Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

HISLLEY FEITOSA MENESES

A CATENÁRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

TERESINA
2024

HISLLEY FEITOSA MENESES

A CATENÁRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.

TERESINA
2024

M541c Meneses, Hislley Feitosa.
A catenária no ensino médio: uma proposta de sequência didática / Hislley Feitosa Meneses. - 2024.
106f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Campus Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2024.
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
"Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha".

1. Produto Educacional. 2. Ensino de Matemática. 3. Aplicações Matemáticas. I. Rocha, Natã Firmino Santana. II. Título.

CDD 510

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3ª/1217

HISLLEY FEITOSA MENESES

A CATENÁRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.

Data de aprovação: 28 de agosto de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br NATA FIRMINO SANTANA ROCHA
Data: 26/09/2024 11:52:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br ARNALDO SILVA BRITO
Data: 24/09/2024 09:20:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Guilherme Luiz de Oliveira Neto Assinado de forma digital por Guilherme Luiz de Oliveira Neto
Dados: 2024.09.23 11:09:20 -03'00'

Prof. Dr. Guilherme Luiz de Oliveira Neto – Examinador Externo
Instituto Federal do Piauí – IFPI

Dedico este trabalho a minha esposa Ana Karina e filho Ivo Bernardo, a meu pai Ivoneuton (*in memoriam*), a minha mãe Deusimar, minha irmã Joseane e afilhado Álvaro.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por toda a inteligência, saúde e proteção. Agradeço à minha mãe Deusimar Feitosa e ao meu pai Ivoneuton Meneses (*in memoriam*), por todo o amor, ensinamento, cuidado, apoio e dedicação ao longo da minha vida.

Agradeço a minha esposa Ana Karina Borges por me apoiar, ajudar, incentivar a sempre buscar mais e por ser exemplo para mim.

Agradeço a minha irmã Joseane Meneses por sempre acreditar e me incentivar nos meus objetos, e também a meu afilhado Álvaro.

Agradeço aos professores do PROFMAT/UESPI, Dr. Arnaldo Brito, Dr. Afonso Norberto, Dr. Pedro Júnior, Dr. Alexandre Bezerra, Dr. Neuton Alves, Dra. Valdirene, por cada ensinamento tanto acadêmico quanto pessoal e por toda dedicação ao ensino, e em especial professor Dr. Natã Firmino pela orientação e dedicação que foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Expresso minha gratidão à todos os amigos do PROFMAT/UESPI 2022 Afonso Araújo, Antônio Delon, Edivaldo Leandro, Francisco Erasmo, Francisco Miranda, Gustavo Vilarinho, José Carlos, Lício Lima, Lucas Lima, Ney da Costa, Paulo Robson, Raimundo Nonato e Vanilson de Paulo pelo companheirismo, colaboração, apoio mútuo e pelas tardes de estudos que foram de incalculável importância durante o curso. Além disso, agradeço em especial a meu amigo Eugênio Pereira pelo companheirismo nas viagens para Uespi, divisão da kit net e por toda ajuda e histórias, que foram de grande importância para a conclusão do mestrado.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente me ajudaram nesta jornada e trabalho.

“Tudo tem seu tempo. Há um momento oportuno para cada coisa debaixo do céu.”

Eclesiastes 3, 1.

RESUMO

A curva catenária é um fenômeno matemático e físico intrigante que desempenha um papel crucial em várias áreas, como engenharia, arquitetura, além de ser encontrada na natureza. Embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabeleça que a Matemática no Ensino Médio deve ser integrada e aplicada à realidade em diversos contextos, a catenária sequer é mencionada como exemplo nos livros didáticos. Nesse contexto, este trabalho buscou abordar a questão de como explicar essa curva e suas propriedades no Ensino Médio. Portanto, o objetivo geral é investigar as propriedades matemáticas e aplicações da curva catenária e propor uma Sequência Didática (SD) para o Ensino Médio. Apresentamos a relação entre a BNCC e a catenária, bem como sua história, aplicações e equação. Consequentemente, desenvolvemos o Produto Educacional (a SD), que inclui uma sequência de aulas para o estudo da catenária, com atividades envolvendo pular corda, bolhas de sabão e a construção do arco catenário. Concluiu-se que o estudo da catenária no Ensino Médio e o uso da SD podem potencializar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Produto Educacional; Ensino de Matemática; Aplicações Matemáticas.

ABSTRACT

The catenary curve is an intriguing mathematical and physical phenomenon that plays a crucial role in various fields, such as engineering, architecture, as well as being found in nature. Although the National Common Curricular Base (BNCC) states that Mathematics in high school should be integrated and applied to reality in various contexts, the catenary is not even mentioned as an example in textbooks. In this context, this work sought to address the question of how to explain this curve and its properties in high school. Therefore, the general objective is to investigate the mathematical properties and applications of the catenary curve and to propose a Didactic Sequence (SD) for high school. We present the relationship between the BNCC and the catenary, as well as its history, applications, and equation. Consequently, we developed the Educational Product (the SD) which includes a sequence of lessons for studying the catenary, with activities involving jump rope, soap bubbles, and constructing the catenary arch. It was concluded that studying the catenary in high school and using the SD can enhance the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Educational Product; Teaching Mathematics; Mathematical Applications.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na área da Matemática conhecida como Geometria, os alunos do Ensino Básico são introduzidos às formas geométricas planas, como triângulos, quadriláteros e circunferências e, posteriormente, às formas da geometria espacial. Além dessas, algumas curvas também são estudadas, como a elipse, a hipérbole e a parábola, cujas propriedades algébricas são exploradas na Geometria Analítica. No Ensino Médio, o estudo das funções quadráticas, que têm a parábola como gráfico, recebe ênfase especial.

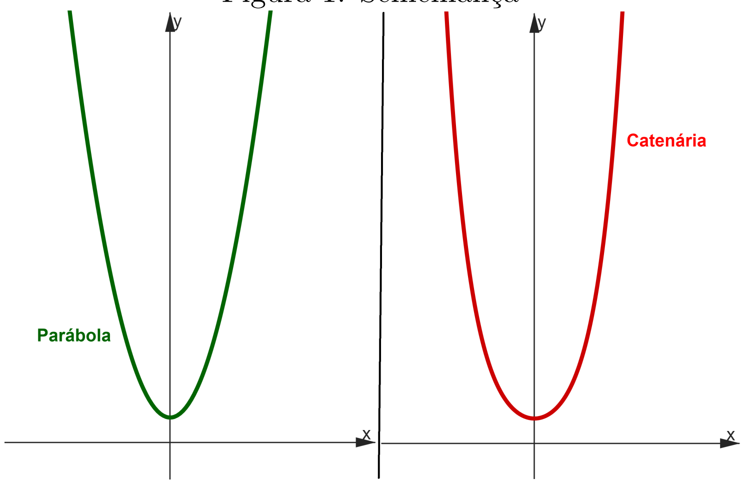
Em consonância com Talavera (2008, p. 12) que afirma:

> A parábola é encontrada com frequência nos livros didáticos do ensino fundamental, quando se estuda função do 2º grau, e no ensino médio, quando se estuda as cônicas sob o prisma da geometria analítica. Muitas vezes, o autor lança mão de desenhos, figuras e gráficos para representá-las. É possível encontrar exemplos de livros didáticos que, como o de Olavo Freire, associam o formato do cabo pênsil ao de uma parábola.

Não apenas, mas como consequência da frequência de questões envolvendo essa curva, somos levados, na tentativa de exemplificar com objetos reais do nosso cotidiano, a cometer uma falácia.

Uma curva que se assemelha à parábola e que, por muitos, é confundida com ela é a catenária. Ambas apresentam, até certo ponto, semelhanças gráficas. Contudo, os conceitos e as representações matemáticas são distintas. Observe a semelhança entre essas curvas na Figura 1.

Figura 1: Semelhança



Fonte: Próprio autor.

Em resumo, a curva catenária é um fenômeno matemático e físico intrigante que desempenha um papel essencial em diversas áreas. Seja na engenharia, na arquitetura, na natureza (Lima, 2019) ou em outras aplicações científicas, a curva catenária demonstra sua principal importância ao fornecer formas estáveis e eficientes para a suspensão de estruturas. O estudo e entendimento dessa curva continuam a encantar e desafiar pesquisadores, alimentando o desejo de compreender melhor suas propriedades e aplicações.

Isto corrobora com o documento Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área da Matemática, que afirma que "no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (Brasil, 2018, p. 528). Ainda assim, nos livros didáticos de Ensino Médio, observa-se uma atenção maior voltada para a parábola, sendo raras as ocasiões em que a diferença entre ambas seja apresentada, ou até mesmo citada a catenária (Sousa; Alves; Souza, 2022). Inclusive, nos cursos de licenciatura em Matemática no contexto brasileiro, possivelmente devido à sua equação analítica pouco ou nada é abordado sobre essa curva (Barbosa, 2012).

Somando-se ao fato anterior as mudanças nos currículos no novo Ensino Médio e a diminuição da carga horária das aulas de Matemática, alguns conteúdos deixam de ser apresentados aos discentes e até mesmo não aparecem mais nos livros didáticos. Assim "pode-se perder a oportunidade de levar ao conhecimento dos alunos esses objetos matemáticos estudados há tanto tempo e com tantas aplicações" (Louzada, 2013, p. 24).

Este trabalho tem como tema a curva catenária e suas aplicações. A motivação para escolha desse tema surgiu ao assistir a um vídeo do Universo Narrado [1], um perfil educacional na rede social Instagram, que apresenta a catenária com exemplos de sua rigidez e equilíbrio, e seu uso pelos esquimós na construção de iglus. A partir daí, busquei saber mais sobre a curva, já que não a conhecia. Com o estudo e a descoberta de suas vastas aplicações na engenharia, arte, arquitetura e também na natureza, surgiu o questionamento de como poderia explanar essa curva e suas propriedades no Ensino Médio.

Este estudo tem como objetivo geral investigar as propriedades matemáticas e aplicações da curva catenária e propor uma Sequência Didática (SD) para o Ensino Médio. Os objetivos específicos são: apresentar as características e propriedades da curva catenária; listar as aplicações da catenária em diversas áreas; desenvolver uma SD com ênfase no estudo da catenária como meio de aplicabilidade da Matemática à realidade.

A metodologia utilizada foi a Engenharia Didática (ED), que compreende um total de quatro fases. Contudo, neste trabalho, utilizou-se apenas as duas primeiras fases: a análise preliminar e a análise a priori, nas quais apresentamos a elaboração e o desenvolvimento da SD, que servirá para o estudo da curva catenária de maneira interdisciplinar e contextualizada. A SD é direcionada aos docentes e pode ser aplicada para alunos da 2ª série do Ensino Médio.

A ED foi escolhida como metodologia de pesquisa para este trabalho por permitir investigar e melhorar os processos de ensino e aprendizagem, possibilitando o desenvolvimento de uma SD em condições acessíveis à realidade das salas de aula atuais. Isso se

[1] Perfil no Instagram @universonarrado, que fala de conteúdos de Matemática e física. O link para o vídeo é <https://www.instagram.com/reel/CqDf-8Jg8e9/?igsh=anYxbzFyZmpsbWYy>

deve ao fato de que a ED traz um enorme enfoque para o estudo da interação entre a didática e a prática educativa dos conteúdos em Matemática (Artigue, 1988; Almouloud; Coutinho, 2008).

No Capítulo 2, tratamos da relação entre a BNCC e a Matemática, assim como da SD como potencializadora do ensino de Matemática. Já no Capítulo 3, temos o referencial teórico que fundamenta o estudo da catenária e a construção da proposta de SD, que se encontra no Capítulo 4, seguido das considerações finais.

2 APONTAMENTOS SOBRE BNCC E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A BNCC (BNCC) será abordada neste tópico, contemplando suas diretrizes, competências gerais para a Educação Básica, estrutura e responsabilidades, com foco na área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, com suas atribuições e estrutura, as competências específicas, as unidades temáticas e as habilidades que podem estar associadas à catenária. Além disso, serão explicitados os desafios e as tendências no ensino de Matemática, com ênfase na SD, que fundamenta o produto deste trabalho.

2.1 BNCC NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Todas as etapas e modalidades da Educação Básica apresentam aprendizagens essenciais a serem adquiridas pelos estudantes, e estas estão bem definidas pela BNCC, um documento norteador e de caráter normativo que assegura os direitos e as aprendizagens essenciais e uma educação de qualidade para todos os estudantes, ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, independentemente da região onde vivam, de acordo com o Plano Nacional de Educação (PNE), aplicando-se exclusivamente a educação escolar, como define o artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n° 9.394/1996) e estando em consonância com os princípios e objetivos fundamentados nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

A BNCC foi estabelecida pelo Ministério da Educação (MEC), tendo sua homologação em Dezembro de 2017 e é considerada um marco importante na educação brasileira, pois para o desenvolvimento de uma sociedade, é essencial uma educação de qualidade baseada no acesso e na formação continuada, ela é a base norteadora na integração completa da educação e referência para a construção de currículos e propostas pedagógicas voltadas para o desenvolvimento adequado da educação, visando sempre o compromisso de assegurar uma educação de qualidade e equidade, promovendo maior inclusão e democracia para os cidadãos (Antunes, 2023).

Segundo o documento Brasil (2018), o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos, tanto pelas suas inúmeras aplicações na sociedade atual quanto pela sua potencialidade em formar cidadãos críticos, comprometidos com suas responsabilidades enquanto seres sociais, capazes de desenvolver competências e habilidades que lhes serão uteis durante toda a sua vida, seja nos âmbitos profissional quanto pessoal. Esse documento define a Matemática para além dos seus conteúdos conceituais, como se observa em:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (Brasil, 2018, p. 265).

Conforme descrito, a importância do estudo da Matemática, vai muito além da simples quantificação de fenômenos determinísticos. A Matemática cria e utiliza sistemas abstratos para organizar e inter-relacionar fenômenos do espaço, movimento, formas e números, independentemente de estarem associados a fenômenos físicos ou não. Esses sistemas abstratos são fundamentais para a compreensão profunda de uma variedade de fenômenos, permitindo a construção de representações significativas e a elaboração de argumentações consistentes em diversos contextos, desde as ciências naturais até as ciências sociais e a tecnologia. Dessa forma, o ensino de Matemática, conforme Brasil (2018), promove o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, capacitando os alunos a resolver problemas complexos e a tomar decisões mais coerentes em sua vida pessoal e profissional.

Frente a isso, são destacáveis o papel e a importância da Matemática no ensino e na formação geral dos estudantes, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. No que tange ao Ensino Médio, a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe:

> [...] a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (Brasil, 2018, p. 527).

Tomando em consideração o Ensino Médio, a BNCC propõe que os conhecimentos adquiridos sejam consolidados, ampliados e aprofundados, afim de propiciar uma formação robusta onde os estudantes sejam capazes de enfrentar as adversidades inerentes das suas realidades e que ao longo da vida continuem aprendendo e aplicando os conhecimentos adquiridos nas salas de aulas.

As cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio estão descritas a seguir.

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (Brasil, 2018, p. 529).

Essa competência incentiva a integrar o conhecimento matemático em situações práticas, seja no dia a dia, seja nas ciências naturais, humanas ou em questões socioeconômicas e tecnológicas. Isso contribui na preparação dos estudantes para compreenderem e se envolverem de maneira crítica e eficaz nas situações sociais e de trabalho no futuro.

> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (Brasil, 2018, p. 529).

Destaca a Matemática como uma ferramenta essencial para enfrentar desafios contemporâneos de forma ética e responsável, incentivando os alunos a utilizarem a Matemática para analisar problemas sociais, de saúde e sustentabilidade.

> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 529).

Essa enfatiza a aplicação prática da Matemática para interpretar, modelar e resolver problemas em diferentes contextos, assim incentivando os estudantes a construir modelos e analisar as soluções por eles encontradas, promovendo o pensamento crítico e argumentação com base nos processos matemáticos.

> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p. 529).

A utilização de diversas formas de representação matemática, como os citados registros algébricos e geométricos, estatísticos e computacionais levam a facilitação da comunicação e a análise dos resultados.

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 529).

A observação, as experiências e a tecnologia utilizadas na exploração de conceitos e propriedades matemáticas para induzir os alunos a formular conjecturas, enriquece o aprendizado e promove um pensamento matemático mais estruturado e rigoroso.

Podemos desenvolver essas competências da Matemática em: resolução de problemas, pensamento lógico e crítico, comunicação, modelagem matemática e tecnologia e ferramentas digitais.

Ainda no que tange o Ensino Médio, os conteúdos estão organizados em unidades temáticas, similares às propostas para o Ensino Fundamental, cada unidade temática apresenta uma série de habilidades específicas a serem desenvolvidas, estas unidades temáticas são:

- Números e Álgebra
- Geometria e Medidas
- Probabilidade e Estatística
- Funções

O conteúdo desta dissertação refere-se ao estudo da curva catenária, a BNCC não menciona explicitamente este conteúdo no currículo de Matemática para o Ensino Médio, sendo mais abordado frequentemente no Ensino Superior. Contudo, a catenária apresenta-se como uma curva interessante e importante de maneira geral, podendo ser abordada dentro de uma variedade de contextos suportados pela BNCC no Ensino Médio, como por exemplo dentro da unidade temática de geometria e medidas e funções.

Dentro do conteúdo de Geometria e Medidas, a catenária pode ser inserida no estudo da Geometria Analítica, ao ser estudada como um exemplo de curva no plano cartesiano, que tem sua equação baseada na hipérbole porém não faz parte das cônicas. Em relação ao conteúdo de Funções, a catenária pode ser estuda como exemplo de função exponencial e também como trigonométrica, neste caso fazendo uso da trigonometria hiperbólica que não é um assunto abordado no Ensino Médio.

Dentro desse contexto, justifica-se a proposta desta dissertação de apresentar uma SD que aborde as possibilidades da curva catenária, associada aos conteúdos de funções e geometria, bem como as inúmeras aplicações dessa curva.

2.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Matemática é frequentemente definida como a ciência que estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas e variações. Ela envolve a utilização de abstrações e lógica para resolver problemas, desde questões práticas do dia a dia até complexas teorias que fundamentam grandes avanços científicos e tecnológicos. A Matemática é essencial para diversas áreas, incluindo ciências naturais, engenharia, medicina, finanças e ciências sociais (Lima, 2009).

Devido a isso, o aprendizado matemático é iniciado já nos primeiros anos de vida do ser humano, em que se aprende relacionando as quantidades e medidas com objetos do cotidiano. Contudo, a partir de conteúdos que necessitam de uma generalização matemática, o relacionamento do assunto com objetos do cotiano se torna difícil.

Assim, os principais desafios no ensino de Matemática estão voltados para a abstração, na qual alguns conceitos matemáticos não são facilmente visíveis, como o conceito de números negativos, que não apresenta uma relação direta com o mundo visível, envolvendo a necessidade de desenvolvimento do pensamento abstrato. Os métodos tradicionais de ensino pautados na memorização e na repetição de conteúdos também dificultam a compreensão conceitual efetiva, e a falta de conexão prática na qual os estudantes veem a Matemática dissociada da realidade, faz com que não consigam aplicar os conceitos estudados em situações reais (D'Ambrosio, 2001; Lorenzato, 2006; Fiorentini; Miorim, 1990).

Frente aos desafios mencionados é imprescindível que se busquem meios efetivos para potencializar o ensino de Matemática. Ainda assim, diante das diversas realidades educacionais e de suas inerentes complexidades, a realização integral desse objetivo muitas vezes encontra obstáculos em todos os níveis educacionais que esta é abordada, devido à escassez de estrutura, recursos ou capacitação docente.

Há, atualmente várias novas tendências no ensino de Matemática, de maneira objetiva podemos citar algumas, como por exemplo: os jogos matemáticos (Grando et al., 2000), Resolução de Problemas (Polya, 1995), Modelagem Matemática (David; Tomaz, 2008), Etnomatemática (D'Ambrosio, 2013), Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) (Martins, 2009) e as Sequências Didáticas (Zabala, 2014) como metodologias facilitadoras no processo de ensino e aprendizagem.

Dentre essas novas tendências no ensino de Matemática, a SD (objetivo deste trabalho) tem se destacado por proporcionar aos professores materiais para aulas diferenciadas e que se utilizam das outras tendências de ensino citadas.

No livro "Como aprender e ensinar competências" discute-se a respeito do ensino por competências, e cita-se que: "Não há uma metodologia própria para o ensino das competências, mas condições gerais sobre como devem ser as estratégias metodológicas, entre as quais cabe destacar a de que todas devem ter um enfoque globalizador" (Zabala;

Arnau, 2010, p. 141).

Dentre as diversas metodologias existentes, destacamos a utilização de SDs no ensino de competências, sendo estas definidas como: "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (Zabala, 2014, p. 20).

Estratégias pedagógicas são essenciais para o ensino de competências, e as SDs por permitirem conectar teoria e a prática de forma estruturada, em que o docente tem total conhecimento dos objetivos a serem alcançados, se mostra uma ferramenta eficaz.

Inicialmente as SDs foram introduzidas e amplamente utilizadas no campo de estudo de linguagens e linguagem escrita, contudo, atualmente já são difundidas para outras ciências, como a Matemática (Cabral, 2017). As SDs tem como um de seus objetivos proporcionar aos professores a sistematização do objeto de estudo, que o leva a uma melhor organização das atividades a serem desenvolvidas para se alcançar o objetivo da aprendizagem (Araujo, 2013).

Esta é ainda definida como sendo a unidade organizadora das ações do professor em sala de aula, assim como descrito em:

> (...) Sequências Didáticas são instrumentos desencadeadores das ações e operações da prática docente em sala de aula. Em consequência, a estrutura e o planejamento da SD elaborada pelo professor determinarão a forma e os meios pelos quais os alunos vão interagir com os elementos da cultura e, consequentemente, quais serão os processos de apropriação do conhecimento (Giordan, 2014, p. 48).

A SD determina a forma como ocorre o aprendizado do aluno sobre o tema ali trabalhado e que foi cuidadosamente preparado para conduzir o processo de ensino e aprendizagem.

Zabala (2014) propõe uma tríade constituída de: planejamento, aplicação e avaliação no design da SD, que melhor contempla uma intervenção reflexiva e que possibilita ao professor o aperfeiçoamento de suas ações de ensino.

Ao se utilizar as SDs, o objetivo é minimizar ao máximo a utilização de improvisações nas aulas, assim como os conflitos entre os professores e os alunos, visto que inicialmente já se deve ter um combinado estabelecido sobre o andamento das aulas e os meios pelos quais se chegará a esse fim com a exposição inicial seja de maneira oral ou por meio de texto sobre o que será realizado no decorrer da SD, como vai ser feito, por quem e o que se pretende alcançar (Castellar, 2016; Zabala; Arnau, 2010).

Segundo Castellar (2016), uma SD está relacionada ao planejamento do ensino com objetivos e metas bem definidos com os conteúdos a serem abordados, seguindo uma lógica de encadeamento, onde as atividades propostas acontecem de maneira ordenada, dispostas uma em seguida da outra levando em consideração a importância da relação entre as atividades teóricas e práticas.

É valido ainda ressaltar a diferença entre plano de aula e SD, que está baseado na escala de abordagem das atividades. O plano de aula fica condicionado ao registro dos objetivos, atividades e avaliações, enquanto que a SD diz respeito tanto a descrição das tarefas quanto as tarefas em si, desdobrando-se em dois produtos, o plano de aula e o material de apoio (Castellar, 2016).

Com isso, afim de potencializar o ensino de Matemática, esta dissertação tem como produto educacional uma proposta de SD (que está no capítulo 4) que conta com quatro aulas de caráter teórico e prático sobre a curva catenária, trazendo todo o suporte teórico e didático necessário para sua aplicação pelos professores de Matemática.

3 A CURVA CATENÁRIA

Neste capítulo abordamos os fundamentos teóricos para a construção da SD. Iniciamos com a seção que fala da hipérbole e das definições das funções hiperbólicas. Seguindo, a seção da catenária em que consta seu contexto histórico, a dedução de sua equação e apresentação de situações em que ela é utilizada.

3.1 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Nesta seção traz-se de forma sucinta o assunto de hipérbole, focando no essencial para compreender as funções trigonométricas hiperbólicas e a parametrização do cosseno hiperbólico em termos exponenciais.

3.1.1 A Hipérbole

Juntamente com a elipse e a parábola, a hipérbole compõe o grupo chamado de cônicas, que são as curvas obtidas na intersecção de um plano com um cone duplo. A hipérbole, foco desta subseção, é obtida quando o plano corta as duas partes do cone (superior e inferior).

Com isso, e de acordo com Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 122), tem-se a seguinte definição de hipérbole.

Definição 1. Uma **hipérbole** H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$:

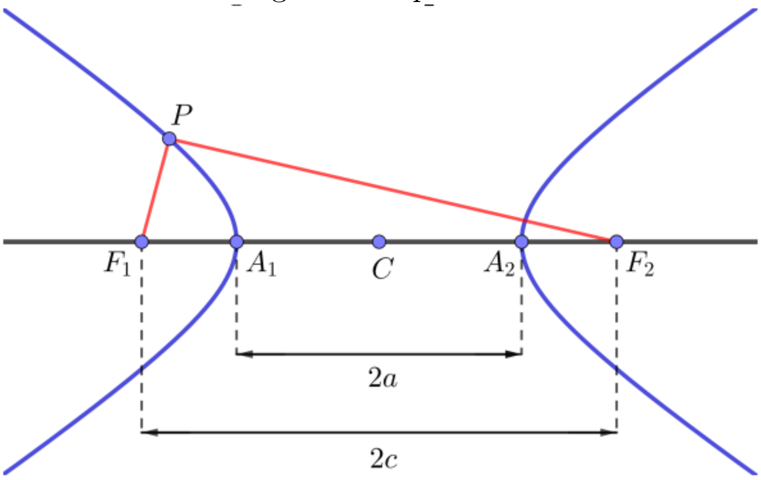
$$H = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c.$$

Assim, a reta que contem os pontos F_1 e F_2 é chamada de reta focal. E a intercessão da hipérbole com a reta focal consiste exatamente de dois pontos, A_1 e A_2, chamados vértices da hipérbole. Tem-se que o segmento A_1A_2 é denominado eixo focal e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$. O ponto C do eixo focal é o centro da hipérbole e ponto médio dos segmentos A_1A_2 e F_1F_2:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Note que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$ e $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$. Observe na Figura 2.

Figura 2: Hipérbole



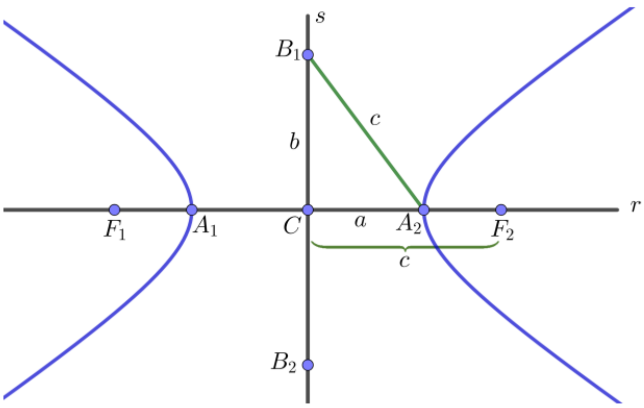
Fonte: (Santos, 2022, p. 20)

A reta perpendicular a reta focal e que passa pelo ponto C é chamada de reta não focal da hipérbole, cujo contém o eixo não focal, que é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e, também tem C como ponto médio, onde

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{1}$$

Os pontos B_1 e B_2 são chamados de vértices imaginários. Observe na Figura 3.

Figura 3: Eixo não focal

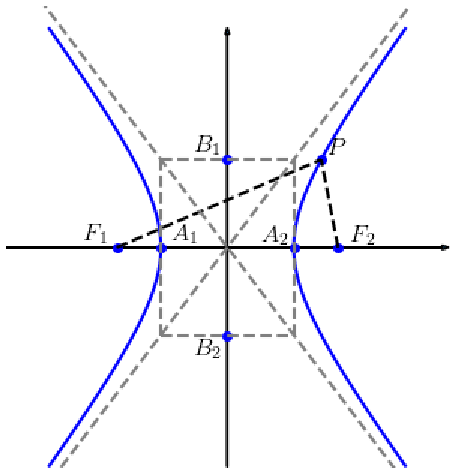


Fonte: (Santos, 2022, p. 21)

A excentricidade da hipérbole é dada pela razão $\dfrac{c}{a} > 1$.

O retângulo de base da hipérbole é o retângulo cujos lados tem A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. E as retas que contêm as diagonais desse retângulo são as assíntotas de H, logo elas passam pelo centro C e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação a reta focal. Observe na Figura 4

Figura 4: Assíntotas da hipérbole



Fonte: notaspedrok.com.br

Com isso, dado o sistema de eixos ortogonais xy, considere o eixo focal coincidindo com o eixo x e o não focal com o eixo y. Nesse caso, tem-se: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$.

Pela Definição 1 tem-se, sendo $P = (x, y) \in H$,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, \tag{2}$$

pela definição de módulo e colocando as distâncias em coordenadas, tem-se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{3}$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \tag{4}$$

onde (3) é o ramo direito de H e (4) é o ramo esquerdo de H. Utilizando (3), pode-se escrever

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{5}$$

Elevando ao quadrado, obtêm-se

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{6}$$

cancelando y^2 e isolando o radical, tem-se

$$(x+c)^2 - 4a^2 - (x-c)^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{7}$$

Expandindo os quadrados, obtêm-se

$$x^2 + 2xc + c^2 - 4a^2 - x^2 + 2xc - c^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{8}$$

ou seja,

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{9}$$

Dividindo por quatro, tem-se

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{10}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e expandido-os, obtêm-se

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2). \tag{11}$$

Realizando a multiplicação no segundo membro da igualdade, fica

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2, \tag{12}$$

o que implica em

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4, \tag{13}$$

coloca-se o x^2 em evidência no primeiro membro e a^2 no segundo,

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{14}$$

Substituindo (1), tem-se

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{15}$$

Dividindo por a^2b^2, encontra-se

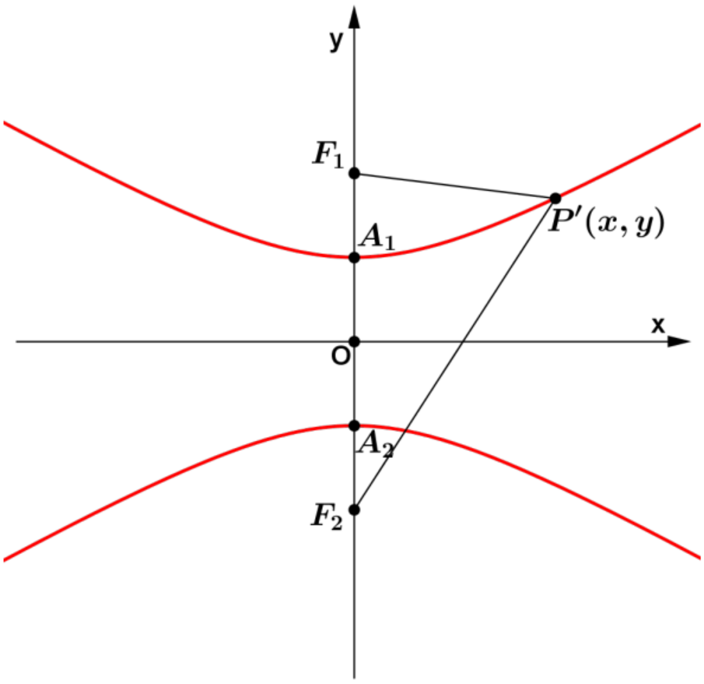
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{16}$$

que é a **equação reduzida da hipérbole**. De modo equivalente, utilizando a (4) também chega-se em (16).

No caso do focos estarem no eixo y como na Figura 5, calcula-se de modo análogo, e encontra-se a equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Figura 5: Hipérbole com focos no eixo y



Fonte: (Santos, 2015, p. 21)

De acordo com Santos (2022, p.24) tem-se as seguintes definições.

Definição 2 (Hipérbole Equilátera)**.** Dizemos que uma hipérbole é equilátera, sempre que os comprimentos dos seus eixos focal e não focal forem iguais, isto é, $a = b$.

Exemplo 1. A hipérbole $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ é equilátera pois $a = b = 6$.

Definição 3 (Hipérbole Unitária)**.** Dizemos que uma hipérbole é unitária, sempre que os comprimentos dos seus eixos focal e não focal forem ambos iguais a 2, ou seja, $a = b = 1$.

Exemplo 2. A hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é unitária e também equilátera.

Considere o sistema de eixos ortogonais xy. Seja XY o sistema obtido rotacionando os eixos x e y de ângulo θ no sentido anti-horário em torno da origem. De acordo com Rodrigues (2014, p. 15) a proposição a seguir dá a relação entre as coordenadas nos sistemas de eixos.

Preposição 1. *Se um ponto P de coordenadas (x, y) passa a ter coordenadas (X, Y) após uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, então as equações de transformação do sistema original ao novo são:*

$$x = X\cos(\theta) - Y\,sen(\theta) \qquad e \qquad y = X\,sen(\theta) + Y\cos(\theta).$$

Demonstração. Pela Figura 6 tem-se

$$x = \overline{OM}, y = \overline{OL} = \overline{MP}, X = \overline{OK} \text{ e } Y = \overline{OR} = \overline{KP}. \tag{18}$$

Com isso, tem-se que

$$x = \overline{ON} - \overline{MN} \tag{19}$$

e

$$y = \overline{MQ} + \overline{QP}. \tag{20}$$

Pelos triângulos retângulos ONK e PQK tem-se

$$\overline{ON} = \overline{OK}\cos(\theta) \tag{21}$$

e

$$\overline{MN} = \overline{QK} = \overline{KP}\,\mathrm{sen}(\theta). \tag{22}$$

Além disso, também tem-se que

$$\overline{MQ} = \overline{NK} = \overline{OK}\,\mathrm{sen}(\theta) \tag{23}$$

e

$$\overline{QP} = \overline{KP}\cos(\theta). \tag{24}$$

Assim, por (18), substituindo (21) e (22) em (19), (23) e (24) em (20), obtêm-se

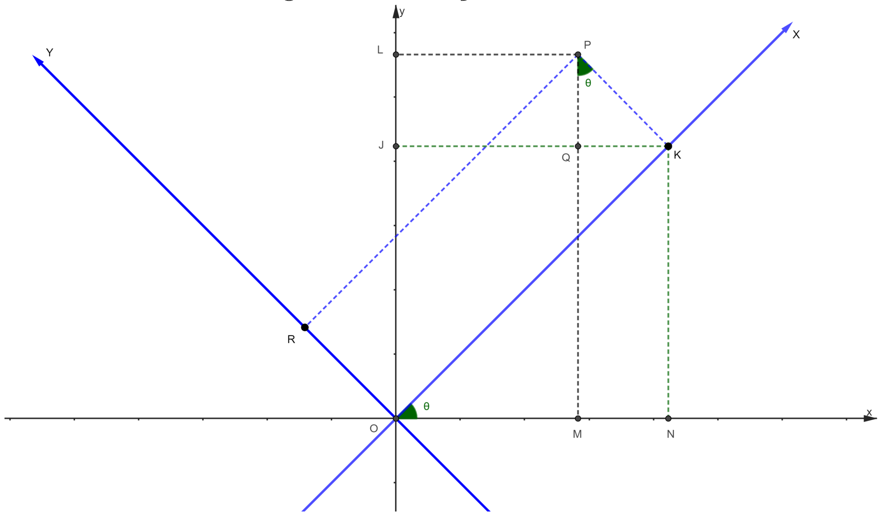
$$x = X\cos(\theta) - Y\,\mathrm{sen}(\theta) \tag{25}$$

e

$$y = X\,\mathrm{sen}(\theta) + Y\cos(\theta). \tag{26}$$

□

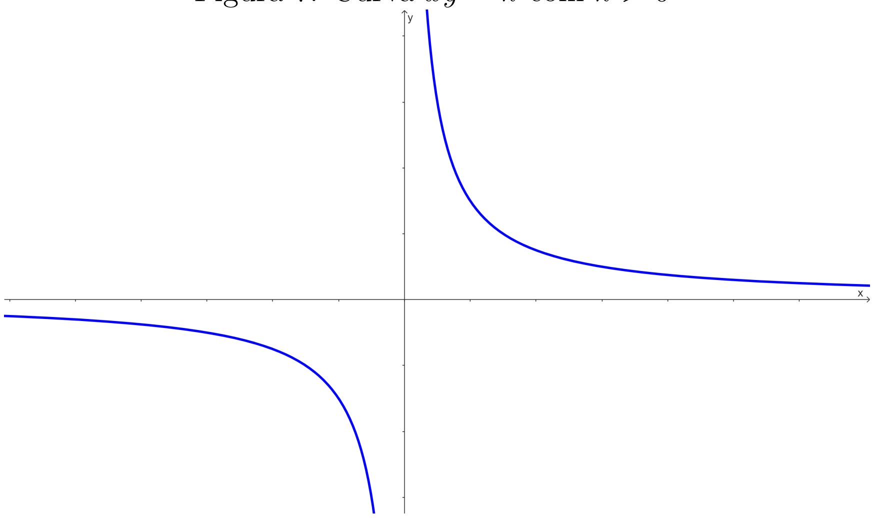
Figura 6: Rotação de eixos



Fonte: Próprio autor.

Pela rotação dos eixos pode-se mostrar que a curva $xy = k$ com $k \neq 0$ representa duas hipérboles. Considerando o caso $k > 0$, para $k < 0$ é análogo, tem-se a seguinte proposição, segundo Santos (2022, p. 24).

Figura 7: Curva $xy = k$ com $k > 0$



Fonte: Próprio autor.

Preposição 2. *A curva representada por $xy = k$ (Figura 7), com $k > 0$, corresponde a uma hipérbole equilátera com eixo focal sobre o eixo X do plano cartesiano XY.*

Demonstração. Considerando a curva $xy = k$ com $k > 0$, no sistema de eixos xy, tome um ponto $P = (x, y)$ qualquer pertencente a essa curva. Realizando uma rotação dos eixos, em relação a origem, em 45° no sentido anti-horário, tem-se pela Preposição 1 que

$$x = X\cos(45^\circ) - Y\,\text{sen}(45^\circ) \quad \text{e} \quad y = X\,\text{sen}(45^\circ) + Y\cos(45^\circ).$$

ou seja

$$x = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{27}$$

e

$$y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{28}$$

Colocando o fator $\frac{\sqrt{2}}{2}$ em evidência, tem-se

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \tag{29}$$

e

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y). \tag{30}$$

Logo, substituindo na curva, obtemos

$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = k. \tag{31}$$

Dividindo tudo por k, tem-se

$$\frac{X^2}{2k} - \frac{Y^2}{2k} = 1, \tag{32}$$

que é o mesmo que

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2k})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1. \tag{33}$$

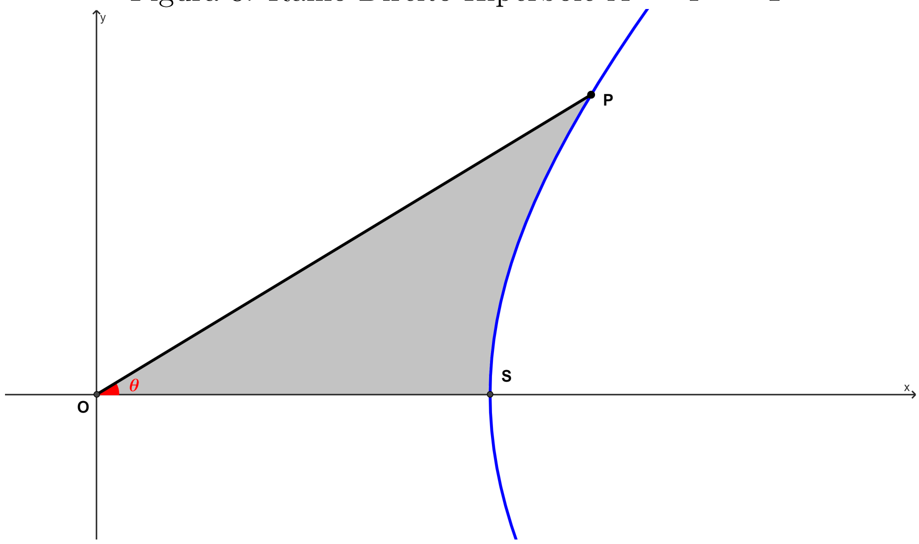
Portanto, uma hipérbole equilátera com $a = b = \sqrt{2k}$ no sistema de eixos XY. $\square$

Note que se $k = \frac{1}{2}$ então, pela (32) tem-se que $xy = \frac{1}{2}$ corresponde a hipérbole unitária $X^2 - Y^2 = 1$.

3.1.2 Seno, Cosseno e Tangente Hiperbólica

A seguir, apresenta-se algumas definições como as de setor e ângulo hiperbólico. Para isso, considere o ramo direito da hipérbole unitária, como na Figura 8.

Figura 8: Ramo Direito Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$



Fonte: Próprio autor.

Segundo Rodrigues (2014) tem-se a seguinte definição.

Definição 4. Sejam P e S pontos em um mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$. A região delimitada pelos segmentos OP e OS e pela parte da hipérbole compreendida entre P e S é chamada de setor hiperbólico.

Na Figura 8 o setor hiperbólico é a região cinza. Agora na mesma situação, segue a definição de ângulo hiperbólico, que é representado com relação a área do setor hiperbólico. Tem-se segundo Freitas (2015).

Definição 5. Dado os pontos P e S em um mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ que definem o setor hiperbólico SOP. O ângulo $\angle SOP$ mede θ quando a área do setor SOP vale $\dfrac{\theta}{2}$ unidades de área.

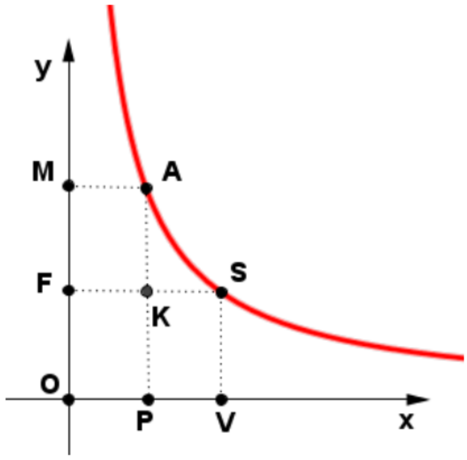
É necessário calcular a área do setor hiperbólico para poder medir o ângulo. Segundo Santos (2015, p. 27) a proposição a seguir relaciona a área do setor hiperbólico com o logaritmo natural.

Preposição 3. *Sendo V e P as projeções, respectivamente, dos pontos S e A da hipérbole $xy = \dfrac{1}{2}$ no eixo x e OSA o setor hiperbólico de área A_{OSA}, então*

$$A_{OSA} = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{\overline{OV}}{\overline{OP}}\right)\right|. \tag{34}$$

Demonstração. Supondo, sem perda de generalidade, os pontos como na Figura 9.

Figura 9: Projeção dos pontos S e A.



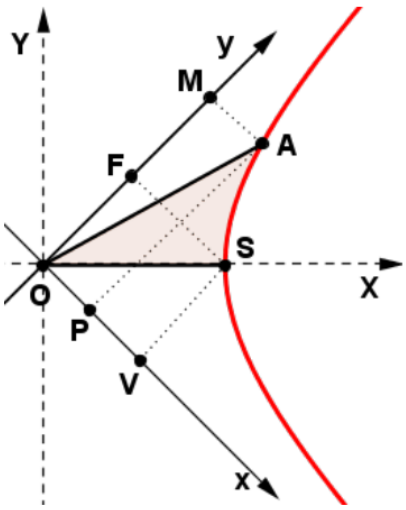
Fonte: (Santos, 2015, p. 27).

Note que as coordenadas de S são $x_S = \overline{OV}$ e $y_S = \overline{OF}$ e as de A são $x_A = \overline{OP}$ e $y_A = \overline{OM}$. Assim, a área do retângulo $OPAM$ é dada por

$$A_{OPAM} = \overline{OP} \cdot \overline{OM} = xy = \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Analogamente, tem-se também que $A_{OVSF} = \frac{1}{2}$. Consequentemente, $A_{PVSK} = A_{FKAM}$. Fazendo a rotação dos eixos em 45° no sentido anti-horário, e tomando a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ como referência, nos novos eixos XY, o setor hiperbólico fica como na Figura 10.

Figura 10: Hipérbole Rotacionada S e A.



Fonte: (Santos, 2015, p. 28).

Note que

$$A_{OPA} = \frac{1}{2}A_{OPAM} = \frac{1}{2}A_{OVSF} = A_{OVS}. \tag{36}$$

Alem disso,

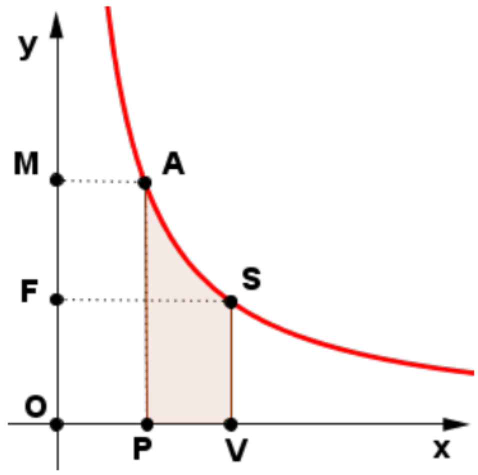
$$A_{OVSA} = A_{OPA} + A_{PVSA} = A_{OSA} + A_{OVS}. \tag{37}$$

Logo, (36) implica

$$A_{OSA} = A_{PVSA}. \tag{38}$$

Assim, deve-se calcular a área de $PVSA$. Com isso, retorna-se para a hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ no sistema xy. Daí, a área de PVSA (Figura 11) será a região sob o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$ delimitada por $x_A = \overline{OP}$ e $x_S = \overline{OV}$.

Figura 11: Área de $PVSA$.



Fonte: (Santos, 2015, p. 28).

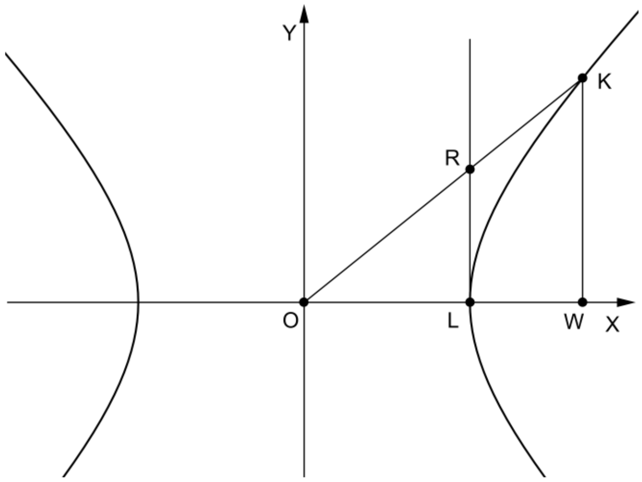
Calculando a área pela integral definida tem-se

$$A_{PVSA} = \left| \int_{\overline{OP}}^{\overline{OV}} \frac{1}{2x}\, dx \right| = \frac{1}{2} \left| \ln(\overline{OV}) - \ln(\overline{OP}) \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{\overline{OV}}{\overline{OP}} \right) \right|. \tag{39}$$

□

Com isso é possível agora calcular o valor do ângulo hiperbólico. Mas, antes define-se o seno, cosseno e tangente hiperbólicos. De modo análogo a trigonometria circular, considere o ramo direito da hipérbole unitária, centrada na origem, com vértice L e um ponto K na hipérbole, como na Figura 12. Seja o ponto W a projeção de K no eixo X e a reta $\overleftrightarrow{LR}$ tangente a hipérbole no ponto L. Seja $A_{LOK} = \frac{\theta}{2}$, dado θ ângulo hiperbólico.

Figura 12: Hipérbole Unitária.



Fonte: (Vasconcelos, 2013, p. 23).

Definição 6. As funções seno e cosseno hiperbólicos são, respectivamente,

$$\operatorname{senh}(\theta) = \frac{\overline{KW}}{\overline{OL}} \quad \text{e} \quad \cosh(\theta) = \frac{\overline{OW}}{\overline{OL}}.$$

Como $\overline{OL} = 1$, então

$$\operatorname{senh}(\theta) = \overline{KW} \quad \text{e} \quad \cosh(\theta) = \overline{OW}. \tag{40}$$

Com o seno e cosseno hiperbólicos definidos, pode-se definir a tangente.

Definição 7. A função tangente hiperbólica é, respectivamente

$$\tanh(\theta) = \frac{\overline{LR}}{\overline{OL}} = \overline{LR}. \tag{41}$$

Observe que na Figura 12 tem-se os triângulos semelhantes OKW e ORL, disso obtêm-se

$$\tanh(\theta) = \frac{\overline{LR}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{KW}}{\overline{OW}} = \frac{\operatorname{senh}(\theta)}{\cosh(\theta)}. \tag{42}$$

Teorema 1 (Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica)**.** *Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ tem-se $cosh^2(\theta) - sinh^2(\theta) = 1$.*

Demonstração. Seja $K = (x, y)$ pertencente a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, com $x = \overline{OW}$, $y = \overline{WK}$, como na Figura 12. Logo, disso e da Definição 6 tem-se

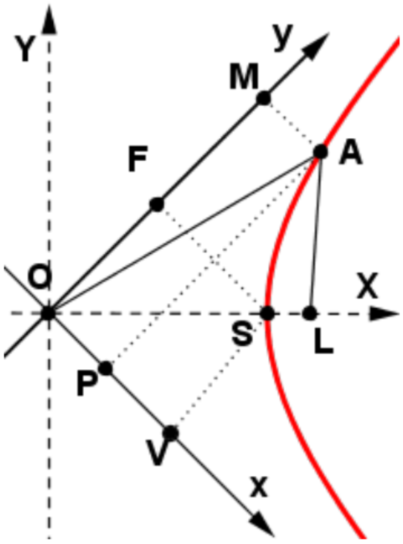
$$\cosh^2(\theta) - \operatorname{senh}^2(\theta) = \overline{OW}^2 - \overline{WK}^2 = x^2 - y^2 = 1. \tag{43}$$

$\square$

Se aproximando do ápice dessa seção, que é a relação entre as funções hiperbólicas e exponencias. Ou seja, é possível escrever o seno e o cosseno hiperbólico como exponencial.

Considere a Figura 13. Sendo A um ponto da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, de forma que $A_{OSA} = \frac{\theta}{2}$. Observe que as coordenadas de A nos eixos XY são $X = \overline{OL} = \cosh(\theta)$ e $Y = \overline{LA} = \operatorname{senh}(\theta)$, e no eixo xy são $x = \overline{OP}$ e $y = \overline{OM}$.

Figura 13: Coordenadas do A.



Fonte: (Santos, 2015, p. 32).

Sendo o ângulo de rotação dos eixos de 45°, e pela Preposição 1, chega-se em

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)) \tag{44}$$

e

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \operatorname{senh}(\theta)). \tag{45}$$

Analogamente, o ponto S tem, no sistema XY, coordenadas $(X, Y) = (1, 0)$ e no xy tem $x = \overline{OV}$ e $y = \overline{OF}$, logo,

$$\overline{OV} = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{46}$$

e

$$\overline{OF} = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{47}$$

Assim, pela Preposição 3, substituindo $\overline{OV}$ e $\overline{OP}$ tem-se

$$\begin{aligned}
A_{OSA} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta))}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)\right). \qquad (48)
\end{aligned}$$

Como $A_{OSA} = A_{PVSA} = A_{MFSA}$, tem-se também que

$$\begin{aligned}
A_{OSA} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OF}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \operatorname{senh}(\theta))}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) + \operatorname{senh}(\theta)). \qquad (49)
\end{aligned}$$

Ora, $A_{OSA} = \dfrac{\theta}{2}$, então (48) fica

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\ln\left(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)\right), \qquad (50)$$

ou seja,

$$-\theta = \ln(\cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta)), \qquad (51)$$

logo,

$$e^{-\theta} = \cosh(\theta) - \operatorname{senh}(\theta). \qquad (52)$$

E (49) fica

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) + \operatorname{senh}(\theta)), \qquad (53)$$

logo,

$$e^{\theta} = \cosh(\theta) + \operatorname{senh}(\theta). \qquad (54)$$

Somando (54) e (52) tem-se

$$2\cosh(\theta) = e^{\theta} + e^{-\theta}. \qquad (55)$$

Portanto,

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}. \qquad (56)$$

Além disso, subtraindo (54) e (52), obtêm-se

$$2\,\text{senh}(\theta) = e^{\theta} - e^{-\theta}. \tag{57}$$

Portanto,

$$\text{senh}(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \tag{58}$$

A partir de (56) e (58) calcula-se a tangente hiperbólica em termos exponenciais. De fato,

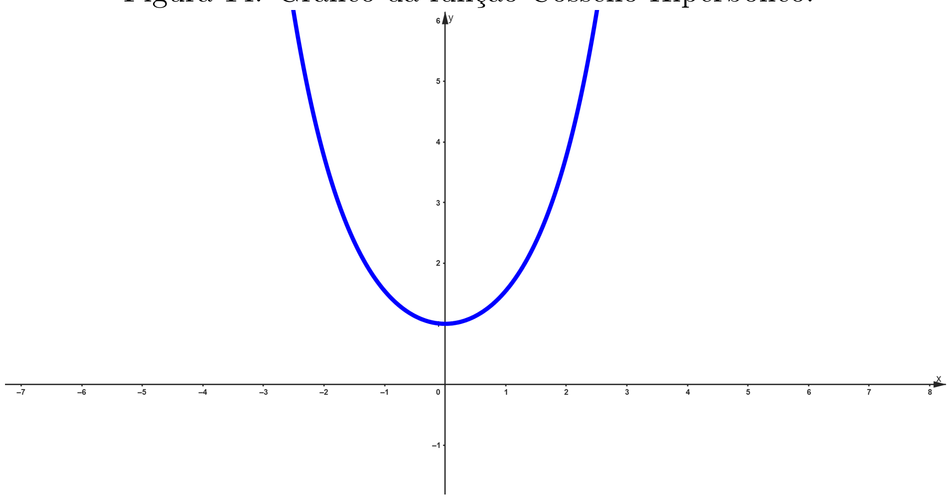
$$\tanh(\theta) = \frac{\text{senh}(\theta)}{\cosh(\theta)} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}. \tag{59}$$

Dividindo o numerador e denominador por $e^{-\theta}$ obtêm-se, portanto

$$\tanh(\theta) = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}. \tag{60}$$

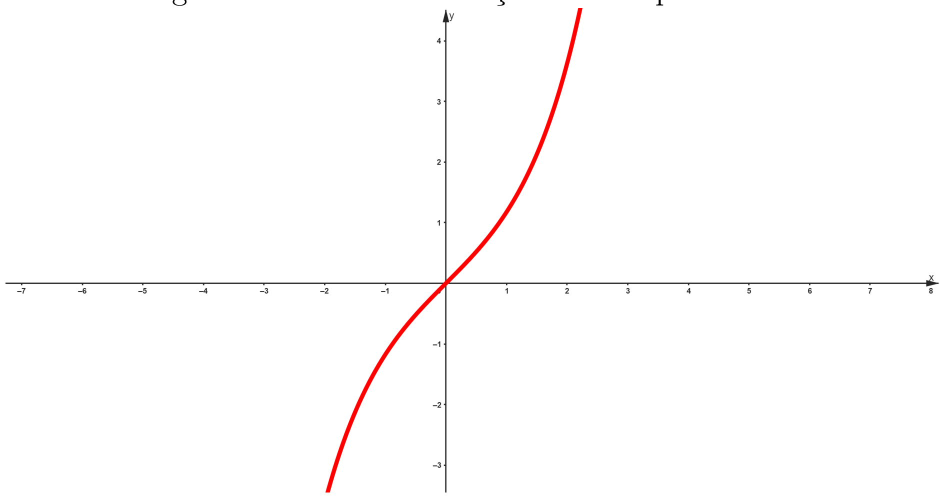
Com isso, segue as Figuras 14, 15 e 16 gráficos das funções (56), (58) e (60) respectivamente.

Figura 14: Gráfico da função Cosseno Hiperbólico.



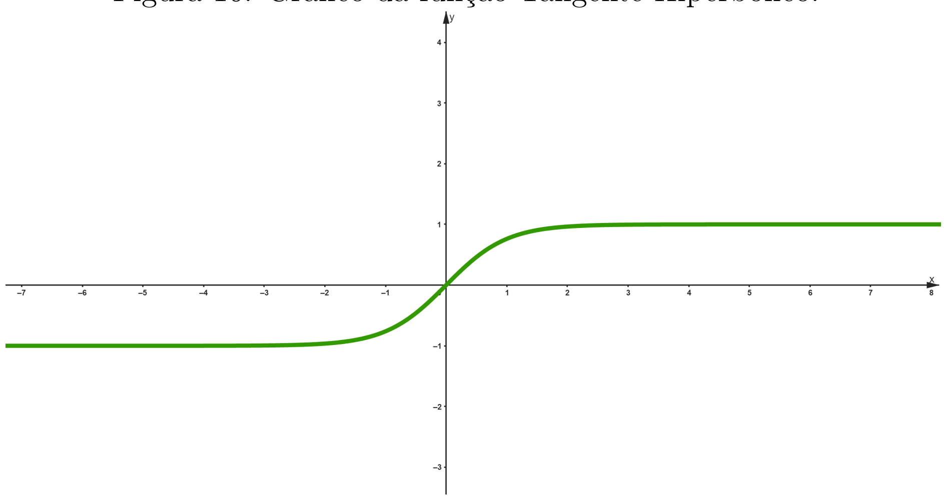
Fonte: Próprio autor.

Figura 15: Gráfico da função Seno Hiperbólico.



Fonte: Próprio autor.

Figura 16: Gráfico da função Tangente Hiperbólico.



Fonte: Próprio autor.

Como explanado, a partir das funções trigonométricas hiperbólicas aqui definidas, pode-se mostrar as identidades trigonométricas de modo análogo à trigonometria circular. Como essas identidades não fazem parte do foco desta seção, assim como do trabalho, deixam-se como indicação de aprofundamento os autores Ferrara (2018), Santos (2021) e Santos (2014), além daqueles já citados no trabalho.

3.2 A CATENÁRIA

Nesta seção falamos um pouco da história que envolve esta curva e de algumas de suas aplicações na arquitetura, engenharia e na natureza, e também fazemos a dedução de sua equação.

3.2.1 Contexto Histórico

Em meados do século XVII, o matemático Galileu Galilei, impressionado com uma curva formada por um fio suspenso sem a interferência de forças além da gravidade, conjecturou que esta tal curva seria, aproximadamente, uma parábola. Décadas posteriormente, o matemático e físico holandês Christiaan Huygens, com apenas 17 anos de idade, mostrou que esta curva não é uma parábola, usando de argumentos da física. Porém, não mostrou a expressão analítica da mesma (Sousa; Alves; Souza, 2022).

De acordo com Pires (2022) a catenária, como é atualmente conhecida, vem do latim *catena*, que significa corrente ou cadeia, e é uma curva determinada por um cabo suspenso nas suas extremidades, flexível, inextensível e sujeito somente a força da gravidade. “Assim, a catenária, em um sentido estrito, não é uma curva, mas sim uma família de curvas, em que cada uma delas é determinada pelas coordenadas de seus extremos (x_0, y_0),(x_1, y_1) e por seu comprimento L” (Sousa; Alves; Souza, 2022, p. 7).

O problema de encontrar a expressão algébrica dessa curva, durou décadas. Mas em 1960, Jakob Bernoulli, escreveu no jornal Acta eruditorum o seguinte “E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos.”(Maor, 2008, p. 183).

Segundo Maor (2008), em 1961 foi publicado no Acta três soluções para o problema proposto por Jakob Bernoulli. Uma delas realizada por Christiaan Huygens, que utilizou os meios geométricos. As outras soluções foram feitas por Gottfried Wilhelm Leibniz e Johann Bernoulli, irmão de Jakob, que utilizaram o Cálculo. De acordo com Eves (2011) a invenção do Cálculo foi a realização matemática mais notável do período, fim do século XVII, feita por Isaac Newton e Leinbiz.

De fato, o cálculo contribuiu para Johann encontrar a solução. Em uma carta escrita por ele para uma pessoa que, aparentemente duvidava de sua realização, ele escreveu, segundo Maor (2008, p. 184)

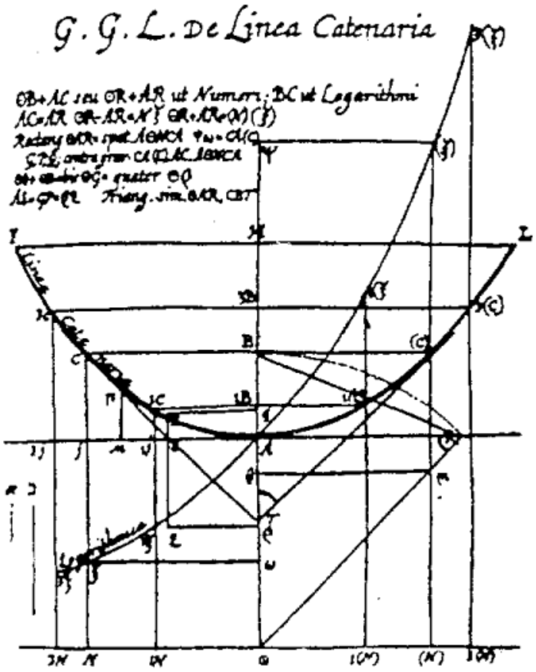
> Quando ele propôs o problema, por minha sugestão (pois fui o primeiro a pensar nele), nenhum de nós dois era capaz de resolvê-lo; e, desesperados, achamos que era insolúvel. Até que o senhor Leibniz anunciou ao público, no jornal de Leipzig, de 1690, p. 360, que tinha resolvido o problema, mas não publicaria a solução, para dar tempo aos outros analistas. Foi isso que nos encorajou, a mim e a meu irmão, a atacarmos novamente o problema.

Johann ainda completa dizendo que os esforços de seu irmão foram inúteis, pois ele achava que a catenária era uma parábola, assim como Galileu. Entretanto, ainda em 1961, Jakob realizou um feito equivalente provando que "de todas as possíveis formas que um fio suspenso entre dois pontos fixos pode ter, a catenária tem o centro de gravidade mais baixo e, portanto, a menor energia potencial."(Simmons, 1987, p. 614). Esta descoberta foi a primeira manifestação da ideia de que as configurações da natureza são aquelas que minimizam a energia potencial.

De fato, ambos os irmãos "estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas"(Eves, 2011, p. 463).

Consequentemente, a descoberta da curva foi um triunfo para o Cálculo de Leibniz, o qual fez questão que todos soubessem. Foi Leibniz também, o primeiro a chamar a curva de catenária. É visto na Figura 17 a construção da catenária na demonstração feita por Leibniz.

Figura 17: Construção da catenária por Leibniz (1690)



Fonte: Maor (2008, p. 186)

Segundo Mendes (2017) e Talavera (2008) a descoberta da equação da catenária foi uma importante solução para a história do Cálculo, além de ser forte influência no desenvolvimento das funções hiperbólicas.

3.2.2 A Catenária na Engenharia, Arquitetura e Natureza

Nesta subseção trazemos algumas situações em que a catenária é usada e/ou encontrada. Dentre as diversas utilidades da catenária falaremos de sua aplicação na engenharia, arquitetura e natureza.

A catenária é uma curva que trás consigo características e propriedades interessantes. De acordo com Freitas (2015) esta curva é utilizada em diversas situações devido as tensões internas, do cabo suspenso, equilibrarem naturalmente o seu peso.

Com isso, Paulo (2014) e Nascimento (2023) afirmam que a curva catenária, no mundo moderno, desempenha um papel fundamental em diversas aplicações práticas e que suas propriedades notáveis a tornam valiosa em alguns campos como na Engenharia e Arquitetura, na construção de variadas obras.

As linhas de transmissão de energia, possuem torres de suporte aos cabos condutores com altura variando, comumente, de 30 a 80 metros e com, aproximadamente, 500 metros de distância entre cada duas torres. Assim, os cabos de energia são dispostos por estas, como observa-se na Figura 18.

Figura 18: Rede Elétrica em Linha de Transmissão

Fonte: spbancarios.com.br.

Como os cabos da rede elétrica são flexíveis e tem sua densidade igualmente distribuída por todo seu comprimento, ao serem instalados nas torres de linha de transmissão é formado, entre cado duas torres e por cada cabo, a curva catenária.

Contudo, é comum pensar que os cabos formam uma catenária devido a altura e distância entre as torres, pois os cabos não ficam bem esticados.

Tomando como exemplo os postes de energia instalados por toda uma cidade em que os cabos de baixa e alta tensão ficam, ao olhar, bem esticados. Há a impressão de estarem retos, assim, aparentemente, não parecem com catenárias. Podendo assim, haver um atrito entre o que se vê diariamente e o que Nascimento (2023, p.24) diz: “A curva catenária é muito comum no nosso cotidiano e surge, naturalmente, em diversos cenários como, por exemplo, os fios pendurando por suas extremidades nos postes de energia."

Observa-se na Figura 19 os fios nos postes.

Figura 19: Rede Elétrica em postes

Fonte: Próprio autor.

No entanto, Refatti e Beltrame (2004, p.142) dizem que

> Muitas coisas que parecem perfeitamente direitas são, na realidade,catenárias. Esticando-se um fio, o que se vê é uma linha reta? Não!Continua a ser uma catenária, porque, para se obter uma linha reta, precisa-se puxar pelas extremidades do fio com uma força infinita (e o fio partir-se-ia muito antes disso). Mesmo no espaço vazio, onde não existem campos gravitacionais, isso seria impossível, porque o campo gravitacional da massa corporal de quem as estica as estende de forma infinita no espaço. Embora o fio esticado se assemelhe a uma linha reta, na realidade, é uma catenária que se curva lentamente. Considere as pontes em aço, as cordas de um violino, as cordas de roupas (desde que não haja roupas penduradas), os fios das teias de pequenas aranhas, tudo o que seja comprido, fino, flexível e esteja suspenso em dois pontos, é a descrição de catenária.

Portanto, mesmo ao vê um fio suspenso, por suas extremidades e somente com seu peso, que pareça está reto, ainda assim está formando uma catenária.

Do mesmo modo, a catenária também é utilizada na construção de pontes, como exemplo as chamadas Pontes Penseis ou Pontes Suspensas.

> Nos escritos do inventor Faustus Verantius de 1617, encontram-se sugestões de prováveis aperfeiçoamentos das pontes de corda usadas pelos militares franceses. Segundo historiadores, Faustus Verantius tinha como principal área de interesse a engenharia e através de seus desenhos e projetos antecipou as formas das modernas pontes pênseis e estaiadas.(Talavera, 2008, p.52)

A utilização de pontes suspensas vem desde a antiguidade, e com o desenvolvimento da engenharia, as pontes penseis modernas vieram surgir no século XIX.

Figura 20: Ponte Pênsil Golden Gate

Fonte: wikipédia

A Golden Gate Bridge está localizada na Califórnia, nos Estados Unidos. Liga o Centro de São Francisco ao Bairro Sausalito. Inaugurada em 1933, tem 2.737 metros de comprimento. "Atualmente, a construção de ponte pênsil é preferida para vãos maiores de 600 metros,mas muitas vezes compete com outros tipos de pontes quando se trata de vãos de até 300 metros."(Talavera, 2008, p. 56). O cabo de aço com extremidades no topo das torres forma uma catenária. Porém, somente durante a construção, pois ao colocar o tabuleiro que fica seguro pela curva, ela se torna uma curva parabólica, devido está com o peso do tabuleiro, deixando assim de ser uma catenária. Assim, afirma Talavera (2008, p. 65)

> O tabuleiro de concreto armado é a última estrutura a ser colocada na ponte, até esse momento o cabo é preso às torres à mercê do seu próprio peso, e sem o tabuleiro exercer carga ao cabo, este toma a forma de uma catenária. O tabuleiro todo estendido ao longo da curva provoca uma "reação" no cabo, e para manter o equilíbrio, o cabo toma a forma parabólica, distribuindo essa tensão ao longo da distância entre dois pontos fixos.

> Por diversas vezes livros didáticos trouxeram exemplos de pontes pênseis como parábolas – no caso a aproximação destas, de forma análoga às aproximações feitas na Engenharia – assim como de trajetória de projéteis ou de outras estruturas que remetessem à esta curva, mas sem mencionar que, em determinadas condições as pontes pênseis têm suas estruturas amparadas pela equação da catenária (Sousa; Alves; Souza, 2022, p. 19).

De fato, há semelhanças entre a parábola e a catenária. Todavia, pela definição da catenária é possível identificá-la e saber que ela tem grande influência na segurança das pontes penseis. De acordo com Pereira et al. (2016, p. 4) "A curva catenária é muito semelhante, a olho nu, a uma parábola, porém a única maneira de distinguir uma da outra é por meio de suas equações, ou seja, a catenária é dada pela função hiperbólica, enquanto a parábola é uma função polinomial."

Veja na Figura 21 outra ponte pênsil.

Figura 21: Ponte Pênsil em São Vicente - SP

Fonte: stock.adobe.com

A Ponte Pênsil de São Vicente, foi uma das primeiras pontes suspensas do Brasil, concebida em 1990, com o intuito de transportar esgoto. Ela tem 6,4 metros de largura e um vão de 180 metros entre suas torres. No Brasil, há outras pontes suspensas como a Ponte Affonso Penna entre Goias e Minas Gerais, a Ponte Alves Lima no Paraná que cruza o Rio Paranapanema e a Ponte Hercílio Luz que possui o 132º maior vão pênsil do mundo, com 339 metros.

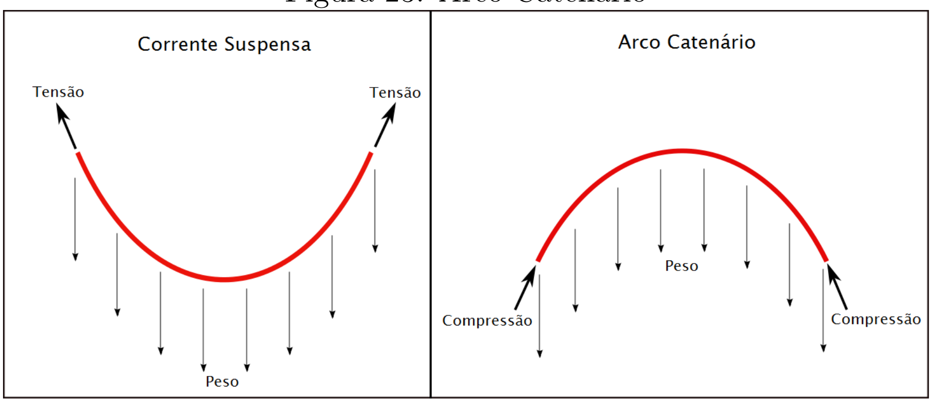
A ponte pênsil com maior vão do mundo está no Japão, a ponte Akashi-Kaikyo, com 1.991 metros de vão central.

Figura 22: Ponte Pênsil Akashi-Kaikyo

Fonte: orguel.com.br

A catenária na sua forma invertida também é bastante utilizada nas construções. Devido na sua forma normal ela sofrer força de tração, quando invertida ela sofre forças de compressão, tornando-a um arco mais resistente, firme, menos pesado e de construção mais econômica que os arcos parabólicos e circulares.

Figura 23: Arco Catenário



Fonte: naotrivial.wordpress.com

Devido esta propriedade, o arco catenário é utilizado também em construções de pontes. Ver Figura 24.

Figura 24: Ponte Ernesto Dornelles

Fonte: pt.wikipedia.org

Localizada no Rio Grande do Sul, sobre o Rio das Antas, a ponte Ernesto Dornelles é uma ponte em arco que não possui pilares apoiados no leito do rio e sua estrutura de sustentação é em concreto armado formando dois arcos paralelos. É considerada uma das maiores pontes em arcos paralelos suspensos do mundo.

Além das pontes, o chamado arco catenário foi e é bastante usado na arquitetura. Famosos arquitetos como Eero Saarinen (1910 – 1961) e Antonio Gaudí (1852 – 1926), aproveitaram bastante a curva.

Saarienn, "Arquiteto e designer finlandês migrou para os EUA em 1923. Em1947, venceu o concurso para o Gateway Arc, em Sant Louis, Missouri." (Lima; Miranda, 2021, p. 48).

De acordo com Lima (2019) o Gateway Arc está localizado em St. Louis nos Estados Unidos. O arco tem a forma de uma catenária invertida com uma altura de 192 metros de altura sendo reforçado a metade inferior por concreto e a metade superior por carbono.

Figura 25: Gateway Arch

Fonte: britannica.com

Assim também o arquiteto espanhol Antoni Gaudí usava em suas obras um estilo orgânico, bem pessoal e todo inspirado na natureza. “E uma das formas bastante utilizada por ele era a catenária. Entre todos os arcos, ele caracterizou a catenária como a mais mecânica, uma vez que a linha de pressão segue exatamente a forma do arco”(Lima; Miranda, 2021, p. 48).

Segundo Lima (2019), Guadí começou a utilizar os arcos catenários ao invés de arcos circulares já em suas primeiras obras. E

> (...) quando Gaudí queria construir um arco catenário, ele prendia uma corrente em suas extremidades deixando-a sob ação da gravidade e quando a mesma adquiria estabilidade, tirava uma foto e a analisava de forma invertida ou usava um espelho no chão para ajudar na visualização da mesma (Lima, 2019, p. 73).

Gaudí notou que se aplicada uma força em um ponto qualquer do arco catenário, ela será distribuída igualmente por todo a curva, proporcionando maior estabilidade à estrutura. Por isso é amplamente utilizada na construção de arcos arquitetônicos, domos de catedrais e até iglus.

Observe na Figura 26 o Sotão da Casa Milà, uma das obras de Gaudí.

Figura 26: Sótão da Casa Milà

Fonte: quatrocantosdomundo.wordpress.com

> Gaudí utilizou arcos catenários como estrutura de apoio para o telhado causando um visual maravilhoso. O sótão é uma sala bem ventilada composto por 270 abóbadas formadas por arcos catenários. A forma e a localização dos pátios são formadas por arcos de diferentes alturas dependendo da distância entre eles, sendo uma relação inversamente proporcional,ou seja, arcos maiores para distâncias menores e vice versa (Lima, 2019, p. 74).

Outra obra de Gaudí e considerada uma inovação na época, foi uma de suas primeiras obras, a chamada La Obrera Mataronense, iniciada em 1878. Um galpão de branqueamento de algodão, que era uma fração de um projeto maior, e desde apenas o galpão e um edifício de latrina foram preservados. Composta por 13 arcos catenários formados por pedaços de madeira conectados por parafusos, que seguram uma estrutura sem a necessidade de pilares ou vigas, formando um espaço aberto de quase 600 metros quadrados. Observe nas Figuras 27 e 28.

Figura 27: La Obrera Mataronense Interna

Fonte: thehistoryofart.org

Figura 28: La Obrera Mataronense Externa

Fonte: espina-roja.blogspot.com

Além disso, encontra-se a catenária também em uma outra construção bem interessante que é feita apenas com alocações de blocos de neve compactada, os conhecidos Iglús. Abrigos construídos pelos povos indígenas da região ártica, especialmente os Inuítes. São projetados para serem resistentes ao frio extremo, serem estáveis e firmes ao ponto de suportar o peso da neve acumulada sobre eles. Estas características remetem a catenária. Ver Figura 29

Figura 29: Iglú

Fonte: pt.wikipedia.org

Note que ao ser feito uma secção vertical no iglu, obtém-se um arco catenário.

A catenária também pode ser moldada para utilização em outros meios. Imagine andar em uma bicicleta com "rodas quadradas", isso pode parecer impossível, porém é possível. Basta que por onde a "roda quadrada" passe seja um arco catenário de comprimento igual ao lado do quadrado. Veja na Figura 30.

Figura 30: Roda quadrada

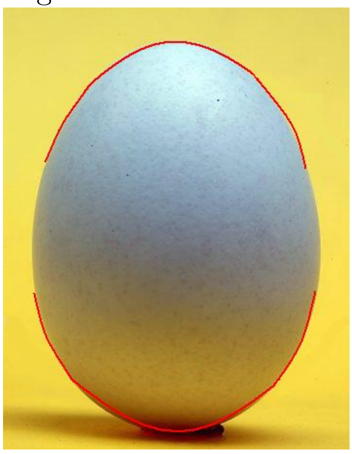
Fonte: naotrivial.wordpress.com.

Também encontra-se a catenária na natureza, como nas teias de aranhas que ficam suspensas pelas pontas presas. Além disso, o arco catenária, pela sua resistência também é encontrado nos ovos e o mais incrível, na curvatura da barriga da gestante, como pode-se ver nas Figuras 31, 32 e 33.

Figura 31: Teia de Aranha

Fonte: tecmundo.com.br.

Figura 32: Arco no Ovo



Fonte: sciencesofworld.wordpress.com.

Figura 33: Barriga de mulher gestante

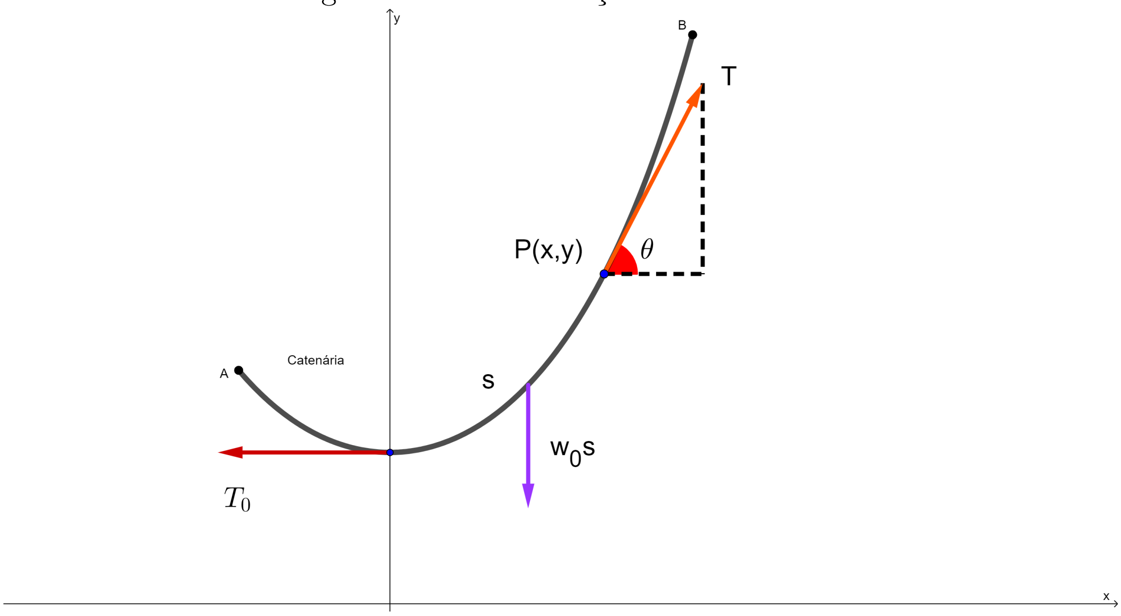
Fonte: topicosmatematicos.blogspot.com.

3.2.3 Equação da Catenária

Nesta subseção iremos deduzir a equação da catenária, tendo como fontes Simmons (1987) e Pires (2022).

Como foi explanado, a catenária é a forma de uma corrente suspensa pelas suas extremidades e que sofre somente a força da gravidade. Com isso, como ela é uma curva plana e em equilíbrio estático, considere o eixo y, do plano cartesiano, passando pelo ponto de mínimo da curva. E seja $P = (x, y)$ um outro ponto qualquer da curva.

Figura 34: Demonstração da catenária



Fonte: Próprio autor.

- s: Comprimento do arco entre o ponto mínimo e o ponto P.
- w_0: Densidade linear (peso por unidade de comprimento) da corrente. Assim, $w_0 \cdot s$ é o peso do arco entre estes pontos, e atua paralelamente ao eixo y.
- T_0: Tensão no ponto de mínimo da curva, que age na direção da tangente que é paralela ao eixo x.
- T: Tensão que age na direção da tangente no ponto $P = (x, y)$ e forma o ângulo θ com o eixo x.

Observando o triângulo com o ângulo θ na Figura 34, tem-se

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{w_0 \cdot s}{T} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{T_0}{T}.$$

Dividindo-os nessa ordem tem-se

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{w_0 \cdot s}{T_0}.$$

Como $\dfrac{w_0}{T_0}$ é uma constante, faz-se $a = \dfrac{w_0}{T_0}$. Logo,

$$\operatorname{tg}(\theta) = a \cdot s. \tag{61}$$

Como T age na direção da tangente, tem-se que $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{dy}{dx}$ (coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto P). Daí, (61) ficará da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot s. \tag{62}$$

Como s é o comprimento de arco, $y = f(t)$ por (90), substituindo em (62) tem-se

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \left(\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right). \tag{63}$$

Derivando (63) em relação a x, tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{64}$$

esta é a equação diferencial da catenária.
Para facilitar o processo de solução, faz-se em (64)

$$p = \frac{dy}{dx}. \tag{65}$$

Daí, tem-se que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{66}$$

Substituindo (66) em (64), tem-se

$$\frac{dp}{dx} = a \cdot \sqrt{1 + p^2}. \tag{67}$$

Logo,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a\ dx. \tag{68}$$

Integrando ambos os lados da igualdade, tem-se

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a\ dx. \tag{69}$$

Utilizando a substituição trigonométrica, faz-se

$$p = \operatorname{tg}(\theta), \quad \text{com } \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{70}$$

E a derivada de p,

$$dp = \sec^2(\theta)\ d\theta. \tag{71}$$

Substituindo (70) em $\sqrt{1+p^2}$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1+p^2} &= \sqrt{1+\ \operatorname{tg}^2(\theta)} \\ &= \sqrt{\sec^2(\theta)} \\ &= \sec(\theta). \end{aligned} \tag{72}$$

Com isso, a (69) fica da seguinte forma

$$\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)}\ d\theta = \int \sec(\theta)\ d\theta = \int a\ dx. \tag{73}$$

Resolvendo (73), tem-se

$$\ln(\sec(\theta) +\ \operatorname{tg}(\theta)) + c_1 = ax + c_2.$$

Por (72), (70) e subtraindo c_1 de ambos os lados, obtêm-se

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{1+p^2} + p) &= ax + c_2 - c_1 \\ &= ax + c. \end{aligned} \tag{74}$$

Como na Figura 34 foi suposto o sistema de coordenadas de modo que o ponto de mínimo esteja sobre o eixo y. Coloca-se a origem do sistema de modo que quanto $x = 0$ tem-se $y = \dfrac{1}{a}$. Além disso, quando $x = 0$, então $p = \dfrac{dy}{dx} = 0$, pois é ponto de mínimo. Com isso, substituindo $p = x = 0$ em (74), encontra-se $c = 0$.

Assim, substituindo c, vamos isolar p em (74). Então,

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax,$$

ou seja,

$$\sqrt{1+p^2} + p = e^{ax}.$$

Subtraindo p e elevando ambos os lados ao quadrado, tem-se

$$\left(\sqrt{1+p^2}\right)^2 = \left(e^{ax} - p\right)^2.$$

Daí,

$$1 + p^2 = e^{2ax} - 2pe^{ax} + p^2,$$

que implica

$$2pe^{ax} = e^{2ax} - 1.$$

Dividindo tudo por $2e^{ax}$ temos que

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{2ax} - 1}{2e^{ax}} \\ &= \frac{e^{2ax}}{2e^{ax}} - \frac{1}{2e^{ax}} \\ &= \frac{e^{2ax-ax}}{2} - \frac{1 \cdot e^{-ax}}{2} \\ &= \frac{e^{ax}}{2} - \frac{e^{-ax}}{2} \\ &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}. \end{aligned} \tag{75}$$

Substituindo (65) e integrando em relação a x ambos os lados

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right)\, dx \tag{76}$$

Resolvendo as integrais temos

$$\begin{aligned} y + c_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int e^{ax} dx - \int e^{-ax} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{ax}}{a} + c_4 - \left(-\frac{e^{-ax}}{a} + c_5 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{ax}}{a} + c_4 + \frac{e^{-ax}}{a} - c_5 \right] \\ &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + \frac{c_4 - c_5}{2}, \end{aligned} \tag{77}$$

então,

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + \frac{c_4 - c_5}{2} - c_3 \\ &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c_0. \end{aligned} \tag{78}$$

Para calcular o valor de c_0, substitui-se $x = 0$ e $y = \frac{1}{a}$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{e^{a\cdot 0}+e^{-a\cdot 0}}{2a}+c_0\\ &= \frac{1+1}{2a}+c_0\\ &= \frac{2}{2a}+c_0\\ &= \frac{1}{a}+c_0.\end{aligned}$$

Portanto, $c_0 = 0$.
Assim (76) fica da seguinte forma

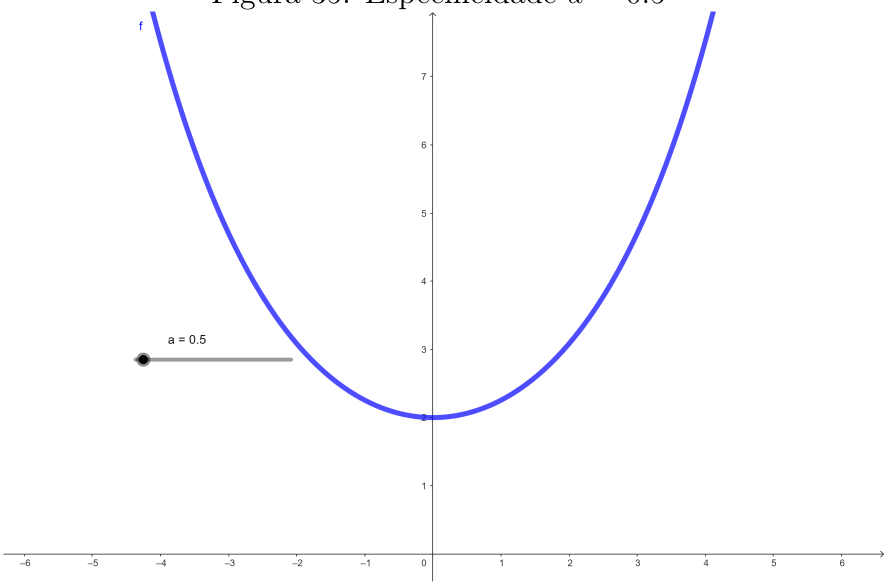
$$y = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}. \tag{79}$$

Portanto, (79) é a equação da catenária. De acordo com (56) ela também pode ser expressa como

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a}. \tag{80}$$

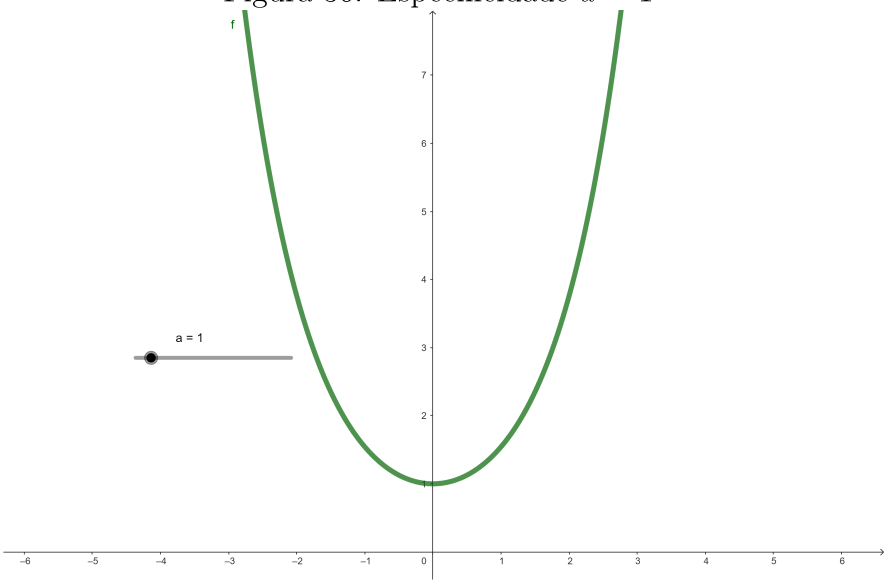
Nas Figuras 35, 36 e 37 se pode ver a catenária com a variação da especificidade do cabo, ou seja, o valor da constante a.

Figura 35: Especificidade $a = 0.5$



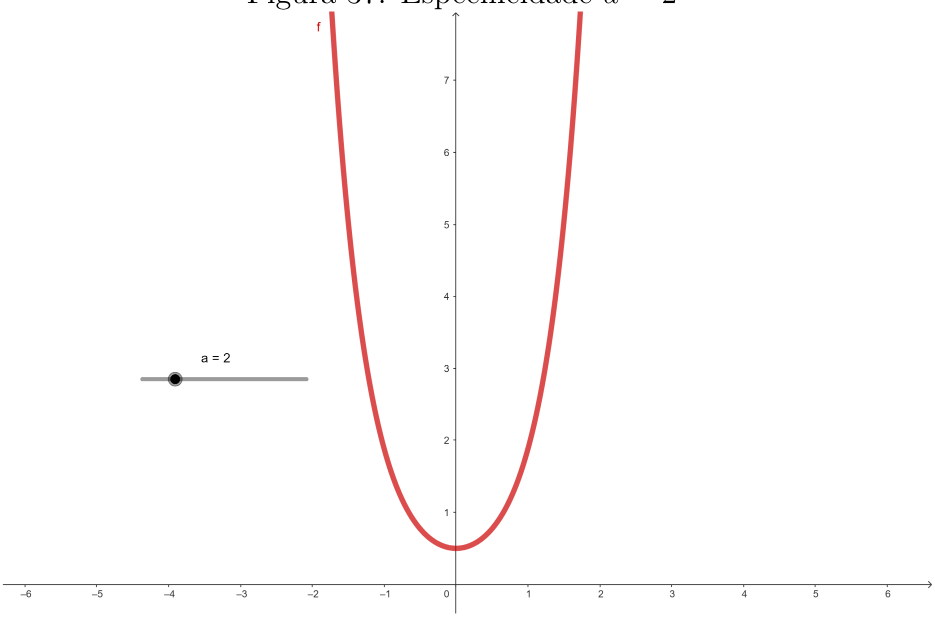
Fonte: Próprio autor.

Figura 36: Especificidade $a = 1$



Fonte: Próprio autor.

Figura 37: Especificidade $a = 2$



Fonte: Próprio autor.

Note que quanto mais distante de 0 é o valor de a mais próximo da origem do sistema de eixos é o ponto mínimo da curva.

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresenta-se a proposta de SD sobre a catenária para ser aplicada em turmas da 2ª série do Ensino Médio. Escolheu-se essa série devido as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica já terem sido estudadas na série anterior. Assim, a proposta é para complementar, com um assunto extracurricular, o estudo de funções e trigonometria.

Como descrito no capítulo 2, uma SD corresponde à articulação de diversas atividades, previamente planejadas com objetivos didáticos específicos e bem definidos, organizadas em torno de um conteúdo específico e permitindo a interdisciplinaridade com diferentes componentes curriculares (Zabala, 2014).

A SD aqui descrita conta com um total de quatro aulas, cada uma com duração prevista de duas horas, e foram construídas de forma que possibilitassem o desenvolvimento das competências específicas de Matemática de números 1, 4 e 5 da BNCC.

Na primeira aula, apresenta-se a catenária de maneira interdisciplinar com a disciplina de Educação Física, a fim de despertar o interesse e a motivação dos estudantes diante de um conteúdo de Matemática que eles podem vivenciar na prática, como no ato de pular corda. Eles serão instigados a pensar no formato da curva apresentada ao se ter uma corda suspensa pelas extremidades e caindo livremente sob a ação da gravidade e desafiados a calcular o comprimento dessa corda.

Na segunda aula, o objetivo é apresentar a história da catenária, a fórmula, as aplicações e o catenóide de maneira expositiva, utilizando slides, projetor e computador. Ao final da aula, é proposto a realização uma atividade prática, a de criar um catenóide com bolhas de sabão, feitas com dois pedaços de arame liso.

Na terceira, será apresentado a hipérbole e as funções trigonométricas hiperbólicas, incluindo o cálculo do comprimento da curva catenária em um intervalo. E retorna-se ao desafio da primeira aula, agora com os alunos sabendo a equação da curva e como calcular o comprimento.

Na quarta e última aula proposta, o objetivo é demonstrar a resistência da catenária quando comparada com a parábola, por meio de um experimento simples utilizando espaguete (para cadeira), arame liso, gesso, garrafas plásticas e as curvas catenária e parábola impressas para servir como molde. O experimento é a construção de um arco catenário e um arco parabólico feito com os arames e espaguete, observar os dois ao serem submetidos a ação de um peso sobre eles.

Estas aulas aqui propostas podem ser realizadas na escola nos horários de disciplinas como trilhas de matemática, horário de estudo, eletivas e recomposição ou a critério do professor e coordenação escolar.

Proposta de Aula 1

Tema: Apresentação da catenária.

Objetivos: Reconhecer a curva catenária como uma forma natural.

Duração: 2 horas.

Material necessário: Cordas de pular (3,5 metros), trena.

Avaliação: Será por meio da participação e realização do desafio proposto.

Roteiro: Primeiramente, convidar o/a professor(a) de Educação Física para esta aula em conjunto. No momento da aula, que proponho que seja na quadra poliesportiva da escola, no pátio ou em local apropriado para atividades físicas, falar sobre a presença da Matemática em tudo que fazemos, temos, criamos e vivemos. Citar exemplos na Educação Física. Passar a fala para o(a) professor(a) de Educação Física, comentar sobre a brincadeira de pular corda. Após, dividir os alunos em trios ou grupos para realizar a atividade de pular corda por um tempo a sua escolha. Ao final falar da relação entre a brincadeira e a Matemática, sendo assim introduzido o assunto da catenária.

Sugestão de fala: Vocês já estão acostumados a ouvir que "A Matemática está em tudo!" mas veem somente exemplos no quadro, em formato de questões. Iremos aprender de forma prática, no decorrer de quatro aulas, sobre uma curva muito interessante. Hoje faremos a introdução dela, ligando-a a Educação Física. Mas aí vocês podem se perguntar "Matemática e Educação Física, o que tem haver?". Temos desde os jogos de futebol, vôlei, handebol e basquete que são uma competição de dois times, cada time composto por uma certa quantidade de jogadores, o objeto é uma bola e o jogo acontece em uma quadra, a Matemática está sendo usada na quantidade (tanto do número de jogadores como nas possibilidades de times e jogadas, usamos ai análise combinatória), e também na bola e na quadra (em que temos uma esfera, a bola, trabalhando ai a geometria espacial, como também a geometria plana na quadra, e o calculo de áreas). Além disso, também tem o cálculo do IMC, que trabalha as operações de multiplicação e divisão com números racionais, e vários outros exemplos. E dentre todos os exemplos que há, hoje falaremos de um específico que é a brincadeira de pular corda, que o(a) professor(a) irá explicar e depois iremos praticar. Ver Figura 38.

- Fala sobre a brincadeia de pular corda;
- Os alunos brincam por um tempo determinado.

Figura 38: Pular corda

Fonte: Google imagens

Roteiro: Falar da relação entre a forma da corda suspensa e a Matemática.

Sugestão de fala: Na brincadeira duas pessoas suspendem, pelas extremidades, uma corda. Os outros esforçam-se para saltar a corda. Reparem na corda, observem a curva perfeita. Lhes pergunto:
- Vocês imaginam que curva é esta?
- Com qual curva ela parece?
- É possível encontrar essa curva em outros locais?
- Será ela importante na natureza, arte e nas construções?

No famoso livro "O Homem que Calculava" de Malba Tahan, capítulo 12, Beremiz, o personagem principal, revela grande interesse por um brinquedo de corda. Segue o texto transcrito do livro.

Ao deixarmos o lindo palácio do poeta Iezid pouco faltava para a hora do ars. Ao passarmos pelo marabu de Ramih ouvi o suave gorjear de pássaros entre os ramos de uma velha figueira.
— Eis, com certeza, um dos libertos de hoje — observei. —É um conforto ouvi-lo traduzir, nas melodias do canto, a alegria da liberdade conquista!
Beremiz, porém, naquele momento não se interessava pelo canto da passarada que esvoaçava entre os ramos, ao pôr do sol. Absorvia-lhe a atenção um grupo de meninos que se divertiam na rua a pequena distância. Dois dos pequenos suspendiam, pelas extremidades,

um pedaço de corda fina que devia ter quatro ou cinco côvados de comprimento. Os outros esforçavam-se por transpor, de um salto, a corda colocada ora mais baixo, ora mais alto, conforme a agilidade do saltador.
— Repara na corda, ó Bagdali — disse o calculista segurando-me pelo braço. — Observa a curva perfeita. Não achas o caso digno de estudo? — Que caso? Que curva? — exclamei. — Não vejo nada de extraordinário naquele ingênuo e banal brinquedo de crianças que aproveitam as últimas horas do dia para um recreio inocente.
— Pois, meu amigo — tornou Beremiz —, convence-te de que os teus olhos são cegos para as maiores belezas e maravilhas da natureza. Quando os meninos erguem a corda, segurando-a pelas extremidades, e deixando-a cair livremente sob a ação do próprio peso, ela forma uma curva que deve ser notável, pois surge como resultante de forças naturais. Já tive ocasião de observar essa curva — que o sábio Nô Elin chamava maracanã — nas teias e na forma que apresenta a corcova de certos dromedários! Terá tal curva alguma analogia com as derivadas da parábola? Futuramente, se Alá quiser, os geômetras descobrirão meios de traçar esa curva, ponto por ponto, e estudar-lheão com absoluto rigor todas as propriedades (Tahan, 2017, p. 83).

Respondendo algumas das perguntas feitas e também ao que diz Malba Tahan no livro, a curva formada pela corda de pular recebe hoje um nome, e ela é muito utilizada na engenharia e arquitetura. Além disso, como visto ela se forma naturalmente, logo encontramos ela em diversas situações na natureza. Na próxima aula iremos ver mais dessa curva, como sua história, fórmula e aplicações, e também um experimento com bolhas de sabão. Mas antes, tenho um desafio para vocês.

Desafio 1. Calcular o comprimento da corda de pular, sem medir a corda.

Proposta de Aula 2

Tema: Catenária: história e aplicações.

Objetivos: Compreender a história da catenária e onde é aplicada.

Duração: 2 horas.

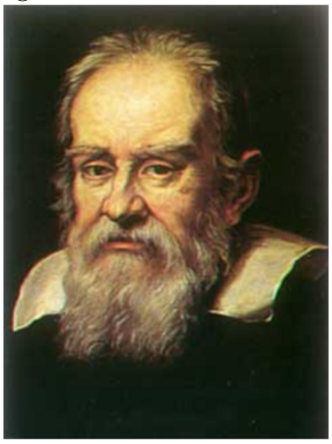
Material necessário: Computador, data show, balde com água e sabão, dois pedaços de arame liso.

Avaliação: Será por meio da participação, criação e visualização do catenóide.

Roteiro: Preparar um slide contendo a história e aplicações de acordo com o exposto a seguir. No final da aula fazer a prática de criar um catenóide de bolha de sabão.

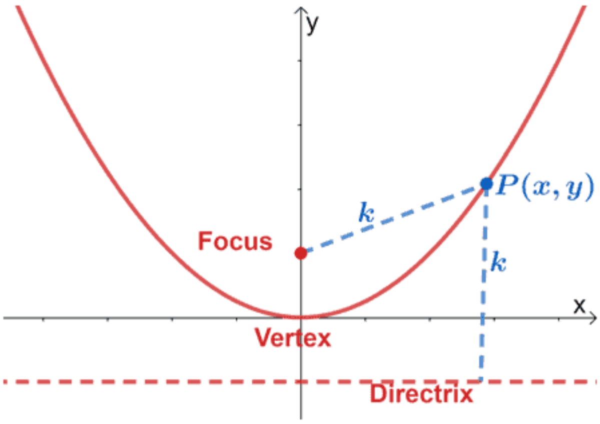
Sugestão de apresentação: Na aula passada, em que brincamos de pular corda, ficou a indagação de qual era a curva formada pela corda ao ser suspensa pelas pontas. Nesta aula descobriremos.
Esse questionamento também foi feito por matemáticos importantes na história. Um deles, chamado Galileu Galilei, que disse, matematicamente, que a curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sobre ação da gravidade, era aproximadamente uma parábola.

Figura 39: Galileu Galilei



Fonte: Google imagens

Figura 40: Parábola



Fonte: Google imagens

Porém, Galileu estava equivocado. E foi o matemático e físico holandês Christiaan Huygens, com apenas 17 anos de idade, que mostrou por métodos físicos que a afirmação de Galileu estava errada. E também foi o primeiro a utilizar o termo catenária, que vem do latim *catena* e significa "corrente".

Figura 41: Christiaan Huygens

Fonte: Google imagens

Décadas depois, em 1960, o matemático Jakob Bernoulli lançou publicamente um desafio: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos. Que é exatamente a catenária.

Figura 42: Jakob Bernoulli

Fonte: Google imagens

Figura 43: Curva Catenária

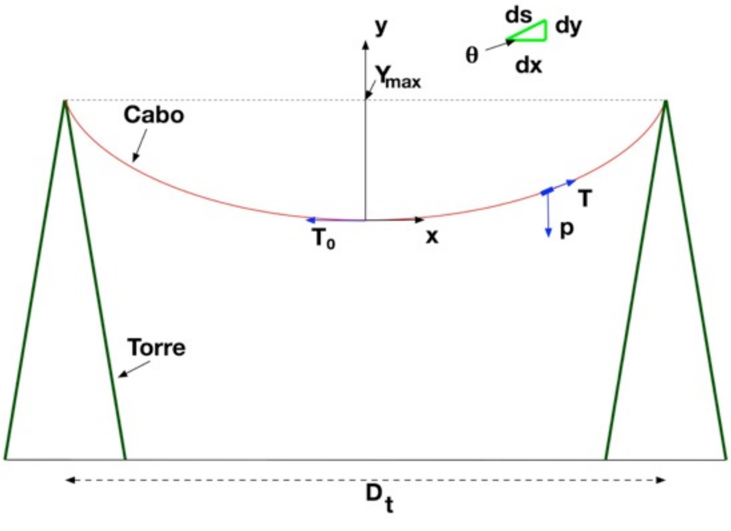
Fonte: Google imagens

Logo surgiu três soluções de grandes estudiosos da área, Huygens, Leibniz e seu irmão Johaan Bernoulli.

Figura 44: Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Google imagens

Figura 45: Catenária



Fonte: Google imagens

Figura 46: Johann Bernoulli

Fonte: Google imagens

Os três matemáticos chegaram, por meios diferentes em um mesmo resultado. Huygens por meio geométrico e Leibniz e Johaan por meios analíticos, usando um método matemático chamado de Cálculo.

As curvas que estudamos tem, cada uma, a sua equação algébrica. A da parábola, por exemplo, é da forma $y = ax^2+bx+c$, que é formada por um polinômio. Já a catenária, em uma notação moderna, é expressa por uma equação exponencial da forma

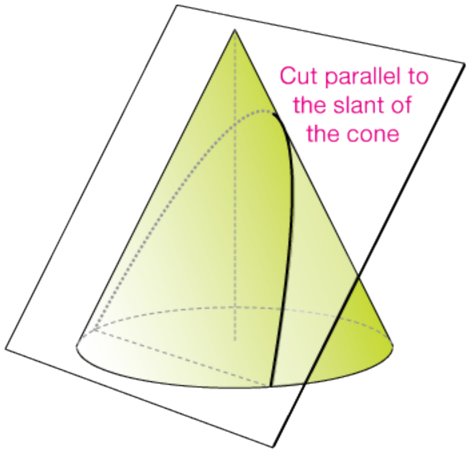
$$y = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}. \tag{81}$$

Há também a escrita equivalente utilizando a trigonometria, mais especificadamente a chamada "trigonometria hiperbólica" que surgiu a partir dos estudos da hipérbole (que estudaremos na próxima aula). Assim, temos a catenária representada pela função hiperbólica

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a} \tag{82}$$

onde "a" em (81) e (82) é a constante determinada por meio da gravidade e do material da corda. Outro ponto interessante é que a parábola é uma cônica, ou seja, pode-se obtê-la através de uma secção do plano em um cone. Já a catenária não é possível. Ver Figura 47.

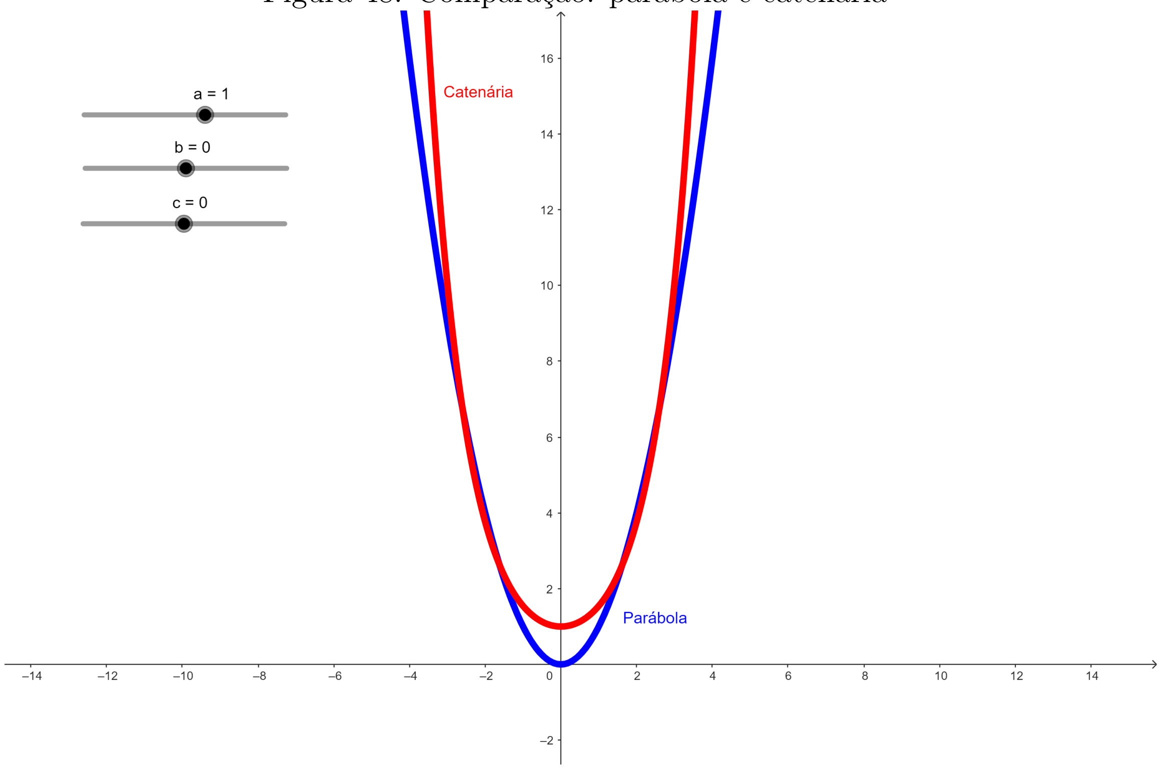
Figura 47: Secção Cônica



Fonte: Google imagens

Na Figura 48 pode-se ver a comparação entre a parábola, na cor azul, e a catenária, na cor vermelha, ambas com o parâmetro $a = 1$.

Figura 48: Comparação: parábola e catenária



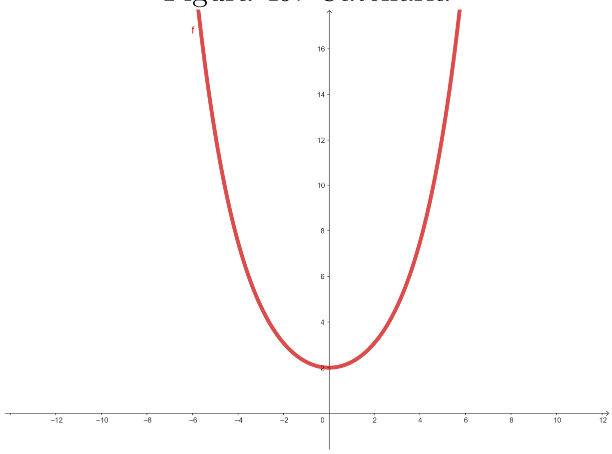
Fonte: Próprio autor

Roteiro: Professor(a) utilize umas das famosas calculadoras gráficas, Geogebra ou Desmos, para mostrar a comparação feita na Figura 48 modificando, no controle deslizante, o valor do parâmetro a.

Esta curva está no plano (2D), já imaginou o que aconteceria se realizar uma rotação de 360º dela em torno de um dos eixos?

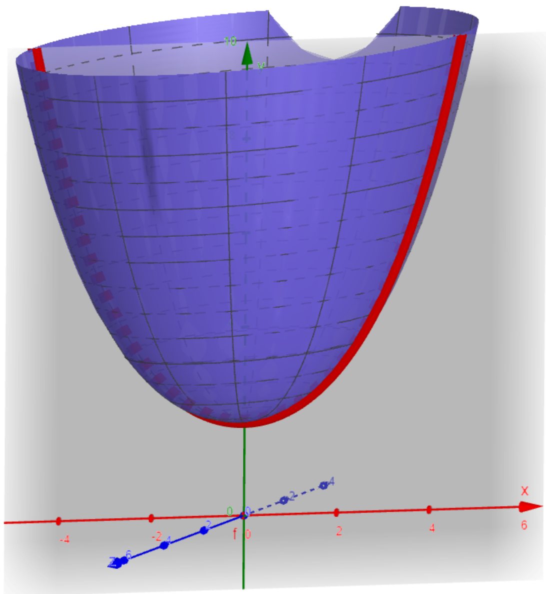
Então... Se rotacionar 360° a catenária da Figura 49 em torno do eixo y obtemos a figura tridimensional (3D) como na Figura 50.

Figura 49: Catenária



Fonte: Próprio autor

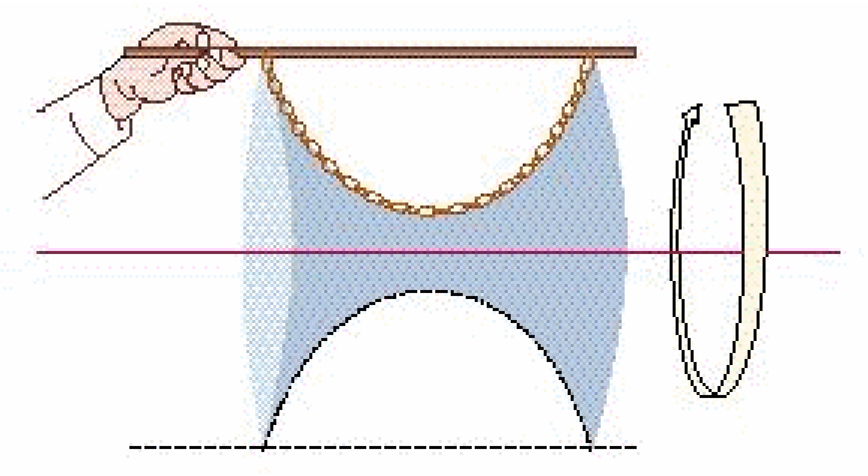
Figura 50: Catenária Rotacionada no eixo y



Fonte: Próprio autor

E se rotacionar a catenária em 360° pelo eixo x, obtemos a Figura 51 chamada de catenóide.

Figura 51: Catenóide



Fonte: mathcurve.com

Observe que na Figura 51 há uma corrente suspensa, formando a catenária, e a rotação dela em 360° pelo eixo horizontal na cor lilás, como indica a seta, forma esta belíssima superfície. Ela é uma das chamadas superfícies mínimas de revolução. Em 1970, Euler, descobriu esta superfície que apresenta para um dado volume a menor área superficial possivel.

Como temos visto, a catenária é a curva formada por uma corrente suspensa pelas pontas em que está somente sob a força da gravidade. Por conta disso, ela possui algumas características/ propriedades bem interessantes, e devido a estas que a curva é bastante usada na arte, engenharia, arquitetura e é encontrada em diversas partes da natureza.

Mas... quais são essas característica?

O peso é distribuído igualmente por toda a extensão da corrente, que forma a catenária. Por isso, ela é muito utilizada na construção. Como exemplo, nas pontes pênsil.

Ponte pênsil ou ponte suspensa é um tipo de ponte sustentada por cabos ou de suspensão. As primeiras pontes suspensas modernas, com plataformas niveladas, são datadas dos século XIX, porém existem relatos desse modelo de ponte desde o século III.

Figura 52: Ponte Pênsil em São Vicente - SP

Fonte: stock.adobe.com

A Golden Gate Bridge está localizada na Califórnia, nos Estados Unidos. Liga o Centro de São Francisco ao Bairro Sausalito. Inaugurada em 1933, tem 2.737 metros de comprimento, como pode ser visto na Figura 53

Figura 53: Ponte Pênsil Golden Gate

Fonte: wikipédia

Além das pontes podemos encontrar a curva em lugares bem mais próximos e comuns. Como por exemplo, nos fios de alta tensão distribuídos por toda a cidade para fornecer energias as residências, ou seja, na rede elétrica. Ver Figura 54.

Figura 54: Rede elétrica

Fonte: paranavai.portaldacidade.com

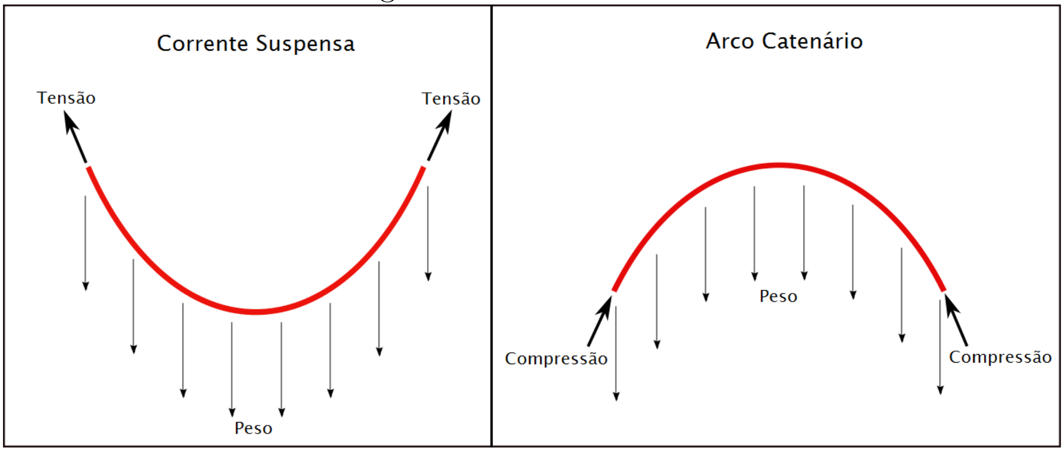
Outro exemplo são os organizadores de fila encontrados em lotéricas, eventos e museus, como se ver na Figura 55.

Figura 55: Organizador de fila

Fonte: disktem.com.br

Nas construções a catenária também é bastante utilizada, porém, na sua forma invertida chamada de arco catenário, em que seu ponto mínimo se torna ponto máximo. Isto devido a catenária sofrer somente forças de tração e quando invertida sofre somente forças de compressão, assim podendo ser criados arcos mais firmes e resistentes, menos pesados e mais econômicos com material.

Figura 56: Arco Catenário



Fonte: naotrivial.wordpress.com

Logo, por consequência existem também pontes sustentadas por esses arcos. Conforme se ver na Figura 57

Figura 57: Ponte Ernesto Dornelles

Fonte: pt.wikipedia.org

Localizada no Rio Grande do Sul, sobre o Rio das Antas, a ponte Ernesto Dornelles é uma ponte em arco que não possui pilares apoiados no leito do rio e sua estrutura de sustentação é em concreto armado formando dois arcos paralelos. É considerada uma das maiores pontes em arcos paralelos suspensos do mundo.

Além dos arcos catenários em pontes, a arquitetura faz muito uso em outras construções, como o Gateway Arch.

Figura 58: Gateway Arch

Fonte: britannica.com

Localizado em St. Louis nos Estados Unidos, foi projetado pelo arquiteto finlandês Eero Saarinen em 1947. O arco tem a forma de uma catenária invertida com uma altura de 192 metros de altura sendo reforçado a metade inferior por concreto e a metade superior por carbono.

O arquiteto espanhol Antoni Gaudí usava em suas obras um estilo orgânico, bem pessoal e todo inspirado na natureza. E uma das formas bastante utilizada por ele era a catenária.

Figura 59: Sótão da Casa Milà

Fonte: quatrocantosdomundo.wordpress.com

Na Figura 59, "Gaudí utilizou arcos catenários como estrutura de apoio para o telhado causando um visual maravilhoso. O sótão é uma sala bem ventilada composto por 270 abóbadas formadas por arcos catenários."(Lima, 2019, p. 74).

Um outro exemplo, e bastante interessante, em que se encontra o arco catenário é em uma construção bem rústica e feita de blocos de gelo/neve, os Iglús.

Figura 60: Iglú

Fonte: pt.wikipedia.org

E como Gaudí, se inspirou na Natureza, vamos ver alguns exemplos em que encontra-se uma catenária ou um arco catenário nas formas naturais, em que não há influencia do ser humano.

Figura 61: Teia de aranha

Fonte: inovacaotecnologica.com.br

É difícil de notar, mas pela definição da catenária nota-se que as teias de aranhas também formam essa curva.

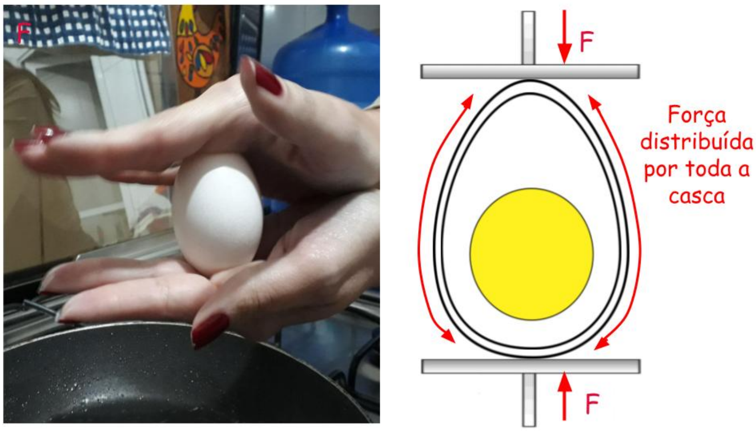
Já vimos que o arco catenário é resistente. Na natureza ele aparece também para provar essa resistência.

Figura 62: Barriga de grávida

Fonte: digitais.criacionismo.com.br

Ela é uma perfeita aplicação do arco catenário. Pois precisa da máxima resistência e menor uso de material para aguentar o peso do bebê e do líquido amniótico. Pela mesma situação temos também o ovo da galinha. Em que é frágil lateralmente, porém ele não quebra quando a galinha o põe, exatamente por ter o formato de arco catenário.

Figura 63: Ovo de galinha



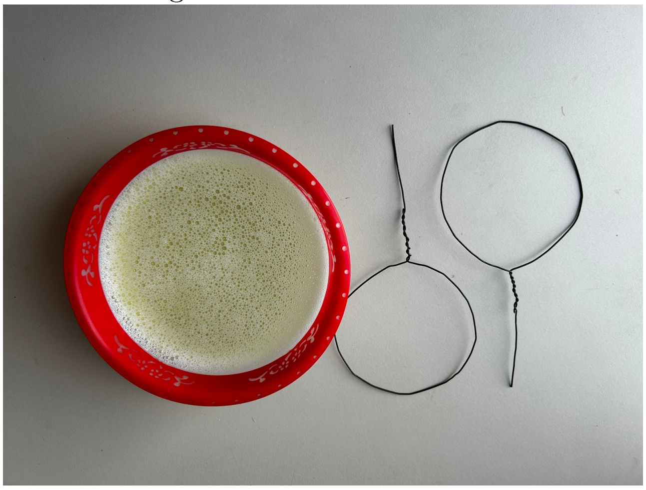
Fonte: facebook.com

Vamos agora mostrar o catenóide por meio da natureza, com bolhas de sabão.

Roteiro: Criação do catenóide com bolhas de sabão.

Passo 1: Com o arame liso, forme duas circunferências para fazer as bolhas de sabão.

Figura 64: Arame e sabão

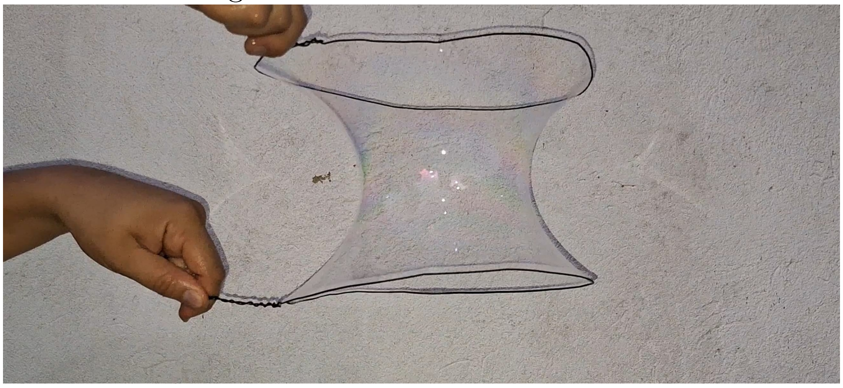


Fonte: Próprio autor.

Passo 2: Mergulhe-os no balde com água e sabão.

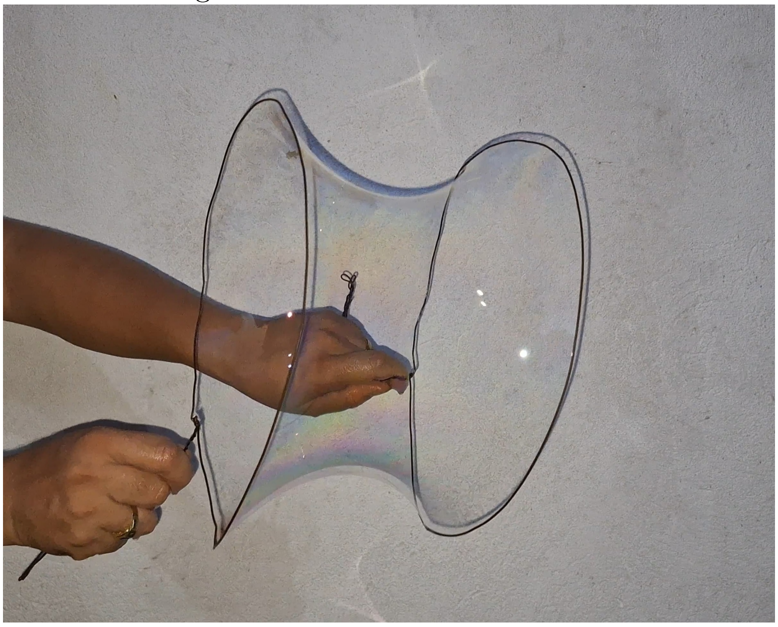
Passo 3: Junte as duas circunferências, e separe-as lentamente para formar o catenóide.

Figura 65: Catenóide de sabão 1



Fonte: Próprio autor.

Figura 66: Catenóide de sabão 2



Fonte: Próprio autor.

Na próxima aula, aprenderemos sobre as funções hiperbólicas e como calcular o comprimento da catenária.

Proposta de Aula 3

Tema: Funções trigonométricas hiperbólicas.

Objetivos: Compreender as funções trigonométricas hiperbólicas;
Calcular o comprimento da catenária.

Duração: 2 horas.

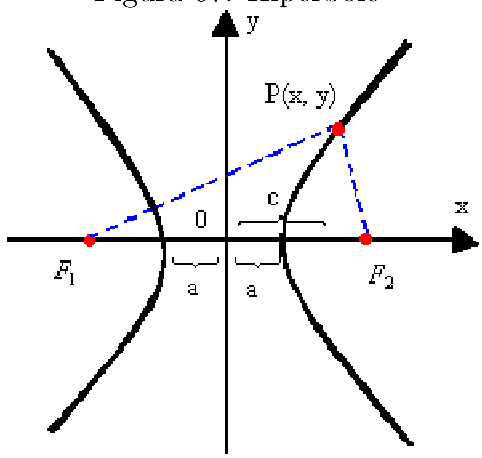
Material necessário: Quadro, pincel, apagador, data show. Corda da aula 1, trena.

Avaliação: Será por meio da resolução dos exercícios propostos.

Roteiro: Nesta aula explicamos as funções hiperbólicas, que gera o gráfico da curva catenária. Com isso, o professor deve ministrar a aula sobre as funções hiperbólicas como lhe for melhor, em slides ou não. A seguir tem-se a sugestão de apresentação.

Sugestão de apresentação: Observando a Figura 67 vamos definir o que é uma hipérbole e seus elementos.

Figura 67: Hipérbole



Fonte: somatematica.com.br

Define-se hipérbole como sendo o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$, ou seja,

$$H = \{P; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c.$$

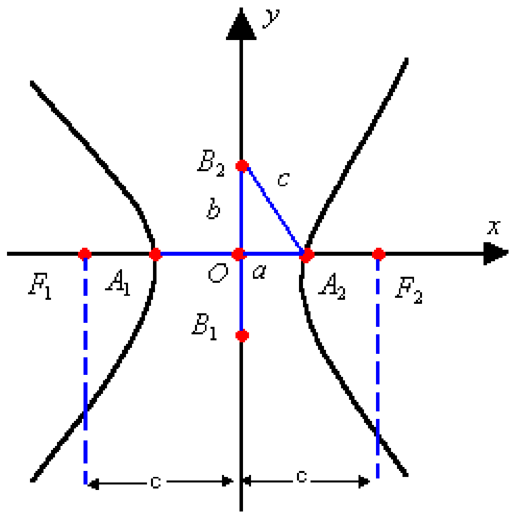
Elementos:

- Focos: são os pontos F_1 e F_2.

- Vértices: são os pontos A_1 e A_2.
- Vértices imaginários: são os pontos B_1 e B_2.
- Centro: o ponto O.
- Eixo focal: é o segmento formado pelos vértices, ou seja, A_1A_2 e que tem comprimento $2a$.
- Eixo não focal ou eixo imaginário: é o segmento formado pelos vértices imaginários, ou seja, B_1B_2 e que tem comprimento $2b$.
- Distância focal: é a distâncias entre os focos, ou seja, $d(F_1, F_2) = 2c$.

A Figura 68, mostra os elementos da hipérbole.

Figura 68: Elementos da hipérbole

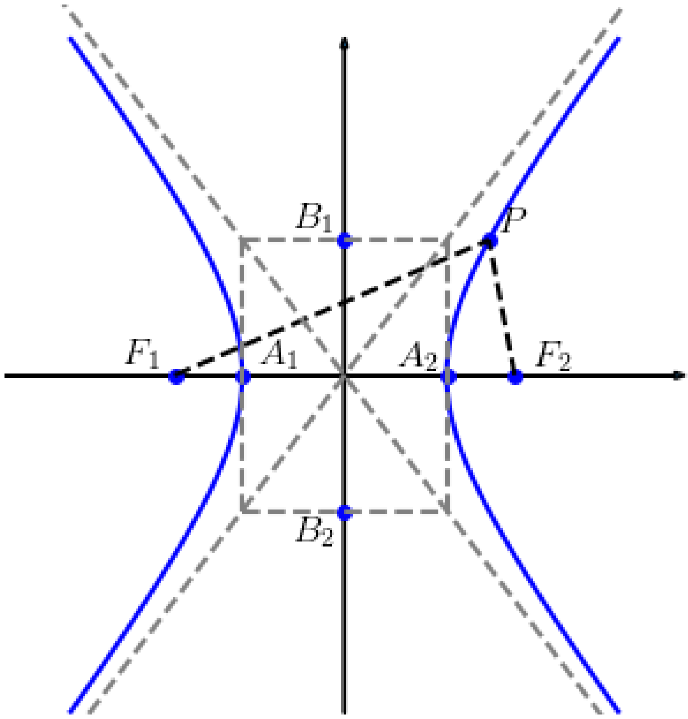


Fonte: somatematica.com.br

Tem-se que a distância de um vértice A a um vértice imaginário B é c, observando o triângulo retângulo A_2OB_2 na Figura 68, pelo teorema de Pitágoras temos que $c^2 = a^2+b^2$.

Ao formar um retângulo em que os vértices da hipérbole são pontos médios dos lados desse retângulo, a reta que contém as diagonais desse retângulo são chamadas de assíntotas da hipérbole. Observe na Figura 69.

Figura 69: Assíntotas da hipérbole



Fonte: notaspedrok.com.br

Temos que a hipérbole nunca toca as assíntotas (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017), por mais próximas que fiquem.

Vamos ver agora a equação reduzida da hipérbole. Se o centro da hipérbole coincide com a origem do sistema do plano cartesiano, teremos que a equação será

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Em que a e b são as distâncias da origem aos vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 respectivamente. No caso de o centro da hipérbole ter coordenadas $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ a equação reduzida fica da seguinte forma.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Além disso, pode-se ter os focos da hipérbole no eixo y, se o centro for o ponto $(0, 0)$ ou numa reta paralela ao eixo y se o centro não for a origem. Nesse caso, na equação reduzida o x e o y trocam de posição, ficando

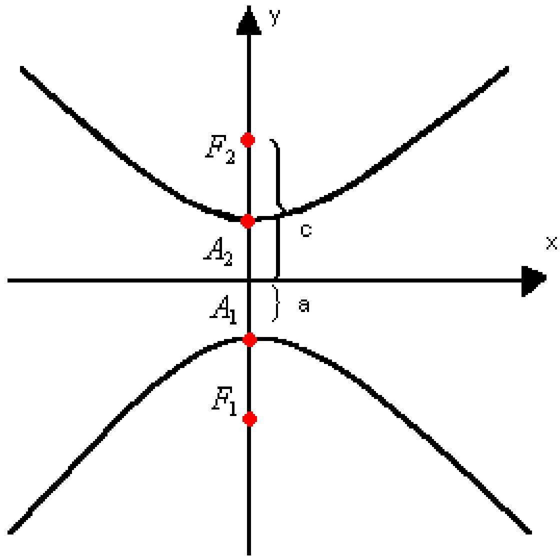
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

quando o centro coincidir com a origem. E quando o centro for diferente da origem ficará

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$

E o gráfico da hipérbole será como na Figura 70.

Figura 70: Hipérbole com foco no eixo y



Fonte: somatematica.com.br

Observação: Quando tem-se $a = b = 1$ a equação $x^2 - y^2 = 1$ forma a chamada hipérbole unitária.

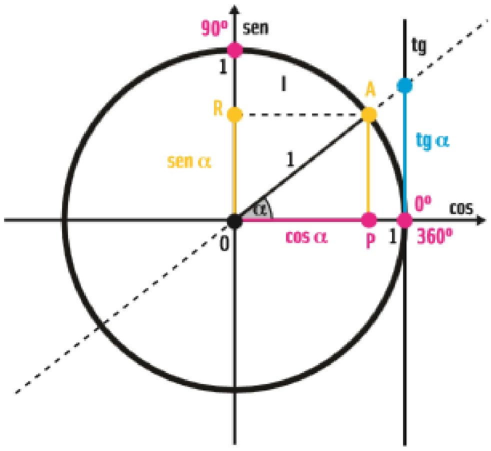
Exemplo 3. Dada a hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Determine as coordenadas do centro, focos e vértices desta hipérbole.

Solução: Analisando o formato da equação, nota-se que o centro coincide com a origem, logo o centro tem coordenada $(0, 0)$ e focos no eixo x. Além disso, tem-se que $a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$ e $b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$. Daí, $A_1 = (-2, 0)$, $A_2 = (2, 0)$, $B_1 = (0, -3)$ e $B_2 = (0, 3)$. Para descobrir c utilizamos o teorema de Pitágoras, logo substituindo os valores de a e b tem-se $c^2 = 4 + 9 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$. Portanto as coordenadas dos focos são $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$.

Agora vamos definir as funções trigonométricas hiperbólicas. Assim como as funções trigonométricas usuais são definidas no círculo unitário como sendo, de acordo com a Figura 71:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}.$$

Figura 71: Trigonometria no círculo Unitário



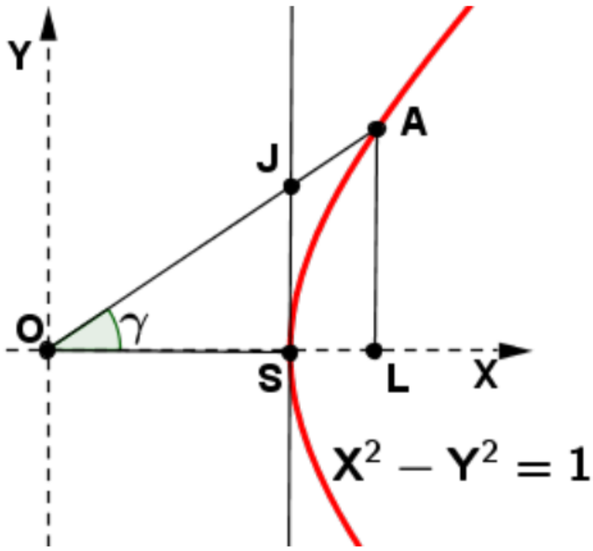
Fonte: guiadoestudante.abril.com.br

Como $\overline{OA} = 1$ e $\overline{AP} = \overline{OR}$ temos que

$$\cos(\alpha) = \overline{OP} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}(\alpha) = \overline{OR}.$$

De modo análogo, definimos as funções trigonométricas hiperbólicas. Usamos a hipérbole unitária que tem equação $x^2 - y^2 = 1$ e um ponto na hipérbole do lado positivo do eixo x, como na Figura 72.

Figura 72: Trigonometria na hipérbole Unitária



Fonte: (Santos, 2015, p. 30)

De acordo com a Figura 72, definimos as funções cosseno e seno hiperbólico, respectivamente, por

$$\cosh(\gamma) = \frac{\overline{OL}}{\overline{OS}} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{senh}(\gamma) = \frac{\overline{AL}}{\overline{OS}}.$$

Como $\overline{OS} = 1$ temos que

$$\cosh(\gamma) = \overline{OL} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh}(\gamma) = \overline{AL}.$$

E com isso, definimos a tangente hiperbólica por

$$\tanh(\gamma) = \frac{\operatorname{senh}(\gamma)}{\cosh(\gamma)} = \frac{\overline{AL}}{\overline{OL}}.$$

Como os triângulos OLA e OSJ são semelhantes, temos que $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{OL}} = \dfrac{\overline{JS}}{\overline{OS}}$ e como $\overline{OS} = 1$, então

$$\tanh(\gamma) = \overline{JS}.$$

Temos também a Relação Fundamental que diz que

$$\cosh^2(\gamma) - \operatorname{senh}^2(\gamma) = 1.$$

Podemos escrever as funções cosseno, seno e tangente hiperbólica na forma exponencial, que ficam, respectivamente, da seguinte forma:

$$\cosh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2},$$

$$\operatorname{senh}(\gamma) = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2},$$

e

$$\tanh(\gamma) = \frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1}.$$

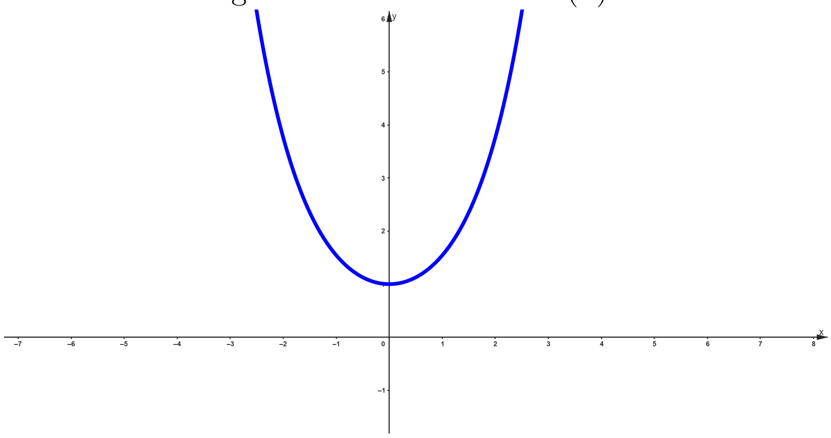
Exemplo 4. Mostre que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

Solução: Vamos fatorar e utilizar a forma exponencial. Assim,

$$\begin{aligned}
\cosh^2(\gamma) - \operatorname{senh}^2(\gamma) &= (\cosh(x) + \operatorname{senh}(x)) \cdot (\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2e^x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^x \cdot e^{-x} \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Vamos ver agora como são os gráficos das funções hiperbólicas. Na Figura 73 temos o gráfico da função cosseno hiperbólico.

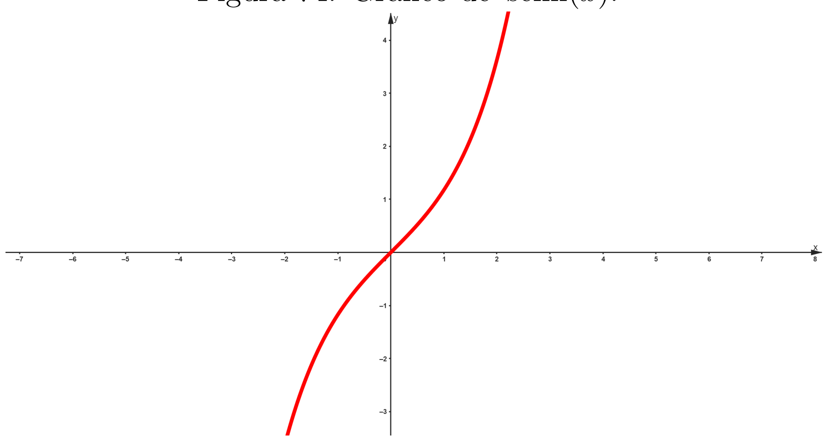
Figura 73: Gráfico de $\cosh(x)$.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 74, temos o gráfico do seno hiperbólico.

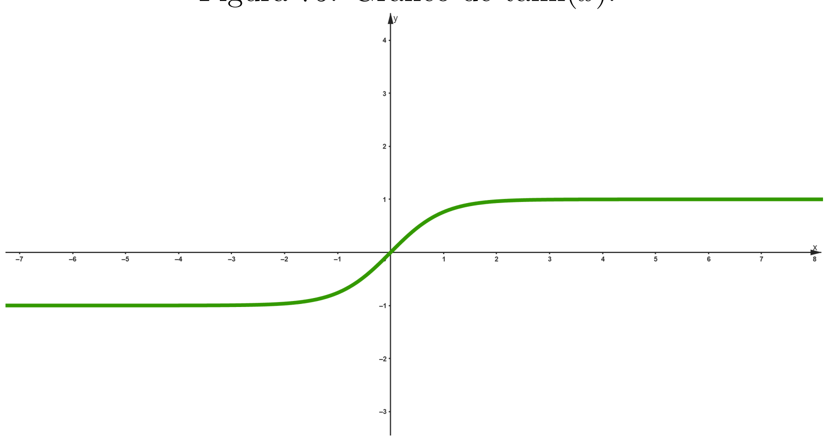
Figura 74: Gráfico de $\operatorname{senh}(x)$.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 75, mostra o gráfico da tangente hiperbólica.

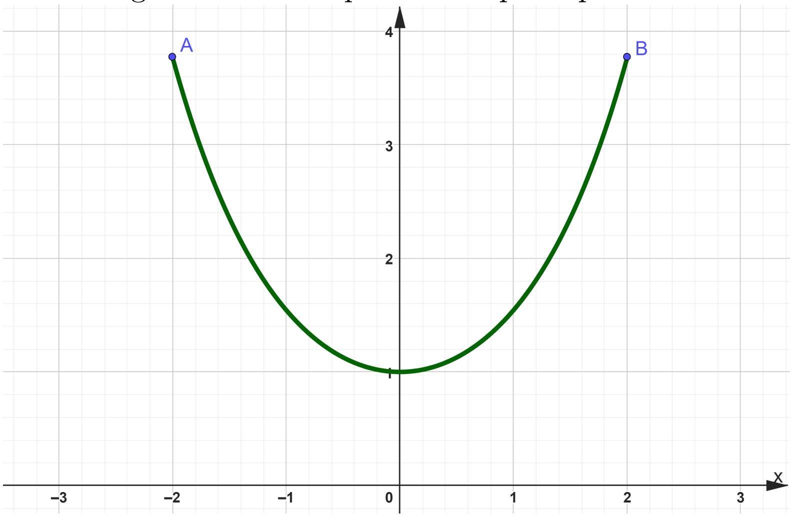
Figura 75: Gráfico de $\tanh(x)$.



Fonte: Próprio autor.

Vamos ver agora que é possível calcular o comprimento do gráfico (linha), sabendo onde ele inicia e termina. Imagine uma linha pendurada por suas pontas e que forma exatamente o gráfico da função cosseno hiperbólico em um intervalo real, como na Figura 76.

Figura 76: Linha pendurada pelas pontas.



Fonte: Próprio autor.

Veja que as pontas da linha, no plano cartesiano, tem abscissas -2 e 2, ou seja, o gráfico está localizado no intervalo $[-2, 2]$ do eixo x. Para calcularmos o comprimento do gráfico do ponto A ao ponto B, vamos calcular a diferença entre $\operatorname{senh}(x_B)$ e $\operatorname{senh}(x_A)$ sendo $x_A = -2$ e $x_B = 2$. Ou seja,

$$\operatorname{senh}(2) - \operatorname{senh}(-2) = 3,62686 + 3,62686 = 7,25372 \text{ cm}.$$

De modo geral, se $f : [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \dfrac{\cosh(ax)}{a}$ com $a \neq 0$ real, o comprimento do gráfico será $\dfrac{\operatorname{senh}(ac) - \operatorname{senh}(ab)}{a}$.

Exemplo 5. Dada a função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\cosh(2x)}{2}$. O comprimento dessa curva é?

Solução: Vamos calcular

$$\frac{\operatorname{senh}(2 \cdot (1)) - \operatorname{senh}(2 \cdot (-1))}{2} = \frac{\operatorname{senh}(2) - \operatorname{senh}(-2)}{2}.$$

Com o auxilio da calculadora científica do celular, vamos calcular o valor de $\operatorname{senh}(2)$ e $\operatorname{senh}(-2)$. Na calculadora cientifica aperte a tecla (sinh) e depois a tecla (2), em seguida aperte $(=)$, e terá como resultado $3,627$ aproximadamente. De modo análogo, calcula-se o $\operatorname{senh}(-2)$, apertando (sinh), depois (-)(2) em seguida o $(=)$, obtendo o resultado $-3,627$.

Assim,

$$\frac{\text{senh}(2) - \text{senh}(-2)}{2} = \frac{3,627 - (-3,627)}{2} = \frac{3,627 + 3,627}{2} = 3,627.$$

Portanto o comprimento da curva é 3,627 cm.

Exemplo 6. Seja uma função $f : [-4, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cosh(x)$. Calcule o comprimento do gráfico.

Solução: Vamos calcular senh(3) − senh(−4). Para isso, utiliza-se uma calculadora científica (a do celular é uma boa opção). Logo, com o auxilio da calculadora obtemos, aproximadamente, que $\text{senh}(3) = 10,02$ e $\text{senh}(-4) = -27,29$. Logo tem-se $10,02 - (-27,29) = 10,02 + 27,29 = 37,31$ cm.
Outro modo é utilizar a forma exponencial. Assim, teríamos

$$\begin{aligned} \text{senh}(3) - \text{senh}(-4) &= \frac{e^3 - e^{-3}}{2} - \frac{e^{-4} - e^4}{2} \\ &= \frac{e^3 - \frac{1}{e^3}}{2} - \frac{\frac{1}{e^4} - e^4}{2} \\ &= \frac{e^6 - 1}{2e^3} - \frac{1 - e^8}{2e^4}. \end{aligned}$$

Como temos, aproximadamente, $e = 2,718$ calcula-se as potências com auxilio de uma calculadora. Logo,

$$\begin{aligned} \text{senh}(3) - \text{senh}(-4) &= \frac{e^6 - 1}{2e^3} - \frac{1 - e^8}{2e^4} \\ &= \frac{403,43 - 1}{2 \cdot 20,08} - \frac{1 - 2.980,96}{2 \cdot 54,598} \\ &= \frac{402,43}{40,16} - \frac{-2.979,96}{109,196} \\ &= 10,02 + 27,29 \\ &= 37,31 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Exemplo 7. (Mendes, 2017, p. 51) Para uma rede elétrica urbana, é preciso de postes de mesma altura, com 5,5 metros de altura a uma distância de 15 metros. Sabendo que a altura do ponto mais baixo desse fio é 5 metros, determine o valor do coeficiente "a", sendo $f(x) = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$.

Solução: Colocando no plano cartesiano, de modo que o ponto mais baixo tenha coordenada $(0,5)$, ou seja, o ponto mais baixo do gráfico é o $f(0)$. Assim, calcula-se

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{e^{a\cdot 0}+e^{-a\cdot 0}}{2a} \\ &= \frac{1+1}{2a} \\ &= \frac{2}{2a} \\ &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Como $f(0)=5$, temos

$$5=\frac{1}{a}.$$

Portanto,

$$a=\frac{1}{5}.$$

Seguiremos agora para os exercícios propostos desta aula. As soluções estão no Apêndice A.

Exercício 1. Seja o $\operatorname{senh}(x)=\sqrt{3}$. Determine o $\cosh(x)$ e a $\tanh(x)$.

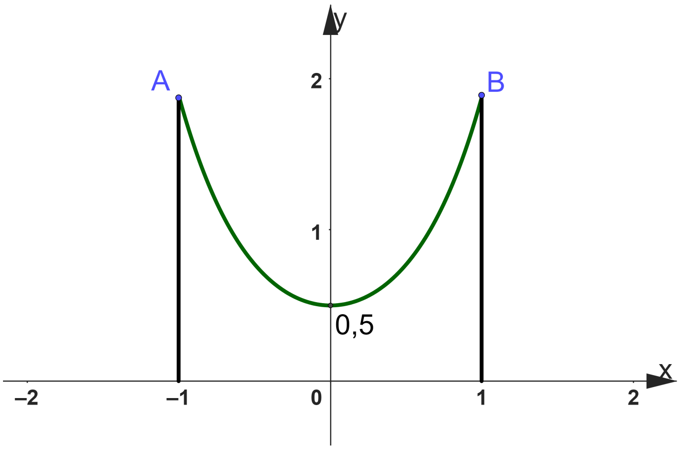
Exercício 2. Sendo $\tanh(x)=0,8$, quanto é o $\operatorname{senh}(x)$ e o $\cosh(x)$?

Exercício 3. Calcule o valor de $\cosh(0)$ e $\operatorname{senh}(0)$, usando a forma exponencial.

Exercício 4. Dada uma corrente suspensa, representada pela função $f(x)=\dfrac{\cosh(ax)}{a}$ em que a altura mínima da corrente é 2 metros. Calcule o valor de "a" da função.

Exercício 5. Dada a função $f:[-5,5]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\cosh(0,5x)}{0,5}$. Calcule o comprimento desta curva.

Exercício 6. Calcule o comprimento da curva dada na figura abaixo, que é gráfico da função $f(x)=\dfrac{\cosh(ax)}{a}$, e também as coordenadas dos pontos A e B.



Fonte: Próprio autor.

Desafio 2. Calcular o comprimento da corda de pular utilizando a função cosseno hiperbólico, na seguinte situação: Dois alunos seguram a corda em mesma altura e ficam três metros de distância um do outro, deixando o ponto mais baixo da corda a 20 centímetros do chão. Além disso, verifique com os cálculos a altura em que está as pontas da corda. Dica: a função é da forma $f(x) = \dfrac{\cosh(ax)}{a} - 1,8$.

Proposta de Aula 4

Tema: Prática de resistência do arco catenário.

Objetivo: Construir e demonstrar a resistência do arco catenário.

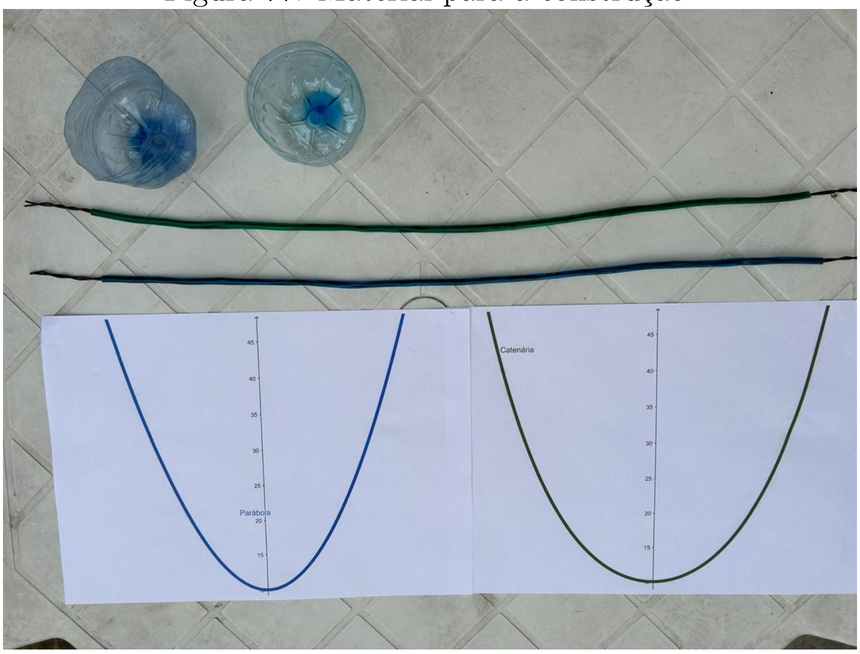
Duração: 2 horas.

Material necessário: Espaguete (para cadeira), arame liso, gesso, garrafas plasticas. Curvas catenária e parábola impressas.

Avaliação: Será por meio da participação e realização da prática.

Roteiro: Nesta aula iremos construir um arco catenário e uma parábola com uso de arame liso. São necessários dois pedaços de Espaguete de cores diferentes para diferenciar as curvas. Quatro pedaços de arame liso maiores que o pedaço de espaguete. Um pacote de gesso, e quatro fundos de garrafas plásticas cortadas formando um copo, que servirá de base. A catenária e a parábola para impressão estão em Apêndice.

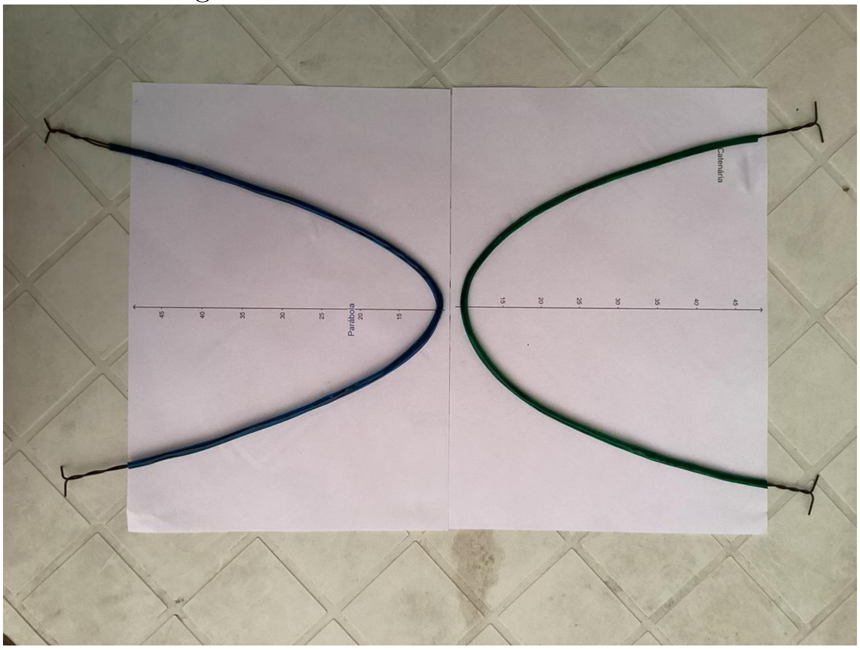
Figura 77: Material para a construção



Fonte: Próprio autor.

Passo 1: Passe dois fios de arame por dentro de cada espaguete. Passados os arames, enrole a parte excedente e dobre as pontas para lados distintos.
Passo 2: Posicione os espaguetes, sobre as folhas da catenária e da parábola, e molde-os de forma a acompanhar e cobrir, o mais fielmente, as curvas. Veja na Figura 78 o exemplo.

Figura 78: Posicionamento nas curvas



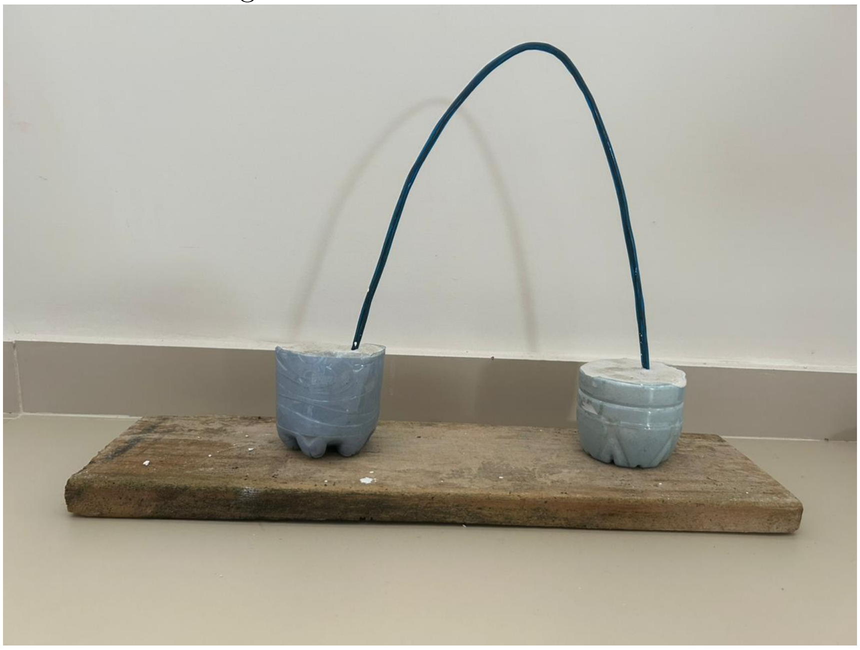
Fonte: Próprio autor.

Passo 3: Organize as bases (copos fundo de garrafa) na distancia certa para colocar as pontas. E fixe-as, de modo a não se moverem.
Passo 4: Prepare o gesso, seguindo as instruções da embalagem. E com as curvas ja posicionadas nas bases, adicione o gesso, ainda maleável, nas bases.

Figura 79: Arco catenário construído

Fonte: Próprio autor.

Figura 80: Parábola construída



Fonte: Próprio autor.

Passo 5: Apoie um peso sobre as curvas, e note a deformação ocasionada em ambas com o mesmo peso.

Figura 81: Posicionando o peso na parábola

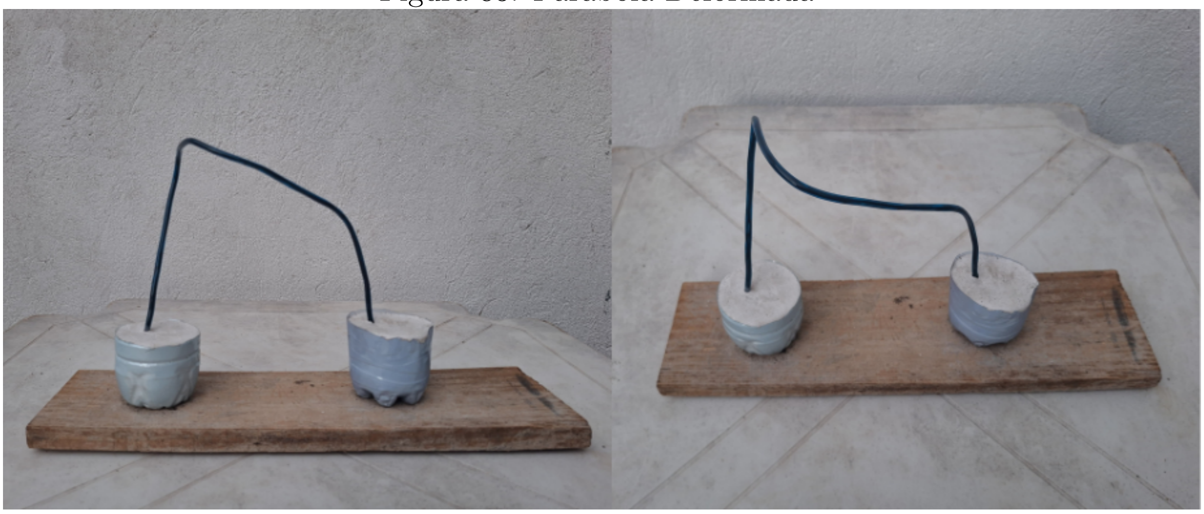
Fonte: Próprio autor.

Ao deixar o peso agir, nota-se a deformação na parábola em pontos localizados.

Figura 82: Peso agindo na parábola

Fonte: Próprio autor.

Figura 83: Parábola Deformada



Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que a estrutura não sustenta o peso, deformando-se rápido e de forma diferente.

Figura 84: Posicionando o Peso no Arco Catenário

Fonte: Próprio autor.

Ao deixar o peso agir sobre o arco catenário, nota-se que o peso é distribuído.

Figura 85: Peso agindo no Arco Catenário

Fonte: Próprio autor.

Figura 86: Arco Catenário Deformado

Fonte: Próprio autor.

Nota-se que o arco catenário resiste por mais tempo que a parábola, e sua deformação ocorre de maneira lenta e homogênea.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo geral investigar as propriedades matemáticas e as aplicações da curva catenária, bem como propor uma SD para o Ensino Médio. Para alcançar esse objetivo, buscou-se apresentar as características e propriedades da curva catenária, listar suas aplicações em diversas áreas e desenvolver uma SD.

De acordo com o exposto no Capítulo 2, os objetos do conhecimento de Matemática devem ser estudados e relacionados com a realidade. No entanto, alguns conteúdos, que possuem uma gama de aplicações na realidade e são de fácil visualização pelos estudantes, sequer são mencionados.

Um desses objetos é a curva catenária, que, como visto no Capítulo 3, possui aplicações na engenharia, na arquitetura e na natureza. Isso a torna um potencializador do interesse e do envolvimento dos estudantes com a Matemática. Assim, a SD desenvolvida traz propostas de aulas que despertam a curiosidade dos alunos por meio de atividades práticas que dificilmente são utilizadas nas aulas de Matemática, promovendo um aprendizado por meio de experimentações e atividades cotidianas.

Portanto, a utilização da SD aqui desenvolvida (produto educacional) pode proporcionar uma visão diferente da Matemática para os alunos, além de contribuir de forma significativa para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. d. Q. e. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008. 13

ANTUNES, A. E. F. *Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional do Cariri, Juazeiro do Norte - CE, 2023. 14

ARAUJO, D. L. de. O que é (e como faz) sequência didática? *Entrepalavras*, Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 322–334, 2013. Acessado em: 25 de julho de 2024. Disponível em: <http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/viewFile/148/181>. 19

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique recherches en didactique des mathématiques (vol. 9, pp. 281-308). *Grenoble: La Pensée Sauvage éditions*, 1988. 13

BARBOSA, S. M. Outra parábola na igreja? ou uma catenária? *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 1, n. 2, p. 65–70, 2012. ISSN 2237-9657. 12

Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. 12, 14, 15, 16

CABRAL, N. F. *Sequências Didáticas: estruturas e elaboração*. Belém: SBEM, 2017. 19

CASTELLAR, S. M. V. *Metodologias ativas: sequências didáticas*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. 19, 20

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 18

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. [S.l.]: Autêntica, 2013. 18

DAVID, M. M. M.; TOMAZ, V. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2008. 18

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2017. 21, 77

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática, 5ª ed*. Campinas: Unicamp, 2011. 37, 38

FERRARA, M. V. *Uma Proposta Para a Abordadagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2018. 36

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Ângela. *Por que (não) ensinar matemática?* São Paulo: Contexto, 1990. 18

FREITAS, M. d. B. C. d. S. B. *As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2015. 29, 39

GIORDAN, M. Princípios de elaboração de sd no ensino de ciências. In: *Disciplina PLC0703: O Planejamento do Ensino: Curso de Licenciatura em Ciências (USP/UNIVESP)*. [S.l.]: Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (CEPA), Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 2014. p. 46–53. 19

GRANDO, R. C. et al. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, 2000. 18

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. third. [S.l.]: Harbra ltda, 1994. v. 1. 101

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009. 18

LIMA, G. S. D. *As formas geométricas nas obras de Gaudí: as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária*. Dissertação (Mestrado) — Universadade Estadual do Ceará, 2019. 11, 44, 45, 46, 70

LIMA, L. A. M. d.; MIRANDA, S. R. F. d. Problema da catenária: história, solução e aplicações. 2021. 44, 45

LORENZATO, S. *Por que não ensinar matemática?* Campinas: Autores Associados, 2006. 18

LOUZADA, S. *Relações entre cônicas e funções no ensino médio*. Tese (Doutorado) — Dissertaçao (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Espírito Santo, 2013. 12

MAOR, E. e: A história de um número, 5a edição. *Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record*, 2008. 37, 38

MARTINS, Z. As tic no ensino-aprendizagem da matemática. In: UNIVERSIDADE DO MINHO. *Anais do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia*. Portugal, 2009. 18

MENDES, M. F. *A curva catenária como aplicação da função exponencial*. Sorocaba: [s.n.], 2017. 38, 83

NASCIMENTO, N. O. d. Abordagem da curva catenária em sala de aula: um estudo sobre sua história, aplicações e uma proposta de atividade para o ensino médio e superior. Universidade Federal de Uberlândia, 2023. 39

PAULO, S. G. de O. Da catenária a trigonometria hiperbólica. *Universidade do Estado do Pará*, 2014. 39

PEREIRA, C. C. et al. Explorando curvas planas por meio da modelagem matemática e da geometria dinâmica: Uma experiência com um grupo de alunos. *Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM*, v. 12, 2016. 42

PIRES, L. M. Geometria da curva catenária utilizando conceitos de cálculo diferencial e integral. Universidade Estadual de Goiás, 2022. 37, 50

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 18

REFATTI, L.; BELTRAME, A. M. Funções hiperbólicas e cabos pendentes. *Disciplinarum Scientia| Naturais e Tecnológicas*, v. 5, n. 1, p. 139–162, 2004. 40

RODRIGUES, K. F. *Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, 2014. 25, 29

SANTOS, A. A. d. *Trigonometria Hiperbólica: uma abordagem elementar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Roraima, Boa Vista - RR, 2014. 36

SANTOS, D. R. d. *Estratégias Metodológicas par o Estudo das Funções Trigonométricas e Funções Hiperbólicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2021. 36

SANTOS, J. A. P. d. *Funções Hiperbólicas: Uma Abordagem Geométrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte - CE, 2022. 22, 25, 27

SANTOS, J. J. C. d. *Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2015. 25, 29, 30, 31, 33, 79

SIMMONS, G. *Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 38, 50, 101

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Aspectos da parábola e da catenária: um estudo à luz da geometria dinâmica. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 17, p. 1–22, 2022. 12, 37, 42

STEWART, J. *Cálculo*. fifth. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2006. v. 1. 101

TAHAN, M. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro - RJ: Record, 2017. 59

TALAVERA, L. M. B. *Parábola e catenária: história e aplicações*. São Paulo: [s.n.], 2008. 11, 38, 41

VASCONCELOS, J. G. S. F. *Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus - AM, 2013. 32

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: ArtMed, 2014. 18, 19, 56

ZABALA, A.; ARNAU, L. *Como aprender e ensinar competências*. Porto Alegre: Artmed, 2010. 19

APÊNDICE A

Resolução dos Exercícios Propostos

Exercício 1

Substituindo o seno hiperbólico na Relação Fundamental $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$, temos

$$\cosh^2(x) - (\sqrt{3})^2 = 1,$$

ou seja,

$$\cosh^2(x) - 3 = 1,$$

que implica

$$\cosh^2(x) = 4,$$

logo,

$$\cosh(x) = 2.$$

Com isso, temos que

$$\tanh(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício 2

Temos que

$$\frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x) = 0,8.$$

Multiplicando por $\cosh(x)$, temos que $\text{senh}(x) = 0,8 \cdot \cosh(x)$. Substituindo na relação fundamental, temos

$$\cosh^2(x) - (0,8 \cdot \cosh(x))^2 = 1,$$

ou seja,

$$\cosh^2(x) - 0,64 \cdot \cosh^2(x) = 1.$$

Logo,

$$0,36 \cdot \cosh^2(x) = 1.$$

Dividindo por $0,36$ e extraindo a raiz quadrada, temos que

$$\cosh(x) = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Com isso, substitui-se $\cosh(x)$ em $\text{senh}(x) = 0,8 \cdot \cosh(x)$. Assim,

$$\text{senh}(x) = 0,8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Exercício 3

Temos que

$$\begin{aligned}
\cosh(0) &= \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

E tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(0) &= \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \\
&= \frac{1-1}{2} \\
&= \frac{0}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercício 4

Centrando o ponto mínimo no eixo y do plano cartesiano, temos que $f(0) = 2$. Daí

$$\frac{\cosh(a \cdot 0)}{a} = 2,$$

pelo exercício 3, temos

$$\frac{1}{a} = 2,$$

ou seja,

$$a = \frac{1}{2}.$$

Exercício 5

Temos que o comprimento será

$$\frac{\operatorname{senh}(0,5 \cdot 5) - \operatorname{senh}(0,5 \cdot (-5))}{0,5}.$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{senh}(2,5) - \operatorname{senh}(-2,5))}{0,5}.$$

Com auxilio da calculadora, temos

$$\frac{6,05 - (-6,05)}{0,5}.$$

Assim,

$$\frac{12,10}{0,5}.$$

Portanto, realizando a divisão, temos que o comprimento será $24,2$ unidades de medidas.

Exercício 6

Observando a figura temos que, $f(0) = 0,5$, ou seja,

$$\frac{1}{a} = 0,5.$$

Que implica que $a = 2$. Com isso, o comprimento será

$$\frac{\operatorname{senh}(2 \cdot 1) - \operatorname{senh}(2 \cdot (-1))}{2}.$$

Com auxilio da calculadora temos, aproximadamente

$$\frac{3,63 - (-3,63)}{2}.$$

Portanto o comprimento é $3,63$ unidades de medidas. Além disso, temos que $A = (-1, y_A)$ e $B = (1, y_B)$, com $y_A = y_B$. Assim, temos que

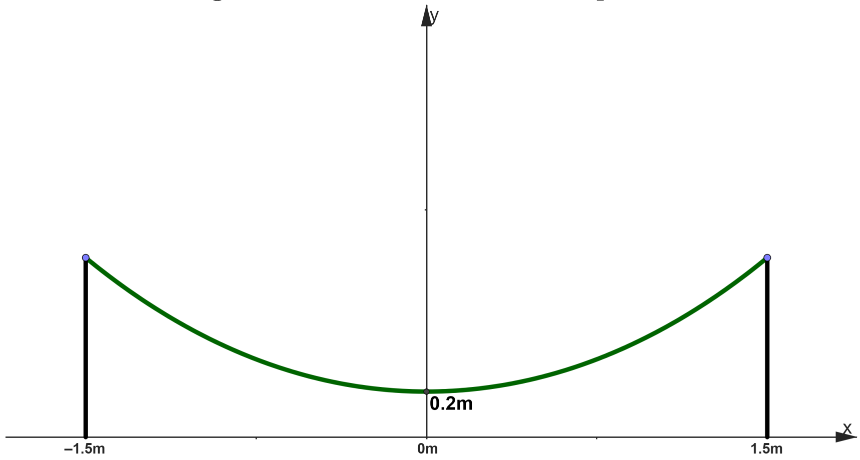
$$\begin{aligned} y_B &= \frac{\cosh(2 \cdot 1)}{2} \\ &= \frac{3,76}{2} \\ &= 1,88. \end{aligned}$$

Portanto, $A(-1, 1, 88)$ e $B = (1, 1, 88)$.

Desafio 2

Pelo enunciado temos a seguinte figura.

Figura 87: Desafio: Corda Suspensa



Fonte: Próprio autor.

Observando a figura temos que, $f(0) = 0,2$, ou seja,

$$\frac{1}{a} - 1,8 = 0,2.$$

Que implica que

$$\frac{1}{a} = 2.$$

Logo,

$$a = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Com isso, o comprimento será

$$\frac{\text{senh}(0,5 \cdot 1,5) - \text{senh}(0,5 \cdot (-1,5))}{0,5}.$$

Ou seja,

$$\frac{\text{senh}(0,75) - \text{senh}(-0,75))}{0,5}.$$

Com auxilio da calculadora temos, aproximadamente

$$\frac{0,82 - (-0,82)}{0,5}.$$

Que implica,

$$\frac{1,64}{0,5}.$$

Portanto o comprimento da corda é $3,28$ metros. Além disso, calculando $f(1,5)$ encontramos a alturas das pontas da corda. Assim,

$$\begin{aligned} f(1,5) &= \frac{\cosh(0,5 \cdot 1,5)}{0,5} - 1,8 \\ &= \frac{\cosh(0,75)}{0,5} - 1,8 \\ &= \frac{1,29}{0,5} - 1,8 \\ &= 2,58 - 1,8 \\ &= 0,78. \end{aligned}$$

Portanto, a altura é, aproximadamente, 78 centímetros.

APÊNDICE B

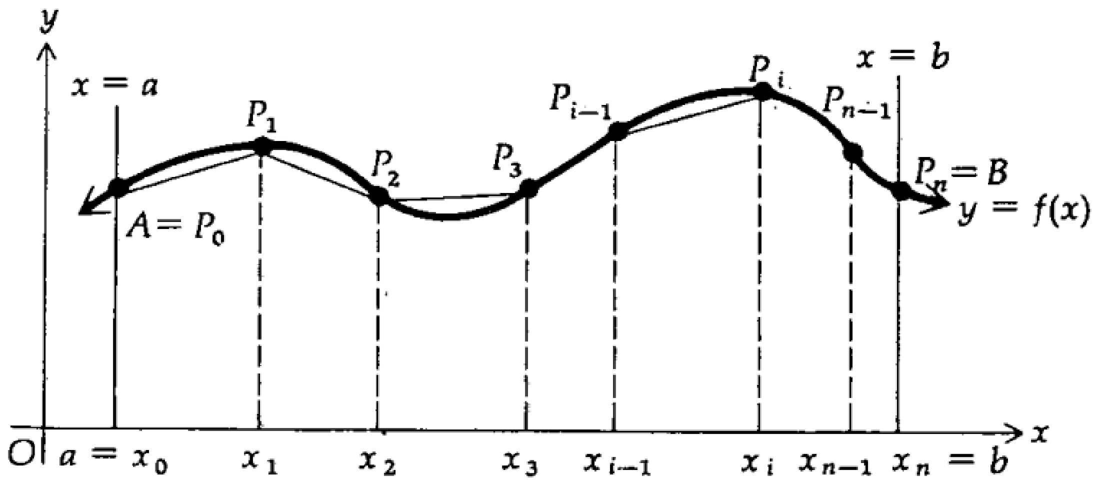
O Comprimento de Arco

Neste apêndice definimos o comprimento de arco que é utilizado na dedução da fórmula da catenária, e demonstramos a fórmula do calculo do comprimento de arco, baseando-se em Simmons (1987), Leithold (1994) e Stewart (2006).

Tem-se que um arco é a parte de uma curva compreendida entre dois pontos. Considere uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, definida por $y = f(x)$. A partição Δ do intervalo é formada ao dividi-lo em n subintervalos, escolhendo $(n-1)$ números intermediários entre a e b, sendo $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. O i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tem comprimento $x_i - x_{i-1}$ que é denotado por Δx, onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Associando cada ponto $(x_i, 0)$ a um ponto $P_i = (x_i, f(x_i))$ na curva, temos que o comprimento do segmento de reta $P_{i-1}P_i$ é dado por

$$|P_iP_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{83}$$

Figura 88: Partição do intervalo $[a, b]$



Fonte: (Leithold, 1994, p.389).

Temos então que a soma dos comprimentos desses segmentos, dada por

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = |P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \cdots + |P_{n-1}P_n|, \tag{84}$$

com n suficientemente grande, será aproximadamente igual ao comprimento do arco AB. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 8. *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que exista um número L tendo as seguintes propriedades: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ seja verdade que*

$$\|\Delta\| \Longrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| - L \right\| < \epsilon$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \tag{85}$$

e L é chamado de ***comprimento de arco*** *da curva $y = f(x)$ do ponto $A = (a, f(a))$ ao ponto $B = (b, f(b))$.*

Teorema 2. *Se a função f e sua derivada f' forem contínuas em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ é*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx. \tag{86}$$

Demonstração: Sendo f' contínua em $[a, b]$, tem-se pelo Teorema do Valor Médio que existe um $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

isto é

$$\Delta y = f'(c_i)\Delta x. \tag{87}$$

Então temos que

$$\begin{aligned} |P_iP_{i-1}| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(c_i)\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \Delta x. \end{aligned} \tag{88}$$

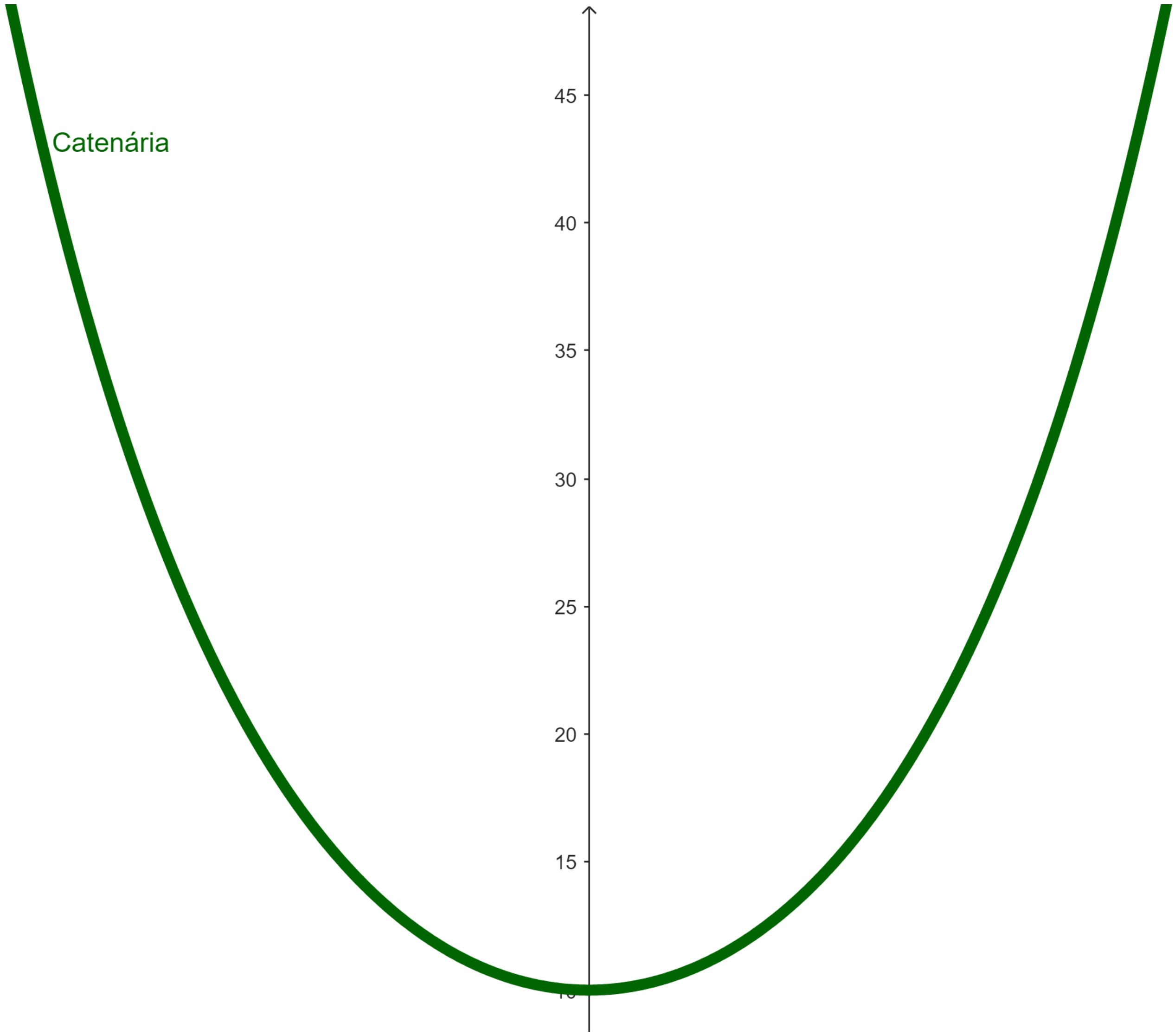
Logo, pela Definição 8, temos

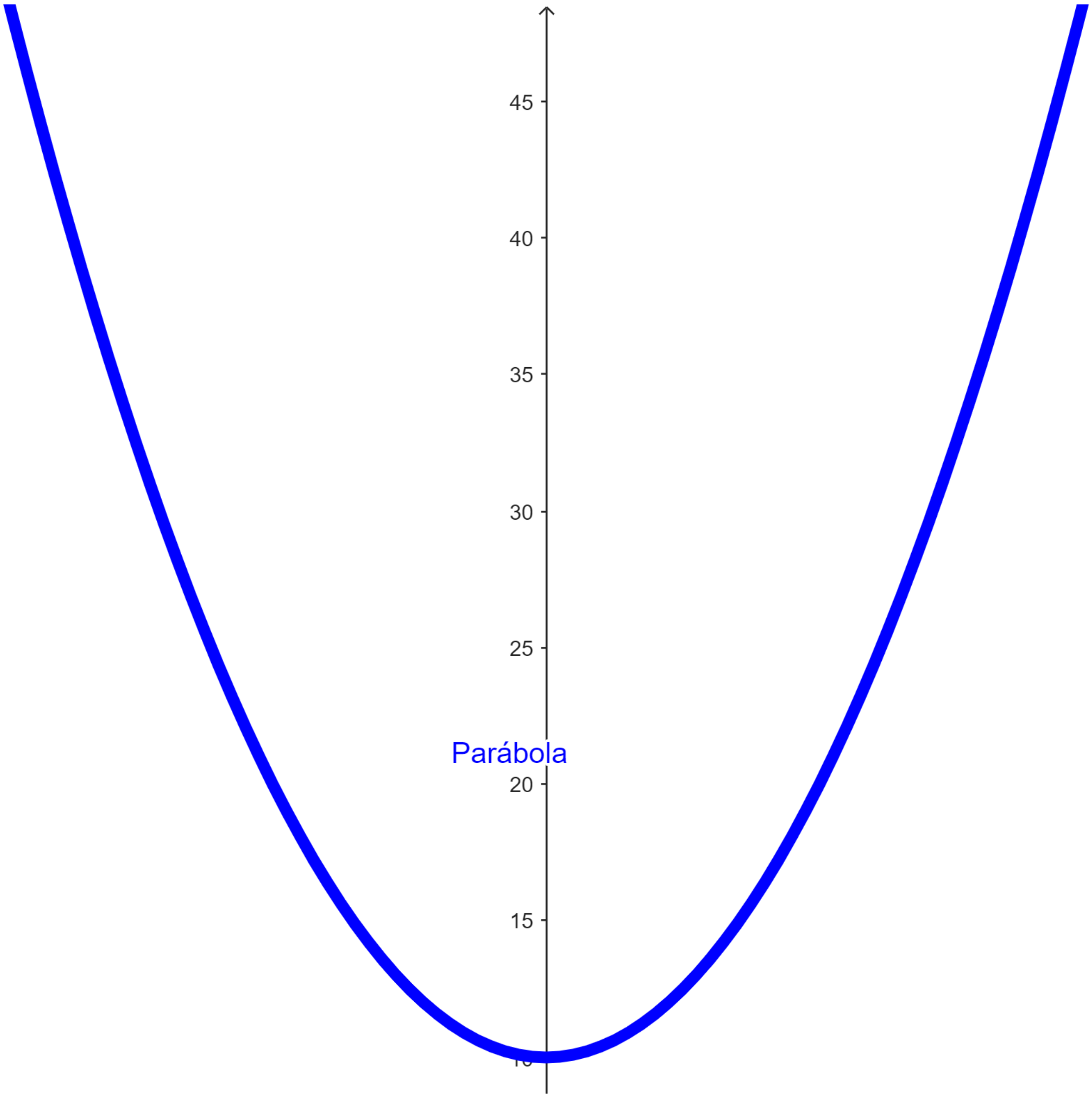
$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \\ &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx. \end{aligned} \tag{89}$$

$\square$

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever (89) como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{90}$$


Catenária
45
40
35
30
25
20
15
10


45
40
35
30
25
Parábola
20
15
10