideramos como o primeira seção, seguimos com o referencial teórico, dividido em dois eixos principais.

O primeiro eixo, intitulado “Polígonos e Circunferência”, é abordado no capítulo dois. Nessa seção, exploramos essas duas figuras geométricas planas, iniciamos com os

polígonos, abordando definição, elementos e classificação. Em seguida, discutimos os triângulos, tratando de sua classificação, semelhança, congruência, teorema de Pitágoras, fórmula da área e definições de algumas cevianas. Ainda na seção dois, abordamos a circunferência, com foco no ângulo central, na corda e em alguns teoremas, finalizando com a demonstração da inscrição e circunscrição de um polígono regular qualquer.

Na seção três, que aborda o segundo eixo do referencial teórico, tratamos da trigonometria. Inicialmente, relembramos o ciclo trigonométrico e definimos seno, cosseno e tangente de um ângulo no ciclo. Em seguida, discutimos a tangente como a razão entre o seno e o cosseno e determinamos a relação fundamental da trigonometria. Mostramos também a relação entre o triângulo retângulo e o seno, o cosseno e a tangente de seus ângulos agudos. Depois, explicamos como realizar a redução ao primeiro quadrante e determinamos a expressão que fornece a área de um triângulo em função do seno. Prosseguimos explorando as leis dos senos e dos cossenos. Posteriormente, determinamos o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de dois arcos. Continuamos com as fórmulas de prostaférese e, por fim, desenvolvemos as fórmulas para o arco metade.

Na seção quatro, iniciamos mostrando que, para polígonos inscritos em uma circunferência cujo número de lados é uma potência de dois, os regulares são os de maior área. Em seguida, generalizamos a proposição para polígonos de n lados. Logo após, demonstramos que, quanto maior o número de lados de um polígono regular, maior será sua área. Na subseção seguinte, provamos o primeiro teorema. Esse afirma que, entre todos os polígonos inscritos em uma circunferência, com o mesmo número de lados, os regulares são os de maior área. Prosseguimos, então, tratando dos polígonos circunscritos. Mostramos que, entre esses, se o número de lados for uma potência de dois, os regulares são os de menor área, generalizando o caso logo em seguida. Na sequência, provamos que, quanto maior o número de lados de um polígono regular circunscrito a uma circunferência, menor será sua área. Com base nas duas últimas proposições, provamos o segundo teorema. Esse afirma que, entre todos os polígonos

circunscritos a uma circunferência, com a mesma quantidade de lados, os regulares são os de menor área. Por fim, é feita uma breve relação entre a caracterização dos polígonos e a BNCC.

Por conseguinte, este trabalho busca apresentar uma demonstração, utilizando uma abordagem acessível aos alunos dos anos finais da Educação Básica, de que os polígonos regulares maximizam e minimizam, respectivamente, as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência. Ao reformular e simplificar a abordagem de demonstrações complexas, a pesquisa possibilita que estudantes dos anos finais da Educação Básica acessem conceitos fundamentais da geometria e desenvolvam habilidades para aplicá-los tanto na resolução de problemas acadêmicos quanto na vida cotidiana. A contribuição desta pesquisa está em tornar o conhecimento matemático mais acessível, sem perder o rigor teórico, facilitando o aprendizado e a valorização dos conceitos geométricos na formação educacional.

2 REFERENCIAL TEÓRICO: POLÍGONOS E CIRCUNFERÊNCIA

Neste capítulo, explora-se os elementos, definições e proposições referentes aos polígonos e às circunferências, figuras geométricas que se destacam nos capítulos subsequentes e são essenciais no desenvolvimento de diversas fórmulas e conceitos utilizados em demonstrações posteriores. Para uma leitura aprofundada, recomenda-se [6] e [7].

2.1 Definição de polígonos

Definição 2.1. *Polígono é uma figura geométrica plana formada por uma sequência fechada de segmentos de reta, chamados de lados, que se conectam em pontos denominados vértices.*

Na Figura 2.1 temos exemplos de alguns polígonos.

Figura 2.1: Exemplos de polígonos



Fonte: Próprio autor

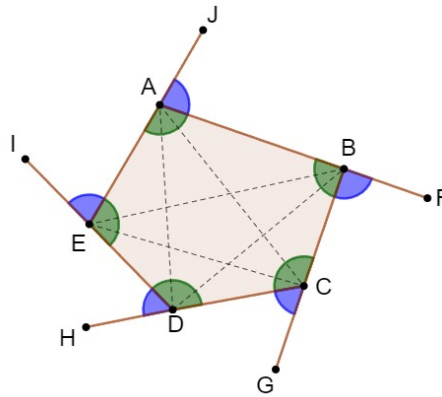
2.2 Elementos de um polígono

Os elementos de um polígono são as partes fundamentais que o compõem. A seguir, apresentamos os principais componentes de um polígono:

- **Lado:** segmento de reta que une dois vértices adjacentes e delimita o polígono;
- **Vértice:** encontro entre dois segmentos de reta consecutivos de um polígono;
- **Diagonal:** segmento de reta que une dois vértices quaisquer não adjacentes;
- **Ângulo interno:** abertura no interior da figura entre dois lados adjacentes;
- **Ângulo externo:** abertura formada por um lado e o prolongamento do lado adjacente a este no lado externo da figura.

A Figura 2.2 mostra os principais elementos de um polígono, em que:

Figura 2.2: Elementos de um polígono



Fonte: Próprio autor

- os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} são os lados;
- os pontos A , B , C , D e E são os vértices;
- os segmentos \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} e \overline{CE} são as diagonais;
- as aberturas $\angle EAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$ e $\angle DEA$, são os ângulos internos;
- os segmentos \overline{BF} , \overline{CG} , \overline{DH} , \overline{EI} e \overline{AJ} são, respectivamente, prolongamentos dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} ;
- as aberturas $\angle JAB$, $\angle FBC$, $\angle GCD$, $\angle HDE$ e $\angle IEA$, são os ângulos externos.

2.3 Classificação dos polígonos

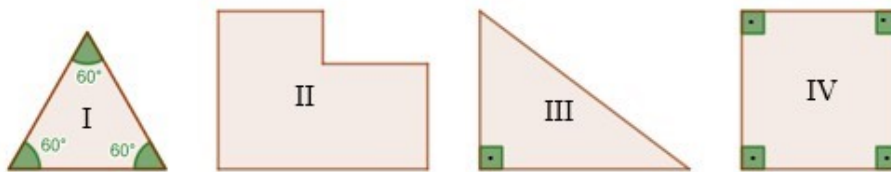
Podemos classificar um polígono em regular ou irregular, de acordo com as medidas dos lados e ângulos, ou em côncavo e convexo, de acordo com as diagonais.

- **Polígono regular** é aquele cujos lados têm a mesma medida e os ângulos internos são congruentes entre si.
- **Polígono irregular** é todo polígono que tem pelo menos um lado e/ou um ângulo com medida diferente dos demais.

- **Polígono convexo** é aquele em que toda diagonal está no interior desse. Podemos definir também como sendo polígonos que possuem todos os ângulos internos menores que 180° .
- **Polígono côncavo** é todo polígono em que pelo menos uma das diagonais passa pela região externa da figura. Podemos definir também como sendo polígonos que possuem pelo menos um dos ângulos internos maior que 180° .

Classificando os polígonos da Figura 2.3 temos que: I é regular e convexo; II é irregular e côncavo; III é irregular e convexo; IV é regular e convexo. Vale destacar que todo polígono regular é convexo.

Figura 2.3: Polígonos numerados



Fonte: Próprio autor

Alguns polígonos possuem nomes específicos conforme o número de lados (Quadro 2.1). É importante destacar que, em qualquer polígono, o número de lados é igual ao número de vértices, ângulos internos e ângulos externos.

Quadro 2.1: Nome dos polígonos

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

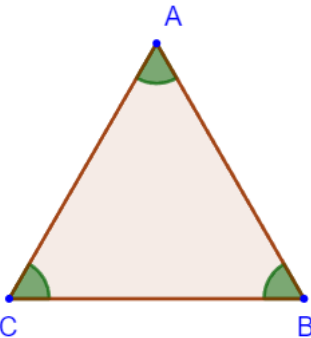
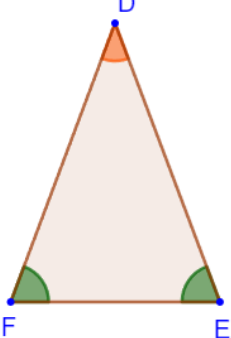
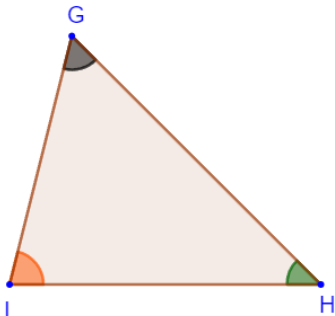
2.4 Triângulos

O triângulo é uma figura geométrica fundamental, destacando-se por ser o polígono com o menor número possível de lados e por sua forma convexa. Sua simplicidade estrutural o torna único, sendo que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos, o que sublinha sua importância central na geometria plana. Essas características, entre muitas outras, conferem ao triângulo um papel essencial no estudo das formas e propriedades geométricas. Nesta seção, exploraremos suas principais propriedades e teoremas, evidenciando sua relevância na geometria.

2.4.1 CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas dos lados (Quadro 2.2) e dos ângulos (Quadro 2.3).

Quadro 2.2: Classificação dos triângulos quanto aos lados

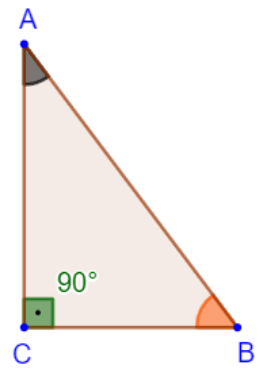
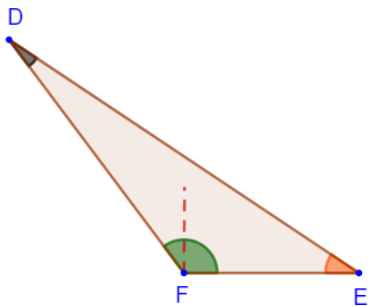
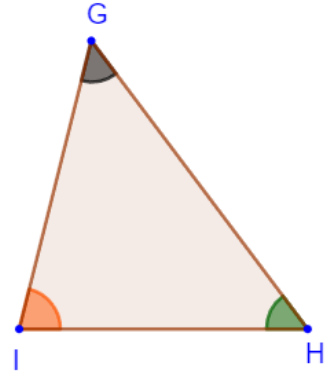
Triângulo equilátero	Triângulo isósceles	Triângulo escaleno
		
Todos os lados são iguais	Possui dois lados iguais	Todos os lados são diferentes

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Ao observar o Quadro 2.2, é possível perceber a relação entre os lados e os ângulos de um triângulo. O **triângulo equilátero** possui três lados de medidas iguais e, conseqüentemente, três ângulos internos congruentes. O **triângulo isósceles** apresenta dois lados de mesma medida, e, por essa razão, os ângulos opostos a esses lados são igualmente congruentes. Já o **triângulo escaleno** tem os três lados de medidas distintas, o que resulta em três ângulos internos de diferentes medidas.

No Quadro 2.3 destaca-se outra forma de classificação dos triângulos.

Quadro 2.3: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Triângulo retângulo	Triângulo obtusângulo	Triângulo acutângulo
		
Possui um ângulo reto	Possui um ângulo obtuso	Os três ângulos são agudos

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Observação: Ângulo reto é aquele cuja medida é igual a 90° . Ângulo obtuso possui medida entre 90° e 180° e ângulo agudo tem medida entre 0° e 90° .

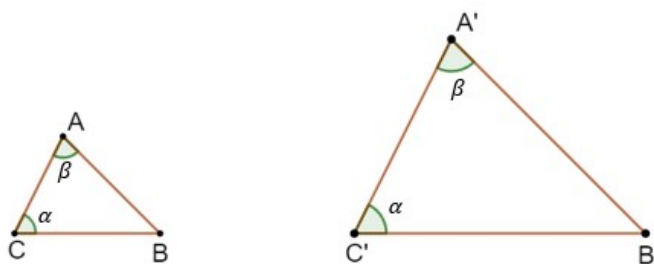
2.4.2 SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos proporcionais. Assim, dois triângulos são semelhantes se satisfazem qualquer um dos três casos a seguir:

1º caso (AA – Ângulo, Ângulo): dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos do outro triângulo.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ (Figura 2.4) são semelhantes, o que expressamos em notação como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Figura 2.4: Triângulos semelhantes (caso AA)

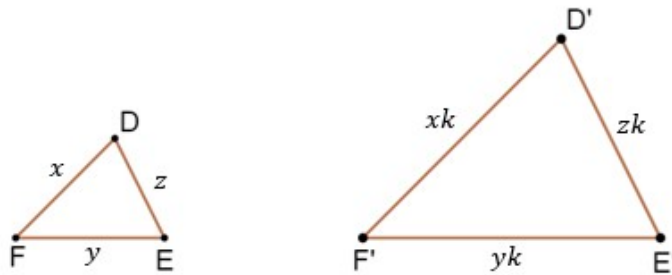


Fonte: Próprio autor

2º caso (LLL – Lado, Lado, Lado): se os comprimentos dos três lados de um triângulo forem proporcionais aos comprimentos dos três lados correspondentes do outro triângulo.

Na Figura 2.5 temos que $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$ e a razão de semelhança é k , em que $k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$.

Figura 2.5: Triângulos semelhantes (caso LLL)

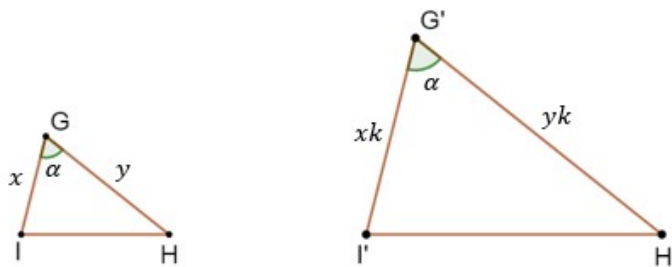


Fonte: Próprio autor

3º caso (LAL – Lado, Ângulo, Lado): se dois lados de um triângulo forem proporcionais aos dois lados correspondentes de outro triângulo, e os ângulos formados por esses lados forem congruentes.

Assim, os triângulos GHI e $G'H'I'$ da Figura 2.6 são semelhantes.

Figura 2.6: Triângulos semelhantes (caso LAL)



Fonte: Próprio autor

2.4.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, todos os seus lados e ângulos correspondentes forem congruentes.

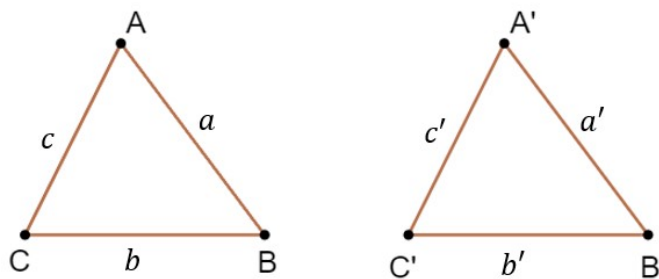
Existem certos casos que permitem identificar a congruência entre dois triângulos sem a necessidade de conhecer todas as suas medidas, simplificando o processo de verificação.

Assim, dois triângulos são congruentes se satisfazem um dos cinco casos:

1º caso (LLL – Lado, Lado, Lado): os três lados de um triângulo são respectivamente iguais aos três lados do outro triângulo.

Os triângulos da Figura 2.7 são congruentes, em símbolo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, pois $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Figura 2.7: Triângulos congruentes (caso LLL)

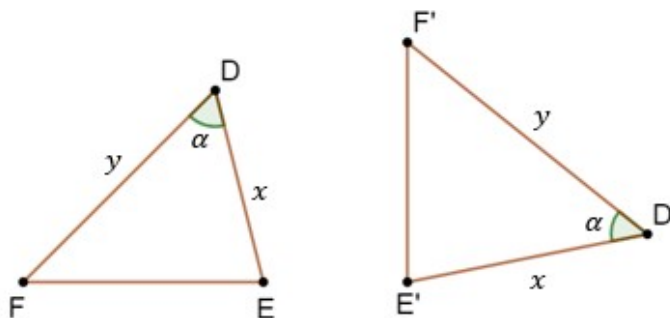


Fonte: Próprio autor

2º caso (LAL – Lado, Ângulo, Lado) dois lados de um triângulo e o ângulo por eles delimitado são congruentes a dois lados de um outro triângulo, bem como o ângulo por estes delimitado.

Na Figura 2.8, temos $\triangle DEF \equiv \triangle D'E'F'$, já que $\overline{DE} = \overline{D'E'}$, $\overline{DF} = \overline{D'F'}$ e $\angle FDE = \angle F'D'E'$.

Figura 2.8: Triângulos congruentes (caso LAL)

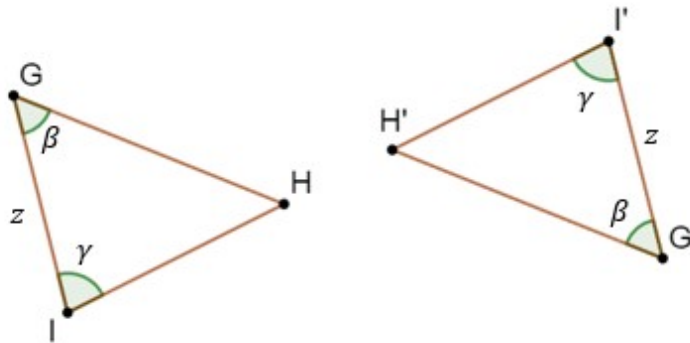


Fonte: Próprio autor

3º caso (ALA – Ângulo, Lado, Ângulo): dois ângulos de um triângulo for igual a dois ângulos do outro triângulo e, além disso, o lado compreendido entre esses ângulos tiverem as mesmas medidas nos dois triângulos.

Os triângulos da Figura 2.9 são congruentes, pois $\angle HIG = \angle H'I'G'$, $\angle IGH = \angle I'G'H'$ e $\overline{GI} = \overline{G'I'}$.

Figura 2.9: Triângulos congruentes (caso ALA)

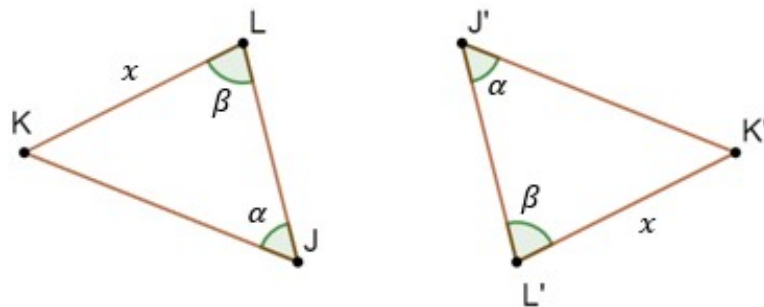


Fonte: Próprio autor

4º caso (LAAo – Lado, Ângulo, Ângulo oposto): se dois ângulos e o lado oposto a um desses ângulos forem congruentes, respectivamente, a dois ângulos e ao lado oposto ao ângulo de mesma medida do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Analisando a Figura 2.10, vemos que $\angle K LJ = \angle K' L' J'$, $\angle L J K = \angle L' J' K'$ e $\overline{KL} = \overline{K' L'}$. Além disso, os lados \overline{KL} e $\overline{K' L'}$ são opostos a ângulos de mesma medida, portanto, $\triangle JKL \equiv \triangle J'K'L'$.

Figura 2.10: Triângulos congruentes (caso LAAo)

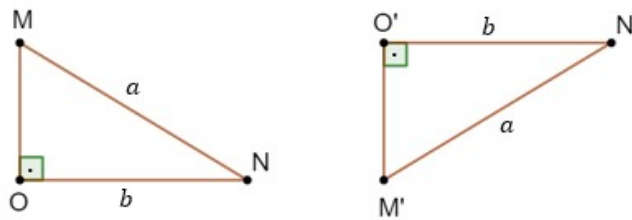


Fonte: Próprio autor

5º caso (CH – Cateto, hipotenusa): Se a hipotenusa e um dos catetos de um triângulo retângulo são, respectivamente, iguais à hipotenusa e um dos catetos de outro triângulo retângulo.

Nos triângulos retângulos (Figura 2.11), como $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ e $\overline{NO} = \overline{N'O'}$, então $\triangle MNO \equiv \triangle M'N'O'$.

Figura 2.11: Triângulos congruentes (caso CH)



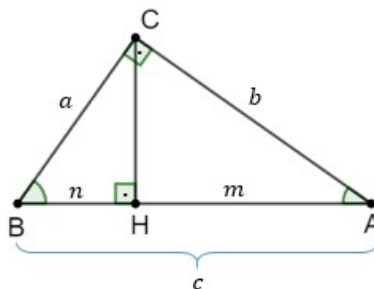
Fonte: Próprio autor

2.4.4 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Proposição 2.1. *Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC com lados $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AB} = c$, em que $\angle BCA = 90^\circ$. Seja H o pé da perpendicular traçada de C ao lado c , e sejam m e n as projeções ortogonais de a e b em relação ao lado c , conforme a Figura 2.12. Note que, ao traçarmos o segmento CH , obtemos os triângulos AHC e CHB , com $\triangle CHB \sim \triangle ABC$ e $\triangle AHC \sim \triangle ABC$. Assim,

Figura 2.12: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor

I) Da semelhança $\triangle CHB \sim \triangle ABC$ que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{n}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot n$$

II) Da semelhança $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ que:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot m$$

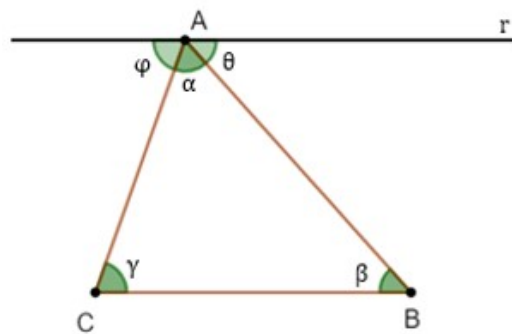
Agora, somamos os resultados obtidos em I e II: $a^2 + b^2 = c \cdot n + c \cdot m \Rightarrow a^2 + b^2 = c(n + m)$. Sabemos que $m + n = c$, portanto, $a^2 + b^2 = c^2$. \square

2.4.5 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

Proposição 2.2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Demonstração. Considere um triângulo ABC cujos ângulos internos são α , β e γ . Pelo ponto A , traçamos uma reta r paralela ao lado \overline{BC} e denotamos por θ e φ os ângulos adjacentes a α , conforme a Figura 2.13. Assim, no vértice A , temos: $\varphi + \theta + \alpha = 180^\circ$.

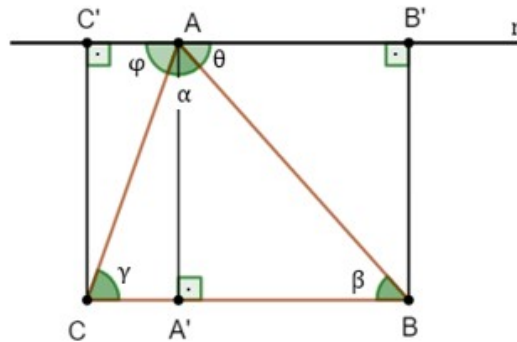
Figura 2.13: Relação entre o triângulo e o ângulo de 180°



Fonte: Próprio autor

Por outro lado, ao traçarmos os segmentos $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ perpendiculares a reta r , e $\overline{AA'}$ perpendicular a \overline{BC} conforme a Figura 2.14, obtemos que $\triangle ACC' \equiv \triangle AA'C$ pelo critério de congruência CH, uma vez que $\overline{AC'} = \overline{A'C}$ e \overline{AC} é a hipotenusa de ambos os triângulos. Além disso, $\triangle ABA' \equiv \triangle AB'B$ também pelo critério CH, pois $\overline{AB'} = \overline{A'B}$ e \overline{AB} é a hipotenusa de ambos os triângulos. Daí, segue que $\theta = \beta$ e $\varphi = \gamma$.

Figura 2.14: Soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Próprio autor

Portanto, $\theta + \varphi + \alpha = \gamma + \beta + \alpha = 180^\circ$, o que prova que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° . \square

2.4.6 ALGUMAS CEVIANAS

Definição 2.2. *A mediana é o segmento que une um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto. As três medianas têm um ponto em comum, conhecido como baricentro do triângulo, geralmente representado pela letra G .*

Definição 2.3. *A altura de um triângulo é o segmento perpendicular à reta que contém um dos lados do triângulo e que passa por um dos vértices. As três alturas têm um ponto em comum, conhecido como ortocentro do triângulo, geralmente representado pela letra O .*

Definição 2.4. *Bissetriz interna é o segmento que divide um ângulo interno de um triângulo ao meio. As três bissetrizes têm um ponto em comum, denominado incentro, que geralmente é representado pela letra I . Veremos mais adiante que I é o centro da circunferência inscrita no triângulo.*

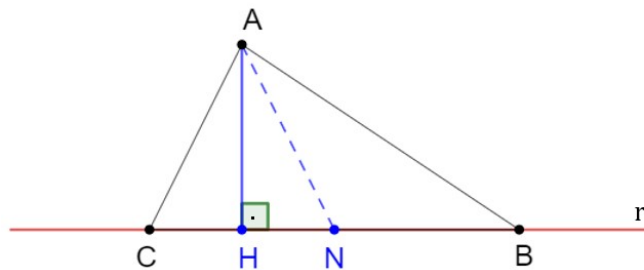
Definição 2.5. *O segmento perpendicular ao lado de um triângulo, que passa pelo ponto médio desse lado, é denominado mediatriz. As três mediatrizes de um triângulo têm um ponto em comum, chamado circuncentro, que também pode ser representado*

pela letra O . Veremos mais adiante que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Proposição 2.3. *A altura de um triângulo é o menor segmento que liga um vértice à reta que contém o lado oposto desse triângulo.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC de base \overline{BC} e r a reta suporte de \overline{BC} . Traçamos a altura \overline{AH} e tomamos um ponto N qualquer em r , diferente de H . Em seguida, traçamos o segmento \overline{AN} obtendo o triângulo retângulo AHN (Figura 2.15).

Figura 2.15: Distância entre vértice e lado oposto de um triângulo



Fonte: Próprio autor

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{AN}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HN}^2$, ou seja, $\overline{AN}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{HN}^2$. Como $H \neq N$, temos $\overline{HN}^2 > 0$, então $\overline{AN}^2 - \overline{AH}^2 > 0$, ou seja, $\overline{AN}^2 > \overline{AH}^2$, de onde segue que $\overline{AN} > \overline{AH}$. Portanto, \overline{AH} é o menor segmento que liga o vértice A à reta r . \square

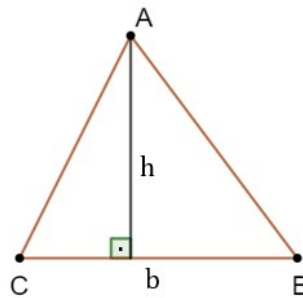
2.4.7 ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Sabe-se que a área de um retângulo é determinada pelo produto de sua base por sua altura, e que, a partir de qualquer triângulo, é possível obter um retângulo utilizando-se a base e a altura. Assim, considere o triângulo ABC e o retângulo $B'BCC'$ obtido a partir desse triângulo (Figura 2.14). Vimos que $\triangle ACC' \equiv \triangle AA'C$ e $\triangle ABA' \equiv \triangle AB'B$, ou seja, a área do triângulo ABC é metade da área do retângulo $B'BCC'$ pois triângulos congruentes possuem áreas iguais. Portanto, a área de um triângulo é o semiproduto da base pela altura. Assim, a área (A) do triângulo

apresentado na Figura 2.16 é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Figura 2.16: Triângulo de base b e altura h



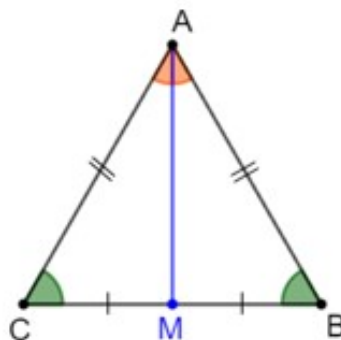
Fonte: Próprio autor

2.4.8 CEVIANAS NO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Proposição 2.4. *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo isósceles de base \overline{BC} e M o ponto médio de \overline{BC} , então \overline{AM} é bissetriz, mediatriz e altura.*

Demonstração. No triângulo isósceles ABC , traçamos o segmento \overline{AM} , em que M é o ponto médio de \overline{BC} (Figura 2.17). Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\angle ABM = \angle MCA$, segue pelo caso LAL que $\triangle ABM \cong \triangle AMC$. Daí, \overline{AM} é a bissetriz de \hat{A} .

Figura 2.17: Altura, bissetriz e mediatriz de um triângulo isósceles



Fonte: Próprio autor

Agora, fazendo $\angle ABM = \angle MCA = \alpha$ e $\angle BAM = \angle MAC = \beta$, temos, pela Proposição 2.2, que $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, implicando em $\alpha + \beta = 90^\circ$, de onde concluímos

que $\angle BMA = \angle AMC = 90^\circ$. Daí, \overline{AM} é bissetriz, altura e mediatriz do triângulo ABC . □

2.5 Circunferência

Definição 2.6. *Fixado um ponto arbitrário O , que chamaremos de centro. Circunferência é o conjunto de todos os pontos em um plano que estão a uma distância fixa do centro. Tal distância fixa é chamada de raio*

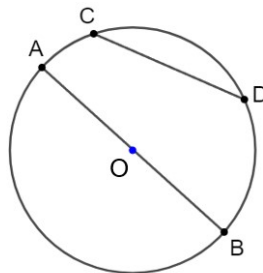
2.5.1 ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Além do centro e do raio, a circunferência possui outros componentes fundamentais. A seguir, apresentamos alguns desses elementos; outros serão discutidos em seções específicas.

- **Corda:** segmento de reta que liga dois pontos de uma circunferência;
- **diâmetro:** corda que passa pelo centro da circunferência;
- **Ângulo central:** Ângulo cujo vértice é o centro da circunferência e é formado por dois raios distintos pertencentes a esta circunferência;
- **Arco:** fração do comprimento de determinada circunferência, delimitado nos extremos por dois pontos quaisquer desta circunferência;

Na Figura 2.18, O é centro, \overline{OA} e \overline{OB} são raios, \overline{AB} e \overline{CD} são cordas e \overline{AB} é diâmetro.

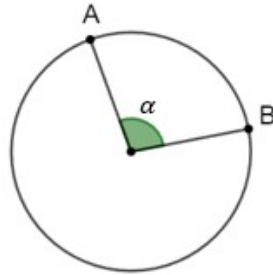
Figura 2.18: Elementos da circunferência



Fonte: Próprio autor

Na Figura 2.19, α é um ângulo central. Além disso, os pontos A e B dividem a circunferência em dois arcos: o arco maior e o arco menor, os quais indicamos por \widehat{AB} e diferenciamos conforme o contexto.

Figura 2.19: Ângulo central e arco



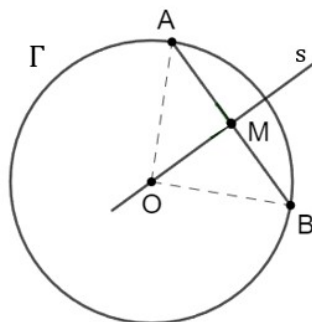
Fonte: Próprio autor

2.5.2 TEOREMA DA CORDA

Proposição 2.5. *Se uma corda em uma circunferência não é um diâmetro, então uma reta que passa pelo centro dessa circunferência e pelo ponto médio da corda é perpendicular a essa corda.*

Demonstração. Sejam Γ uma circunferência de centro O , \overline{AB} uma corda dessa circunferência e M o ponto médio de AB . Traçamos os segmentos \overline{AO} e \overline{BO} , e a reta s que passa por O e por M (Figura 2.20). Assim, obtemos dois triângulos tais que $\triangle AMO \equiv \triangle BOM$ pelo caso LLL. Como $\angle AMO + \angle OMB = 180^\circ$, concluímos que $\angle AMO = \angle OMB = 90^\circ$, demonstrando que s é perpendicular a \overline{AB} . \square

Figura 2.20: Perpendicularidade entre raio e corda



Fonte: Próprio autor

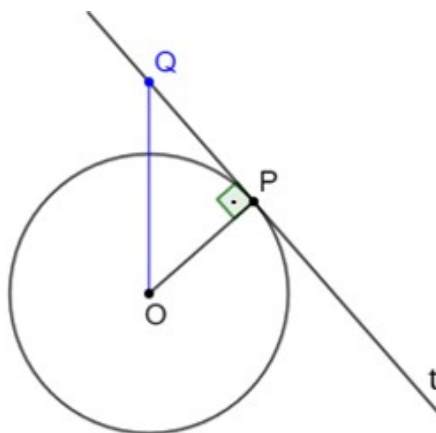
2.5.3 RETA TANGENTE À CIRCUNFERÊNCIA

Definição 2.7. Dizemos que uma reta é tangente a uma circunferência se tiverem um único ponto em comum, o qual chamamos de ponto de tangência.

Proposição 2.6. Quando uma reta é perpendicular a um raio em seu ponto de interseção com a circunferência, ela é uma tangente à circunferência.

Demonstração. Sejam Γ uma circunferência de centro O , P um ponto de Γ , e t uma reta perpendicular ao segmento \overline{OP} . Tomemos um ponto $Q \neq P$ em t e traçamos o segmento \overline{OQ} , obtendo o triângulo retângulo OPQ (Figura 2.21). Analogamente ao que fizemos na proposição 2.3, aplicamos o Teorema de Pitágoras obtendo que $\overline{OQ} > \overline{OP}$, isto é, $Q \notin \Gamma$. Concluimos que o único ponto comum entre a circunferência e a reta t é o ponto P , garantindo que são tangentes. \square

Figura 2.21: Reta tangente à circunferência



Fonte: Próprio autor

2.5.4 COMPRIMENTOS DAS TANGENTES

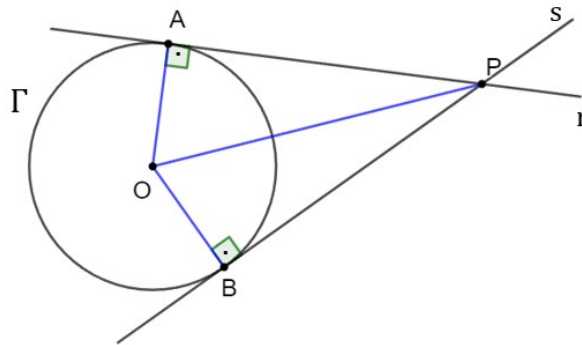
Proposição 2.7. Se duas retas não coincidentes são tangentes a uma circunferência e concorrem em um ponto, então:

(a) Os segmentos de retas que partem dos pontos de tangência até o ponto de interseção dessas retas são congruentes;

(b) A reta que passa pelo centro da circunferência e pelo ponto de interseção das retas tangentes é bissetriz dos ângulos que estas retas formam.

Demonstração. Sejam A e B os pontos de tangência das retas r e s com a circunferência Γ e P o ponto de interseção entre r e s . Traçando os segmentos \overline{AO} , \overline{BO} e \overline{OP} , obtemos os triângulos $\triangle APO$ e $\triangle BOP$ (Figura 2.22). Como $\overline{AO} = \overline{BO}$ e \overline{OP} é lado comum aos triângulos, segue que $\triangle APO \cong \triangle BOP$, pelo caso LAL, de onde concluímos que $\overline{AP} = \overline{BP}$. Além disso, como $\angle BOP = \angle POA$ e $\angle APO = \angle OPB$, segue que \overline{OP} é bissetriz dos ângulos $\angle APB$ e $\angle BOA$. \square

Figura 2.22: Retas tangentes à circunferência



Fonte: Próprio autor

2.6 Polígonos inscritos e circunscritos

O polígono regular é definido como equilátero e equiângulo. Além disso, é possível concluir, com base nos estudos anteriores, que tais polígonos são convexos. A seguir, será apresentada outra propriedade válida para polígonos regulares, que desempenha um papel crucial no desenvolvimento do capítulo 4.

Primeiro, veremos duas definições que estão presentes na proposição que segue.

Definição 2.8. *Se todos os vértices de um polígono pertencem à circunferência, então esse polígono está inscrito na circunferência.*

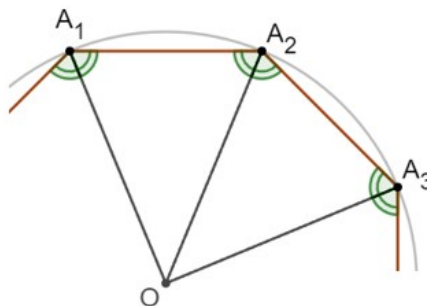
Definição 2.9. *Se todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, então esse polígono é dito circunscrito à circunferência.*

Proposição 2.8. *Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.*

Demonstração. Seja P_n um polígono regular de vértices A_1, A_2, \dots, A_n e lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Sem perda de generalidade, traçamos as bissetrizes internas dos ângulos consecutivos cujos vértices são A_1 e A_2 , obtendo o ponto O de intersecção dessas retas. Assim, o triângulo OA_1A_2 é isósceles, pois $\angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O$, de onde obtemos $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, garantindo que O é equidistante de A_1 e A_2 .

Seguimos traçando o segmento $\overline{OA_3}$ obtendo o triângulo OA_2A_3 , onde $\overline{OA_1A_2} = \overline{OA_2A_3}$, $\angle OA_2A_3 = \angle OA_2A_3$, e $\overline{OA_2}$ é lado comum aos dois triângulos (Figura 2.23). Assim, pelo caso LAL, temos $\triangle OA_1A_2 \equiv \triangle OA_2A_3$, implicando que $\triangle OA_2A_3$ é isósceles, ou seja, $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$. Como em um polígono regular todos os ângulos são iguais, então $\overline{OA_3O}$ é a bissetriz do ângulo cujo vértice é A_3 . Repetimos analogamente o processo de ligar o ponto O ao vértice seguinte do polígono e provamos que o triângulo obtido é congruente aos anteriores, até concluirmos que $\overline{OA_1O} = \overline{OA_2O} = \dots = \overline{OA_{n-1}O} = \overline{OA_nO}$, ou seja, todos os vértices de P_n são equidistantes do ponto O , garantindo que podemos traçar uma circunferência de centro O passando por todos os vértices do polígono.

Figura 2.23: Parte de um polígono inscrito

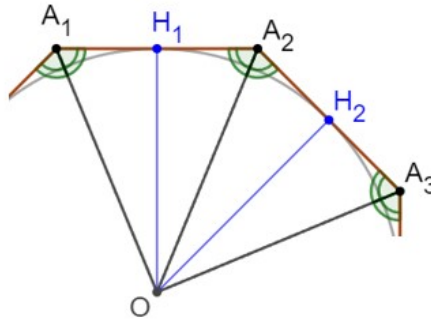


Fonte: Próprio autor

Agora, sejam H_1, H_2, \dots, H_n os pés das alturas baixadas de O às bases dos triângulos isósceles, lados de P_n (Figura 2.24). Como $\triangle OA_1A_2 \equiv \triangle OA_2A_3 \equiv \dots \equiv \triangle OA_nA_1$, então $\overline{OH_1} = \overline{OH_2} = \dots = \overline{OH_n}$, ou seja, os pontos H_1, H_2, \dots, H_n de P_n são equidistantes de O , logo podemos traçar uma circunferência Γ de centro O que

passa pelos pontos H_1, H_2, \dots, H_n . Como as alturas são perpendiculares aos lados do polígono, segue pela proposição 2.6 que estas são tangentes a Γ , garantindo que P_n é circunscrito à circunferência. \square

Figura 2.24: Parte de um polígono circunscrito



Fonte: Próprio autor

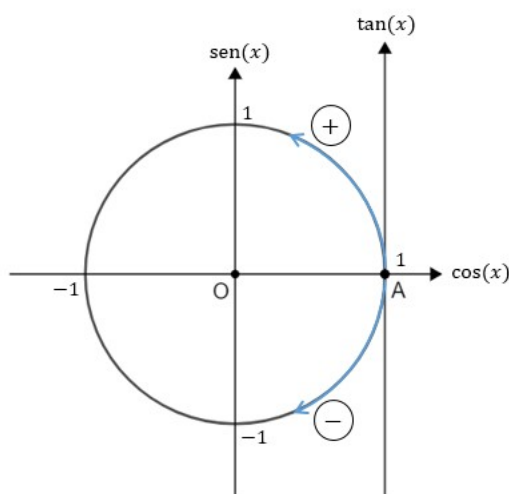
3 REFERENCIAL TEÓRICO: TRIGONOMETRIA

No presente capítulo, serão abordados conceitos e relações pertinentes à trigonometria, com o objetivo de familiarizar o leitor com os temas que fundamentarão o desenvolvimento do capítulo subsequente. Serão introduzidas noções elementares de trigonometria, seguidas pela demonstração de relações e leis que servirão de suporte para provas posteriores. A abordagem será restrita aos conceitos considerados essenciais para uma melhor compreensão do assunto a ser tratado no próximo capítulo. Para um aprofundamento maior na temática, recomenda-se os livros [8] e [9].

3.1 Noções elementares: ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio 1, com centro na origem do plano cartesiano. Além da circunferência, ele é composto por três eixos: o das abscissas, definido como eixo dos cossenos; o das ordenadas, determinado como eixo dos senos; e uma reta paralela a este último, enumerada de maneira equivalente, denominada eixo das tangentes, conforme a Figura 3.1. Tomando A como o ponto de origem dos arcos $A = (1, 0)$, adota-se o sentido anti-horário como positivo e o sentido horário como negativo.

Figura 3.1: Ciclo trigonométrico



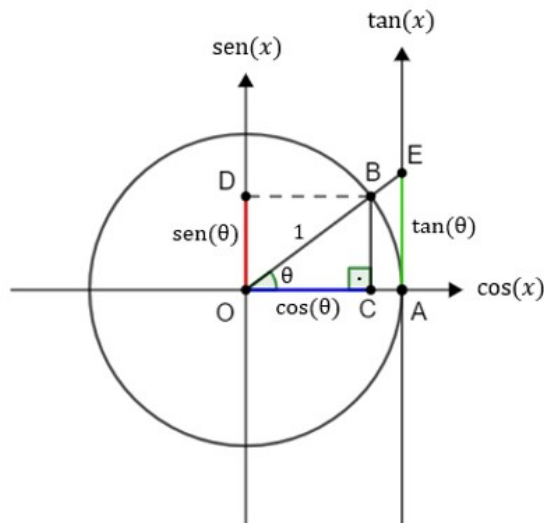
Fonte: Próprio autor

É comum abreviarmos os nomes seno, cosseno e tangente utilizando as três primeiras letras dessas palavras. Assim, usamos $\text{sen } x$, $\text{cos } x$ e $\text{tan } x$ para representar, respectivamente, os eixos seno, cosseno e tangente, onde x representa um ângulo qualquer.

A circunferência que determina o ciclo trigonométrico é dividida em 360 partes, e cada parte é um arco cujo ângulo central tem medida indicada por um grau (1°). Dessa forma, ao tomarmos quatro arcos no sentido anti-horário, com a segunda extremidade nos pontos $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$, obtemos, respectivamente, os arcos de ângulos centrais 90° , 180° , 270° e 360° . Como o arco de 180° tem comprimento de π raios (π radianos), é comum expressar ângulos também em radianos. Assim, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ e $360^\circ = 2\pi$.

No ciclo trigonométrico, consideremos um arco \widehat{AB} de ângulo central θ , conforme a Figura 3.2. Sabemos que \overline{BO} é o raio da circunferência que determina o ciclo. A projeção ortogonal desse raio no eixo dos senos determina o segmento \overline{DO} , cuja medida é o seno do ângulo θ . Por sua vez, a projeção ortogonal do segmento \overline{BO} no eixo dos cossenos determina o segmento \overline{CO} , cuja medida é o cosseno do ângulo θ . Ao estendermos o raio até tocar o eixo das tangentes, obtemos o ponto E , de modo que a medida do segmento \overline{AE} é a tangente do ângulo θ .

Figura 3.2: Seno, cosseno e tangente



Fonte: Próprio autor

Assim como o plano cartesiano, o ciclo trigonométrico é dividido em 4 quadrantes, delimitados pelos intervalos $(0^\circ, 90^\circ)$, $(90^\circ, 180^\circ)$, $(180^\circ, 270^\circ)$ e $(270^\circ, 360^\circ)$ e enumerados, respectivamente, por I, II, III e IV. Desse modo, dependendo do ângulo formado pelo arco, o seno, o cosseno e a tangente podem ser, cada um, positivo ou negativo.

3.2 Obtendo a tangente e a relação fundamental da trigonometria

Vamos determinar duas relações que serão de fundamental importância nos assuntos abordados posteriormente. Considere os triângulos retângulos BCO e EAO da Figura 3.2. Como eles são semelhantes pelo caso AA, deduzimos a seguinte proporcionalidade:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CO}},$$

ou seja,

$$\frac{\tan \theta}{1} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}.$$

Daí, obtemos a seguinte relação:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}. \quad (3.1)$$

Veremos posteriormente que qualquer ângulo (que não pertença aos eixos dos senos e cossenos) pode ser reduzido a um ângulo do primeiro quadrante, o que estende a relação obtida para qualquer ângulo no ciclo trigonométrico.

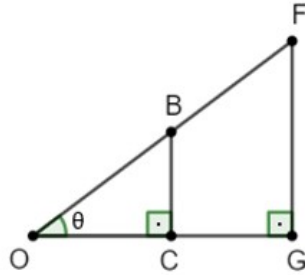
Outra relação é facilmente obtida a partir do triângulo retângulo BCO da Figura 3.2, cujos lados são $\overline{BC} = \text{sen } \theta$, $\overline{CO} = \cos \theta$, e $\overline{OB} = 1$. Vejamos, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo BCO , nos é revelada a igualdade abaixo, conhecida como a relação fundamental da trigonometria.

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (3.2)$$

3.3 Trigonometria no triângulo retângulo

Considere a Figura 3.3, na qual o triângulo retângulo FGO foi obtido a partir do prolongamento dos lados do triângulo retângulo BCO da Figura 3.2, em que $\overline{BC} = \text{sen } \theta$, $\overline{CO} = \text{cos } \theta$, $\overline{OB} = 1$.

Figura 3.3: Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor

Os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA , e dessa semelhança obtemos as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{OF}}, \quad \frac{\overline{CO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{OF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GO}}.$$

Como, \overline{OF} é hipotenusa, \overline{FG} é cateto oposto ao ângulo θ e \overline{GO} é cateto adjacente a esse mesmo ângulo, segue que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{OF}} \Rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{1} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{OF}} \Rightarrow \frac{\text{cos } \theta}{1} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

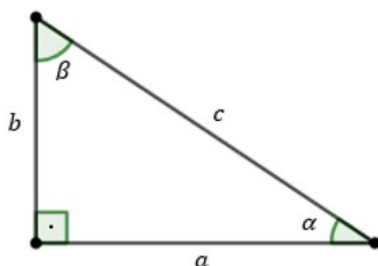
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GO}} \Rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \text{tan } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Agora, considere o triângulo retângulo da Figura 3.4.

Determinando o seno e o cosseno de α e β , obtemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{a}{c}, \quad \text{sen } \beta = \frac{a}{c}, \quad \text{e} \quad \text{cos } \beta = \frac{b}{c}.$$

Figura 3.4: Triângulo retângulo de lados a, b e c



Fonte: Próprio autor

Daí, $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ e $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$. Como α e β são complementares, isto é, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ podemos concluir que

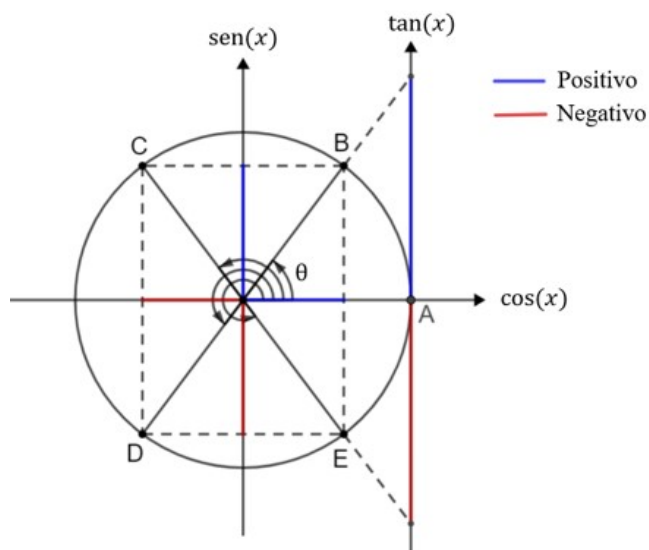
$$\text{sen } \alpha = \text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

ou seja, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complementar e vice-versa.

3.4 Redução ao primeiro quadrante

Considere o ciclo trigonométrico da Figura 3.5, em que AB , AC , AD e AE são arcos positivos e pertencem, respectivamente, ao 1°, 2°, 3° e 4° quadrantes.

Figura 3.5: Ciclo trigonométrico e o sinal do seno, cosseno e tangente



Fonte: Próprio autor

Como I, II, III, IV representam os quadrantes e considerando x um ângulo qualquer, obtemos a partir de uma breve análise da Figura 3.5 o Quadro 3.1, referente aos sinais de seno, cosseno e tangente de acordo com o quadrante.

Quadro 3.1: Quadro de sinais

	I	II	III	IV
sen (x)	+	+	-	-
cos(x)	+	-	-	+
tan(x)	+	-	+	-

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

No ciclo trigonométrico também podemos perceber a simetria entre os pontos do primeiro quadrante com os pontos dos demais quadrantes. Existe simetria em relação ao eixo dos senos (quadrantes II e I), ao centro do ciclo (quadrantes III e I) e ao eixo dos cossenos (quadrantes IV e I). Dessas simetrias tiramos as relações que reduzem os ângulos dos quadrantes II, III e IV ao quadrante I. Vejamos, ainda na Figura 3.5, considere os ângulos centrais θ , $\widehat{A\hat{O}C}$, $\widehat{A\hat{O}D}$ e $\widehat{A\hat{O}E}$ dos respectivos arcos \widehat{AB} , \widehat{AC} , \widehat{AD} e \widehat{AE} . Daí, $\pi - \widehat{A\hat{O}C} = \theta$, $\widehat{A\hat{O}D} - \pi = \theta$ e $2\pi - \widehat{A\hat{O}E} = \theta$. Dessas relações, juntamente com o Quadro 3.1, obtemos que

- $\text{sen}(\pi - \widehat{A\hat{O}C}) = \text{sen } \theta$, $\text{cos}(\pi - \widehat{A\hat{O}C}) = -\text{cos } \theta$, $\text{tan}(\pi - \widehat{A\hat{O}C}) = -\text{tan } \theta$;
- $\text{sen}(\widehat{A\hat{O}D} - \pi) = -\text{sen } \theta$, $\text{cos}(\widehat{A\hat{O}D} - \pi) = -\text{cos } \theta$, $\text{tan}(\widehat{A\hat{O}D} - \pi) = \text{tan } \theta$,
- $\text{sen}(2\pi - \widehat{A\hat{O}E}) = -\text{sen } \theta$, $\text{cos}(2\pi - \widehat{A\hat{O}E}) = \text{cos } \theta$, $\text{tan}(2\pi - \widehat{A\hat{O}E}) = -\text{tan } \theta$.

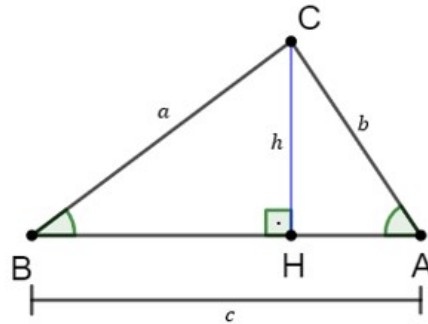
3.5 Área do triângulo em função do seno

Considere a figura 3.6 e denote por A a área do triângulo ABC.

Sabe-se que a área de qualquer triângulo é o produto da base pela altura dividido por dois. Assim, a área (A) do triângulo ABC da Figura 3.6 é dada por:

$$A = \frac{c \cdot h}{2}.$$

Figura 3.6: Triângulo retângulo de lados a, b, c e altura h



Fonte: Próprio autor

Como

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen } \hat{B}.$$

Então,

$$A = \frac{c \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{a \cdot c}{2} \text{sen } \hat{B}.$$

De maneira análoga, obtém-se que

$$A = \frac{b \cdot c}{2} \text{sen } \hat{A} \quad \text{e} \quad A = \frac{a \cdot b}{2} \text{sen } \hat{C}.$$

Portanto, a área de qualquer triângulo é o semiproduto da medida de dois lados do triângulo e o seno do ângulo interno formado por eles.

3.6 As leis dos senos

Considere um triângulo ABC de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$. Tomemos por D o pé da altura relativa ao lado \overline{AB} , desse modo \overline{DC} divide ABC em dois triângulos retângulos, como pode ser observado na Figura 3.7. Daí, determinamos os senos nos triângulos CDB e ADC de modo a obtermos

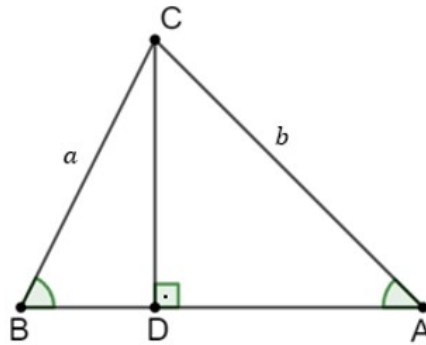
$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{CD}}{a} \Rightarrow a \cdot \text{sen } \hat{B} = \overline{CD} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{A} = \frac{\overline{CD}}{b} \Rightarrow b \cdot \text{sen } \hat{A} = \overline{CD}.$$

Como $a \cdot \text{sen } \hat{B} = \overline{CD}$ e $b \cdot \text{sen } \hat{A} = \overline{CD}$ segue que, $a \cdot \text{sen } \hat{B} = b \cdot \text{sen } \hat{A}$, de onde

obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}. \quad (3.3)$$

Figura 3.7: Triângulo acutângulo ABC com altura relativa ao lado AB

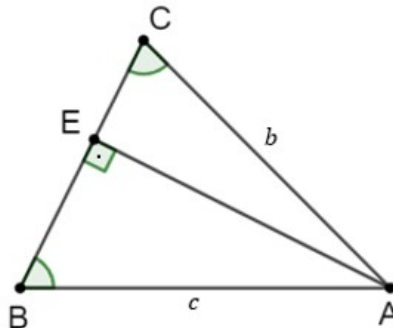


Fonte: Próprio autor

Por outro lado, ainda considerando o triângulo ABC, se tomarmos por E o pé da altura relativa ao lado \overline{BC} , obtemos os triângulos retângulos BEA e AEC (Figura 3.8). Aos ângulos \hat{B} e \hat{C} aplicamos o seno para triângulos retângulos e nos são reveladas as igualdades:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\overline{AE}}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = \overline{AE} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\overline{AE}}{c} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = \overline{AE}$$

Figura 3.8: Triângulo acutângulo ABC com altura relativa ao lado BC



Fonte: Próprio autor

Encontramos que $b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = \overline{AE}$ e $c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = \overline{AE}$, logo $b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$, ou seja,

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}. \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), chegamos às proporções conhecidas como lei dos senos,

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}.$$

3.7 As leis dos cossenos

Faremos o estudo da lei dos cossenos nos triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Para o primeiro caso, considere o triângulo acutângulo da Figura 3.7 no qual $\overline{AB} = c$. Definindo $\overline{AD} = m$, $\overline{DB} = n$, e $\overline{CD} = h$, aplicamos o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $\triangle CDB$ e $\triangle ADC$, obtendo $a^2 = h^2 + n^2$ e $h^2 = b^2 - m^2$. Agora, substituindo $h^2 = b^2 - m^2$ em $a^2 = h^2 + n^2$, chegamos à seguinte expressão $a^2 = b^2 - m^2 + n^2$. Como $c = m + n$, colocando n em evidência e substituindo na igualdade acima, segue que $a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2$. Desenvolvendo o quadrado da diferença, encontramos $a^2 = b^2 - m^2 + (c^2 - 2cm + m^2)$, donde obtemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$. Agora, no triângulo CDB , aplicamos a lei dos cossenos para triângulos retângulos no ângulo \hat{B} do triângulo ABC da Figura 3.7, de modo que $m = b \cos \hat{A}$. Daí, substituindo a última igualdade na expressão $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$, resulta que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \hat{A}. \quad (3.5)$$

De maneira análoga, obtemos as outras duas relações envolvendo os ângulos \hat{B} e \hat{C} do triângulo ABC , de modo que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad (3.6)$$

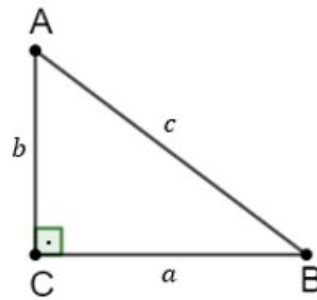
e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}. \quad (3.7)$$

As três últimas igualdades são conhecidas como Lei dos Cossenos.

No caso do triângulo retângulo, obtemos as três expressões de maneira totalmente análoga à do triângulo acutângulo. Entretanto, algumas análises devem ser feitas. Para isso, considere o triângulo retângulo da Figura 3.9.

Figura 3.9: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Próprio autor

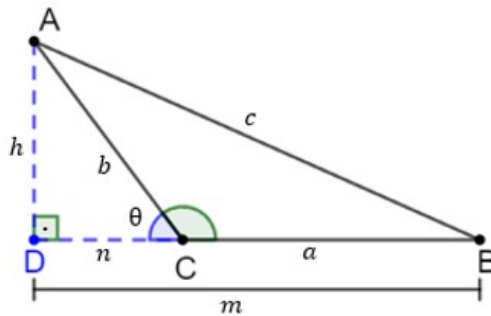
Do triângulo $\triangle ABC$, temos que $b = c \cos \hat{A}$, $a = c \cos \hat{B}$ e $\cos \hat{C} = \cos 90^\circ$. Substituindo estas três últimas igualdades, respectivamente em (3.5), (3.6) e (3.7), obtemos $a^2 + b^2 = c^2$, $b^2 + a^2 = c^2$ e $c^2 = a^2 + b^2$, que são equivalentes à expressão obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC .

Para o triângulo obtusângulo, duas das igualdades (3.5), (3.6) e (3.7) podem ser obtidas de maneira análoga ao caso do triângulo acutângulo. Entretanto, para obtermos a outra igualdade em que a altura não pertence à região triangular, devemos utilizar o suplementar do ângulo obtuso. Vejamos.

Considere um triângulo obtusângulo ABC em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e \hat{C} é o ângulo obtuso. Tomemos por D o pé da altura relativa ao lado \overline{AB} , obtendo os triângulos retângulos BDA e CDA e o ângulo θ tal que $\theta = 180^\circ - \hat{C}$ (Figura 3.10). Fazendo $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e $\overline{DA} = h$, obtemos no triângulo BDA que $c^2 = h^2 + m^2$. Como $m = a + n$, então $c^2 = h^2 + (a + n)^2$, ou seja, $c^2 = h^2 + a^2 + 2an + n^2$. Daí, substituindo na última igualdade a expressão $b^2 = h^2 + n^2$ obtida quando aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo CDA , vem $c^2 = a^2 + b^2 + 2an$. Agora, substituímos n por $b \cos \theta$, pois, novamente do triângulo CDA , facilmente encontramos $n = b \cos \theta$. Assim, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \theta$. Como $\theta = 180^\circ - \hat{C}$ e $\cos(180^\circ - \hat{C}) = -\cos \hat{C}$, segue

que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$.

Figura 3.10: Triângulo retângulo ABD obtido a partir do obtuso ABC



Fonte: Próprio autor

3.8 Soma e diferença de dois arcos

Considere um triângulo ABC em que \hat{A} é obtuso, $\overline{AB} = c$ e $\overline{CA} = b$. Traçando a altura relativa ao lado \overline{BC} e tomando por D o pé dessa altura, obtemos os triângulos ADC e BDA conforme a Figura 3.11. Além disso, fazendo $\angle DAB = \alpha$ e $\angle CAD = \beta$, chegamos, a princípio, às seguintes igualdades

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BD}}{c} \Rightarrow \overline{BD} = c \cdot \text{sen } \alpha,$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b \cdot \text{sen } \beta,$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DA}}{c} \Rightarrow \overline{DA} = c \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{DA}}{b} \Rightarrow \overline{DA} = b \cdot \cos \beta.$$

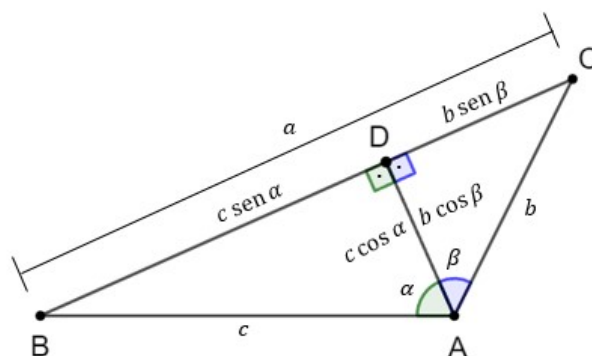
A área de qualquer triângulo pode ser dada pelo semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo interno formado por eles. Desse modo, as áreas (S) dos triângulos ABC , ADC e BDA podem ser expressas da seguinte maneira

$$S(ABC) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } (\alpha + \beta),$$

$$S(BDA) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$S(ADC) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

Figura 3.11: Triângulos retângulos obtidos a partir do triângulo obtuso



Fonte: Próprio autor

Como $S(ABC) = S(ADC) + S(BDA)$, segue que:

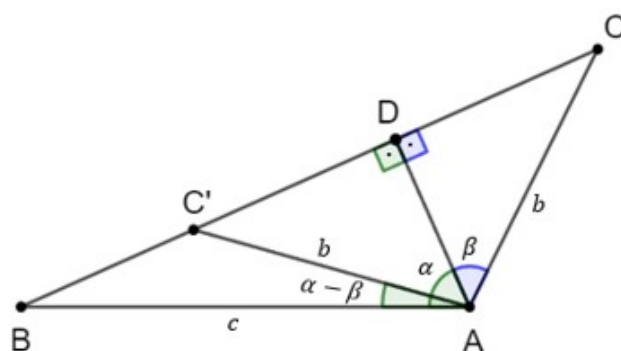
$$\frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$$

Simplificando a equação acima, obtemos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha. \quad (3.8)$$

Agora, sem perda de generalidade, suponha que $S(BDA) > S(ADC)$, logo $\overline{BD} > \overline{DC}$. Em \overline{BD} marcamos o ponto C' simétrico de C em relação ao ponto D , desse modo temos que $\overline{AC'} = b$, $S(ADC) = S(C'DA)$ e $\angle C'AB = \alpha - \beta$ (Figura 3.12).

Figura 3.12: Triângulo obtuso e a diferença de dois arcos



Fonte: Próprio autor

Daí, a área do triângulo ABC' é dada por $S(ABC') = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$. Como $S(ABC') = S(BDA) - S(C'DA)$, então

$$\frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

De onde obtemos que

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha. \quad (3.9)$$

Para obter a próxima relação, considere a Figura 3.11. Aplicamos a Lei dos Cossenos no triângulo ABC , obtendo a seguinte igualdade:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + \beta). \quad (3.10)$$

Por outro lado, como $a = (c \cdot \text{sen} \alpha) + (b \cdot \text{sen} \beta)$, e aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ADC e BDA , temos que

$$a^2 = (c \cdot \text{sen} \alpha)^2 + 2bc \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta + (b \cdot \text{sen} \beta)^2,$$

$$b^2 = (b \cdot \text{sen} \beta)^2 + (c \cdot \cos \alpha)^2,$$

$$c^2 = (c \cdot \text{sen} \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2.$$

Agora, substituindo as três últimas igualdades em (3.10) e eliminando os termos comuns pertencentes a membros diferentes da expressão, nos é revelada a igualdade

$$2bc \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta = (c \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Ou ainda,

$$2bc \cdot \cos(\alpha + \beta) = (c \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2 - 2bc \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta. \quad (3.11)$$

Como $c \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta$, então

$$c \cos \alpha - b \cos \beta = 0 \Rightarrow (c \cos \alpha - b \cos \beta)^2 = 0.$$

Daí,

$$(c \cos \alpha)^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + (b \cos \beta)^2 = 0.$$

Logo,

$$(c \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2 = 2bc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Substituindo a última igualdade na expressão (3.11), encontramos a expressão

$$2bc \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2bc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2bc \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Dividindo tudo por $2bc$, chegamos à igualdade desejada, isto é,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (3.12)$$

Agora, no triângulo ABC' em que $\overline{BC'} = c \cdot \sin \alpha - b \cdot \sin \beta$, aplicamos a Lei dos Cossenos, obtendo $(c \cdot \sin \alpha - b \cdot \sin \beta)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

Substituindo b^2 e c^2 por $(b \cdot \sin \beta)^2 + (c \cdot \cos \alpha)^2$ e $(c \cdot \sin \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2$, respectivamente, e simplificando a expressão, nos é revelada a seguinte igualdade

$$-2bc \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = (c \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Já mostramos que $(c \cdot \cos \alpha)^2 + (b \cdot \cos \beta)^2 = 2bc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$, então

$$2bc \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2bc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 2bc \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Daí, concluímos que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (3.13)$$

As demonstrações acima podem ser estendidas para ângulos quaisquer, pois caso tenhamos $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, a demonstração é feita de maneira totalmente análoga, ou fazemos $x = \frac{\alpha}{2}$ e $y = \frac{\beta}{2}$. Se $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, basta tomarmos $x = 2\alpha$ e $y = 2\beta$.

Obtidas as igualdades (3.8) e (3.9), (3.12) e (3.13), facilmente determinamos a adição e a subtração de arcos para a tangente. Vejamos, sabemos que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Então

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}.$$

Agora, no segundo membro da igualdade acima, dividimos tanto o numerador quanto o denominador por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, assim

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}.$$

Daí,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

De maneira análoga, para completando as 6 relações envolvendo seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de dois arcos, determinamos que

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

3.9 As Fórmulas de prostaférese

Ainda nos referindo às relações determinadas acima, somando termo a termo (3.8) e (3.9), (3.12) e (3.13) obtemos

$$\text{sen } (\alpha + \beta) + \text{sen } (\alpha - \beta) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta, \quad (3.14)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (3.15)$$

Subtraindo termo a termo (3.9) de (3.8) e (3.13) de (3.12), encontramos as seguintes igualdades

$$\text{sen } (\alpha + \beta) - \text{sen } (\alpha - \beta) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta, \quad (3.16)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (3.17)$$

Fazendo $\alpha + \beta = x$ e $\alpha - \beta = y$, segue que $\alpha = \frac{x + y}{2}$ e $\beta = \frac{x - y}{2}$. Daí,

$$\alpha + \beta = x - \beta + \alpha - y \Rightarrow \beta = \frac{x - y}{2}$$

$$\alpha - \beta = x - \beta - (\alpha - y) \Rightarrow \alpha = \frac{x + y}{2}.$$

Assim, podemos escrever (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) da seguinte maneira

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x - y}{2} \right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + y}{2} \right),$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + y}{2} \right),$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right).$$

Além das fórmulas de Prostaferese, podemos determinar mais duas relações que seguem das igualdades desenvolvidas logo acima. Uma delas é a soma das tangentes de dois arcos, e para encontrá-la usamos o fato de

$$\tan a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}.$$

Daí,

$$\tan x + \tan y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y}.$$

Já vimos que $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$, logo

$$\tan x + \tan y = \frac{\operatorname{sen} (x + y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

De maneira análoga, determinaremos uma relação para a diferença das tangentes de dois arcos, vejamos

$$\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y}.$$

Assim,

$$\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

3.10 Relações do arco metade

Sabe-se que $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$, daí

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta.$$

Ou seja, $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$. Agora, substituindo 2θ por θ na última igualdade, obtém-se

$$\cos \theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Assim,

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

Logo,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}.$$

Sabemos, da relação fundamental, que $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Por outro lado, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$, assim

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2\cos^2 \theta - 1,$$

isto é, $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, o que implica

$$\cos \theta = 2\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1.$$

Agora, na última igualdade acima, isola-se o cosseno do arco metade, obtendo

$$\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta}{2}.$$

Logo

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}.$$

Para encontrar a expressão da tangente do arco metade é bem simples, já que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Como

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}.$$

Então,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}}.$$

Racionalizando o denominador, segue que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}} = \frac{\sqrt{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}}{\sqrt{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{1 + \cos\theta}.$$

Sabe-se que $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, então

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}}{1 + \cos\theta}.$$

Daí, obten-se a relação

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}.$$

No decorrer do capítulo quatro, será usado a tangente da média aritmética de dois arcos expressa em função do seno e do cosseno, por isso convém obtê-la. Para tanto, basta substituir θ por $x + y$, obtendo a igualdade

$$\tan\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{1 + \cos(x + y)}.$$

4 UMA CARACTERIZAÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES

Nas demonstrações apresentadas nesta seção, buscamos utilizar, no máximo, conteúdos abordados nas séries finais da educação básica, o que foi possível graças a um método obtido a partir de estudos do artigo [10] da RPM.

No desenvolvimento desta seção, adotamos a seguinte ordem de apresentação: inicialmente, demonstramos que, entre todos os polígonos com 2^m lados, inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem a maior área. Em seguida, provamos o caso para polígonos de n lados. Na sequência, mostramos que o polígono regular de $n + 1$ lados possui área maior do que qualquer polígono com quantidade inferior de lados, inscrito na mesma circunferência ou em outra de igual raio.

Nas subseções seguintes, com exceção da última, repetimos o processo na mesma ordem, mas tratando de polígonos circunscritos. Demonstramos que, entre todos os polígonos com 2^m lados, circunscritos a uma circunferência, os regulares são os que apresentam a menor área. Em seguida, provamos o caso para polígonos de n lados. E mostramos que o polígono regular de $n + 1$ lados possui área menor do que qualquer polígono com quantidade inferior de lados, circunscrito à mesma circunferência ou a outra de igual raio. Por fim, é feita uma breve relação entre a caracterização dos polígonos e a BNCC.

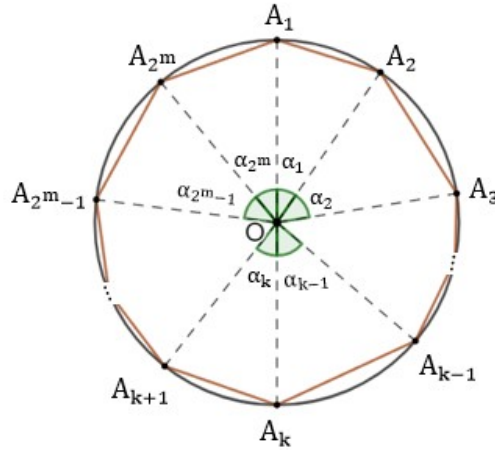
4.1 Polígonos inscritos com 2^m lados

Proposição 4.1. *Entre todos os polígonos, com 2^m lados, inscritos em uma circunferência, os regulares são os de maior área.*

Demonstração. Considere um polígono com 2^m lados inscrito em uma circunferência de raio R , em que $m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$, dado que 2^m representa o número de lados do polígono. Traçamos segmentos de reta do centro da circunferência a cada vértice do polígono, obtendo assim 2^m triângulos isósceles formados por um lado do polígono e dois raios da circunferência, conforme Figura 4.1. Sejam $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2^m}$ as áreas

dos triângulos em que o polígono foi dividido e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2^m}$ os ângulos formados pelos lados iguais de cada triângulo, tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2^m} = 2\pi$.

Figura 4.1: Polígono de 2^m lados inscrito em uma circunferência



Fonte: Próprio autor

Como queremos determinar a área, doravante representada por S , do Polígono Inscrito, indicada na fórmula por PI , basta somarmos as áreas dos triângulos obtidos a partir do polígono. Assim, $S(PI) = S_1 + S_2 + \dots + S_{2^m}$.

Já vimos na seção 3.5, que a área de um triângulo pode ser dada por

$$S = \frac{a \cdot c}{2} \text{sen } \alpha_i,$$

em que α_i é o ângulo formado pelos lados a e c do triângulo. Como $a = c = R$ nos triângulos obtidos pelo polígono, segue que

$$S = \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_i.$$

Daí,

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_1 + \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_2 + \dots + \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_{2^m}.$$

Colocando o termo comum em evidência, obtemos a expressão

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} (\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \dots + \text{sen } \alpha_{2^m}). \quad (4.1)$$

Queremos encontrar os polígonos de maior área. Para isso, devemos determinar o valor máximo da expressão $\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \cdots + \text{sen } \alpha_{2^m}$, com $\alpha_k \in (0, \pi)$ e $k \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$, pois o polígono é inscrito.

Sabemos que não existem polígonos com dois lados, entretanto, a soma de duas parcelas será bastante usada na busca da expressão que determine o valor máximo para a soma dos 2^m senos da igualdade (4.1). Então, para $x, y \in (0, \pi)$, devemos provar que

$$\text{sen } x + \text{sen } y \leq 2\text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad (4.2)$$

Já vimos na seção 3, subseção 3.9, que

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 2\text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

Então,

$$2\text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \leq 2\text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right).$$

Donde segue que

$$\cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \leq 1.$$

Provando (4.2), e mais, o valor máximo de $\text{sen } x + \text{sen } y$ é obtido quando

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 2\text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \quad (4.3)$$

o que ocorre se, e somente se, $x = y$.

Agora, vamos determinar a condição suficiente e necessária para que a soma $\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_{2^m}$ seja máxima. Para tanto, fazemos $F = \text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_{2^m}$ e agrupamos os senos de dois em dois, daí

$$F = (\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2) + (\text{sen } \alpha_3 + \text{sen } \alpha_4) + \cdots + (\text{sen } \alpha_{2^{m-1}-1} + \text{sen } \alpha_{2^m}).$$

Aplicando (4.2) em cada par de senos, obtemos

$$F \leq 2\text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + 2\text{sen} \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) + \cdots + 2\text{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right).$$

Colocando o 2 em evidência, segue que

$$F \leq 2 \left[\text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) + \cdots + \text{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right) \right].$$

Seguimos repetindo esses processos de agrupar os senos de dois em dois, aplicar (4.2) a cada par de senos e colocar o dois em evidência até obtermos 2^m senos de um único ângulo do lado direito da desigualdade, pois o número de parcelas é uma potência de dois e a cada ciclo do processo sempre teremos, como número de parcelas, uma potência de dois com uma unidade a menos no expoente, daí, vamos reduzindo o número de parcelas até obtermos por transitividade que

$$F \leq 2^m \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right),$$

ou seja,

$$\text{sen} \alpha_1 + \cdots + \text{sen} \alpha_{2^m} \leq 2^m \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right). \quad (4.4)$$

Concluimos, portanto, que a soma $\text{sen} \alpha_1 + \cdots + \text{sen} \alpha_{2^m}$ atinge seu valor máximo quando ocorre a igualdade. Demonstraremos, a seguir, que tal condição se verifica se, e somente se, os ângulos forem iguais. Vejamos.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$, nada precisa ser provado, pois a igualdade é claramente verdadeira. Por outro lado, se

$$\text{sen} \alpha_1 + \text{sen} \alpha_2 + \cdots + \text{sen} \alpha_{2^m} = 2^m \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right), \quad (4.5)$$

devemos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$. Para isso, repetiremos o procedimento descrito anteriormente, utilizando, desta vez, a igualdade em todas as etapas do processo por se tratar do valor máximo da soma dos senos.

Considerando $F = \text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \dots + \text{sen } \alpha_{2^m}$, em que F é o primeiro membro da igualdade (4.5), agrupando suas parcelas duas a duas, aplicando a igualdade (4.3) a cada par de senos, pois a soma é máxima, e colocando o 2 em evidência, chegamos à expressão

$$F = 2 \left[\text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) + \dots + \text{sen} \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right) \right].$$

Como $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_4, \dots, \alpha_{2^{m-1}} = \alpha_{2^m}$, podemos, sem perda de generalidade, manter os ângulos de maior índice, obtendo $F = 2 [\text{sen } \alpha_2 + \text{sen } \alpha_4 + \dots + \text{sen } \alpha_{2^m}]$. Continuamos repetindo esse procedimento de agrupar os senos em pares, aplicar a igualdade (4.3) a cada par, colocar o fator dois em evidência e, como na média aritmética os ângulos serão sempre iguais, manter o ângulo de maior índice. Desse modo, vamos reduzindo gradualmente o número de parcelas de F até obtermos a expressão $F = 2^m \cdot \text{sen } \alpha_{2^m}$, o que reduz a igualdade (4.5) a

$$2^m \cdot \text{sen } \alpha_{2^m} = 2^m \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right).$$

Daí,

$$\alpha_{2^m} = \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right).$$

o que só ocorre se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2^m}$.

Assim, o valor máximo da desigualdade (4.4) ocorre se, e somente se, os ângulos forem iguais. Isto garante que entre os polígonos inscritos em uma circunferência, com 2^m lados, os regulares são os de maior área. Além disso, como $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2^m} = 2\pi$, a fórmula para determinar a área desse polígono é dada por

$$S(PI) = \frac{nR^2}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right), \forall n = 2^i > 3, \text{ onde } i \in \mathbb{N}.$$

□

4.2 Polígonos inscritos com n lados

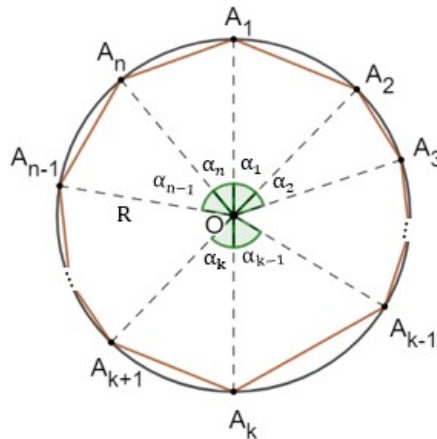
Proposição 4.2. *Entre todos os polígonos, com n lados, inscritos em uma circunferência os regulares são os de maior área.*

Demonstração. Inicialmente, observe que um polígono de n lados inscrito em uma circunferência pode ser dividido em n triângulos, com $n \geq 3$, em que dois lados de cada triângulo são raios (R) da circunferência e o terceiro é um lado do polígono, conforme Figura 4.2.

Sejam S_1, S_2, \dots, S_n as áreas dos triângulos em que o polígono foi dividido e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ os ângulos opostos à base de cada triângulo isósceles, tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$. Para calcular a área (S) do Polígono Inscrito (PI) na circunferência, basta somar as áreas dos triângulos nos quais o polígono foi dividido, assim $S(PI) = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

Já vimos anteriormente que a área de cada triângulo S_i pode ser dada por

Figura 4.2: Polígono de n lados inscrito em uma circunferência



Fonte: Próprio autor

$$S_i = \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_i.$$

Logo,

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_1 + \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_2 + \dots + \frac{R^2}{2} \text{sen } \alpha_n.$$

Daí, colocando o termo comum em evidência, segue que

$$S(PI) = \frac{R^2}{2}(\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \cdots + \text{sen } \alpha_n). \quad (4.6)$$

Como queremos obter a maior área para o polígono, devemos encontrar uma expressão que represente o valor máximo para $\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \cdots + \text{sen } \alpha_n$, com $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi$. Já que o polígono é inscrito em uma circunferência, devemos ter que $\alpha_k \in (0, \pi)$, com $k \in \{1, \dots, n\}$ e $n \geq 3$. Já vimos que a desigualdade vale para 2^m , com $m \in \mathbb{N}$. Agora, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < 2^m$, vamos provar que a desigualdade é verdadeira para todo n nas condições dadas. Sejam $\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n$ a soma de n parcelas e θ um ângulo tal que

$$\theta := \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}. \quad (4.7)$$

Adicionamos $(2^m - n)\text{sen } \theta$ à soma e obtemos $\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n + (2^m - n)\text{sen } \theta$ com um total de 2^m senos, então

$$\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n + (2^m - n)\text{sen } \theta \leq 2^m \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} \right). \quad (4.8)$$

Agora, devemos olhar para o ângulo

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m}.$$

Aplicando a equivalência (4.7) no ângulo acima, obtemos

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n) \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right)}{2^m}.$$

Daí,

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \frac{n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + (2^m - n)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{n \cdot 2^m}.$$

Donde segue que

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \frac{2^m(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{n \cdot 2^m} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n},$$

ou seja,

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \theta. \quad (4.9)$$

Assim, aplicando a equivalência (4.9) em (4.8) obtemos

$$\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n + (2^m - n)\text{sen } \theta \leq 2^m \text{sen } \theta.$$

Daí, subtraindo $(2^m - n)\text{sen } \theta$ dos dois membros da última desigualdade, obtemos $\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n \leq n \text{sen } \theta$. Agora, substituindo θ pela média aritmética dos n ângulos segue que

$$\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n \leq n \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right). \quad (4.10)$$

Assim, provamos que a desigualdade é válida para todo n natural.

Agora, vamos provar que, na desigualdade (4.10), a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Vejamos.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, a igualdade é claramente verificada. Por outro lado, se

$$\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2 + \cdots + \text{sen } \alpha_n = n \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right), \quad (4.11)$$

devemos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Seja θ um ângulo, conforme apresentado em (4.7). Adicionamos $(2^m - n)\text{sen } \theta$ a ambos os membros de (4.11), obtendo

$$\text{sen } \alpha_1 + \cdots + \text{sen } \alpha_n + (2^m - n)\text{sen } \theta = n \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right) + (2^m - n)\text{sen } \theta.$$

Substituindo a média aritmética dos n ângulos por θ e simplificando o segundo membro da última igualdade, segue que $\text{sen } \alpha_1 + \dots + \text{sen } \alpha_n + (2^m - n)\text{sen } \theta = 2^m \text{sen } \theta$. Para essa quantidade de senos, já vimos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \theta = \dots = \theta$. Agora, subtraímos $(2^m - n)\text{sen } \theta$ de ambos os membros, obtendo $\text{sen } \alpha_1 + \dots + \text{sen } \alpha_n = n \cdot \text{sen } \theta$. Por fim, substituindo θ pela média aritmética dos n ângulos encontramos a igualdade (4.11), provando que, se essa ocorre, então $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$. Portanto, a igualdade em (4.10) ocorre se, e somente se, todos os ângulos forem iguais.

Desse modo, provamos que a expressão (4.6) atinge o valor máximo se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, garantindo que, entre os polígonos inscritos em uma circunferência, os regulares são os de maior área. Além disso, uma fórmula para determinar a área dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio R é dada por

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} n \text{sen} \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

□

4.2.1 QUANTO MAIS LADOS MAIOR A ÁREA

Proposição 4.3. *Entre os polígonos regulares inscritos em uma circunferência, o que tem o maior número de lados é o que possui a maior área.*

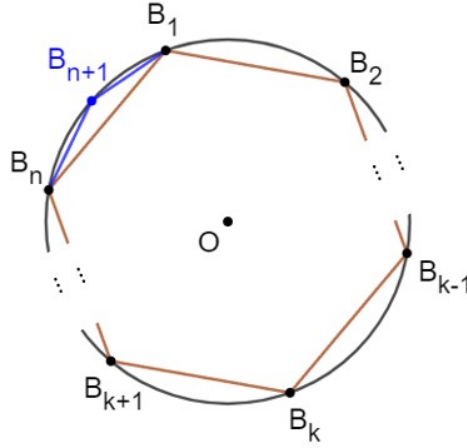
Demonstração. Seja $B_1 B_2 \dots B_n$ um polígono regular inscrito em uma circunferência Γ . A esse, adicionamos mais um vértice tal que $B_{n+1} \in \Gamma$, obtendo o polígono irregular $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$, conforme a Figura 4.3. Note que o triângulo $B_n B_{n+1} B_1$ não é degenerado¹, logo

$$\frac{nR^2}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + S(B_n B_{n+1} B_1) > \frac{nR^2}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right),$$

em que $S(B_n B_{n+1} B_1)$ é a área do triângulo $B_n B_{n+1} B_1$. Como a área do polígono

¹Situação especial onde uma figura ou uma condição se simplifica, como um triângulo degenerado que se torna uma linha reta.

Figura 4.3: Polígono regular inscrito transformado em irregular



Fonte: Próprio autor

regular $B_1B_2 \cdots B_n$ mais a área do triângulo $B_nB_{n+1}B_1$ é igual à área do polígono irregular $B_1B_2 \cdots B_{n+1}$, então

$$\frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + S(B_nB_{n+1}B_1) = \frac{R^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} \alpha_k.$$

Por outro lado,

$$\frac{(n+1)R^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n+1} \right) \geq \frac{R^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} \alpha_k.$$

Assim,

$$\frac{(n+1)R^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n+1} \right) \geq \frac{R^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} \alpha_k = \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + S(B_nB_{n+1}B_1).$$

Como

$$\frac{R^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} \alpha_k = \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + S(B_nB_{n+1}B_1) > \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

Por transitividade, segue que

$$\frac{(n+1)R^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n+1} \right) > \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

Provamos assim que, entre os polígonos regulares inscritos em uma circunferência, aquele que possui o maior número de lados é o que também possui a maior área. \square

4.3 Teorema dos polígonos regulares inscritos

Teorema 1. *Entre todos os polígonos com número de lados igual ou inferior a n , inscritos em uma circunferência, os regulares com n lados são os que apresentam a maior área.*

Demonstração. Das proposições 4.1 e 4.2, temos que entre todos os polígonos inscritos em uma circunferência, os regulares são os que possuem a maior área. Da proposição 4.3, tiramos a seguinte conclusão: quanto mais lados, maior a área do polígono. Assim, as proposições 4.1, 4.2 e 4.3, já demonstradas, provam o Teorema 1. \square

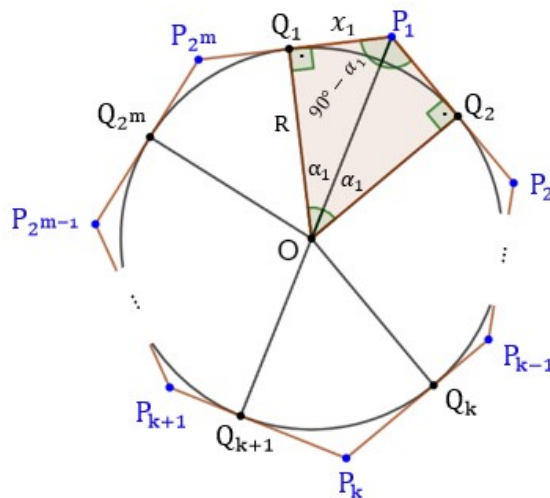
4.4 Polígonos circunscritos com 2^m lados

Proposição 4.4. *Entre todos os polígonos, com 2^m lados, circunscritos a uma circunferência, os regulares são os de menor área.*

Demonstração. Considere um polígono de 2^m lados circunscrito a uma circunferência de raio R e centro O , em que $m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$. Nele traçamos segmentos de reta que partem do centro da circunferência até os pontos em que o polígono tangencia a circunferência, obtendo assim 2^m quadriláteros.

Sejam P_1, P_2, \dots, P_{2^m} os vértices do polígono, Q_1, Q_2, \dots, Q_{2^m} os pontos de interseção entre o polígono, a circunferência e o raio. Fazendo $\angle Q_1 O Q_2 = 2\alpha_1$, $\angle Q_2 O Q_3 = 2\alpha_2, \dots, \angle Q_{2^m} O Q_1 = 2\alpha_{2^m}$ em que $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{2^m} = 2\pi$. Podemos, sem perda de generalidade, tomar o quadrilátero $OQ_1 P_1 Q_2$ e nele traçar o segmento $\overline{OP_1}$ (Figura 4.4), que o divide em dois triângulos retângulos congruentes, conforme o caso CH.

Figura 4.4: Polígono circunscrito com quadrilátero em destaque (1)



Fonte: Próprio autor

Logo, a área (S_1) do quadrilátero $OQ_1P_1Q_2$ é igual a duas vezes a área (A_1) do triângulo OQ_1P_1 . Daí, fazendo $Q_1P_1 = x_1$, temos

$$S_1 = 2A_1 = 2 \left(\frac{R \cdot x_1}{2} \right).$$

Então,

$$S_1 = R \cdot x_1. \quad (4.12)$$

Por outro lado, como o triângulo OQ_1P_1 possui um ângulo reto, os outros ângulos são complementares. Assim, pela lei dos senos, obtemos

$$\frac{x_1}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{R}{\text{sen } (90^\circ - \alpha_1)} \implies \frac{x_1}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{R}{\text{cos } \alpha_1}.$$

Daí,

$$x_1 = R \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{cos } \alpha_1}.$$

Logo,

$$x_1 = R \cdot \tan \alpha_1. \quad (4.13)$$

Aplicando a equação (4.13) em (4.12) temos $S_1 = R \cdot x_1 = R \cdot R \cdot \tan \alpha_1$. Assim,

$$S_1 = R^2 \cdot \tan \alpha_1.$$

Procedendo de maneira análoga com os demais quadriláteros, obtemos a seguinte expressão para a área do polígono circunscrito, que representaremos por $S(PC)$.

$$S(PC) = S_1 + S_2 + \cdots + S_{2^m}.$$

Como $S_1 = R^2 \cdot \tan \alpha_1$, $S_2 = R^2 \cdot \tan \alpha_2$, \dots , $S_{2^m} = R^2 \cdot \tan \alpha_{2^m}$, então

$$S(PC) = R^2 \cdot \tan \alpha_1 + R^2 \cdot \tan \alpha_2 + \cdots + R^2 \cdot \tan \alpha_{2^m}.$$

Colocando R^2 em evidência, segue que

$$S(PC) = R^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m}).$$

Queremos obter a menor área para o polígono, então devemos encontrar uma expressão que represente o menor valor de $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m}$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^m} = \pi$. Como o polígono é circunscrito a uma circunferência, temos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^m} \in (0, \frac{\pi}{2})$, com $m \in \mathbb{N}$ e, nesse caso, $m > 1$. A restrição $m > 1$ é devida ao fato de que o polígono mais simples possui três lados; no entanto, essa restrição não se aplica quando o foco é uma desigualdade como a que veremos a seguir.

Para determinarmos o valor mínimo de $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n$, devemos, inicialmente, provar que

$$\tan(x) + \tan(y) \geq 2 \tan\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (4.14)$$

com $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$. De fato, já vimos que

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\text{sen}(x+y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \quad \text{e} \quad \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\text{sen}(x+y)}{1 + \cos(x+y)}.$$

Assim, podemos escrever a desigualdade (4.14) da seguinte forma

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \geq \frac{2\operatorname{sen}(x+y)}{1 + \cos(x+y)}.$$

De onde segue que

$$\frac{1}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \geq \frac{2}{1 + \cos(x+y)}.$$

Daí, como $\cos(x) \cdot \cos(y) > 0$ e $1 + \cos(x+y) > 0$, temos $1 + \cos(x+y) \geq 2 \cos(x) \cdot \cos(y)$.

Sabemos que $2 \cos(x) \cdot \cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, então

$$1 + \cos(x+y) \geq \cos(x+y) + \cos(x-y).$$

Assim, $1 \geq \cos(x-y)$, o que comprova a desigualdade(4.14). Além disso, $1 = \cos(x-y)$ se, e somente se, $x = y$, garantindo que o valor mínimo de $\tan(x) + \tan(y)$, isto é,

$$\tan(x) + \tan(y) = 2 \tan\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (4.15)$$

ocorre se, e somente se, $x = y$.

Agora, para determinarmos o valor mínimo da expressão $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_{2m}$, fazemos $F = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_{2m}$ e agrupamos as parcelas de duas em duas, isto é, $F = (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) + (\tan \alpha_3 + \tan \alpha_4) + \dots + (\tan \alpha_{2(m-1)} + \tan \alpha_{2m})$. Em seguida, aplicamos a desigualdade (4.14) a cada par de tangentes, de modo que

$$F \geq 2 \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right) + \dots + 2 \tan\left(\frac{\alpha_{2m-1} + \alpha_{2m}}{2}\right).$$

Colocando o termo comum em evidência, segue que

$$F \geq 2 \left[\tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right) + \dots + \tan\left(\frac{\alpha_{2m-1} + \alpha_{2m}}{2}\right) \right].$$

O processo de agrupar as parcelas de duas em duas, aplicar (4.14) e colocar o 2

em evidência é repetido até obtermos por transitividade que

$$F \geq 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right),$$

ou seja,

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m} \geq 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right).$$

Agora, provaremos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$.

Se os ângulos forem iguais, não há nada a provar, pois a igualdade é claramente verdadeira. Por outro lado, se

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m} = 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right), \quad (4.16)$$

devemos provar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^m}$.

Fazendo $F = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_{2^m}$, como a soma é mínima, podemos agrupar as parcelas duas em duas, aplicar a igualdade (4.15) a cada par de parcela e colocar o fator 2 em evidência, obtendo a expressão

$$F = 2 \left[\tan \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \tan \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) + \cdots + \tan \left(\frac{\alpha_{2^{m-1}} + \alpha_{2^m}}{2} \right) \right].$$

Como $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_4, \dots, \alpha_{2^{m-1}} = \alpha_{2^m}$, podemos, sem perda de generalidade, manter o ângulo de maior índice, de modo que $F = 2[\tan \alpha_2 + \tan \alpha_4 + \cdots + \tan \alpha_{2^m}]$. Repetimos o processo de agrupar as parcelas de duas em duas, aplicar a igualdade (4.15), colocar o 2 em evidência e manter o ângulo de maior índice até obtermos $F = 2^m \tan \alpha_{2^m}$. Assim, a igualdade (4.16) pode ser escrita da seguinte maneira

$$2^m \tan \alpha_{2^m} = 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right).$$

Daí,

$$\alpha_{2^m} = \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^m}}{2^m} \right),$$

o que só é verdade se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2^m}$.

Dessa forma, provamos que a igualdade (4.16) ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2^m}$. Assim, os polígonos de menor área, circunscritos a uma circunferência de raio R , com 2^m lados, são os regulares. Além disso, sabemos que $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2^m} = \pi$ e $S(PC) = R^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_{2^m})$. Portanto, uma expressão que determina a área desses polígonos é

$$S(PC) = nR^2 \tan \left(\frac{2\pi}{n} \right), \forall n = 2^i > 3, \text{ onde } i \in \mathbb{N}.$$

□

4.5 Polígonos circunscritos com n lados

Proposição 4.5. *Entre todos os polígonos, com n lados, circunscritos a uma circunferência, os regulares são os de menor área.*

Demonstração. Sejam $P_1P_2 \dots P_n$ um polígono circunscrito em uma circunferência de centro O e raio R , e $Q_1Q_2 \dots Q_n$ os pontos de tangência do polígono com a circunferência. Traçamos segmentos de retas ligando o centro da circunferência a cada ponto de tangência, obtendo n quadriláteros. Além disso, ao traçarmos segmentos de retas partindo de O até cada vértice do polígono, dividimos cada quadrilátero em dois triângulos congruentes conforme Figura 4.5, o que pode ser comprovado pelo caso CH.

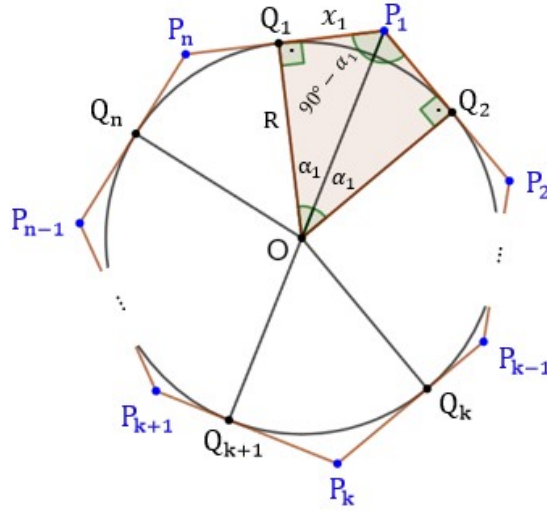
Daí, concluímos facilmente, utilizando as igualdades (4.12) e (4.13), que a área de cada quadrilátero pode ser dada por $S_i = R^2 \cdot \tan \alpha_i$, com $i \in \mathbb{N}$. Como a Área do Polígono Circunscrito $S(PC)$ é a soma das áreas dos quadriláteros, então

$$S(PC) = R^2 \cdot \tan \alpha_1 + R^2 \cdot \tan \alpha_2 + \dots + R^2 \cdot \tan \alpha_n$$

ou

$$S(PC) = R^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_n).$$

Figura 4.5: Polígono circunscrito com quadrilátero em destaque (2)



Fonte: Próprio autor

Como o polígono é circunscrito, então $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Queremos determinar o polígono de menor área, logo, devemos obter a condição suficiente e necessária que minimize a expressão $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_n$, o que pode ser facilmente obtido, bastando para isso provarmos que

$$\tan \alpha_1 + \dots + \tan \alpha_n \geq n \tan \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right), \quad (4.17)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$.

Já vimos que a desigualdade é válida para 2^m ; portanto é suficiente prova-lá para $2 \leq n < 2^m$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Lembrando que na desigualdade podemos ter $n = 2$, o que é ratificado quando nos referimos à área ou aos lados de um polígono.

Continuando com nossa demonstração, seja $\tan \alpha_1 + \dots + \tan \alpha_n$ a soma de n parcelas e, sem perda de generalidade, consideremos a igualdade (4.6), onde

$$\theta := \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Adicionamos $(2^m - n) \tan \theta$ à soma $\tan \alpha_1 + \dots + \tan \alpha_n$, obtendo

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta$$

com um total de 2^m tangentes. Assim,

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta \geq 2^m \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} \right).$$

De (4.9), temos

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \theta.$$

Logo, podemos escrever a última desigualdade da seguinte maneira

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta \geq 2^m \tan \theta.$$

Daí, subtraindo $(2^m - n) \tan \theta$ dos dois membros, nos é revelado a seguinte desigualdade

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n \geq n \tan \theta.$$

Aplicando a equação (4.6) na desigualdade acima, obtemos a expressão (4.17).

Agora, para completar a demonstração, devemos provar que, na desigualdade (4.17), a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, nada temos a provar. Por outro lado, se

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n = n \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right), \quad (4.18)$$

devemos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Novamente, seja θ um ângulo, conforme apresentado em (4.7). Adicionando $(2^m - n) \tan \theta$ a ambos os membros de (4.18), segue que

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta = n \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right) + (2^m - n) \tan \theta.$$

Substituindo a média aritmética dos n ângulos por θ e simplificando o segundo membro da igualdade, obtemos $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta = 2^m \tan \theta$. Já vimos que, para 2^m tangentes, se a igualdade ocorre, então todos os ângulos são iguais, daí $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \theta = \cdots = \theta$. Agora, subtraímos $(2^m - n) \tan \theta$ de ambos os membros de $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n + (2^m - n) \tan \theta = 2^m \tan \theta$, obtendo $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \cdots + \tan \alpha_n = n \tan \theta$, onde substituímos θ pela média aritmética dos n ângulos, chegando a expressão (4.18). Dessa forma, provamos que, se isso ocorre, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Assim, mostramos também que, entre todos os polígonos circunscritos em uma circunferência, os regulares são os de menor área. Além disso, se

$$S(PC) = R^2(\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n) = nR^2 \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right).$$

Como $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \pi$, a área de qualquer polígono regular circunscrito em uma circunferência de raio R pode ser determinada pela fórmula

$$S(PC) = nR^2 \tan \left(\frac{\pi}{n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

□

4.5.1 QUANTO MAIS LADOS MENOR A ÁREA

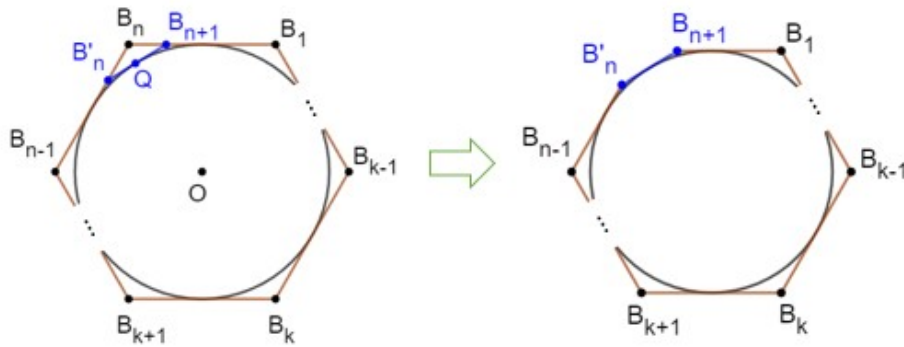
Proposição 4.6. *Entre os polígonos regulares circunscritos a uma circunferência, o que tem o maior número de lados é o que possui menor área.*

Demonstração. Sejam $B_1B_2 \cdots B_n$ um polígono regular de n lados circunscrito a uma circunferência Γ e um ponto $Q \in \Gamma$ entre dois pontos consecutivos de tangência dessa circunferência com os lados do polígono, de modo que $Q \notin B_1B_2 \cdots B_n$. Sem perda de generalidade, considere Q entre os pontos de tangência de Γ com os lados do polígono que determinam B_n . Tomemos B'_n e B_{n+1} como os pontos de intersecção entre o

polígono e a reta tangente a Γ que passa por Q , conforme ilustrado na Figura 4.6, resultando no polígono irregular $B_1 \cdots B_{n-1} B'_n B_{n+1}$ de $n + 1$ lados.

Perceba que o triângulo $B'_n B_n B_{n+1}$ nunca será degenerado se tomarmos $Q \in \Gamma$ e $Q \notin B_1 B_2 \cdots B_n$, garantindo que o polígono irregular $B_1 \cdots B_{n-1} B'_n B_{n+1}$ sempre terá área menor que o polígono regular $B_1 B_2 \cdots B_n$, ou seja,

Figura 4.6: Polígono regular e polígono irregular



Fonte: Próprio autor

$$nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - S(B'_n B_n B_{n+1}),$$

em que $S(B'_n B_n B_{n+1})$ é a área do triângulo $B'_n B_n B_{n+1}$. Como,

$$nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - S(B'_n B_n B_{n+1}) = R^2 \sum_{k=1}^{n+1} \tan \alpha_k$$

e

$$R^2 \sum_{k=1}^{n+1} \tan \alpha_k > (n+1)R^2 \tan\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

ou seja, a área de um polígono irregular circunscrito em uma circunferência é maior que a área de um polígono regular com o mesmo número de lados e circunscrito à mesma circunferência. Então,

$$nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - S(B'_n B_n B_{n+1}).$$

Como

$$nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - S(B'_n B_n B_{n+1}) = R^2 \sum_{k=1}^{n+1} \tan \alpha_k > (n+1)R^2 \tan\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Segue por transitividade que

$$nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) > (n+1)R^2 \tan\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Portanto, entre os polígonos regulares circunscritos a uma circunferência, o que possui o maior número de lados é o de menor área. \square

4.6 Teorema dos polígonos regulares circunscritos

Teorema 2. *Entre todos os polígonos com número de lados igual ou inferior a n , circunscritos a uma circunferência, os regulares com n lados são os que apresentam a menor área.*

Demonstração. Já provamos que entre todos os polígonos circunscritos a uma circunferência, os regulares são os de menor área. Além disso, mostramos que quanto maior o número de lados de um polígono regular circunscrito, menor é a sua área. Essas afirmações foram obtidas das proposições 4.4, 4.5 e 4.6, já demonstradas. Portanto, fica provado o Teorema dos polígonos regulares circunscritos. \square

4.7 Polígonos regulares e a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que estabelece os conhecimentos essenciais a serem desenvolvidos pelos alunos durante sua trajetória escolar na educação básica, abordando competências e habilidades que visam, entre outros objetivos, à igualdade educacional, valorizando o ingresso e a permanência na escola.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p.8)

Dentro da área de Matemática, o estudo de polígonos desempenha um papel significativo, começando no Ensino Fundamental e avançando até o Ensino Médio. O conhecimento geométrico relacionado aos polígonos, especialmente os polígonos regulares, contribui diretamente para a construção do raciocínio matemático e a compreensão de conceitos fundamentais de geometria plana e espacial.

Na área da geometria, a BNCC promove o desenvolvimento de habilidades que estimulam a compreensão e aplicação de conceitos geométricos fundamentais, além de incentivar o raciocínio lógico e a resolução de problemas, destacando a importância da aplicação prática dos conceitos em situações reais. Os polígonos, regulares e irregulares, são conteúdos essenciais na formação geométrica dos alunos, conforme estabelecido pela BNCC. Desde o reconhecimento de suas propriedades básicas, como simetria e regularidade, até os cálculos de área e perímetro, os polígonos desempenham um papel importante na construção do raciocínio lógico-matemático.

A relação dos polígonos com sólidos geométricos e suas aplicações práticas em áreas como arquitetura, design, engenharia civil, computação gráfica, robótica, astronomia, geografia e cartografia reforçam a relevância desse conteúdo na educação básica. Assim, o estudo dos polígonos promove uma abordagem integrada e contextualizada do ensino da geometria, preparando os alunos para enfrentar tanto desafios acadêmicos quanto questões práticas do cotidiano.

Diante do exposto, as proposições e teoremas apresentados na Seção 4 vêm fortalecer o entendimento sobre as características dos polígonos regulares, ampliando o leque de conhecimento sobre essas figuras. Como afirmado anteriormente, quanto mais conhecemos sobre determinado conteúdo, melhor conseguimos manipulá-lo, favorecendo sua aplicação no cotidiano.

O conteúdo abordado na Seção 4 envolve a aplicação de diversos conceitos vistos

desde o ensino fundamental até o 2º ano do ensino médio. Entre eles estão: área de triângulo, casos de congruência, polígonos, polígonos regulares, ângulos complementares, ângulos centrais, várias relações da trigonometria, equações, inequações, entre outros. Este é um excelente momento para relembrar e aplicar tais conteúdos. Além disso, esses temas estão diretamente ligados às habilidades matemáticas previstas nas competências específicas de geometria, com ênfase no estímulo ao raciocínio dedutivo e analítico.

Concluimos que a maximização da área de polígonos inscritos em uma circunferência e a minimização da área de polígonos circunscritos a uma circunferência, como demonstrado nesta pesquisa, são tópicos que podem estimular o aprendizado. É recomendável que este conteúdo seja apresentado aos alunos do 2º ano do ensino médio, após o estudo da trigonometria, ou mesmo na última série da educação básica, quando os alunos já têm domínio dos conceitos de trigonometria, indispensáveis para a compreensão dos processos aplicados nas demonstrações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivados a provar, duas proposição derivadas dos estudos de uma demonstração realizada por Arquimedes, que utilizou o método da exaustão para determinar um valor aproximado de π . Buscou-se não apenas provar suposições, mas também desenvolver as demonstrações de forma que alunos dos anos finais da educação básica fossem capazes de compreendê-las.

Após estudos aprofundados, foi possível transformar a proposição e a conjectura iniciais em teoremas. Um deles afirma que, entre todos os polígonos com a mesma quantidade de lados inscritos em uma circunferência, os regulares possuem a maior área. O outro teorema estabelece que, entre todos os polígonos com a mesma quantidade de lados circunscritos a uma circunferência, os regulares possuem a menor área.

Para o primeiro teorema, buscou-se a condição necessária e suficiente para maximizar a expressão $\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n$. No segundo teorema, o objetivo foi determinar a condição necessária e suficiente que conduzisse ao menor valor de $\tan \alpha_1 + \dots + \tan \alpha_n$. Como resultado, foram demonstradas as seguintes desigualdades: $\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin \theta$ e $\tan \alpha_1 + \dots + \tan \alpha_n \geq n \tan \theta$, em que θ representa a média aritmética dos ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Isso leva à seguinte pergunta: qual seria o comportamento da soma $\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n$? De forma análoga ao que foi feito para a soma dos senos, pode-se demonstrar que $\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n \leq n \cos \theta$. Contudo, até o momento, não foi encontrada uma aplicação plausível dessa desigualdade no contexto dos polígonos.

Concluimos esta etapa da pesquisa conscientes de que sua continuidade é indispensável, visto que outras conjecturas surgiram a partir do que já foi produzido. Além disso, podemos tentar expandir esses estudos para a geometria espacial, abordando poliedros e esferas.

REFERÊNCIAS

- [1] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. SP: Unicamp, 2011.
- [2] PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de história da matemática**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM , 2012.
- [3] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Fundamentos de cálculos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- [4] HrhM <https://math.stackexchange.com/users/332390/hrhm> **Area of a cyclic polygon maximum when it is a regular polygon**. 2016. Disponível em: <https://math.stackexchange.com/q/1919518> Acesso em: 10 fev. 2024.
- [5] TANAKA, Rikuto; MIYAMOTO, Jinya; MARUO, Yuki; NAKAYAMA, Keita; MIYADERA, Ryohei **An elementary proof that the regular polygon is the largest among polygons that are inscribed in a circle**. *Parábola*, v. 59, n. 1, P. 1-8, 2023.
- [6] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [7] BARBOSA, Jão Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [8] AYRES Jr, Frank Ayr, MOYER, Robert E. **Trigonometria**. Tradução: Laurito Miranda Alves. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.
- [9] CARMO, Manfredo Perdigão *et al.* **Trigonometria - Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [10] ROSADO FILHO, Moacir. *et al.* **Uma Desigualdade Trigonométrica e Navegação com Barco a Vela**. 2015. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/88/14.html> Acesso em: 22 fev. 2024.
- [11] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

- [12] CARVALHO, Paulo Cesar Pinto, MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [13] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 1 set. 2024.