UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WARLEY MARTINS DIAS

O Eurocentrismo e a origem hindu da Sequência de Fibonacci: a famosa relação com o número de Ouro e suas surpreendentes aplicações

Orientador: Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento

BELÉM – PARÁ
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M379e MARTINS DIAS, WARLEY MARTINS DIAS.
O Eurocentrismo e a origem hindu da Sequência de Fibonacci: a famosa relação com o número de Ouro e suas surpreendentes aplicações / WARLEY MARTINS DIAS MARTINS DIAS. — 2024.
60 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento Lima do Nascimento
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2024.

1. Sequência de Fibonacci. 2. Número de Ouro. I. Título.

CDD 510.9

WARLEY MARTINS DIAS

O Eurocentrismo e a origem hindu da Sequência de Fibonacci: a famosa relação com o número de Ouro e suas surpreendentes aplicações

Dissertação apresentada por Warley Martins Dias, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre.

Belém, 27 de fevereiro de 2024

Documento assinado digitalmente
MARCIO LIMA DO NASCIMENTO
Data: 18/11/2024 15:51:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Professor Doutor Márcio Lima do Nascimento - Orientador

Documento assinado digitalmente
JOAO CLAUDIO BRANDEMBERG QUARESMA
Data: 18/11/2024 08:20:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Professor Doutor João Cláudio Brandemberg Quaresma

Documento assinado digitalmente
PAULO VILHENA DA SILVA
Data: 18/11/2024 15:01:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Professor Doutor Paulo Vilhena da Silva

BELÉM – PARÁ

2024

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

Ao Senhor Jesus, Nossa Senhora de Nazaré e Santa Rita de Cassia, a meus familiares, especialmente à minha esposa, Tatiane e meus filhos Pedro, Murilo e Eduardo, e a minha mãe Fátima, a meus professores, a meu orientador e a meus amigos.

Resumo

O estudo da Razão Áurea e da Sequência de Fibonacci é uma oportunidade riquíssima para o professor do ensino básico trabalhar a conexão da Matemática com o dia-a-dia. Neste trabalho discutiremos as diversas relações entre razão áurea, número de Ouro, números de Fibonacci e suas surpreendentes aplicações práticas (ou não). O trabalho se inicia com a matemática da Razão Áurea e do Retângulo Dourado, para em seguida apresentarmos as polêmicas oriundas da metade do século XX, com “a aplicação da Matemática em tudo”. Depois abordaremos o estudo sobre a mitologia e a verdade envolvendo a razão áurea! Destacando algumas de suas principais aplicações definindo-as em. **Fato** ou **Fake News,** mostrando que a divina proporção é menos comum do que se imagina! Em seguida com a construção de vários retângulos áureos chegaremos ao estudo das espirais, onde teremos um pequeno panorama das aplicações e ocorrências “em tudo”. Finalmente apresentamos a Sequência de Fibonacci, seus números, com as polêmicas relativas a originalidade e a primazia do estudo e demostração de propriedades desta fomosa sequência. Qual o papel dos hindus nessa história? Nomear tal sequência como “de FIBONACCI” é ser Eurocentrista? O fato inatacável é que os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis e impressionam pelo fato deles aparecerem na Geometria, na Teoria dos números, na Genética, dentre outros, assim como surgem, inesperadamente, no estudo de Sistemas Dinâmicos Caóticos.

Palavra-chave: Razão Áurea, Sequência de Fibonacci, Número de ouro.

Abstract

The content on the Golden Ratio and the Fibonacci Sequence is a rich opportunity for the teacher to work on connecting Mathematics with everyday life. Therefore, in this work we will talk about the famous relationship with the Golden number and its surprising practical applications. We will start by talking a little about the segment with the Golden Ratio and the Golden Rectangle, then we willpresent aspects about the controversies of the mid-20th century, with the application of Mathematics, "in everything". Then we will address the study of themythology and truth of the golden ratio, highlighting some of its main applicationsand defining them in. Fact! or Fake News? Showing that the divine proportion is less common than one might imagine. Next, with the construction of several golden rectangles, we will arrive at the study of spirals, where we will have a specific chapter for their applications and occurrences "in everything" and the Fibonacci Sequence, where we will present a little about the history of his life andwork, as well as the problem of rabbit reproduction whose solution is the generator of the terms of the aforementioned sequence and the controversies about the role of Hindus in this history? And in naming the sequence known as "FIBONACCI" is being Eurocentrist? Fibonacci Numbers present remarkable arithmetic properties and what impresses us most is the fact that these numbersappear in Geometry, Number Theory, Genetics, etc... as well as appearing, unexpectedly, in Chaotic Dynamical Systems, as we will see further up. Finally, this work considers that the introduction of methodological research, which develops the student's capacity for abstraction, enables a clear connection between symbolic language used in textbooks and the concepts involved in discovering relationships that appear in many situations involving divine proportion and the Fibonacci Sequence.
Keyword: Golden Ratio, Fibonacci Sequence, Golden Number.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

A aplicação da Matemática está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, no DNA de um ser vivo, na computação quântica e na inteligência artificial. Se por um lado é extremamente complexo para os cientistas relacionarem a matemática pura aos seus modelos e problemas, para o professor de matemática do ensino básico também, nem sempre é fácil relacionar a realidade do dia a dia aos olhos dos alunos permeando as aulas ditas tradicionais com as aulas diferentes, usando metodologias ativas e temas da atualidade. Abordaremos uma tentativa de popularizar a matemática, feita na metade do século XX, com a indústria do cinema americano, mais especificamente da razão áurea e do retângulo áureo, e as lendas que envolve essa razão, o que nos levará ao Pato Donald.

Se falarmos em Matemática, pensamos em números e, portanto, a apresentação a seguir visa contar a história de um dos maiores e mais surpreendentes números da Matemática, (Phi), também conhecido como Razão Áurea, representado pela letra grega ϕ (phi) em homenagem ao matemático e escultor Fídias, por ter utilizado em tantas obras suas a Razão Áurea. Sua origem é geométrica e a figura mais famosa e mais usada na Razão Áurea é o Retângulo Áureo.

O conteúdo sobre Razão Áurea também conhecida como Número de Ouro, é *uma proporção ou razão (quociente) entre certas "coisas ou medidas"*. Infelizmente, boa parte do mito que rodeia a divina proporção foi bastante exagerado, é aqui que começa a polêmica que vamos descrever neste trabalho: seria uma forçação de barra (**Fake News**) tentar associar essas obras à razão áurea ou esses matemáticos arquitetos pensaram objetivamente (**Fato!**) nisso? Os registros sobre isso são sempre posteriores a eles, ao que parece sendo interpretações dessa história, tentando por muitos anos desmistificar a razão áurea. Por exemplo, Devlin nota que diversos exemplos populares – o Parthenon, as pirâmides egípcias, a Mona Lisa – na verdade *não* se encaixam na proporção áurea. O que há de real na divina proporção? Vamos conferir.

Este trabalho também tem como objetivo estudar a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro (ou Razão Áurea) investigando suas histórias, suas principais propriedades, suas aplicações na Arquitetura e na Arte, suas manifestações na Natureza, bem como, as relações que existem entre ambos.

Os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis que são até hoje, objeto de investigação. Mas o que mais nos impressiona é o fato de que esses números aparecem na Geometria, na Teoria dos números, na genética, assim como surgem, inesperadamente, em Sistemas Dinâmicos Caóticos, então: Nomear a Sequência conhecida como "de FIBONACCI" é ser Eurocentrista? E o papel dos hindus nessa história? Sequência dos Indianos ou Sequência de Pingala? (mais conhecida como Sequência de Fibonacci). São temas que também receberam destaques neste trabalho. A sequência de Fibonacci é o código da natureza. Está em tudo, desde flores a sistemas de tempestades e ao formato das galáxias. No entanto, grande parte do mundo não conseguiu reconhecer a sua própria fonte (será?). Veremos também neste trabalho. No que diz respeito à insistentemente chamada (inclusive nesta dissertação) “Sequência de Fibonacci”, Fibonacci estava apenas traduzindo os Sutras de Pingala (c. século III d.C.) e seu comentarista Virahanka, que derivou a “Sequência de Fibonacci” várias centenas de anos antes mesmo de Fibonacci nascer?

Capítulo 1 O SEGMENTO COM RAZÃO ÁUREA E O RETÂNGULO DOURADO E AS POLÊMICAS DA METADE DO SÉCULO XX

A Matemática está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, mas nem sempre é fácil demonstrar aplicações práticas e interessantes, a vista dos alunos permeando as aulas usuais com aulas diferentes. Neste capítulo abordaremos as definições do ponto de vista matemático e um pouco de história da Razão Áurea, e ao mesmo tempo relatar como os problemas matemáticos tinham a ver com problemas práticos e filosóficos, também acreditamos que pode ser um diferencial no despertar dos alunos para a beleza da Matemática e para sua utilização prática cada vez mais indispensável no nosso mundo atual, além das relações com a arte e a arquitetura e principalmente a que isso levou, com aplicações reais de fato da matemática ou apenas especulações e controvérsias sem fundamento científico.

"A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma joia preciosa".

Johannes Kepler

1.1 O SEGMENTO COM RAZÃO ÁUREA

1.1.1 Um pouco de história.

Na história da humanidade nenhum outro número tem intrigado tanto os homens, seja pelas propriedades matemáticas que possui como pela beleza e harmonia que sucinta, como o Número Áureo. Venerado desde os tempos de Euclides, esse número tem a característica de aparecer em lugares inesperados.

> Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi (Φ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Secção Áurea". Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de "Proporção Divina" (LÍVIO, 2011, p. 13, grifo do autor).

A Razão Áurea ou número perfeito, representada pela letra grega Φ (Phi) em homenagem ao matemático grego Fídias, o famoso arquiteto e escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. Sendo suas maiores realizações o "Parthenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia, ele foi homenageado por que alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso frequente e meticuloso da Razão Áurea em suas esculturas. (LIVIO, 2006, p. 16).

A Razão Áurea foi descoberta no século V a.C. por hipasos de Metaponto, um matemático grego. (LIVIO, 2006, p. 14).

A primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da Geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria, com os estudos dele, em 1923, devido à grande admiração que ele inspirava a poetisa Edna St. Vicent Millary escreveu um poema intitulado “Somente Euclides viu a beleza Nua”. (LIVIO, 2006, p. 13).

1.2.1- Definição matemática do termo Razão Áurea

Geometricamente, o Número de Ouro surge a partir da divisão de um segmento em razão extrema e média, definido pela primeira vez há 300 anos a.C. por Euclides, da seguinte forma:

Uma linha reta AB é cortada na razão extrema e média no ponto E quando, assim como a linha toda AB está para a maior parte AE, a maior parte AE está para a menor parte EB.

Usando a definição dada acima e observando que na Figura 01. AB > AE > EB, temos: $\frac{AE}{EB} = \Phi$

$$\frac{AE}{EB} = \Phi$$

Figura 01: Divisão de segmento na razão extrema e média

Os segmentos AB e AE estão em **razão áurea** se

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} \quad ou\ ainda\ se\ (AE)^2 = AB\,.\,EB \tag{1}$$

Para o estudante do ensino básico obter um segmento onde temos a razão áurea basta tomar EB=1 e chamar AE= x (lembrando que x>1, que é mais perto de B). Com isso temos que AB= x+1 e a razão áurea da seguinte forma:

$$\frac{AE}{EB} = \Phi$$

Onde:

$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$, obtendo assim a famosa equação quadrática:$x^2 = x + 1$ ou $x^2 - x - 1 = 0$, cuja, raízes são:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Tomemos a primeira raíz por ser positiva o valor de Φ (phi maiúsculo). A outra raíz chamaremos de φ (phi minúsculo). Sendo assim:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887 \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}6180339887\ldots$$

Onde a raiz positiva é o mundialmente famoso número irracional áureo, Φ igual a

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

1.1.2 Propriedades de Φ

- $\Phi^2 = 1 + \Phi \Rightarrow \Phi^2 = 2{,}\ 6180339887\ldots$

- $\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -1\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi = 0{,}6180339887\ldots$

Disto, concluímos que Φ, Φ^2 e $\frac{1}{\Phi}$ têm exatamente os mesmos dígitos após a vírgula. Isso significa que Φ tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado apenas adicionando 1 e seu inverso subtraindo 1.

Além disso, pelas propriedades das raízes de uma equação quadrática, temos $\Phi + \varphi = 1$ e $\Phi \cdot \varphi = -1$.

Propriedade 1.1.2 A soma de duas potências inteiras consecutivas de Φ resulta na potência de Φ seguinte, ou seja:

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

Da propriedade acima podemos concluir que a sequência (...., Φ^{-n} ,...., Φ^{-3}, Φ^{-2}, Φ^{-1}, 1, Φ, Φ^2, Φ^3,...., Φ^n , ...) é ao mesmo tempo geométrica e aditiva (é na verdade uma sequência de Fibonacci, pois cada termo é igual à soma dos dois anteriores), por isso que é conhecida como **progressão geométrica áurea** ou, **simplesmente, série áurea.**

A proporção divina também pode ser escrita sob a forma de somas infinitas:

Algumas somas infinitas que resultam no número de ouro, Φ = 1,618.... Veja:

a) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}}$

Demonstração:

Indicando o valor desta expressão por x, temos:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} = x \qquad (3)$$

Elevando os dois membros da equação (3) ao quadrado, obtemos:

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}}\right)^2 = x^2 \rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} \qquad (4)$$

Como a segunda expressão do lado direito da equação (4) é na verdade igual ao nosso x da equação (3). Então basta substituir $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}}$ por x na equação (4) e temos:

$$x^2 = 1 + x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \qquad (5)$$

Para $x > 0$, temos que:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \Phi$$

b) Outra demonstração é extremamente simples, basta partir da equação de segundo grau antes obtida, e fazer um processo iterativo (substituir do lado esquerdo a expressão antes obtida):

$$\phi^2 = 1 + \phi$$
$$\Leftrightarrow \phi = \sqrt{1 + \phi}$$
$$\Leftrightarrow \phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}$$
$$\Leftrightarrow \phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}}$$

Nota: mais uma vez, a solução negativa foi desprezada, porque o número de ouro é necessariamente positivo por definição.)

c) Outra maneira de se encontrar o número de ouro é utilizando-se um pentágono regular. A partir dele calcula-se a razão entre qualquer de uma de suas diagonais e seu lado, utilizando-se semelhança de triângulos, classificações de ângulos Para isso, considere o pentágono regular ABCDE conforme está descrito na figua 2.

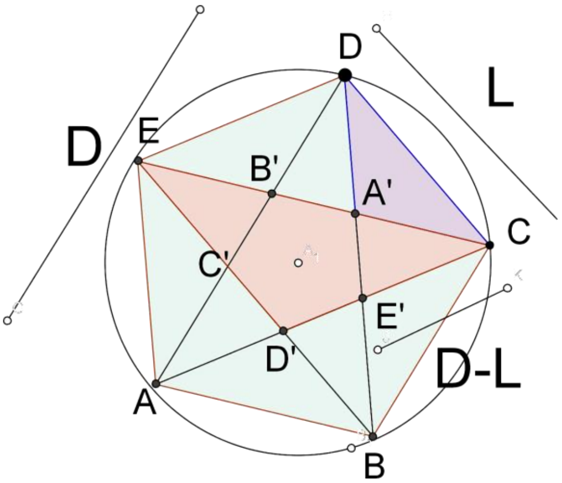


Figura 02 – Pentagrama regular

Como o pentágono é regular seus ângulos internos são congruentes e os triângulos CDA' e CED' da figura 2 são semelhantes pelo caso ângulo – ângulo.

Assim, fazendo

ED = CD = ℓ (lado do pentágono) utilizando o fato de que AED' ´e isósceles e que os triângulos CDA' e CED' são semelhantes temos que

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EA}{DA\prime} \tag{6}$$

CD = EA = ℓ e CE = d e DA = DB − BA0= d − ℓ.

Pode-se fazer as substituições na proporção anterior, assim temos

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\ell}{d - \ell}$$

Então $\ell^{2} = d^2 - d\,\ell$

Seja x a razão entre a diagonal e o lado do pentágono, ou seja, x = $\frac{d}{\ell}$ ainda d = $x\,\ell$ então: $x^2 - x - 1 = 0$

Para x > 0, temos que:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \Phi$$

Veja que podemos gerar outros infinitos segmentos áureos bastando ampliar o segmento original obtendo segmentos semelhantes. Por exemplo, com intervalos de segmentos internos AE= 2.Φ e EB=2, ou ainda com qualquer múltiplo real do número de ouro Φ (múltiplo real diferente de zero), fazendo zoom no retângulo áureo aumentando ou diminuindo. Todos resultarão na mesma razão dourada do segmento.

E um **retângulo dourado**? O que seria? É um retângulo em que o lado maior e o lado menor estão em razão áurea.

Basta copiar o segmento AB construindo um segmento DC abaixo contendo um ponto F na mesma direção de E, como na figura 2 abaixo, e formar um retângulo ABCD contendo um quadrado AEFD.

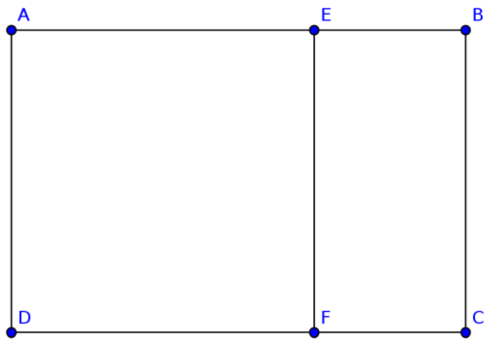


Figura 3: Retângulo Áureo.

Podemos interpretar a figura 3, em cima da propriedade $(AE)^2 = AB \, . \, EB$, onde a área do terreno AEFD, em amarelo, é dado por $(AE)^2$, como mostra a figura 4.

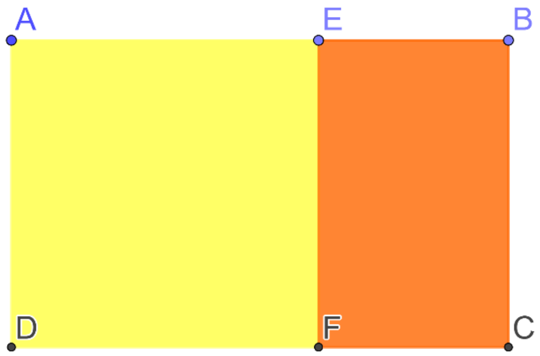


Figura 4: Retângulo Áureo colorido

Terreno retangular ABDC, em amarelo, com a área de comprimento AB=DC vezes EB=FC, como mostra a figura 5.

Figura 5: Retângulo Áureo colorido

Veremos mais a frente alguns exemplos do Retângulo áureo e suas propriedades. Veremos a seguir algumas tentativas de aplicação desses entes matemáticos em problemas reais e até que ponto isso resultou.

1.2 Matemática Aplicada à vida ou aplicação da matemática "em tudo"?

A aplicação da Matemática está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, no DNA de um ser vivo, na computação quântica e na inteligência artificial. Se por um lado é extremamente complexo para os cientistas relacionarem a matemática pura aos seus modelos e problemas, para o professor de matemática do ensino básico também nem sempre é fácil relacionar a realidade do dia a dia aos olhos dos alunos permeando as aulas ditas tradicionais com as aulas diferentes, usando metodologias ativas e temas da atualidade. A seguir abordaremos uma tentativa de popularizar a matemática, feita na metade do século XX, com a indústria do cinema americano, mais especificamente da razão áurea e do retângulo áureo e as lendas que resultaram daí, o que nos levará ao Pato Donald.

Como definimos acima, a Razão Áurea, representada pela letra grega (Φ) (Phi) é *uma proporção ou razão (quociente) entre certas “coisas ou medidas” que resultam em um número irracional***.** A letra grega escolhida é uma

homenagem ao matemático grego Fídias, também famoso arquiteto e escultor grego, que viveu entre 490 e 430 a.C., sendo suas maiores realizações: o “Parthenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia. Ele foi homenageado porque alguns historiadores de arte sustentavam que Fídias fazia uso frequente e meticuloso da Razão Áurea em suas esculturas. (LIVIO, 2006, p. 16). É aqui que começa a polêmica que vamos descrever neste trabalho: seria uma forçação de barra (fake news) tentar associar essas obras à razão áurea ou de fato esses matemáticos arquitetos pensaram objetivamente nisso? Os registros sobre isso são sempre posteriores a eles, ao que parece sendo interpretações dessa história.

1.3 A Mitologia e a Verdade da Razão Áurea! Fato! ou Fake News?

A razão áurea pode sim, ser encontrada nas construções antigas e modernas, na natureza, na arte, etc... No entanto, há quem faça um esforço tremendo para visualizá-la onde ela não existe. E talvez essas pessoas nem acreditem que a divina proporção é menos comum do que elas imaginam!

Ao que consta a razão áurea foi descoberta no século V a. C. por Hipaso de Metaponto, um matemático grego. (LIVIO, 2006, p. 14). Aqui se fala que a razão áurea “Número de Ouro” é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada *como uma oferta de Deus ao mundo”.* Porém, formalmente, a primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da Geometria como sistema dedutivo, Euclides de Alexandria.

Um primeiro ponto que podemos questionar é o fato de alguns historiadores suspeitarem que a “Grande Pirâmide de Gizé”, (figura 1), fosse construída levando em conta a Razão Áurea.

Figura 6 - “Pirâmides de Gizé”

Tais suspeitas surgiram da afirmação do historiador grego Heródoto 485-425 a.C., apesar de muitos afirmarem, que é bastante improvável que os egípcios tenham descoberto a Razão Áurea e suas propriedades, assim como reforça Livio(2011,p.78).

A razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande Pirâmide seria igual ao número de ouro. **Fake News!** Veja:

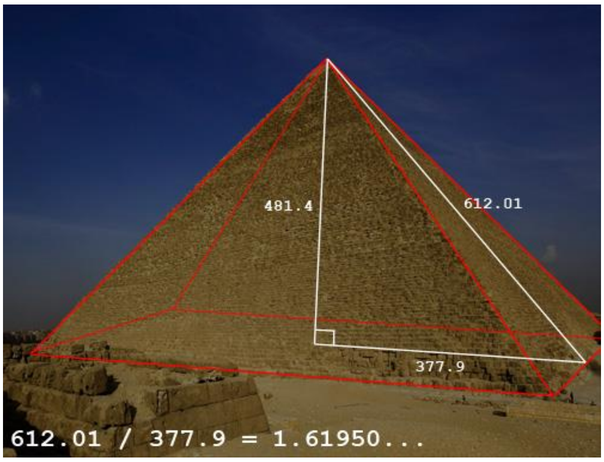


Figura 7 - "Grande Pirâmide de Gizé"

Além disto, cada pedra era 1,618... (valor aproximado de (Φ) menor que a pedra de baixo, a de baixo era 1,618... maior que a de cima, que era 1,618...maior que da 3ª fileira e assim por diante. Isso parece não ter fundamento algum, pelo menos do ponto prático da obra final que foi construída, pois as medidas das Pirâmides já foram feitas e estão disponíveis para quem quer visitá-las com equipamentos precisos de medição e checar na prática que a obra não tem essas características.

"A história mostrou que o apelo místico das pirâmides e o "Numerismo Áureo" podem ser mais fortes do que qualquer evidência sólida".

Outra hipótese é que os gregos também utilizaram a Razão Áurea em suas obras. Por volta de 447 e 433 a.C., foi construído na Grécia o Parthenon Grego (figura 2), o qual conteria a razão áurea nos retângulos que formam a fachada na relação (largura/altura). **Fake News!**

Figura 8: Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/Parthenon*

Pois, a fachada do Parthenon, templo construído na Grécia Antiga para louvar a deusa Atena, foi feito com base na proporção áurea. No entanto, ele foi construído em 447 a.C., mais de um século antes que Euclides descobrisse a razão áurea. Como o arquiteto Fídias usaria esse número sem conhecê-lo? Então, **especula-se** que as dimensões do edifício expressem a razão dourada. Além disso, as medidas da fachada não se encaixam na proporção áurea. Isso só funciona quando você "força a barra" e inclui no retângulo parte dos degraus.

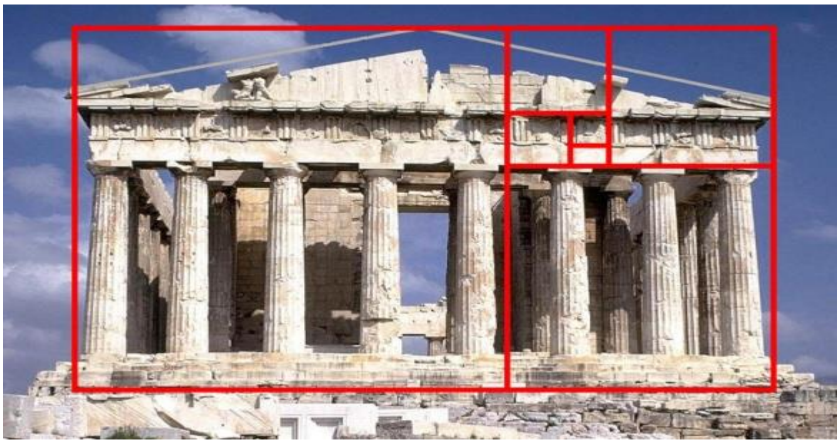


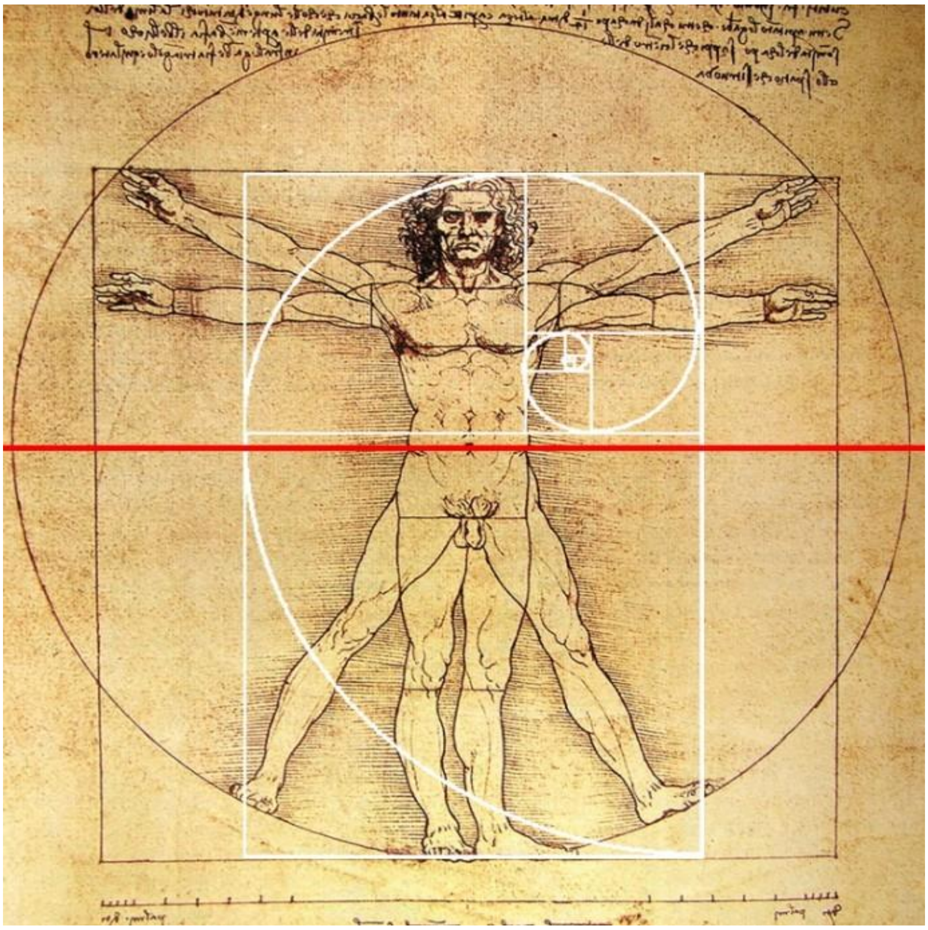
Figura 9: Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/Parthenon*

Também existe a crença de que Leonardo da Vinci usou a proporção áurea em suas obras. Por exemplo, dizem que o Homem Vitruviano se encaixa na razão áurea, por ter a proporção perfeita entre altura e largura. **Fake News!** As medidas não batem, como

explica o *Físico Donald E. Simanek*:

A relação umbigo/altura na imagem é 0,604, um pouco menor do que 1/φ = 0,618. Da Vinci escreveu um texto que acompanha a imagem, mas ele não diz nada sobre essa relação, nem sobre a distância do umbigo até os pés. O texto não contém nenhuma menção de φ. Não há nenhuma sugestão na imagem de que Leonardo estava fazendo algo mais profundo do que relacionar o homem a um círculo e um quadrado.

Na verdade, parece que Leonardo forçou as proporções do homem para se encaixar nessas figuras geométricas. Se Leonardo quisesse incorporar φ na imagem, ele poderia facilmente ter movido um pouco a posição do umbigo. O fato de que ele não fez isso nos diz que ele não tinha qualquer razão para fazer isso.



O retângulo áureo e a linha do umbigo. Eles não se encaixam.

Figura 10: Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/ Homem Vitruviano*

A Mona Lisa é uma pintura, do mestre Leonardo da Vinci, das mais intrigantes da História da Arte. Estudos mostram que ele teria usado uma malha geométrica (grid) na estrutura do quadro em comunhão com a proporção áurea. **Fake News!**

É necessário esclarecer que, embora os estudos sejam baseados no desenho geométrico, **Mona Lisa não é um tratado de geometria que virou uma pintura**, mas uma **pintura que contém elementos geométricos**, formando o que chamamos de composição.

Observe como a linha dos olhos marca uma divisão áurea no comprimento total da face. E também a linha da boca é uma proporção áurea da distância entre a base do nariz e a extremidade do queixo.

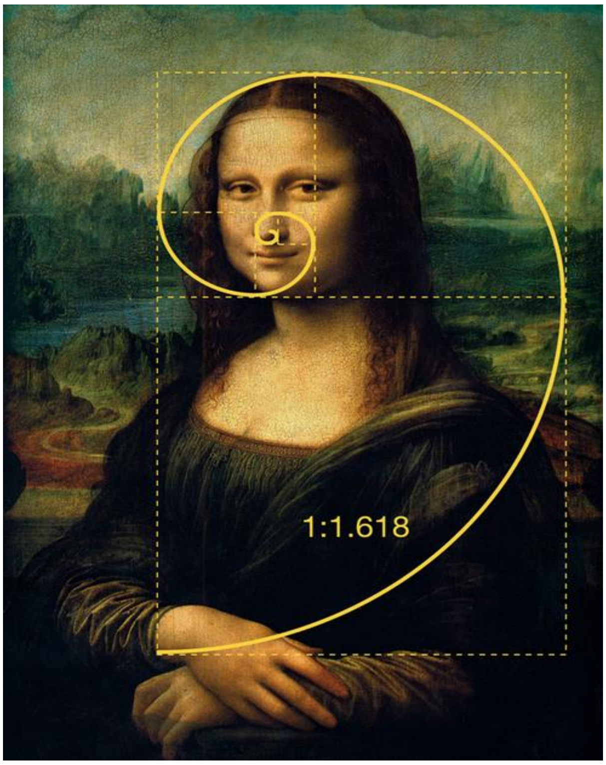


Figura 11: Fonte: *https://pt.wikipedia.org/wiki/ Mona Lisa*

Na imagem, a espiral áurea começa, sem motivo, do espaço entre as mãos da Mona Lisa, depois colocaram um retângulo começando na testa da mulher, só para ele ficar alinhado com os olhos e o lábio superior. Vale tudo!

Existem muitas análises geométricas desta obra prima, entretanto cabe ao leitor discernir quais se mostram mais consistentes, não deixando de levar em conta de que se trata de um trabalho de Leonardo da Vinci, o qual levou anos para ser concluído.

Essa afirmação sobre pensar na razão áurea no projeto parece tão incontestável até no senso comum que milhões de pessoas já viram o filme ou partes do filme do Pato Donald, o interessantíssimo "**Donald no País da Matemágica**", dos estúdios Disney.

*Figura12: Cenas do Filme: "**Donald no País da Matemágica**"*

O filme completo é um curta metragem de 27 minutos, que tem como estrela o Pato Donald, lançado nos EUA em 26 de junho de 1959 e dirigido por Hamilton Luske. O curta foi disponibilizado para várias escolas e se tornou um dos mais populares filmes educativos já feitos pela Disney. Creio que toda criança deveria ver o filme. A parte da razão áurea pode ser visto no Youtube em https://www.youtube.com/watch?v=58dmCj0wuKw e tem 6,28 minutos. Até 1,48 minutos as afirmações sobre a proporção áurea são todas matemáticas com desenhos e animações de figuras geométricas conhecidas das crianças e mostra as belíssimas relações que saem desses entes matemáticos. Porém depois disso o filme afirma sobre a intenção deliberada dos gregos de pensar essa razão como presente em seus vários projetos. Também aparece no filme a fachada principal da Catedral de Notre Dame de Paris, como exemplo da razão áurea aplicada. Trata-se de uma **Fake News** da Disney de 1959. Vejamos as medidas da catedral na figura 13 abaixo, obtidas pela equipe de bombeiros depois do incêndio de 2019.

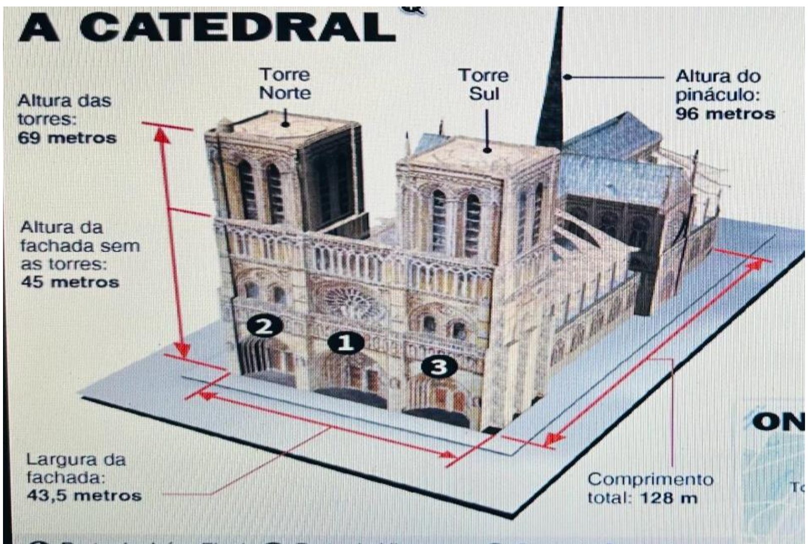


Figura13: Medidas da Catedral de Notre Dame de Paris (Nossa Senhora de Paris)

Podemos perceber que nenhuma das contas, como afirmadas no filme da Disney, resultam na razão áurea, pois não temos um quadrado (45 x 43,5) e o retângulo de 69 x 43,5 não é áureo. Por mais que queiramos aproximar não chegamos perto da razão Φ.

O restante do vídeo está repleto de afirmações que não tem qualquer relação com a real medida das obras de arte e arquitetura mostradas. Aos 3:50 faz-se uma absurda relação com as formas do corpo humano (que não encaixa de forma alguma no retângulo). O restante fala sobre a “presença do pentágono na natureza” com aproximações interessantes. Uma frase se destaca:

“**Todas as obras da natureza têm lógica matemática, e seus padrões são ilimitados, … sim, existe matemática em praticamente tudo, e, como os Gregos descobriram, as regras são sempre as mesmas.”**

O final do filme mostra as espirais e alguns fractais. Apesar dessas frases marcantes e polêmicas, o filme é extremamente belo e contagiante, terminando com uma frase do Pato Donald: **“puxa, seu espírito, a matemática é muito mais do que 2x2.”** Donald tem plena razão.

Voltando ao filme, vemos nele **uma propriedade matemática interessantíssima do retângulo áureo:** se um retângulo dourado ABCD for desenhado e um quadrado ABEF for removido, o retângulo ECDF restante também será um retângulo dourado. Isso dá origem às espirais, que veremos em outros capítulos. Voltaremos a destacar essa propriedade fractal (auto semelhança infinita) do retângulo áureo. Isso também aparece no filme do Pato Donald no país da matemática.

Vejamos a seguir algumas questões a serem descobertas se fazem sentido ou são apenas falácias.

A Última Ceia é uma obra realizada por Salvador Dalí de 1955. A pintura é óleo sobre tela e mede 167 cm de altura e 268 de largura. Atualmente, o quadro está disponível na Galeria Nacional de Arte de Washington. Essa obra causou polêmica quando apresentada ao público, pois a imagem de Dalí como artista irreverente e provocador não combinava com o tema religioso. Trata-se de uma **Fake News** a medida da largura da obra de Salvador Dalí de 1955, foi aproximada para 270 cm de forma groseira.

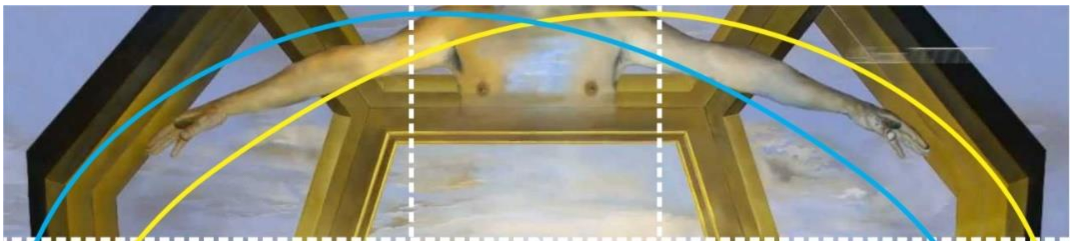


Figura 14: Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki"O sacramento da Última Ceia", de Salvador Dali.

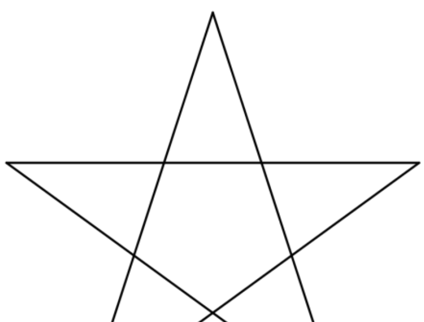
1.3 As Obras da Arquitetura Grega tem relação com a perfeição áurea matemática?

Foi mais de 2.000 anos depois de Euclides que tanto a "proporção" foi designada como "áurea" pelo matemático alemão Martin Ohm em 1835. A questão da Arquitetura grega, que a proporção áurea fornecia a proporção esteticamente mais agradável, foi reforçada durante o Renascimento, por exemplo, pelo trabalho do polímata italiano Leonardo da Vinci e pela publicação de "De divina proporcionale" (1509; Proporção Divina), escrito pelo matemático italiano Luca Pacioli e ilustrado por Leonardo da Vinci.

Fídias, o escultor e arquiteto, foi o responsável pela construção de certas obras clássicas e a designação adotada para o famoso número (Φ) (Phi) é a inicial de seu nome; sendo que os autores relatam que a Razão Áurea, foi utilizada em muitas de suas obras. O nome acrescentado de Ouro, foi dado pelo matemático americano Mark Barr no início século XX.

1.3.1 O Pentágono Regular e o Pentagrama. Fato!

De todas as figuras geométricas planas a que mais chamou a atenção dos matemáticos e filósofos da Grécia Antiga foi o pentagrama ou estrela de cinco pontas, ou ainda, o pentágono estrelado (Figura 15).



Associado ao pentagrama está o pentágono regular (polígono de cinco lados e cinco ângulos congruentes), pois traçando todas as diagonais do pentágono, obtemos o pentagrama e um outro pentágono no centro. Traçando, agora, as diagonais do novo pentágono, formaremos mais um pentágono e um pentagrama, sendo que esse processo, conhecido como auto propagação, pode ser continuado, infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores, conforme (Figura 16).

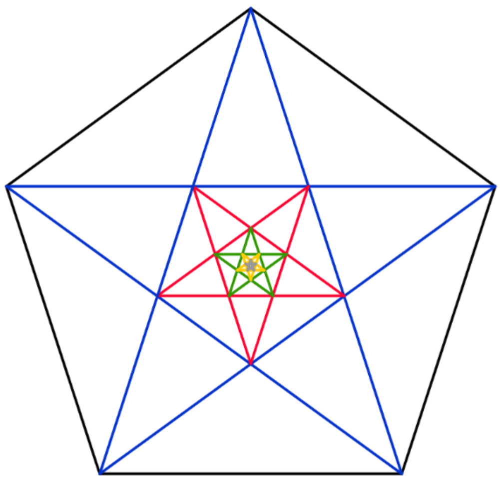


Figura 16: Sequência infinita de pentágonos regulares e de pentagramas.

A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.

Chamando os vértices de um pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isóscele formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados.

Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica.

Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos.

1.5 Outros contextos em que aparece o número de ouro:

A proporção áurea ocorre em muitos outros contextos matemáticos. É geometricamente construtível por meio de régua e compasso, e ocorre na investigação dos sólidos arquimedianos e platônicos. É o limite das razões dos termos consecutivos da sequência numérica de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... em que cada termo além do segundo é a soma dos dois anteriores.

Na matemática mais atual, a proporção áurea ocorre na descrição de alguns fractais, figuras que apresentam autossimilaridade e desempenham um papel importante no estudo do caos e dos sistemas dinâmicos. Veremos apenas alguns desses casos. Inicialmente vejamos a construção do retângulo com régua e compasso. Seguindo os passos a seguir é possível construí-lo.

1.6 Construção do retângulo áureo com régua e compasso

Etapas da construção:

1) Dado o segmento AB, construir um quadrado ABCD.

2) Determinar o ponto médio E do segmento AB.

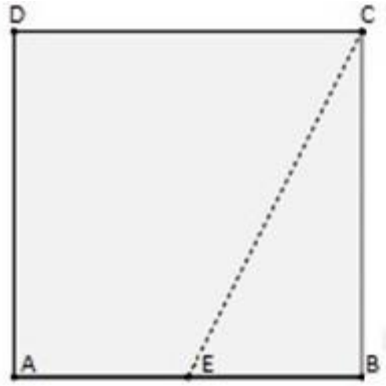


Figura 17 - Construção Retângulo Áureo 1

3) Usando o segmento EF como raio, marcar o ponto F sobre a semirreta AB, tal que EB = BF.

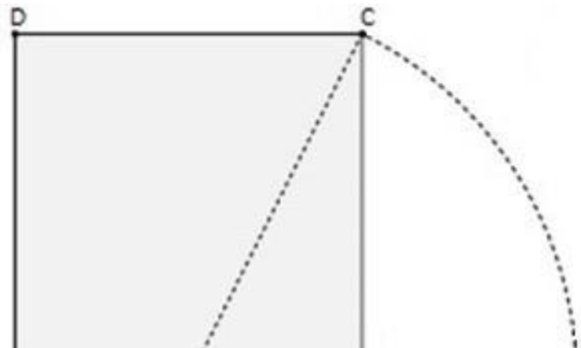


Figura 18 - Construção Retângulo Áureo 2

4) Marcar o ponto G, perpendicular a CD pelo ponto F.

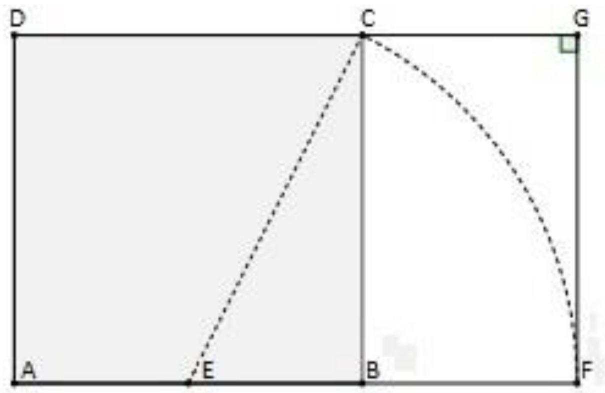


Figura 19 - Construção Retângulo Áureo 3

1.7 Explorando mais o Retângulo Áureo (para o bem ou para o mal)

O Retângulo Áureo: trata-se do retângulo no qual a razão entre o comprimento e largura é aproximadamente o número (Φ) (Phi), ou seja, 1,618... LIVIO (2006) diz que o retângulo áureo é um dos retângulos mais utilizados pelo homem, pois ele emprestou sua forma a cartões de credito, a crachás e outros objetos que usamos (meça os seus cartões e chachás).

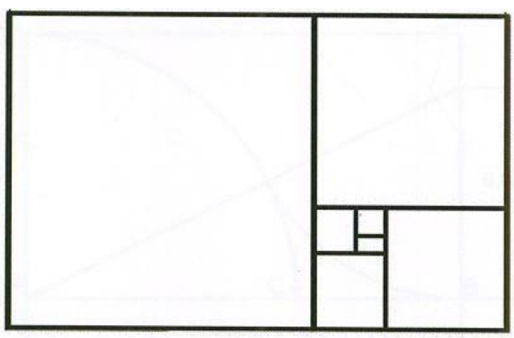


Figura 20: Infinitos Retângulos Áureos

Desenhe duas diagonais em diagonais em qualquer par de retângulos pai- filho série, como na figura 25, e todas irão se cruzar no mesmo ponto. (LIVIO, 2006, p. 104).

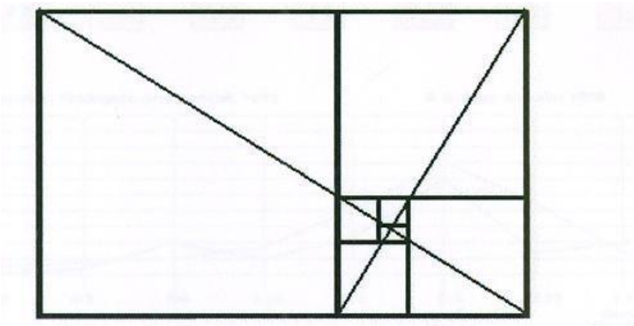


Figura 21: Retângulo Áureo cortado por duas diagonais

Nos dias de hoje, pode ser encontrado em muitos objetos do dia a dia, o que sugere ao docente uma boa opção de atividade, por exemplo, propor aos discentes uma atividadeinvestigativa, onde eles meçam e verifique a razão entre cartões de crédito, documentos de identidades, capas de livros, cadernos até mesmo janelas e portas entre outros. Em seguida, podem fazer uma análise dos resultados, para confirma se tais objetos possuem a Razão Áureaou se aproxima dela.

Capítulo 2 A Sequência de Fibonacci

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história da vida e obra de Fibonacci que foi o matemático responsável pela descoberta da sequência que leva o seu nome, bem como, o problema da reprodução dos coelhos cuja solução é a geradora dos termos da referida sequência e sua correspondente definição formal.

Leonardo de Pisa foi para muitos, o matemático europeu mais original e capaz do Período Medieval. Nascido, na década de 1170, na cidade de Pisa, na região da Toscana (Itália), era também conhecido como Leonardo Fibonacci (devido ao fato de Fibonacciser um diminutivo de “filius Bonacci” que significa “filho de Bonaccio”), Leonardo Pisano ou Leonardo Bigollo (na Toscana, Bigollo significa “viajante”).
Ficou conhecido pelo seu papel na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europae pela famosa sequência numérica que leva o seu nome.

Figura 22: Leonardo Fibonacci

No Século XII, Pisa se destacava por ser um dos grandes centros comerciais da Itália, assim como Gênova e Veneza. Possuía vários entrepostos comerciais espalhados pelo Mediterrâneo onde passavam mercadorias importadas do interior e do ultramar, tais como, as especiarias do Extremo Oriente que circulavam com destino à Europa Ocidental.

Leonardo Fibonacci era filho de Guglielmo dei Bonacci, um destacado mercador pisano e representante dos comerciantes de Pisa que atuava como uma espécie de fiscal alfandegário em Bugia (atualmente Bejaia, na Argélia).

Devido às viagens do seu pai por quase todo o Mediterrâneo, Fibonacci teve oportunidade de visitar a Sicília, o Egito, a Espanha mulçumana, a Grécia e, dessa forma, de conhecer, nestes lugares, as diversas culturas, assim como, de aprender com professores islâmicos a matemática árabe que era mais desenvolvida que a matemática praticada na Europa Ocidental.

Após concluir que o sistema de numeração indo-arábicos, o qual incluía o princípio do valor de lugar, era bem mais prático que todos os outros sistemas de numeração, inclusive, o sistema de algarismos romanos, Fibonacci escreveu o seu primeiro livro, *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*), título que não condiz com o conteúdo da obra, publicado em 1202, no qual descreve em seus primeiros capítulos, as nove cifras indianas (nove algarismos), o zero e as operações elementares envolvendo tais algarismos (incluindo o zero).

Segundo Lívio (2011, p. 111), Fibonacci inicia o *Liber Abaci* da seguinte forma: “os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números e com o 0... qualquer número pode ser escrito...” E para Boyer (1974, p. 185), o *Liber Abaci* “é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso dos numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.”

Nos seus problemas são incluídas questões úteis aos mercadores, como conversões monetárias, cálculo de juros, médias, entre outras. Além desses problemas de ordem prática, existem outros tantos, tais como, o problema do resto chinês, a regra da falsa posição, e mais outros que são resolvidos através do uso de equações quadráticas. A obra também apresenta justificativas geométricas de fórmulas quadráticas e métodos para se obter somas de séries.

Segue um exemplo de um dos problemas que se encontra no *Liber Abaci*:

> Um homem cujo fim se aproximava chamou seus filhos e disse: “Dividam meu dinheiro do modo como irei descrever.” Para seu filho mais velho, ele disse: “Você terá 1 *bezant* [uma moeda de ouro originalmente cunhada em Bizâncio]e um sétimo do que sobrar.” Ao segundo filho, disse: “Pegue dois *bezants* e um sétimo do que sobrar.” Ao terceiro filho, disse: “Você pegará 3 *bezants* e um sétimo do que sobrar.” Assim, ele deu a cada filho 1 *bezant* a mais doque ao filho anterior e um sétimo do que restava e, para o último filho, tudoo que restava. Após seguirem cuidadosamente as instruções, os filhos viram que tinham dividido sua herança igualmente. Quantos filhos havia e

> qual o tamanho da herança (LÍVIO, 2011, p. 114, grifo do autor)?

Após essa obra, Fibonacci gozou de muito sucesso e prestígio a ponto do Imperador Frederico II tê-lo convidado para participar de uma competição matemática, onde foi apresentado vários problemas considerados difíceis pelo matemático da Corte, Johannes Palermo. Fibonacci resolveu todos os problemas os quais a solução de dois deles apresen- tou em um livro chamado *Flos* (*Flor*), publicado em 1225.

Um dos problemas era o de encontrar x racional tal que $x^2 - 5$ e $x^2 + 5$ fossem também racionais. Fibonacci foi o único matemático a apresentar a resposta, $x = 41/12$.Para Lívio (2011, p. 115):

> Hoje temos de ficar impressionados com o fato de que, sem a ajuda de computadores ou calculadoras de qualquer tipo, simplesmente através de sua manipulação virtuosa da Teoria dos Números, Fibonacci tenha sido capaz de ver que a solução para o problema acima era 41/12. De fato, $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$e $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$.

Além do *Liber Abaci* e do *Flos*, Fibonacci escreveu outros dois livros: o *Practica Geometriae*, publicado em 1220, onde ele apresentou os conhecimentos de Geometria e Trigonometria da época e o *Liber Quadratorum*, publicado em 1225, que é considerado a sua obra mais avançada, pois trata da Teoria dos Números. No entanto, Fibonacci ficou conhecido não exatamente pelos seus livros, mas pelo fato de Edouard Lucas, na sua Coleção *Récréations mathématiques*, ter dado o nome fibonacci a uma sequência que aparece como solução de um problema do *Liber Abaci*, que descreveremos a seguir.

2.1 O PROBLEMA DA REPRODUÇÃO DOS COELHOS

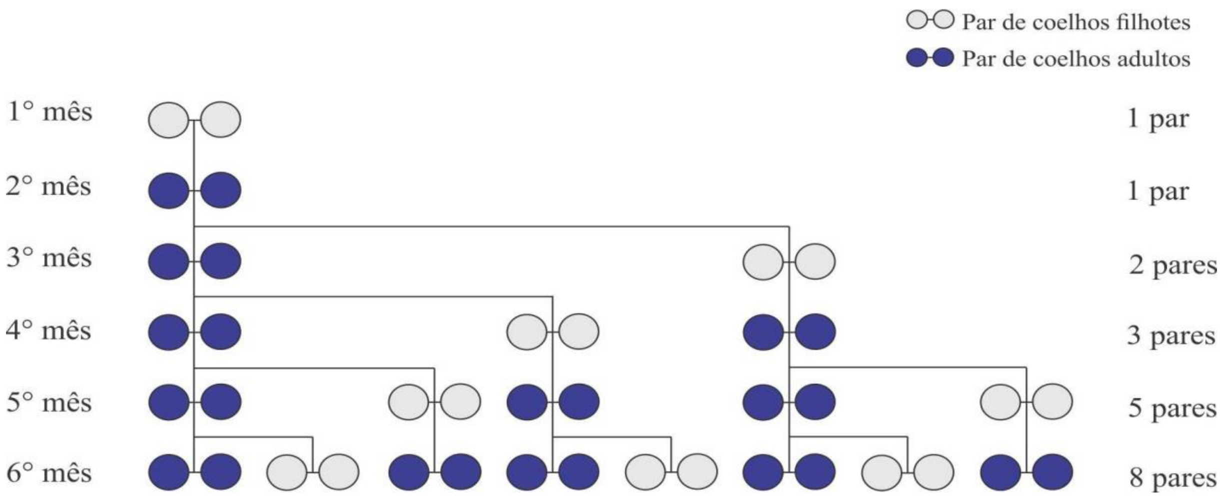
> O *Liber Abaci* apresenta em seu Capítulo 12, o seguinte problema:
>
> *"Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundomês?"*

Solução: Segue abaixo o processo de reprodução em cada mês:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes).
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos).
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes).
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de

filhotes).

- No 5^{o} mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois paresde filhotes).
- Etc.
-
- Notamos que num determinado mês, o número de pares de coelhos será igual ao número de pares do mês anterior mais o número de pares do mês anterior ao anterior, pois serão esses últimos que contribuirão com o acréscimo do número de pares de filhotes.



A Figura 22 mostra a reprodução dos coelhos até o sexto mês.

2.2 DEFININDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Considerando que no problema anterior não haja morte e nem migração de coelhos(nem de dentro pra fora e nem de fora pra dentro), sua generalização é dada por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, $\ldots, f_{n-2}, f_{n-1}, f_{n=}, \ldots,$

onde,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\text{ , com }\quad n > 2 \quad\text{ e }\quad f_1 = f_2 = 1$$

Essa relação define, por recorrência, uma sequência de números naturais, cujos termos são chamados de *Números de Fibonacci*.

Os Números de Fibonacci apresentam propriedades aritméticas notáveis que são, até hoje, objeto de investigação. Existe até uma revista intitulada *The Fibonacci Quarterly*, fundada em 1963, dedicada à pesquisa em torno desses números. Mas o que mais nos impressiona é o fato de que esses números aparecem na geometria, na Teoria dos Números, na genética, assim como surgem, inesperadamente, em Sistemas Dinâmicos Caóticos, como veremos nos próximos capítulos.

Tabela com os termos sucessivos da sequência de Fibonacci

Foi o matemático e astrônomo Johannes Kepler que descobriu que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos converge para a Razão Áurea.

Razão entre termos sucessivos da seqüência de Fibonacci		
1:1	=	1,000000000000000
2:1	=	2,000000000000000
3:2	=	1,500000000000000
5:3	=	1,666666666666670
8:5	=	1,600000000000000
13:8	=	1,625000000000000
21:13	=	1,615384615384620
34:21	=	1,619047619047620
55:34	=	1,617647058823530
89:55	=	1,618181818181820
144:89	=	1,617977528089890
233:144	=	1,618055555555560
377:233	=	1,618025751072960
610:377	=	1,618037135278510
987:610	=	1,618032786885250
1597:987	=	1,618034447821680
2584:1597	=	1,618033813400130
4181:2584	=	1,618034055727550
6765:4181	=	1,618033963166710
10946:6765	=	1,618033998521800
17711:10946	=	1,618033985017360
28657:17711	=	1,618033990175600
46368:28657	=	1,618033988205320

A razão entre os termos consecutivos da seqüência de Fibonacci e sua relação com o número de ouro podem ser expressos através de um gráfico, como dado abaixo.

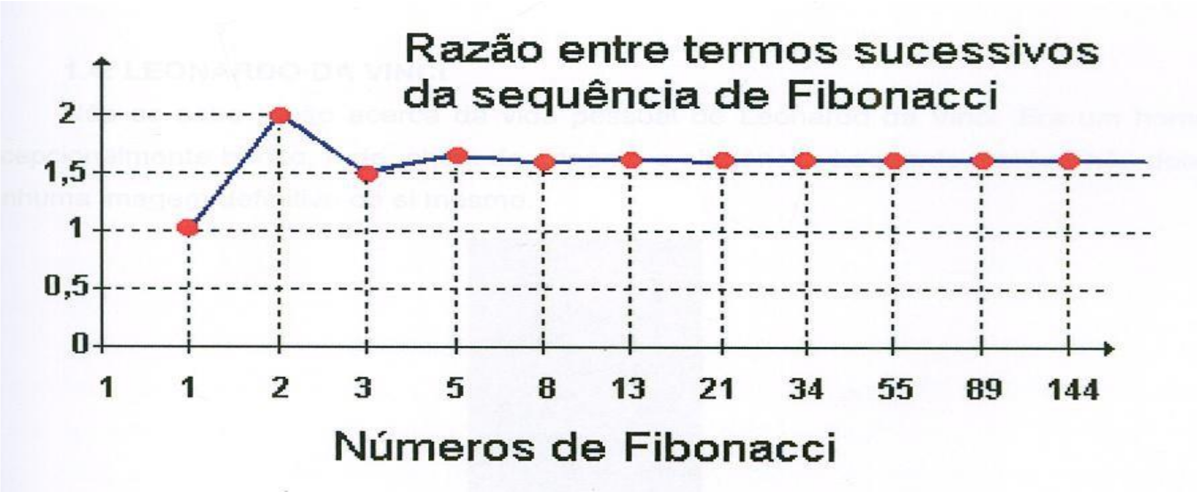


Figura24: Gráfico que representa os termos sucessivos da sequência de Fibonacci

CAPITULO 3 A Sequência de Fibonacci é mesmo “de FIBONACCI”? E a Origem Hindu da Sequência de Fibonacci!

Nomear a Sequência conhecida como “de FIBONACCI” é ser Eurocentrista? E o papel dos hindus nessa história?

Sequência dos Indianos ou Sequência de Pingala? (mais conhecida como Sequência de Fibonacci)

A sequência de Fibonacci é o código da natureza. Está em tudo, desde flores a sistemas de tempestades e ao formato das galáxias. No entanto, grande parte do mundo não conseguiu reconhecer a sua própria fonte (será?).

Ao contrário de muitos outros europeus, Fibonacci não era um plagiador. Ele mencionou claramente sua fonte e reconheceu seu crédito aos antigos índios.

Na introdução de seu livro Liber Abaci, Fibonacci (c. século 13 d.C.) faz as seguintes revelações:

1) “Sou filho de um funcionário que trabalha em Bugia, na Argélia”.

2) Havia uma colônia de mercadores indianos naquela cidade.

3) “Foi lá que fui apresentado à Matemática Indiana”.

Fibonacci diz ainda:

“Eu amava tanto a matemática indiana acima de todas as outras que me dediquei completamente a ela”

“Também fui apresentado à matemática grega, árabe e egípcia”

“Mas descobri que todos eles, mesmo Pitágoras e sua escola, apresentavam erros em comparação com a matemática indiana”

Fibonacci diz ainda:

“Por isso, baseando meu livro completamente nos métodos indianos e aplicando-me a eles com a maior atenção, mas não sem acrescentar algo de meu próprio pensamento, me forcei a escrever este livro. Eu fiz a demonstração de tudo”.

” Em meu livro publiquei a doutrina da Matemática completamente de acordo com o Método dos Indianos. Adotei COMPLETAMENTE o Método (Matemático) dos Indianos porque é o MAIS eficaz”

Assim, em seu livro, Fibonacci obviamente não se refere à sequência de Fibonacci como “Sequência de Fibonacci”. Em vez disso, ele simplesmente a chama de “Sequência Indiana”.

Leonardo Fibonacci, no seu famoso livro *Liber Abaci* (1202), mostra que a origem do conceito é muito mais antiga e pode ser rastreada até os matemáticos indianos, como veremos a seguir.

*Tradução livre de partes do artigo “Indian origins of the Fibonacci sequence” (origens indianas da sequência de Fibonacci).

Fonte: https://trueindologytwitter.wordpress.com/2020/03/31/indian-origins-of-the-fibonacci-sequence/.

No que diz respeito à insistentemente chamada (inclusive nesta dissertação) “Sequência de Fibonacci”, Fibonacci estava apenas traduzindo os Sutras de Pingala (c. século III d.C.) e seu comentarista Virahanka, que derivou a “Sequência de Fibonacci” várias centenas de anos antes mesmo de Fibonacci nascer.

A Origem Hindu da Sequência, embora Fibonacci tenha introduzido a sequência ao mundo ocidental no século XIII, o conceito de sequências numéricas semelhantes à de Fibonacci já era conhecido por matemáticos hindus. A primeira menção documentada a uma sequência semelhante à de Fibonacci pode ser encontrada em textos matemáticos hindus do século VI.

Embora os matemáticos hindus tenham trabalhado com progressões numéricas que se assemelham à sequência de Fibonacci, não há evidências de que a sequência tenha sido usada ou formalizada da mesma forma. A diferença fundamental é que Fibonacci usou um problema prático (crescimento de uma população de coelhos) para explicar a sequência, enquanto na Índia as progressões numéricas eram mais associadas a padrões de versos poéticos e à matemática do ritmo (no caso de Pingala, por exemplo) ou à aritmética e álgebra.

Isto levanta uma questão. Por que chamamos de “sequência de Fibonacci” quando o próprio Fibonacci não afirma tê-la descoberto e simplesmente reconhece a matemática indiana como sua fonte? Por que nunca se oferece a Pingala a mesma cortesia?

3.1 Origem mais precisa antecede Pingala

Em textos antigos de matemática e metrologia, como o *Chandahsutra* de Pingala, aparece a ideia de uma sequência de números em que cada termo é a soma dos dois anteriores, embora não com a mesma ênfase que teria depois. Pingala, um matemático e gramático indiano, foi o primeiro a descrever uma forma de progressão em que o valor de um termo era derivado dos termos anteriores, no contexto de padrões rítmicos de versos.

A sequência de Fibonacci aparece na matemática indiana, em conexão com a prosódia sânscrita. Na tradição poética sânscrita, havia interesse em enumerar todos os padrões de sílabas longas (L) de 2 unidades de duração, justapostas a sílabas curtas (S) de 1 unidade de duração.

A partir de 0 e 1, forma-se a sequência abaixo

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Os números de Fibonacci foram descritos pela primeira vez na matemática indiana já em 200 a.C., em um trabalho de Pingala sobre a enumeração de possíveis padrões de poesia sânscrita formados por sílabas de dois comprimentos.

O conhecimento da sequência de Fibonacci foi expresso já em Pingala (c. 450 a.C.-200 a.C.). Singh cita a fórmula enigmática de Pingala, misrau cha . Bharata Muni também expressa conhecimento da sequência no Natya Shastra (c. 100 a.C.-350 d.C.) No entanto, a exposição mais clara da sequência surge no trabalho de Virahanka (c. 700 d.C.), cujo próprio trabalho se perdeu, mas está disponível em uma citação de Gopala (c 1135).

No entanto, alguns pontos podem ser destacados em termos de conexões entre a sequência de Fibonacci e conceitos hindus:

O número de ouro (Φ)**: A sequência de Fibonacci está intimamente relacionada ao número de ouro (Φ ≈ 1,618), uma constante matemática que aparece em muitos fenômenos naturais, incluindo crescimento de plantas, proporções do corpo humano, arquitetura, e muito mais. O número de ouro também aparece em alguns conceitos estéticos no Hinduísmo, como em padrões geométricos usados na arte sacra, templos e na construção de mandalas. Embora a relação direta entre o número de ouro e o Hinduísmo não seja explícita, o uso de proporções harmônicas e estéticas na arte e arquitetura hindus pode remeter a um princípio semelhante.

A sequência de Fibonacci foi formalizada por Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, no *Liber Abaci* (1202), mas o padrão que ela descreve, como a proporção áurea, já pode ser encontrado em muitos sistemas de conhecimento antigos, incluindo aqueles que influenciaram o Hinduísmo.

Portanto, a conexão entre a sequência de Fibonacci e o Hinduísmo pode ser mais bem entendida como uma correspondência de conceitos estéticos, espirituais e naturais, mais do que uma relação matemática direta nas escrituras antigas

Fonte: Tradução livre de texto em inglês de https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_sequence

CAPÍTULO 4 NÚMEROS DE FIBONACCI E OS SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

Uma aparição dos números de Fibonacci na matemática pura que é extremamente surpreendente é na área de sistemas dinâmicos discretos que apresentam o Caos matemático (infinidade de pontos periódicos e estabilidade, existência de órbitas densas com a aleatoriedade e o famoso efeito borboleta).

Um sistema dinâmico discreto é a simplesmente a evolução de “algo ou evento” no tempo da seguinte forma: temos uma regra que rege o evento, pode ser uma função de um intervalo **I** contido na reta real $\mathbb{R}$ aplicado no próprio intervalo, por exemplo, uma **f: I →I.** Mas o que seria o tempo neste caso? Dado um lugar **x** do espaço **I,** obtemos a próxima posição dele em **I,** ou seja, calculando **f(x).** Obviamente se escolhemos uma função do tipo **f: I →I,** a próxima posição do ponto cairá sempre dentro de **I** ou na fronteira **de I.** O ideal é que ninguém saia de **I.** Isto torna o sistema dinâmico bem mais interessante. A próxima posição de **x** no espaço **I é calculada tomando** $f \circ f\,(x)$. E assim por diante, ou seja, compondo **n** vezes a função f obtemos a n-ésima posição do ponto **x** em **I**, definindo o que chamamos de n-ésimo iterado de **f,** colocando a composição como se fosse uma potência de **f:**

$$f^{n}(x) = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f\,(x)$$

*Com isso “o tempo em segundos” neste sistema é contado a cada iteração de **f.** Acima temos a posição de **x** no tempo **n.** Uma outra palavra herdada do estudo dos sistemas planetários é o que chamamos de órbita de **x,** ou seja, o caminho que x percorre no espaço I:*

$$Orb\,(x) = \{\, x, f(x), f^{2}(x), f^{3}(x), \ldots, f^{n}(x), \ldots \}.$$

*Esses números de **Orb (x),** ou o conjunto **Orb(x)** pode ser um conjunto unitário, pois se **f(x)=x,** um ponto chamado fixo, temos que **Orb (x)= { x }.** Assim como **Orb (x)** pode ter dois, três ou infintos pontos. Se **Orb (x)** é um conjunto finito dizemos que o ponto **x** é periódico ou fixa se **n=1**. Se **Orb (x)** é um conjunto infinito, ou seja, infinitos pontos distintos de I, dizemos que a órbita é não periódica. Agora que temos alguma familiaridade com os sistemas dinâmicos discretos, vamos à próxima pergunta.*

E qual o objetivo em estudar esses sistemas discretos? Várias. As principais são: quantos pontos periódicos existem? quantos não periódicos existem, se existem? para onde "vai" a maioria dos pontos? Quais os comportamentos típicos do sistema (do ponto de vista estatístico)? E outras perguntas bem mais complexas, tais como: qual a medida de Lebesgue desses conjuntos invariantes? Existem conjuntos de Cantor nesses sistemas dinâmicos? Tudo o que dissemos aqui tem aplicações na física e em várias outras áreas da ciência, principalmente na economia, na previsão de riscos e na biologia, aliada antiga da matemática.

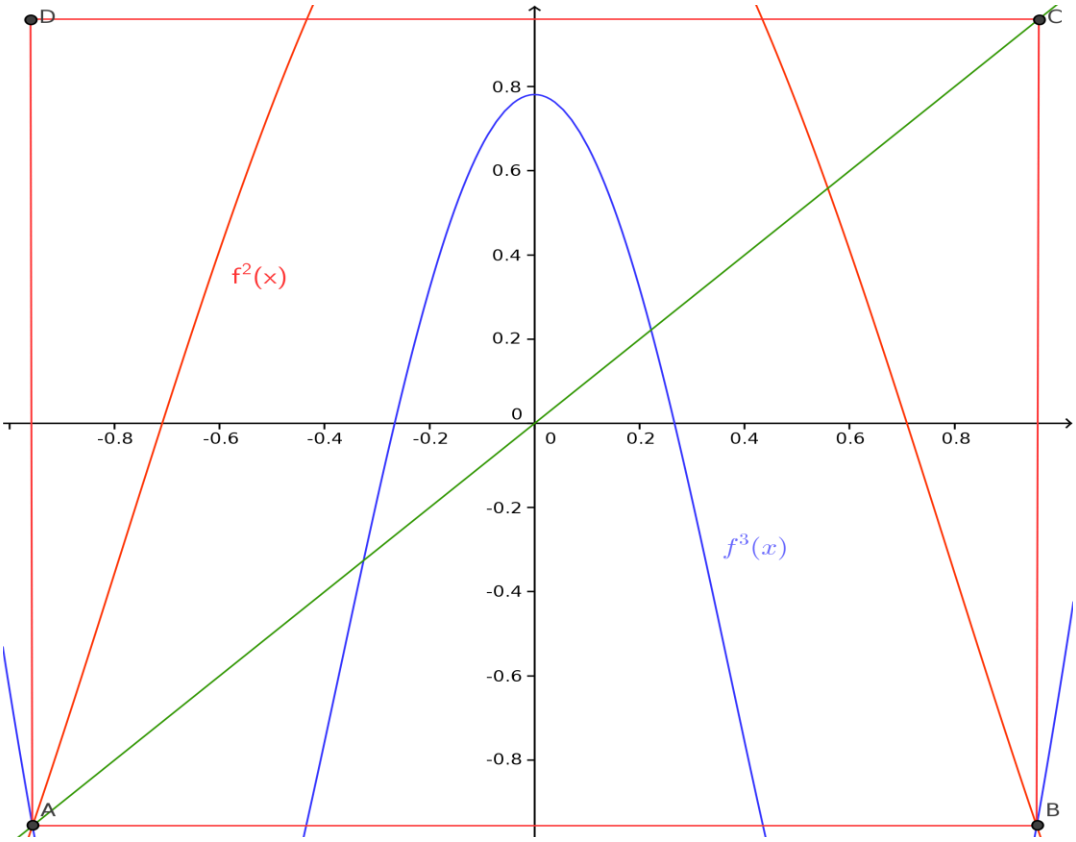
Um sistema dinâmico discreto clássico que se originou de modelos matemáticos para estudo de dinâmica de populações de animais e organismos é o sistema abaixo, chamada de aplicação logística ou aplicação quadrática

$$\mathbf{f(x) = ax - ax^2 = a.x.(1\text{-}x)}\ ,$$

onde **a** é uma parâmetro que pode variar de **1** a **4**, por exemplo. A partir do estudo do biólogo Robert May, tivemos uma explosão do estudo da dinâmica dessas funções, abrindo uma enorme área na matemática pura desde a década de 1970 do século XX, chamada de sistemas dinâmicos de baixa dimensão. Robert May (1936-2020) foi extremamente importante por seus estudos seminais sobre interações intra e entre populações biológicas, que reformularam o entendimento de como as espécies, comunidades e ecossistemas respondem a perturbações naturais ou criadas por interferência humana. Seu trabalho de impacto foi "Simple mathematical models with very complicated dynamics", na revista Nature de 1976. No campo da matemática pura a teoria se expandiu demais nas décadas subsequentes. Inclusive o único matemático brasileiro que ganhou a medalha Fields em 2014, considerado o prêmio Nobel da Matemática, é um pesquisador da área de Sistemas Dinâmicos e seus principais trabalhos abordam esses tipos de sistemas.

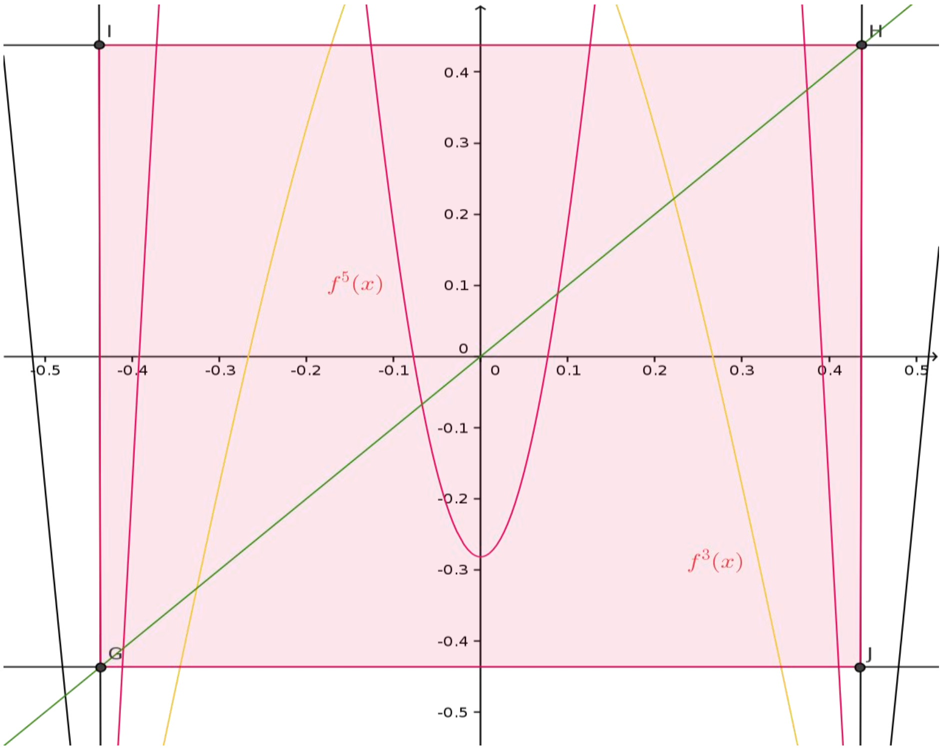
Algumas das mais famosas aplicações quadráticas são quando **a=4** e quando **a=3.983…**. As duas apresentam o que chamamos de comportamento caótico, o Caos matemático que mencionamos acima. Como não faz parte do escopo do trabalho, vamos mencionar apenas a característica relacionada aos números de Fibonacci. Os matemáticos descobriram que o que determina a complexidade ou não do sistema é observar o que acontece perto do ponto crítico (ponto de máximo) da função **f (**no caso da quadrática seria o ponto ½). No caso **a=3.983…** eles estudaram os gráficos dos vários iterados de $f, f^2, f^3, \ldots, f^n$, etc. Descobriram observando quais gráficos ficam próximos do ponto crítico. O procedimento foi olhar no plano cartesiano em uma caixa quadrada adequada, próximo e ao redor do ponto crítico, descobrindo que f^2 *e* f^3 *se aproximam, depois que* f^3 *e* f^5 *se aproximam, depois* f^5 *e* f^8 *se aproximam, depois* f^8 e f^{13} e f^{18} se aproximam e assim sucessivamente. Ou seja, surpreendentemente aparecem, nos iterados, a sequência de Fibonacci. A cada zoom que fazemos a partir do quadrado inicial obtemos as fotos dos iterado de Fibonacci.

Os dinamicistas chamam isso de Combinatória de Fibonacci, vejam nas figuras abaixo, em vários zooms, tiradas da chamada aplicação quadrática de Fibonacci. Para estudos mais aprofundados veja em [N, M].

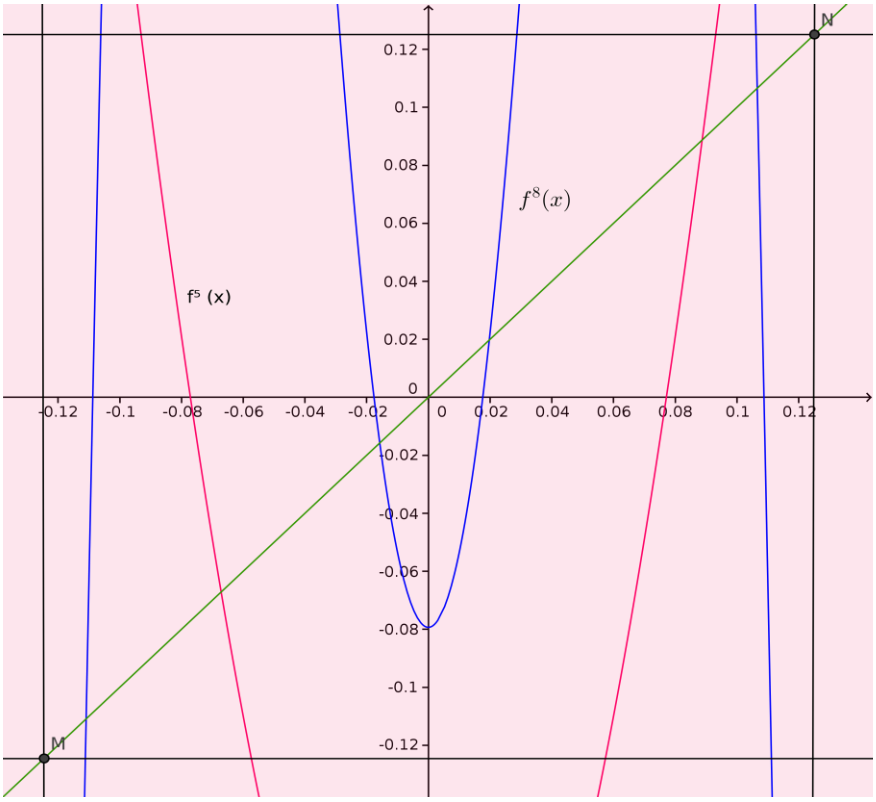


Observe o segundo zoom em quadrado geometricamente semelhante ao primeiro:

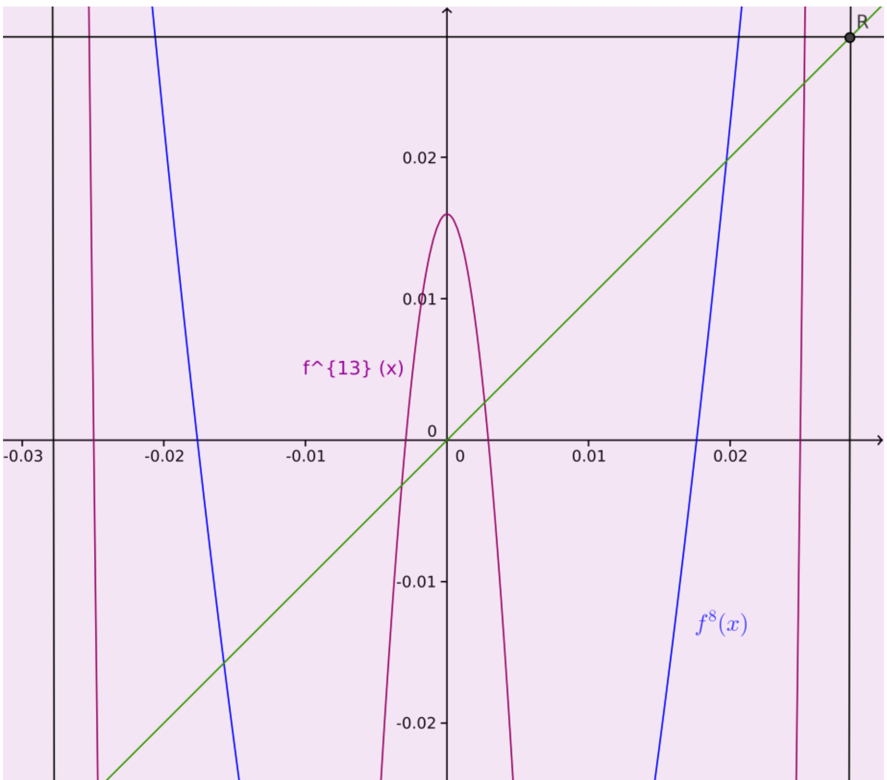
O terceiro iterado de f e o quinto iterado de f nas proximidades ponto crítico do domínio de f.



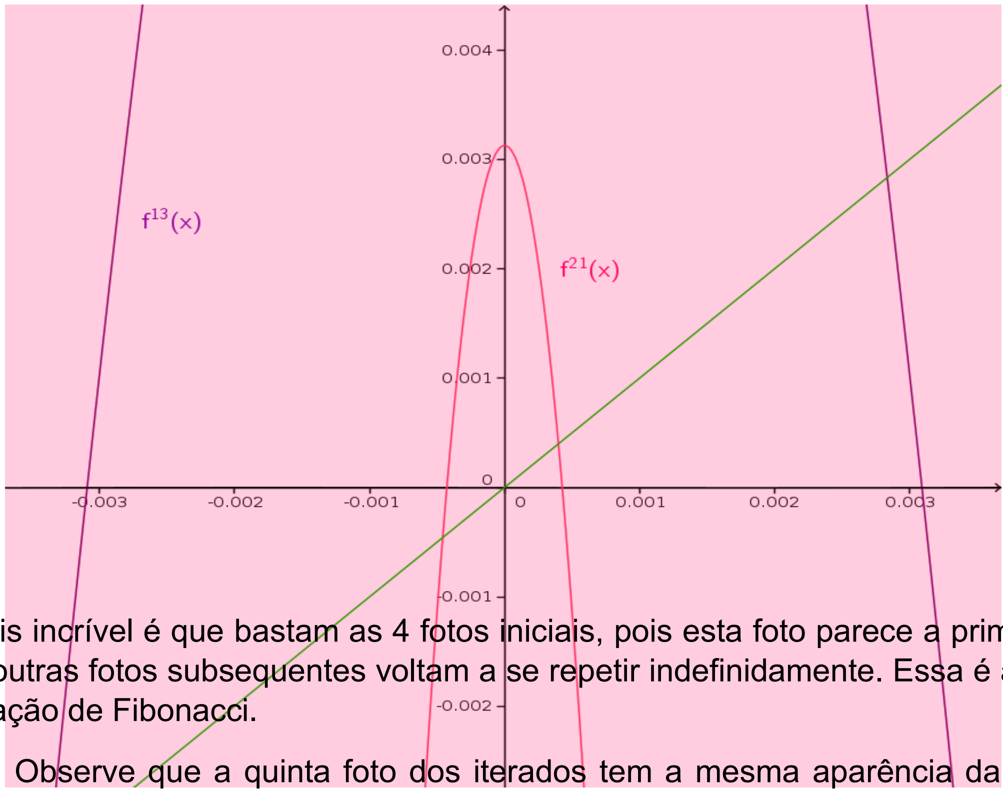
Abaixo o quinto iterado de f e o oitavo iterado de f nas proximidades do ponto crítico.



Abaixo o oitavo iterado de f e o décimo terceiro iterado de f nas proximidades d o ponto crítico do domínio de f.



O décimo terceiro iterado de f e o vigésimo primeiro de f nas proximidades do ponto crítico c= (0,0) do domínio de f. [1]



O mais incrível é que bastam as 4 fotos iniciais, pois esta foto parece a primeira foto e as outras fotos subsequentes voltam a se repetir indefinidamente. Essa é a incrível Aplicação de Fibonacci.

Observe que a quinta foto dos iterados tem a mesma aparência da primeira foto, com um ramo crítico no meio com concavidade para cima e dois ramos que revertem a orientação. Se continuarmos iremos repetir as 4 fotos indefinidamente. Este é comportamento típico da chamada aplicação de Fibonacci. No geogebra as figuras que foram geradas, foram feitas a partir da aplicação $\boldsymbol{x^2 + a}$, onde a = -1.87…, que resulta no mesmo comportamento da nossa **f(x)=a.x.(1-x) ,** pois essas funções quadrática são homeomorfas (tem dinâmica igual)**.**

Essa característica desses sistemas dinâmicos provavelmente iria surpreender muito o nosso personagem Leonardo Fibonacci. Muitos problemas matemáticos em aberto se relacionam a chamada combinatória de Fibonacci em outras funções, cúbicas ou de qualquer ordem.

CAPITULO 5 AS ESPIRAIS

A espiral é uma das formas geométricas encontradas há mais tempo na história da humanidade e é também um dos padrões mais comuns da natureza, existem gravuras rupestres desses símbolos que datam do período neolítico. Faz-se uma discussão a respeito das espirais, como elas inspiram matemáticos, artistas e artesão em quase todas as épocas e culturas. Mostra-se como as espirais estão presentes em adornos de metal de janelas e portas, nas conchas (amonites e náutilos), nas galáxias, nas tempestades, nos tornados, na vazão da água nos ralos, nos girassóis, nas pinhas, nas rosas e em uma corda que se enrola sobre si mesma. Discute-se que sempre que nos deparamos com algum fenômeno que reúne um movimento de rotação com uma dilatação ou contração a espiral estará presente.

No entanto, somente a partir do século XVII e após a invenção da geometria analítica, podemos falar da definição formal de coordenadas, fundamentadas no conceito ângulo-distância. As primeiras aplicações empíricas de um procedimento similar ao da geometria analítica foram feitas para o estudo da navegação e da abóboda celeste.

Arquimedes, em sua obra *Sobre Espirais,* descreve a espiral que leva seu nome, uma equação na qual o raio depende do ângulo. Contudo, essas aplicações não faziam uso de um sistema formal de coordenadas como meio de localização de um ponto no plano (STRUIK,1989, p.94).

Newton, em sua obra *Método dos Fluxões,* escrita 1671 e publicada 1736, estabeleceu dez novos sistemas de coordenadas, além das cartesianas para resolver os problemas relativos a tangentes e curvas, *a sétima maneira para espirais,* conhecida atualmente como sistemas de coordenadas polares, onde no lugar do x se usa o θ e no lugar do y se usa o **ρ**. Ele também forneceu as equações para a transformação de coordenadas retangulares para polares, assim: $x^2 + y^2 = t^2$ e $tv = y$, onde t é o raio vetor e v um segmento representando o seno do ângulo vetorial associado ao ponto (x y) em coordenadas cartesianas.

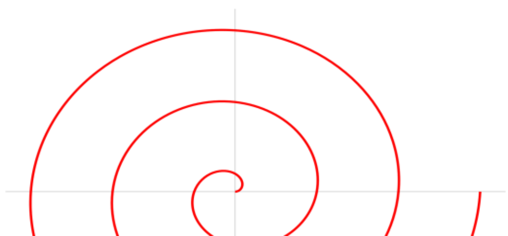
Em 1691, *Jakob Bernoulli* concebe o conceito de coordenadas polares e a pública no jornal *Acta Eroditorum.* O sistema usava como referência um ponto (polo) sobre uma reta (eixo) polar). As coordenadas se determinavam mediante a distância ao polo e o ângulo relativo ao eixo polar. A posição de um ponto qualquer no plano é descrita primeiro pelo comprimento do vetor do polo ao ponto e, segundo, pelo ângulo que o vetor forma com o eixo polar. Entretanto, atribuem a atual denominação de *coordenadas polares* ao matemático italiano Gregório Fontana (1735 -1803) (BOYER, 2010,p.282-283;KLASSEN, 1992, p.67-68; SMITH, 1958, p.324)

O uso de coordenadas polares é apropriado em qualquer situação onde o fenômeno em consideração se encontre diretamente associado à direita e à longitude de um ponto central como curvas em revolução, movimentos giratórios.

5.1 Explorando as Espirais

As espirais podem ser representadas quando um ponto se desloca num plano em torno de outro chamado polo, afastando-se ou aproximando-se dele sem nunca o atingir, obedecendo a uma determinada lei que regula e estabelece certa relação entre a velocidade dos dois movimentos: um circular em torno do polo, e outro retilíneo uniforme se afastando em relação ao mesmo polo. Então, a curva descrita pelo ponto que se desloca é uma espiral. Essas podem ter sentido dextrogira ou sinistrógira, conforme se desenvolvam para direita ou para esquerda, respectivamente.

A espiral possui dois braços, um para $\theta > 0$ e outro para $\theta < 0$. Os braços se conectam na origem, em geral, só se mostra um deles no gráfico. Em coordenadas polares (r, θ), a espiral é descrita pela equação: $\mathbf{r = a.\,\theta}$, onde **r** é o raio, **a** é a constante de proporcionalidade e o ângulo θ é medido em radianos (LEITHOID,1994,p. 621; SPIEGEL,1973, P.45)



5.2 A ESPIRAL LOGARÍTMICA

A Espiral Áurea é um desses exemplos da Razão Áurea na natureza, foi descrita por Jacques Bernoulli(1654-1705) pesquisador associado a Razão Áurea e também ficou conhecida também com espiral logarítmica, cujo nome deriva da maneira de como raio da espiral aumenta, quando se afasta do centro sem alterar sua forma, tal característica é conhecida como auto-similaridade (figura 14).

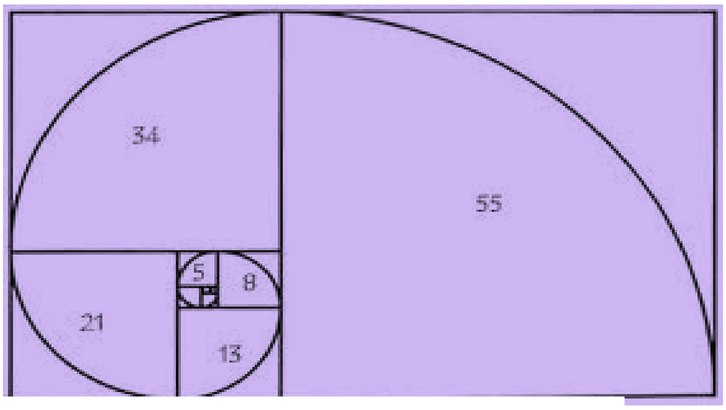


Figura 32: Espiral Áurea ou Espiral Logarítmica.

Na natureza, as espirais logarítmicas são mais comuns do que imaginamos, por exemplo,o casco do Náutilo ,os chifres dos carneiros (figura 33), galáxias (figura 34) as presas do elefante, são exemplos de espirais logarítmicas. Lembrando que está espiral não é a mesma da Espiral Arquimediana, pois nesta a distância entre os rolamentos é a mesma (LÍVIO, 2011).

Figura 33: Espirais em chifres

Figura 34: Espirais em galáxias

A espiral logarítmica também é conhecida como espiral eqüiângular. Esse nome foi cunhado em 1638 pelo matemático e filósofo Renê Descartes (1596 – 1650), em cuja homenagem batizou os números usados para localizar um ponto no plano (com respeito aos dois eixos) – coordenadas cartesianas.

Ligando os vértices de um Triângulo Áureo progressivamente, obtemos uma espiral logarítmica.

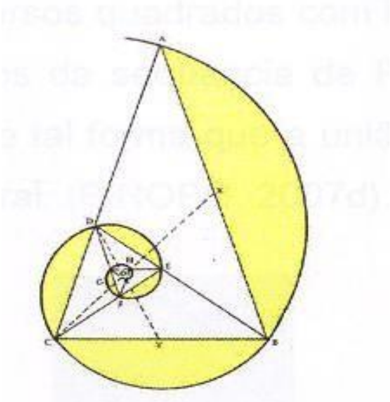


Figura 35: Espirais Logarítmica no Triângulo Áureo

Uma observação curiosa, pode ser vista nos girassóis, as espirais cruzadas (figura 35) formadas pelo arranjo dos flósculos, percebe-se padrões de espirais tanto no sentido horário quanto anti-horários. O número de espirais varia conforme o tamanhodo girassol, os mais comuns possuem 34 espirais em um sentido e 55 no outro e estes valores são razões

Figura 36: Espirais Cruzadas nos Girassóis

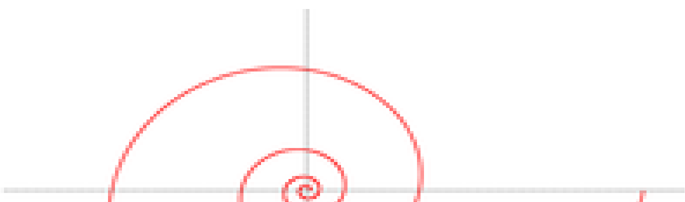
A **espiral logarítmica** foi estudada por Jacob Bernoulli (1654-1705), que chamou a esta curva de *spira mirabilis* (em latim, espiral maravilhosa). Seu nome advém de sua expressão analítica, que pode ser escrita na forma de:

$$log\left(\frac{r}{R}\right) = \theta cot\alpha$$

Que resulta de sua expressão analítica nas coordenadas polares *r* e θ:

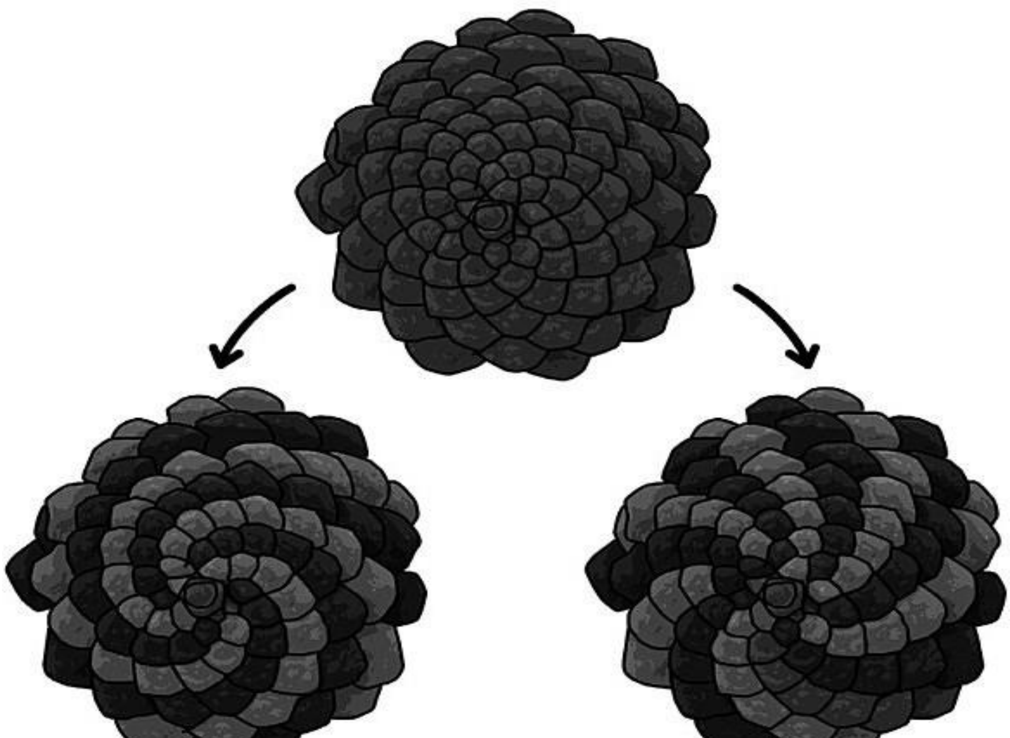
$$R(\theta) = Re^{\theta cot\alpha}$$

onde *R* é o raio associado a θ = 0. Esta expressão apresenta a distância à origem, *O*, de um ponto da curva em função de θ.



Um dos exemplos mais impressionantes é sem dúvida seu surgimento na botânica. A lotaxia é a disciplina que estuda a maneira como as folhas e os diferentes elementos constitutivos de um vegetal se implantam em torno do caule. Se observarmos uma pinha, constataremos que sua superfície é composta de escamas que se enroscaram em espirais. Mais precisamente, podemos contar o número de

espirais que giram no sentido horário e o número de espirais que giram no sentido anti-horário



Por incrível que pareça, esses dois números são invariavelmente dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci! Passeando pela floresta, você poderá encontrar, por exemplo, pinhas do tipo 5-8, 8-13 ou 13-21, porém nunca do tipo 6-9 nem 8-11. Essas espirais de Fibonacci aparecem de maneira mais ou menos evidente em muitos outros vegetais. Se são bem visíveis nos abacaxis e no centro dos girassóis, já não são detectadas com facilidade na forma inchada de uma couve-flor. Mas o fato é que estão lá!

1.3 - A Espiral na Natureza e suas Aplicações

A ***cóclea ou caracol***, localiza-se em uma cavidade óssea imediatamente atrás da orelha e faz parte do ouvido interno. Tem o formato de um canal, com paredes ósseas, enrolado em forma de uma espiral de Arquimedes, com aproximadamente 35mm de extensão. Em seu interior contém a endolinfa, um líquido que tem a função de transmitir as vibrações sonoras. Essas se propagam pelo líquido até os *pelos auditivos,* que transformam as vibrações em impulsos nervosos que chegam ao cérebro, onde são decodificados como sons. Na cóclea, a sensibilidade aos sons varia de acordo com a região. Os sons agudos são captados especialmente na base da cóclea e os mais graves são captados principalmente pelo seu ápice (ORGÃO DOS SENTIDOS,2013).

> O senso do equilíbrio que provê a orientação em relação à gravidade, deve-se à função de um órgão denominado aparelho vestibular. O aparelho é uma estrutura em forma de caracol denominada cóclea, envolvida na audição, formam a orelha interna nos nossos temporários do crânio. O aparelho possui duas partes: o aurículo e o século e dois canais semicirculares. As estruturas sensitivas do aparelho vestibular e da cóclea estão localizadas no labirinto membrâneo, que é uma estrutura tubular cheia de um líquido com composição similar ao líquido intracelular, este líquido denomina-se endolinfa (FOX,2007,p.240).

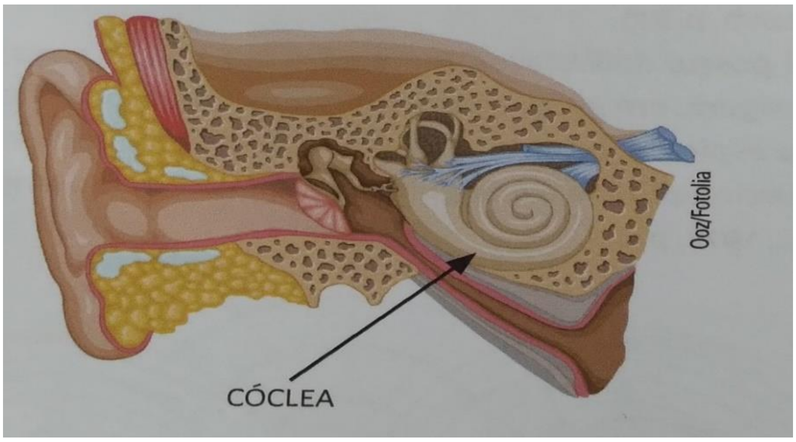


Figura 39: Espiral CÓCLEA

Nos ***discos de vinil***, as gravações são feitas com sulcos igualmente espaçados, permitindo a maximização do tempo de gravação na área do disco. O disco geralmente é feito de policloreto de vinil ou PVC (plástico) preto usados para gravar dados de áudio, reproduzíveis em toca-discos. O disco de vinil possui sulcos microscópicos em forma de espiral de Arquimedes que guiam a agulha dos toca-discos desde a borda até o centro no sentido horário. Esses sulcos fazem a agulha vibrar, transformando a vibração em sinal elétrico e posteriormente amplificando-a convertendo-a em música (FIGURA 40) (OS SEGREDOS, 2012, p.124-125)

Figura 40: Espiral em Disco de vinil

O ***abacaxi*** **(**Ananas comosus) é uma planta semiperene de regiões tropicais e subtropicais, inicialmente, produz um único fruto, localizado no ápice; posteriormente, o talo ramifica-se lateralmente, onde surgem outros frutos, prolongando por vários anos a fase produtiva. As folhas têm forma de calhas e estão inseridas no talo, formando uma densa rede de espirais dextrógira e sinistrógira. O fruto é composto, do tipo sorose, resultado da coalescência de um grande número de frutos simples denominado frutilhos ou gomos. com forma aproximada à de um hexágono. Esses gomos encontram-se dispostos em um eixo central (polpa ou miolo), distribuídos em três diferentes espirais que se encontram ao longo da polpa em número de 8,13, e 21 espirais paralelas. Já a casca é formada pela reunião das brácteas e separadas das flores dispostas geometricamente em espirais logarítmicas. (CONTADOR, 2011, P. 215).

Figura 41: Abacaxi, espirais dextrógira e sinistrógira

Em ***plantas ornamentais*** encontramos folhas distribuídas em forma de espiral como: **aloe africana, begônia caracol** etc. A popular babosa espiral ou aloe africana (*Aloe polyphylla*) è uma planta conhecida da espécie de *liliopsida* (liláceas) do gênero Aloe, pertence à família das *Asphodelaceae*, originária das montanhas de Lesoto, África Austral. Alcança entre 45 cm e 60 cm de altura. Suas folhas carnosas dispostas simetricamente em espiral se desenvolvem em ambos os sentidos, horário e anti-horário. Uma planta adulta pode ter 5 fileiras de folhas em 5 níveis, cada nível com 15 a 30 folhas (TH JARDINS SHOPPING,2012).

Considerações Finais

Neste trabalho fizemos uma revisão bibliográfica referente à "Razão Áurea" e a "Sequência de Fibonacci", com o intuito de ajudar o aluno e o professor do ensino básico oferecendo-lhes mais uma ferramenta para se fazer alguns esclarecimentos relacionados ao tema. Citamos importantes matemáticos e seus estudos para contribuir com o conhecimento relacionado ao princípio de tudo, gerando assim não só o interesse do aluno pela Matemática, mas pela sua história que também é fascinante, pois sem os recursos que hoje temos, os matemáticos citados e muitos outros, foram capazes de grandes estudos e maravilhosos resultados.

Como podemos observar é muito fácil encontrarmos a Razão Áurea em nosso cotidiano. Podemos assim ensinar nossos alunos um novo jeito de enxergar a Matemática, analisando as diversas aplicações nas quais apresentamos. É claro que para calcular a Razão Áurea a figura tem que ter padrões harmônicos e medidas que possibilitem a esse cálculo, mas com certeza despertará nos alunos o interesse pelo assunto e não mais olharão para uma figura, uma construção sem tentar imaginar a Razão Áurea, entendendo assim que a Matemática não seja apenas utilizada para resolver contas e problemas passados pelos professores em sala de aula.

Contribuímos também para mostrar que a razão áurea pode sim, ser encontrada nas construções antigas e modernas, na natureza, na arte, etc... No entanto, há quem faça um esforço tremendo para visualizá-la onde ela não existe. E talvez essas pessoas nem acreditem que a divina proporção é menos comum do que elas imaginam! Dessa forma proporcionando uma nova forma de utilizar a "Proporção Áurea" e a "Sequência de Fibonacci" com os alunos e professores em sala de aula.

Todos os exemplos citados aqui nos levam a perceber quão grandes é a importância deste número e por este motivo foi chamado de "ouro". Visamos com este trabalho despertar no educando mais interesse pela de Matemática.

6.0 APENDICE E ANEXOS

6.1 O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

6.1.1 Par Ordenado

Par: Chama-se **Par** todo conjunto formado por dois elementos. Assim {1, 2}, {3, -1}, {a, b} indicam pares. Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par: {1, 2} = {2, 1}, {3, -1} = {-1, 3}, {a, b} = {b, a}.

Em Matemática existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Por exemplo, no sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

x = 3 e y =2 é solução, ao passo que x = 2 e y = 3 não é solução. Se representássemos por um conjunto, teríamos: {3, 2} seria solução e {2, 3} não seria solução. Há uma contradição, pois, sendo {3, 2} = {2, 3}, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o par ordenado (3, 2), em que fica subentendido que o primeiro elemento, 3, refere-se à incógnita x e o segundo elemento, 2, refere-se à incógnita y.

6.1.2 Definição de Par Ordenado.

Seja $\mathbb{R}$ o Conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = R^2$

$$R^2 = \{(x, y) | x \in Rey \in R\}$$

Vamos tomar dois elementos, **(a, b)** e **(c, d),** de R^2para dar três importantes definições:

a) **igualdade**: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

b) **adição**: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

c) **multiplicação**: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

6.1.3 Conjunto dos Números Complexos

Chama-se **conjunto dos números complexos**, e representa-se por **C**, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação conforme o item 1.2.
É usual representar-se cada elemento **(x, y)** ∈ **C** com o símbolo **z**; portanto:

$$\mathbf{z \in C \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x, y} \in R$$

6.1.4 Propriedades da Adição

Teorema:
A operação de adição em C verifica as seguintes propriedades:

[A - 1] propriedade associativa
[A - 2] propriedade comutativa
[A - 3] existência do elemento neutro
[A - 4] existência do elemento simétrico

6.1.5 Propriedade da Subtração

Decorre do teorema anterior que, dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1 + z = z_2$.

6.1.6 Propriedades da Multiplicação

Teorema:
A operação de multiplicação em C verifica as seguintes propriedades:

[M – 1] propriedade associativa
[M – 2] propriedade comutativa
[M – 3] existência do elemento neutro
[M – 4] existência do elemento inverso

6.1.7 Propriedade da Divisão

Decorre do teorema anterior que, dados os complexos z_1 $(a, b) \neq (0, 0)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1 \times z = z_2$.

6.1.8 Propriedade Distributiva

Em C, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

[D] $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

6.1.9 Forma Algébrica

Imersão de R em C

Consideremos o subconjunto R' de C formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$$R' = \{(a, b) \in C \mid b = 0\}$$

Pertencem, por exemplo, a R' os pares (0, 0), (1, 0), (a, 0), (b, 0), (a + b, 0), $(a \times b, 0)$, etc.

Consideremos agora a aplicação f, de R em R', que leva cada $x \in R$ ao par $(x, 0) \in R'$.

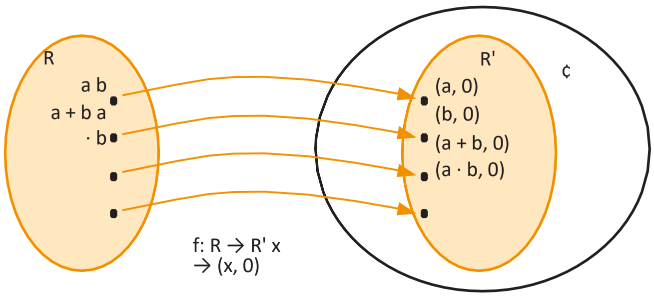


Figura 19 – Fluxograma de funções Livro 06
Fundamentos da Matemática

Primeiramente notemos que *f* é bijetora, pois

1) todo par (x, 0) ∈ R' é o correspondente, segundo f, de x ∈ R (ou seja, f é sobrejetora);

2) dados x ∈ R e x' ∈ R, com x ≠ x', os seus correspondentes (x, 0) ∈ R' e (x', 0) ∈ R' são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (ou seja, f é injetora)
Em segundo lugar, notemos que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1) à soma a + b, com a ∈ R e b ∈ R, está associado o par (a + b, 0), que é a soma dos pares (a, 0) e (b, 0), correspondentes de a e b, respectivamente:
f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)

2) ao produto a x b, com a ∈ R e b ∈ R, está associado o par (a x b, 0), que é o produto dos pares (a, 0) e (b, 0), correspondentes de a e b, respectivamente
f(a x b) = (a x b, 0) = ((a x b) - 0 . 0, (a x 0 + 0 x b)) = (a, 0) x (b, 0) = f(a) x f(b)

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora f: $R \rightarrow$ R' que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que R e R' são isomorfos

Devido ao isomorfismo, operar com (x, 0) leva a resultados análogos aos obtidos operando com x. Isto justifica a igualdade que usaremos daqui por diante.

x = (x, 0), ∀ **x** ∈ R

Aceita esta igualdade, temos em particular que 0 = (0, 0), 1 = (1, 0) e R = R'. Assim, o corpo R dos números reais passa a ser considerado subconjunto do corpo C dos números complexos

$$R \subset C$$

6.2 Unidade Imaginária

Chamamos **unidade imaginária** e indicamos por i o número complexo (0, 1).
Notemos que:

$$I^2 = i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -1$$

A notação "i" para a unidade imaginária foi introduzida por Leonhard Euler e que é definido pela igualdade $i^2 = -1$. Como qualquer número real x, satisfaz $x^2 \geq 0$, podemos concluir que, $i \in R$.

Dado um número complexo qualquer z = (x, y), temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \times 0 - 0 \times 1, y \times 1 + 0 \times 0) = (x, 0) + (y, 0) \times (0, 1)$$

Isto é:

$$\mathbf{z = x + yi}$$

Assim, todo número complexo z = (x, y) pode ser escrito sob a forma z = x + y.i, chamada **forma algébrica**. O número real x é chamado parte real de z e o número real y é chamado parte imaginária de z. Em símbolos indica-se:

$$\mathbf{x = Re(z) \text{ e } y = Im(z)}$$

Chama-se real todo número complexo cuja parte imaginária é nula. Chama-se imaginário puro todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não.

6.2.1 Forma Trigonométrica

6.2.2 Norma e Módulo

Chama-se **norma** de um número complexo z = x + yi ao número real não negativo

$$\mathbf{N(z) = x^2 + y^2}$$

Chama-se **módulo** ou **valor absoluto** de um número complexo z = x + yi ao número real não negativo

$$|Z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x2 + y2}$$

Algumas vezes, em lugar de | **z** | usamos os símbolos **ρ** ou **r** para representar o módulo

6.2.3 Argumento

Chama-se **argumento** de um número complexo z = x + yi, não nulo, ao ânguloθ tal que:

$$cos\ \theta = \frac{x}{\rho} e sen\theta = \frac{y}{\rho}, sendoque \rho = |Z|$$

Notemos que:

1º) a condição z ≠0 garante ρ ≠0

2º) existe ao menos um ângulo θ satisfazendo a definição, pois:

$$cos^2\theta + sen^2\theta = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

3º) fixado o complexo z ≠0, estão fixados cosθ e senθ, mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo z ≠0 tem argumento.

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, comK \in Z$$

em que θ_0, chamado **argumento principal** de z, é tal que $cos\ \theta_0 = \frac{x}{\rho}$, $sen\theta_0 = \frac{y}{\rho}$
0 $\leq \theta_0 \leq 2\pi$. Frequentemente trabalhamos com $\theta_0$chamando-o simplesmente argumento de z.

Exemplo:

a) Z = $\sqrt{3} + i \Rightarrow \begin{cases} cos\ \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, comK \in Z$

6.2.4 Plano de Argand – Gauss (Plano Complexo)

O **plano de Argand-Gauss**, conhecido também como **plano complexo,** é um meio para representar geometricamente números complexos. Essa representação permitiu o desenvolvimento de vários conceitos, como o argumento de um número complexo, módulo de um número complexo, conjugado de um número complexo, entre outros.

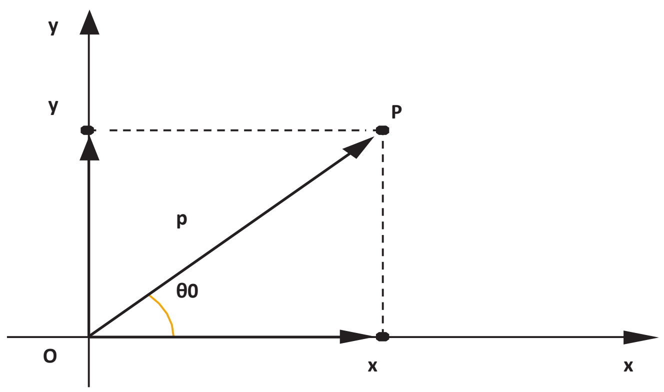
Os estudos sobre o plano complexo foram desenvolvidos pelos matemáticos Argand e Gauss, o que justifica seu nome. Os **números complexos da forma z = x + yi são representados como coordenadas (x, y),** em que a é **x** parte real e **y** é a parte imaginária. Essa representação recebe o nome de afixo ou imagem geométrica do número **z**.

6.2.5 Representação Geométrica de números complexos

Os números complexos podem ser representados no plano de Argand-Gauss.

O plano de Argand-Gauss, que também recebe o nome de plano complexo, é uma adaptação do plano cartesiano, permitindo realizar-se a representação geométrica de um número complexo e, consequentemente, desenvolver-se os estudos na geometria analítica para melhor compreensão dos números complexos.

As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando representamos os números complexos z = x + yi = (x, y) pelos pontos do plano cartesiano xOy com a convenção de marcarmos sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.



Nomenclatura:

xOy = plano de Argand-Gauss
Ox = eixo real
Oy = eixo imaginário
P = afixo de z

Notemos que a distância entre P e O é o módulo de z:

OP = $\sqrt{x^2 + y^2}$ = ρ

e o ângulo formado por OP com o eixo real é $\theta_0$tal que $cos\ \theta_0 = \frac{x}{\rho}$ e $sen\theta_0 = \frac{y}{\rho}$;

portanto θ_0é o argumento principal de z.

Dado um número complexo z = x + yi, não nulo, temos:

$$z = x + yi = \rho.(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{\rho}i$$

e, portanto:

$$z = \rho.(cos\ \theta + sen\theta \mathrm{i})$$

chamada **forma trigonométrica** ou **polar** de z.

O sistema cartesiano é o mais comum de todos e o mais explorado para representar curvas lineares, quadráticas, cúbicas, etc. Algumas curvas, como esperiais e rosáceas, apresentam **equações complexas** quando referidas a este sistema, mas em sistemas mais apropriados, como o de **coordenadas polares**, as equações se tornam relatuvamente mais simples para elaborar seus gráficos(EVES,2004,p.595).

7.0 Referências bibliográficas

ATALAY, B. *A Matemática e a Mona Lisa: A Confluência da Arte com a Ciência*. Traduçãode Mário Vilela. *Math and the Mona Lisa*. São Paulo: Mercuryo, 2007.

ÁVILA, G. *Retângulo Àureo, Divisão Àurea e Seqüência de Fibonacci*. Revista do Professorde Matemática, São Paulo, v. 6, 1985.

BIEMBENGUT, M.S. *Número de Ouro e Secção Áurea: Considerações e sugestões para asala de aula*. Blumenau: FURB, 1996.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática – Uma breve história* – volume I e II. 2. ed. São Paulo:Livraria da Física, 2006.

CONTADOR, P.R.M. *Matemática na arte e na vida*. São Paulo: Livraria da Física, 2008.
D'AMBROSIO, Ubiratan. *Volta ao mundo em 80 matemáticas*. *Revista Scientific American*.

2. ed. São Paulo: Duetto Editora, 2010.282 p.

DOCZI, Gyõrgy. *O poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura*. Tradução de Maria Helena de Oliveira Tricca e Júlia Bárány Bartolonei. *The Power of Limits*. São Paulo: Mercury, 2004.

LAURO, M. M. *A Razão Áurea e os Padrões Harmônicos na Natureza, Artes e Arquitetura*. Exacta, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.

LIVIO, M. *Razão Áurea: A História do Phi*. Tradução de Marco Shinobu Matsumura.*The golden ratio* - Rio de Janeiro: Record, 2011**.**

E. Colli, M. L. Nascimento and E. Vargas, Decay of geometry for Fibonacci critical covering maps of the circle, Ann. Institut H. Poincare, AN 26 (2009), 1533-1551

Devaney, R. L. . An Introduction to chaotic dynamical systems, 1989. Addison Wesley Publishing Company.

Nascimento, M. L. & Mota, R. J. S (2021). The importance of Fibonacci Combinatorics for dynamic systems in the interval and in the circle and applications. European International Journal of Science and Technology, 10(1), 82-96.

AABOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática, coleção Fundamentos da Matemática Elementar São Paulo, editora SBM, 1984.

ÁVILA, G. Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Seqüência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, nº 06, São Paulo, 1985.

GONÇALEZ, R. Natureza Elegante – Os Números de Fibonacci, 2007. Disponível em: <http://rrgoncalez.wordpress.com/2007/12/02/natureza-elegante-os-numeros-de-fibonacci>.