Frações: uma abordagem aritmética para o 6° ano pelo teorema fundamental da aritmética

José Marcos Farias

Rondonópolis

2024

Frações: uma abordagem aritmética para o 6° ano pelo teorema fundamental da aritmética

José Marcos Farias

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Marcos André de Jesus Delgado

Rondonópolis

2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS - UFR.

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - PROPGP-UFR.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT-UFR.

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Frações: uma abordagem aritmética para o 6° ano pelo teorema fundamental da aritmética.

AUTOR : MESTRANDO **JOSÉ MARCOS FARIAS** .

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, da Universidade Federal de Rondonópolis-UFR, vinculado ao curso de Matemática da UFR, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em **19** de Novembro de 2024.

Seguem as assinaturas dos membros titulares da banca.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Prof. Dr. Marcos André de Jesus Delgado, presidente da banca, orientador.

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis - UFR.

2. Prof. Dr. Emerson Dionísio Belançon, membro interno titular.

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis - UFR.

3. Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Mato Grosso de Sul - UFMS.

4. Prof. Dr. Álvaro Moreira Neto, membro interno suplente.

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Rondonópolis - UFR.

5. Prof. Dr. Homero Ghioti da Silva, membro externo suplente.

INSTITUIÇÃO: Universidade Federal de Uberlândia - UFU.

Rondonópolis - MT, 19/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por **LEANDRO BEZERRA DE LIMA**, **Usuário Externo**, em 20/11/2024, às 17:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Emerson Dionisio Belançon**, **Docente - UFR**, em 20/11/2024, às 20:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcos André de Jesus Delgado**, **Docente - UFR**, em 21/11/2024, às 14:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufr.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0428262** e o código CRC **B0B3FA49**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte
Ficha Catalográfica elaborada de forma automática com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M772e

Farias, José Marcos.

Fraçoes: uma abordagem aritmética para o 6º ano pelo Teorema Fundamental da Aritmética [recurso eletrônico] / José Marcos Farias. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 67 f., il. color., pdf). – 2024.

Orientador(a): Marcos André de Jesus Delgado.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de

1. Números naturais. 2. Frações. 3. Critérios de divisibilidade. 4. Teorema Fundamental da Aritmética. I. Delgado, Marcos André de Jesus, *orientador*. II.

"se eu vi mais longe, é por estar em pé sobre os ombros de gigantes."

Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço em primeiro a Deus que nos guia nos momentos mais difíceis. Ele que me deu força num período sombrio de minha vida.

Agradeço a minha esposa Naiane, minha companheira, minha amiga, meu complemento. Ela que desde o início desse projeto me incentivou e até nos momentos em que não acreditava em mim, ela acreditou. Até o fim.

Agradeço a quem num momento de estagnação me procurou e contribuiu para que pudesse voltar ao caminho de conclusão.

Agrademos também a todos os professores do PROFMAT que nos ajudou nesse período de privações, mas de grande conhecimento e desenvolvimento profissional e pessoal e ao apoio financeiro Capes.

Resumo

Este trabalho propõe uma abordagem distinta no ensino das operações básicas com frações, com foco no desenvolvimento da compreensão dos números naturais como primos e compostos; caso o número natural seja composto idealiza-lo como um bloco construído por produto de diversos números primos. Para isso, este trabalho utiliza como base os conteúdos: critério de divisibilidade e o Teorema Fundamental da Aritmética. Num primeiro momento, será apresentado o conjunto dos números naturais, suas propriedades de soma e multiplicação, elencando a uma sequência de pontos colineares e infinitos, seguido pela introdução do conjunto dos números inteiros, com o pensamento de união dos naturais. Na sequência uma ideia sobre o infinito é apresentada pelo paradoxo de Zenão (Aquiles e a tartaruga) para fomentar o preenchimento do vácuo entre dois pontos quaisquer consecutivos do conjunto dos inteiros. Adiante o conjunto dos números racionais e sua densidade nos reais, além de uma menção sobre os números não racionais com exemplo de segmento incomensurável, concluindo com a reta real em seu formato de linha contínua. No capítulo seguinte são apresentados alguns conteúdos que pela premissa deste trabalho são de fundamental importância para a aprendizagem e domínio nas operações básicas com frações, a saber: Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, 100 e 1000, MDC, MMC e Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Assim conectando às habilidades e objetos de conhecimento da BNCC que descrevem: os alunos devem reconhecer, resolver e comparar números fracionários com diversos problemas e etc. No último capítulo deixa-se ao professor uma sequência didática de 5 aulas como exemplo prático para aplicação do pensamento descrito nessa dissertação. As aulas propostas no capítulo 4 estão alicerçadas nas metodologias ativas se utilizando de objetos concretos (peças de montar – LEGO) na representação dos números e operações básicas.

Palavras-chave: Números naturais, Frações, Critério de divisibilidade, Teorema Fundamental da Aritmética.

Abstract

This work proposes a distinct approach to teaching basic operations with fractions, focusing on generating the perception of prime and composite natural numbers; If the natural number is composed, it is idealized as a block constructed by the product of several prime numbers. For this, using the contents as base support: divisibility criterion and the Fundamental Theorem of Arithmetic. Firstly, the set of natural numbers and the properties of addition and multiplication will be shown, listing a sequence of collinear and infinite points, the set of integers with the thought of the evolution of natural numbers, an idea about infinity through Zeno's paradox (Achilles and the turtle) to encourage the filling of the vacuum between two points in the set of integers, the set of rational numbers and their density in real numbers, in addition to a mention of non-rational numbers with an example of incommensurable follow-up, concluding with the real line in its continuous design. The following chapter presents some content that, based on the premise of this work, is of fundamental importance for learning and mastering basic operations with fractions, namely: Criteria for divisibility by 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 and 1000, GCD, MMC and Fundamental Theorem of Arithmetic (TFA). Thus connecting to the BNCC skills and knowledge objects that they describe: students must recognize, solve and compare fractional numbers with different problems, etc. In the last chapter, the teacher is given a didactic sequence of 5 classes as a practical example for applying the thinking described in this dissertation. The classes proposed in chapter 4 are based on active methodologies using concrete objects (assembly pieces – LEGO) to represent numbers and basic operations.

Keywords: Natural numbers, Fractions, Divisibility criterion, Fundamental Theorem of Arithmetic.

Lista de figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma sequência didática que promova a compreensão das operações básicas com frações, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética como ferramenta central. Por meio dessa abordagem, busca-se levar o aluno a identificar números primos e expressá-los como produto de primos, reescrevendo-os quando necessário para uma simplificação das frações. A proposta visa não apenas facilitar o aprendizado, mas também promover maior autonomia e compreensão crítica dos conceitos matemáticos.

O ensino e aprendizagem da Aritmética tem apresentado resultados preocupantes o que pode indicar possíveis lacunas na educação básica no Brasil. Relatórios do INEP sobre a proficiência Matemática no ano de 2021 apresentam uma média 256 pontos para o 9° ano do ensino fundamental. Isto representa o nível 3 na escala de proficiência para interpretação dos resultados. Neste nível, sobre números e operações, o aluno deve ser capaz de determinar uma fração irredutível equivalente a uma fração dada, entretanto o nível adequado seria o 5 relacionado a resolução de problemas com operações de soma e subtração com números racionais. Deste modo o trabalho se faz necessário como um auxílio ao professor, sendo uma ferramenta de referencial teórico ou de inspiração ao aprimoramento pessoal no desenvolvimento de novas aulas baseadas em métodos diversos, como metodologias ativas.

No Capítulo 2, será abordado o conceito de reta real, partindo do conjunto dos números naturais até o conjunto dos números racionais, com uma breve menção sobre os números irracionais, elencando abordagem figural, expondo a reta pela união de infinitos pontos dos conjuntos de modo que o aluno perceba o valor posicional de cada número na reta e a sua ordenação.

Os números constituem a base de toda formulação matemática, sendo fundamentais para o desenvolvimento do pensamento lógico e quantitativo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a relevância do pensamento numérico, afirmando que:

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. (Brasil, 2018, p.272)

Relata ainda a BNCC, com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a importância do entendimento sobre os números que:

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos

> processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. (Brasil, 2018, p.272)

Sobre resolução de problemas Lupinacci (2004) descreve:

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI, 2004, p.1)

Essa perspectiva reforça a importância de propor atividades que vão além da simples aplicação de algoritmos, estimulando os estudantes a refletirem sobre estratégias e a explorarem conceitos matemáticos de maneira significativa e contextualizada.

No Capítulo 3, abordaremos a ideia de divisão. Compreendemos que nem sempre a divisão de um número inteiro por outro é possível, isto é, com resto igual a zero, mas quando for podemos expressa-lo por meio da divisibilidade Abramo Hefez (2022). O cerne deste capítulo é mostrar ao professor referenciais teóricos e alguns conjuntos de conteúdos que possibilitem a boa prática referente ao tema proposto.

Nesse sentido, sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, Alencar Filho (1988) escreve que todo número natural maior do que um, ou é primo, ou pode ser decomposto de maneira única num produto de fatores primos. É com este enfoque que serão moldadas as concepções sobre a resolução de problemas que envolvam as operações básicas com frações. Ainda sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, segundo Coelho et. al (2008) aponta que os professores tem conhecimento aprofundando, mas os alunos, em parte, não conseguem interpretar os algoritmos e resultados envolvidos.

Para o aluno é viável expor este teorema, desde que se construa uma base de conteúdos anteriores que dê subsídios para a formulação correta. É necessário que o professor consiga repassar tais conhecimentos formais em uma linguagem adequada a idade e turma inserida. Neste sentido o Capítulo 3 foi apresentada uma trilha de conteúdos como: divisibilidade, critérios de divisibilidade, números primos e compostos, que darão suporte a formulação do Teorema Fundamental da Aritmética.

No Capítulo 4, é apresentada uma sequência de aulas que exemplifica e reforça o ponto central desta dissertação. Como ferramenta de apoio às práticas propostas, serão utilizadas peças de montar, também conhecidas como peças de LEGO, proporcionando uma abordagem lúdica e interativa para facilitar a compreensão dos conceitos trabalhados. Conforme Gil (2012) relata, por mais que os professores tem diversificado pouco em suas aulas, optando por descrever capítulos de livros textos faz-se necessário inovar, propor aulas que se diferenciar do dia a dia repetitivo.

As aulas descritas no Capítulo 4 servirão como norte aos professores interessados. Elas se moldam nas metodologias ativas que é definida por Barbosa e Moura (2013) como: qualquer estratégia didática que envolva a participação ativa do estudante no desenvolvimento de sua própria aprendizagem

Uma estratégia apresentada é a solução baseado em problemas, método que se destaca por estimular o desenvolvimento de habilidades essências aos estudantes.

> Nesse sentido, entende-se que esse método estimula o estudante a desenvolver habilidades que o auxiliem a organizar e gerenciar o próprio processo de aprendizagem, interagindo com o conhecimento e construindo saberes, contribuindo para que o estudante adquira ferramentas para desenvolver habilidades técnicas, cognitivas e atitudinais que influenciarão na prática profissional e também no processo de ensino-aprendizagem ao longo da visa (BORGES et al., 2014, p.112).

Outra metodologia ativa que se conecta as aulas propostas é a sala de aula invertida. Segundo Bergmann e Sams (2016) a ideia central dessa metodologia de ensino é propor um ambiente de estudo fora da escola. Levar para casa o pensamento de sempre estudar. Essa abordagem promove maior autonomia no aprendizado, transformando o professor em um facilitador e tornando o tempo de aula mais dinâmico e produtivo.

Por fim, espera-se que este estudo contribua de forma significativa para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, servindo como estímulo ao trabalho docente em sala de aula e promovendo um impacto positivo na qualidade da educação básica na disciplina.

2 A RETA REAL

2.1 CONJUNTO DOS NUMEROS NATURAIS - $\mathbb{N}$

Antes de seguir para definição de Conjunto dos Números Naturais é interessante pensar na ideia que fundamenta conjuntos, tendo em vista que a noção de conjunto é mais fundamental além da Matemática atual ser formulada na linguagem de conjuntos. (LIMA, A matemática do ensino médio, p.42)

A matemática é fundamentada em algumas ideias fundamentais, e uma delas é o conceito de conjunto que requer uma descrição simples a que se trata, a saber. De forma simples, um conjunto pode ser entendido como um agrupamento de objetos, chamados de elementos, que compartilham pelo menos uma característica comum. Esses objetos podem ser quaisquer coisas, inclusive outros conjuntos, formando uma estrutura que pode ser aninhada indefinidamente. Podemos visualizar a ideia de conjunto por meio de exemplos do cotidiano, como: uma coleção de carros, tipos de refrigerantes, uniformes de times de futebol, entre outros. Em geral, qualquer coleção organizada de elementos que possua uma ou mais características em comum pode ser chamada de conjunto. Essa noção básica é essencial para o desenvolvimento de diversas áreas da matemática.

Os exemplos de conjuntos descritos anteriormente, como coleções do cotidiano, embora ilustrativos, não representam diretamente o uso mais comum do conceito na matemática. Em contextos matemáticos, conjuntos geralmente são construídos com base em números, organizados segundo critérios que os agrupem de maneira significativa. Por exemplo, os números podem ser divididos em conjuntos com base em características como paridade (números pares e ímpares), divisibilidade, ou outros fatores específicos. Assim, a ideia central ao lidar com conjuntos é determinar se um elemento, seja ele um número ou um objeto qualquer, pertence ou não ao conjunto. Essa noção de pertinência é fundamental e serve como ponto de partida para muitas construções matemáticas.

Dessa forma, podemos analisar um conjunto fundamental na matemática: os números naturais. Esses números são frequentemente considerados intrínsecos ao nosso cotidiano, estando profundamente associados à ideia de contagem e ordenação.

Historicamente, a necessidade de contar objetos no ambiente levou à criação de símbolos específicos que representassem quantidades. Essa correspondência biunívoca entre símbolos abstratos e objetos concretos foi um avanço significativo no desenvolvimento do pensamento matemático. Atualmente, essa relação é vista como uma construção simples, mas notavelmente eficiente, servindo de base para muitos conceitos mais complexos na matemática.

> Quando lemos sobre a origem da contagem, o exemplo que encontramos com mais frequência é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, ao invés de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas, escritas na argila, e estas marcas estariam na origem dos números. (ROQUE, tópicos de história da matemática, pag. 1)

Tais símbolos aos quais se referimos para contagem são os 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 chamados de hindu arábico. Associaremos o seguinte sistema de comparação: quando tiver um objeto, usaremos o símbolo 1, dois objetos usaremos o símbolo 2 e assim por diante, ao qual é universal o pensamento nos tempos atuais.

Realizar contagem, é uma prática que hoje nos parece natural graças ao uso de símbolos numéricos. No entanto, esse processo foi resultado de anos de desenvolvimento por diferentes civilizações, que elaboraram sistemas numéricos como resposta às necessidades impostas por seus complexos contextos sociais e reflexões acumuladas ao longo do tempo. Esse avanço esteve frequentemente associado ao progresso econômico dessas sociedades. (LIMA, A Matemática do Ensino Médio Volume 1, 2016, p.39).

Dito isto, e milhares de anos seguinte, o grande matemático Giuseppe Peano nos conduz a uma construção formal do conjunto dos números naturais. Ele propôs um sistema baseado em regras fundamentais, conhecidas como axiomas de Peano, que incluem a ideia de “sucessor”. Sucessor pode ser descrito da seguinte maneira. Se n e n’ são elementos do conjunto dos números naturais, onde n’ é sucessor de n, então, entre n e n’ não existe outro número natural. Diremos ainda que n e n’ são consecutivos.

Nesse sentido podemos descrever os axiomas que constroem o conjunto dos números naturais da forma:

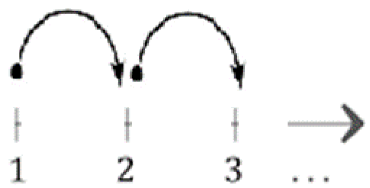
I. Todo número natural tem um único sucessor.

II. Números naturais distintos tem sucessores distintos.
III. Existe um único número natural, ao qual chamaremos de 1 (um), que não é sucessor de nenhum número natural.
IV. Seja X um conjunto de números naturais. Se 1 pertence a X e se, todo sucessor de um elemento de X pertence a X, então X = ℕ.

Outra maneira de representar o conjunto dos números naturais é descreve-los com os algarismos hindu arábico dentro das chaves: ℕ = {1, 2, 3, 4, ...}, onde o símbolo ℕ representa o conjunto dos números naturais.

Mostrar os números naturais em uma reta traz a necessidade da explicação que entre quaisquer dois elementos consecutivos do conjunto dos números naturais não existe nada, um limbo, a única existência é do próprio ponto a que o número natural está associado. Traça uma reta e ordenar nela os números naturais traz um pensamento de completude, o que seria errado. Uma possível representação dos naturais é uma sequência de pontos alinhados estabelecendo uma relação biunívoca entre número e ponto.

Figura 2.1 – Representação dos Números Naturais



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Uma estratégia interessante para quem, num primeiro momento, tenha desenhado uma reta para associar ao conjunto dos números naturais é apagar o desenho ente os pontos que representam os elementos explicando que entre dois números naturais consecutivos há um vazio geométrico, que poderá ser preenchido, mas não pelos números naturais.

2.1.1 ORDENAÇÃO EM ℕ

O conjunto dos números naturais é bem ordenado (veja Definição 2.1.1), deste modo descrevemos a sua ordenação utilizando o símbolo $<$ ou $>$ onde lê-se: menor do que ou maior do que, respectivamente.

Sejam *m, n* e *p* números de ℕ podemos admitir as seguintes propriedades.

1. *transitividade*: se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

2. *tricotomia*: só pode ocorrer apenas uma das três possibilidades seguintes, $m = n$, $m < n$ ou $n < m$

3. *monotonicidade*: se m, n e p são três números naturais e $m < n$, então tem-se que $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Geometricamente isto significa que se $m < n$, o ponto a que se refere o número *n* está à direita do ponto a que se refere o número *m*. Caso $m = n$ o ponto a que se referente o número *m* e *n* é o mesmo.

Figura 2.2 – Ordenação dos Números naturais

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Definição 2.1:

Boa ordenação: Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um $m_0 \in X$ que é menor do que os demais elementos de X. (LIMA, A Matemática do Ensino Médio Volume 1, 2016, p. 45)

2.1.2 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM ℕ

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: adição e multiplicação (LIMA, A matemática do ensino médio, 2016, p.43). Dado dois números *s* e *p* pertencentes a ℕ associaremos a soma como $s + p$, referente a adição e o produto como $s{\cdot}p$, referente a multiplicação.

2.1.2.1 ADIÇÃO EM ℕ

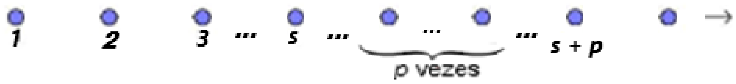
Primeiramente valer recordar a ideia de sucessor proposta por Peano. Se *n* é um número natural qualquer, seu sucessor será *n+1*, assim se *n* representa geometricamente um ponto qualquer, o ponto logo após *n* é o *n+1*. Como indica a figura abaixo.

Figura 2.3 - Sucessor de um número natural

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Dado dois números *s* e *p* pertencentes a ℕ a soma *s + p* faz corresponder o número que se obtém a partir de *s* tomando-se *p* sucessores: $s + p = s\underbrace{+1+...+1}_{p\ \text{vezes}}$

Figura 2.4 - Soma de números naturais

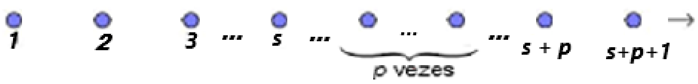


Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Assim a imagem geométrica de qualquer número natural após a soma de *s* obtém-se utilizando o processo de tomada de sucessor repetidas vezes o quanto necessitar.

Logo se sabermos somar *s + p* sabemos somar também *s + p + 1* que é sucessor de *s + p* e utilizando o princípio da indução finita concluímos que a adição é bem definida em ℕ associando as imagens geométricas (pontos na reta) aos elementos de ℕ.

Figura 2.5 - Soma de um sucessor natural



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

2.1.2.2 MULTIPLICAÇÃO EM $\mathbb{N}$

Dado dois números *s* e *p* pertencentes a $\mathbb{N}$*,* a multiplicação de *s* por *p* faz corresponder um número referente ao produto *sp*, deste modo temos que:

a) *(p)(1) = p, isto é multiplicar por 1 não altera o número.*
b) *Se sabemos fazer a multiplicação de todos os números menores do que ou igual a s por p, então pelo princípio da indução finita sabemos multiplicar o sucessor de s*, isto é: *(s + 1)·p = s·p + p*

O Princípio da indução finita (PIF) é uma maneira de provar propriedades no conjunto dos números naturais. Consiste na verificação de dois passos. O primeiro é chamado de base da indução, o segundo de passo indutivo.

Na base da indução se verifica a verdade para algum valor inicial $n = n_0$. O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar P(n) (chamado de hipótese de indução) para provar P(n+1). Verificado ambos passos, tem-se uma “cadeia de implicações”. (MOREIRA, Tópicos de teoria dos números, 2021, p.2)

Deste modo as operações de adição e multiplicação estão bem definidas em $\mathbb{N}$ e gozam das propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade (LIMA, Análise real volume 1. Funções de uma variável, 2006, p.3)

2.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS $\mathbb{Z}$

É comum e intuitivo pensar no conjunto dos números inteiros como de fácil entendimento. Entretanto admitir os números negativos foi uma longa jornada que perpassa pela matemática chinesa, egípcia, babilônica, grega e hindu. Apesar da matemática chinesa “*reconhecer os números negativos*” (EVES, Introdução a história da matemática, 2011, pag. 246) e que os hindus aceitavam os números negativos foi apenas no século XVI que se começou a ser aceito pelos matemáticos. (EVES, Introdução a história da matemática, 2011, p.314).

Utilizar a relação de dívida para exemplificar números negativos pode ser uma excelente estratégia para professores do ensino básico. Um exemplo prático, como um saldo de R$ -100,00, é algo que se consegue imaginar facilmente.

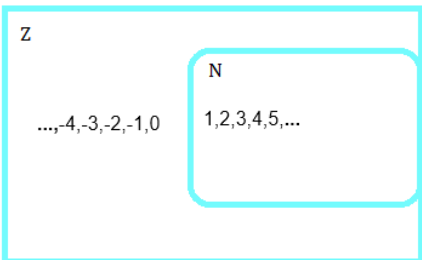
Contudo, é interessante refletir sobre por que esse tipo de abordagem não foi suficiente, historicamente, para justificar a existência dos números negativos.

Uma explicação possível é que a ideia de dívida, por si só, não oferece um fundamento sólido para a acessibilidade universal dos números negativos. Na matemática grega, por exemplo, predominava uma visão geométrica, onde a álgebra era aplicada principalmente como técnica para proporções concretas. Nesse contexto, os números negativos eram vistos como abstratos ou até "fantasiosos", já que não podiam ser representados geometricamente. Afinal, como medir algo negativo e qual seria a interpretação?

No mais, Richard Courant e Herbert Robbins (1996) observam que levou muito tempo para os matemáticos perceberem que a ‘regra dos sinais’, junto como outras definições que governam os inteiros negativos, não poderiam ser provadas.

A seguir, podemos descrever o conjunto dos números inteiros, ao qual usaremos o símbolo $\mathbb{Z}$, sendo $\mathbb{Z} = \{...-4,-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$. Note que o conjunto dos números inteiros é formado pela união do conjunto dos números naturais, o zero e os opostos dos números naturais. É comum mostrar o conjunto dos números inteiros como no diagrama abaixo.

Figura 2.6 - Conjunto dos números inteiros



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

2.3 OS PARADOXOS DE ZENÃO E UMA PRIMEIRA IDEIA DE INFINITO

Zenão de Eleia foi um filosofo grego que viveu no século V a.C. onde notabilizou-se por seus paradoxos relacionados ao movimento e o tempo, com os quais pretendeu refutar o pitagorismo demonstrando a incoerência do pluralismo e da noção de movimento, pelo método de redução ao absurdo. Foi para defender esta tese que Zenão criou uma série de argumentos chamados de ‘paradoxo de

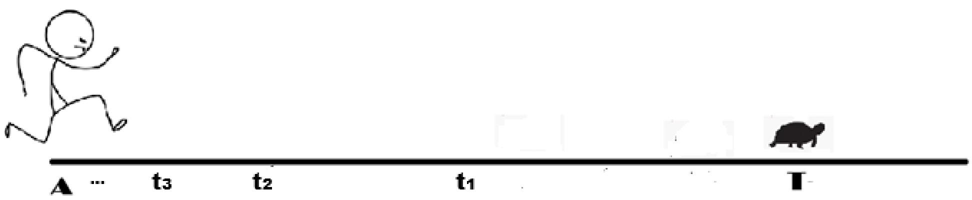
Zenão', ao qual estão relacionados diretamente a ideia de infinito, sendo o mais conhecido deles: Aquiles e a tartaruga. (JAPIASSÚ, 2008, p.402).

Sobre o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, Zenão argumentava que sendo Aquiles o mais veloz guerreiro grego, se fosse proposta uma corrida contra uma tartaruga, onde Aquiles desse uma distância qualquer de vantagem a tartaruga, jamais Aquiles passaria a tartaruga.

Diz o paradoxo: Imagine que Aquiles, o mais veloz guerreiro grego, corra contra uma tartaruga. É justo que Aquiles dê uma vantagem de distância. Nestas circunstâncias argumenta Zenão que Aquiles jamais alcançará a tartaruga, por mais rápido que Aquiles corra. (WESLEY, 2001, p.130)

Partindo Aquiles de um determinado ponto A e a tartaruga de um ponto T, à frente, para Aquiles alcançar a tartaruga, é necessário primeiro alcançar a metade da distância entre ele e a tartaruga, representado por t_1, mas para que isto ocorra, Aquiles teria que percorrer a metade da metade da distância até a tartaruga, representado por t_2. Novamente, para que isto ocorra, Aquiles teria que percorrer a metade da metade, da metade da distância até a tartaruga, representado por t_3, assim por diante.

Figura 2.7 - Aquiles e a tartaruga



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Assim, Zenão conclui que, para percorrer este intervalo, Aquiles necessitaria percorrer todas as subdivisões de espaço: metade do caminho, metade da metade do caminho, assim por diante. Logo, jamais Aquiles alcançaria a tartaruga porque estas representações fracionárias na reta são infinitas.

Deste paradoxo, o que se destaca de interessante é a reflexão sobre o infinito e a tentativa de subdividir o espaço como conhecemos, pois em qualquer segmento representado por [a, b] existem infinitas frações, uma ideia originária dos pitagóricos da antiguidade. O pensamento de Zenão, com seus paradoxos, também pode ser considerado precursor das teorias que buscam entender o infinito. Essas ideias foram fundamentais para o desenvolvimento do conceito de infinito e sua aplicação.

2.4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS $\mathbb{Q}$

Diversos problemas do cotidiano estão frequentemente ligados a ideias fracionárias e proporcionais, como medir e comparar. Nesse contexto, os números inteiros não servem como operadores evidentes para esses processos. Em vez disso, são necessários conceitos mais complexos, como os números racionais, para representar de forma precisa as situações práticas que os envolvem. Assim, a utilização dos números racionais, representados por $\mathbb{Q}$, traz a solução ideal, pois, por mais que o termo medido seja ínfimo, existe sempre um racional para enumerá-lo, haja vista a densidade dos racionais no conjunto dos reais. “Um conjunto A é denso se entre dois dos seus elementos quaisquer existir uma infinidade de elementos de A”. (CARAÇA, Conceitos fundamentais da matemática, 1951, p. 56).

Da construção vista anteriormente, em que o conjunto dos números naturais e inteiros surge como infinitos pontos espaçados, um pontilhado com um vazio entre dois consecutivos quaisquer, acrescentam-se os números racionais. Agora a representação visual de uma reta composta por estes três conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\ e\ \mathbb{Q}$.

É importante observar que esses três conjuntos ainda não completam a reta, todavia, por mais que a reta real não esteja em sua completude, visualmente estes três conjuntos a desenham, pois a densidade do conjunto dos racionais impõe uma proximidade extrema entre frações consecutivas.

Mesmo denso, o conjunto dos números racionais é enumerável, definição que não se segue para o conjunto dos números não racionais, chamados de irracionais, tornando os números não racionais de maior cardinalidade como um conjunto infinito não enumerável, proposição dada por Georg Cantor (1845-1918) em “Sobre uma questão elementar na teoria dos conjuntos infinitos”, publicado em 1874. O fato é que Cantor nos mostra que existe “muito mais” números irracionais do que racionais, apesar de parecer contra intuitivo entender que na reta real tenham mais pontos relacionados aos irracionais do que aos racionais.

Definição 2.2:

Sejam *a* e *b* dois números inteiros quaisquer com *b* diferente de zero (*a,b* ∈ $\mathbb{Z}$ */ b≠0)*, assim um número racional será escrito como uma fração do tipo $\frac{a}{b}$, a qual chama-se *a* de numerador e *b* denominador.

O conjunto dos números racionais será representado por $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ;\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Iezzi e Murakami (2013, p.45) descreve:

No conjunto dos números racionais adotamos as seguintes definições:

1. Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \ ad = bc$
2. Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
3. Multiplicação: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Das definições acima caso dos denominadores iguais a 1, temos:

$$\mathbb{Q}' = \left\{\frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z}\right\}, \text{ portanto:}$$

$$\mathbb{Q}' = \ \mathbb{Z}, \text{ logo, } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Na fração $\frac{a}{b}$, caso $a\ e\ b$ sejam primos entre si, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.

2.4.1 $\mathbb{Q}$ É DENSO EM $\mathbb{R}$

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, isto implica que dado quaisquer dois reais sempre existe um racional entre eles.

Definição 2.3:

Sejam x e y dois números reais quaisquer, existe um q racional de modo que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \ \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y$$

Como $x < y$, tem-se $y - x > 0$, deste modo por mais ínfimo que seja esta diferença ela existe.

Tome b natural suficientemente grande para que $\frac{1}{b}$ tenda a zero, isto torna $\frac{1}{b}$ tão pequeno a caber na diferença $y - x$,com $\frac{1}{b} > 0$.

Tome $a \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$a > bx \text{ e } a < by \implies$$

$$bx < a < by \implies$$

$$x < \frac{a}{b} < y$$

Como b é diferente de 0, basta tomar $\frac{a}{b} = q$.

2.5 A RETA REAL

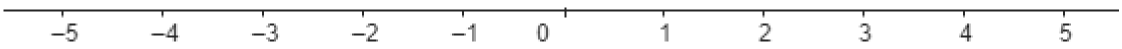
A reta real é uma representação geométrica dos números reais, sendo sua imagem uma reta com infinitos pontos e cada ponto associado a um único número real. O conjunto dos números reais, representado pelo símbolo $\mathbb{R}$, é união do conjunto dos números racionais com os números irracionais. É um corpo ordenado e completo, essa estrutura algébrica garante válidas as propriedades para adição e multiplicação, garante ainda uma boa ordenação dos seus elementos e que todas as sequências de Cauchy convergem no conjunto. Entretanto, não é o intuito deste trabalho o aprofundamento nestes aspectos.

Definição 2.4:

Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que para quaisquer n, m $\geq N_0$ temos $|Xn - Xm| < \mathcal{E}$.

Com os conjuntos anteriormente citados ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$), o desenho representativo de uma reta pode ser formado, devido à distribuição dos racionais e sua densidade nos reais, o que geraria pontos associados aos elementos de tais conjuntos extremamente próximos visualmente, todavia, sem cumprir a continuidade.

Figura 2.8 - Representação dos Números Racionais



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Pois essa reta ainda teria “pequenos furos” como numa peneira. Nesse sentido, Dedekind percebeu que na reta real tem mais pontos do que números racionais.

> Comparando os racionais aos pontos da reta, ele observou que existem mais pontos na reta do que os que podem ser representados como números racionais. Mas como definir estes números? A argumentação de Dedekind recorre aos gregos, afirmando que eles já sabiam da existência de grandezas incomensuráveis.
>
> (ROQUE, História da matemática, 2012, p.264)

Dedekind propôs a construção dos Reais a partir dos Racionais pela essência da continuidade da reta. Tal visão deriva do pensamento de que todos os pontos da reta estão em uma das duas classes, de modo que, se todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe apenas um ponto que produz essa divisão. Esse pensamento é conhecido por Cortes de Dedekind.

> Para obter um conjunto numérico que traduza fielmente a continuidade da reta, Dedekind usa um procedimento que se tornará muito frequente em Matemática. Ou seja, quando o corte é um número irracional, este número será reunido aos racionais formando um conjunto, que gozará da propriedade de continuidade da reta, chamado “conjunto dos números reais”.
>
> (ROQUE, História da matemática, 2012, p.266)

Esses pontos a mais estão associados às grandezas incomensuráveis, números não racionais descritos como números Irracionais e representados pelo símbolo $\mathbb{I}$. Mesmo que contra intuitivo de se pensar, existem mais números irracionais do que racionais. Cantor mostrou que o conjunto dos números Reais e o Conjunto dos números complexos têm a mesma potência e que esta é superior (IEZZI, Fundamentos de Matemática elementar, 2013, p.39), assim como os racionais são enumeráveis, o conjunto dos reais é não enumerável o torna maior em termos de cardinalidade e essa inumerabilidade vem dos Irracionais.

Exemplos de segmento incomensurável é a razão entre a circunferência e seu diâmetro, representada pela letra grega π e a diagonal de um quadrado de lado igual a 1 unidade de medida.

A união dos números irracionais com os racionais gera a continuidade da reta “selando-a por completo”, elencando a relação biunívoca entre a reta real e o conjunto dos números reais.

3 A DIVISIBILIDADE E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARTIMÉTICA

3.1 UMA IDEIA SOBRE DIVISÃO

Ao propor problemas de divisão — entendido como o ato de repartir — busca-se, geralmente, uma solução em que a quantidade repartida entre as partes seja igual e sem sobras. No entanto, isso nem sempre é possível. Quando a divisão ocorre de forma exata, ou seja, sem sobra, dizemos que há uma divisibilidade entre as partes. Mesmo nos casos em que a divisão não é exata, isto é, existência de resto diferente de zero, é possível encontrar soluções utilizando o conceito da divisão euclidiana.

.3.2 DIVISIBILIDADE

Dado dois números inteiros a e b, diz-se que b divide a, ou que b é divisor de a ou ainda que b é um fator de a quando existir um q pertencente aos inteiros, tal que $a = b \cdot q$ e escreveremos como $b|a$ (lê-se "b divide a").

Diante dessa sentença concluímos algumas propriedades, como:

I. $1|a$, $a|a$ e $a|0$
II. $0|a \Leftrightarrow a=0$
III. $b \mid a \Leftrightarrow |b| \mid |a|$.
IV. Se $b \mid a$ e $a \mid c$ então $b \mid c$

Demonstrações.

I. Ocorre direto das igualdades $a = 1.a$, $a = a.1$ e $0 = a.0$

II. Em primeiro $0|0$, isto vem de I. Se $0|a$, existe um q pertencente aos inteiros, tal que $a = 0.q$, logo $a = 0$.

III. Se b divide a, existe um q inteiro, tal que $a = b \cdot q$, isto implica que $|a| = |b| \cdot |q|$, logo $|b| \mid |a|$. Más se $|b| \mid |a|$, então existe q inteiro onde:
(1). $a = b \cdot q$, o que implica em $b \mid a$.
(2). $-a = -(b \cdot q)$, implica que $(-1) \cdot a = (-1) \cdot b \cdot q$, o que implica $b \mid a$.

IV. Se b divide a, então existe um q qualquer pertencente aos inteiros, tal que: a = bq. Se a divide c, então existe um p qualquer pertencente aos inteiros, tal que: c = ap, logo c = (bq)p → c = b(qp), portanto b | c. Transitividade.

Note que das definições acima podemos tirar que, se b | a, então existe um *q* pertencente aos inteiros de modo que, a = b·q. Decorre então que tanto b quanto q são divisores de a, ou que tanto b quanto q são fatores de a, e que a é múltiplo tanto de b quanto de q.

3.3 DIVISÃO EUCLIDIANA

Há casos em que b não é um divisor ou fator de a, mesmo assim, nesses casos poderemos fazer tal divisão de a por b, com b diferente de 0, mas com um novo termo adicionado, r, ao qual chamaremos de resto da divisão de a por b.

Teorema 3.3.1

Sejam a e b dois números inteiros com b diferente de 0. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|$$

Este método de divisão é apresentado no ensino básico, mas, com outros caracteres, por exemplo:

19 = 3x6 + 1, resulta da seguinte divisão:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 3 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

A seguir temos as demonstrações de existência e unicidade da divisão euclidiana descrita por Abramo Hefez (2022).

Demonstração:

Considere o conjunto:

$$S = \{ x = a - by;\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Condição de existência. Pela propriedade arquimediana, existe n $\in \mathbb{Z}$ tal que n(-b) $>$ - a; logo, a – nb $>$ 0, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, do fato da intersecção dos conjuntos, logo, pelo princípio da boa ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponha que r = a – bq. Sabemos que r $\geq$ 0. Vamos mostrar que r $<$ |b|. Suponha por absurdo que r $\geq$ |b|, logo existe s $\in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tal que r = |b| + s; assim, 0 $\leq$ s $<$ r. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois s = a – (q $\pm$ 1)b $\in$ S, como s $<$ r.

Unicidade:

Suponha que a = bq + r = bq' + r', onde q, q', r, r' $\in \mathbb{Z}$, 0 $\leq$ r $<$ |b| e 0 $\leq$ r' $<$ |b|. Assim temos que – |b| $<$ - r $\leq$ r' – r $<$ |b|. logo, |r' – r| $<$ |b|. Por outro lado, b(q – q') = r' – r, o que implica

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

O que só é possível se q = q' e consequentemente, r = r'.

Nas condições do Teorema acima as letras q e r serão chamadas, respectivamente, quociente e resto da divisão de a por b. (HEFEZ, Aritmética, 2022, p. 36).

3.4 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE - EF06MA05

A BNCC descreve na habilidade 5 do 6° ano do fundamental II que o aluno deve: classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. Tal habilidade traz vantagens ao aluno com relação à simplificação de frações, encontrar divisores ou escrever um número inteiro qualquer como produto de fatores primos. Além disso, facilita na investigação de possíveis soluções de problemas sem necessariamente fazer a divisão euclidiana, como: três amigos vão receber 100 reais, será que dá pra dividir igualmente?

3.4.1 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 2

Primeiro diremos que um número será par quando sua casa da unidade tiver um dos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 e ímpar se sua casa da unidade tiver um dos algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9.

Todo número inteiro será divisível por 2 quando for par, isto é, quando sua unidade deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Portanto o número 95336 é divisível por 2, pois sua unidade tem algarismo 6. Já o número 95337 não é divisível por 2, pois sua unidade tem algarismo 7.

Para começar note que 2 divide o 10, isto é 10 = 2x5.

95336 = 9x10000 + 5x1000 + 3x100 + 3x10 + 6 = 10x(9x1000 + 5x100 +3x10 + 3) + 6, portanto como o 2 divide o 6 ele divide a soma já que divide todas as parcelas.

95337 = 9x10000 + 5x1000 + 3x100 + 3x10 + 7 = 10x(9x1000 + 5x100 +3x10 + 3) + 7, portanto como o 2 não divide o 7 ele não divide a soma.

Se for generalizado para qualquer número inteiro, basta apenas saber se o 2 divide a última parcela da soma, isto é: o algarismo da unidade.

Seja p um número inteiro escrito como $p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1$, podemos escrever p como:

$p= a_n x10^{n-1} + a_{n-1}x10^{n-2} + ... + a_1 = 10x(a_nx10^{n-2} + a_{n-1}x10^{n-3} +a_3x10 + a_2) + a_1$, basta que 2 divida a_1 para que divida p resultando assim em analisar apenas se divide ou não o algarismo da unidade.

3.4.2 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3

Um número inteiro será divisível por 3 se a soma dos algarismos de tal número for divisível por 3. Note que 85221 é divisível por 3 pois 8 + 5 + 2 + 2 + 1 = 18, pois 18 = 3x6.

Note que 85222 não é divisível por 3 pois 8+5+2+2+2 = 19.

Podemos escrever 85221 como:

$85221 = 8x10000 + 5x1000 + 2x100 + 2x10 + 1 = 8x(3x3333 + 1) + 5x(3x333 + 1) + 2x(3x33 + 1) + 2x(3x3 + 1) + 1 = 3k_4 + 8 + 3k_3 + 5 + 3k_2 + 2 + 3k_1 + 2 + 1 = 3q + (8 + 5 + 2 + 2 + 1) = 3q + 18 = 3q + 3x6$, como 3 divide as parcelas também divide a soma.

$85222 = 8x10000 + 5x1000 + 2x100 + 2x10 + 2 = 8x(3x3333 + 1) + 5x(3x333 + 1) + 2x(3x33 + 1) + 2x(3x3 + 1) + 2 = 3k_4 + 8 + 3k_3 + 5 + 3k_2 + 2 + 3k_1 + 2 + 2 = 3q + (8 + 5 + 2 + 2 + 2) = 3q + 19 = 3q$, como 3 não divide 19, logo não divide a soma.

Seja um número inteiro p escrito como:

$p= a_na_{n-1}a_{n-2}...a_1$

$p= a_nx(3x333...3 + 1) + a_{n-1}x(3x33...3 + 1) + a_3x(3x33 + 1) + a_2x(3x3 + 1) + a_1 = 3k_n +a_n + 3k_{n-1} +a_{n-1} + ... + 3k_2 + a_2 + a_1 = 3q + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1)$, assim caso $(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1)$ seja divisível por 3 podemos escreve-la como: $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 = 3r$. O que resultaria em $p= 3q + 3r$, tornando p divisível por 3, caso $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$ não seja divisível por 3, p também não será divisível por 3.

3.4.3 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 4

Dado um número inteiro qualquer, tal número será divisível por 4 se a sua dezena for divisível por 4. A análise feita na divisibilidade por 4 se resume apenas em dividir a dezena do número proposto.

85328 é divisível por 4, pois sua dezena $28 = 4x7$.

85327 não é divisível por 4, pois sua dezena 27 não é divisível por 4.

Para esta demonstração utilizaremos a mesma ideia proposta na divisibilidade por 2. Note que $100 = 4x25$.

$85328 = 8x10000 + 5x1000 + 3x100 + 28 = 100x(8x100 + 5x10 + 3) + 28 = 4q + 4x7$, assim como 4 divide ambas as parcelas também divide a soma.

Seja p um número inteiro escrito da forma, $p= a_na_{n-1}a_{n-2}...a_1$, então:

$p= a_na_{n-1}a_{n-2}... a_2a_1 = a_n x10^{n-1} + a_{n-1}x10^{n-2} + ... + a_2a_1 = 10^2x(a_nx10^{n-3} + a_{n-1}x10^{n-4} + ... + a_3) + a_2a_1 = 4q + a_2a_1$, basta que a_2a_1 seja divisível por 4 para que p seja divisível por 4.

3.4.4 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 5

Um número inteiro será divisível por 5 quando o algarismo da unidade for 0 ou 5. Deste modo o número 84330 é divisível por 5, pois o algarismo da unidade é o 0, o mesmo ocorre com o número 84335, onde o algarismo da unidade é o 5. Mas o número 84331 não é divisível por 5, pois o algarismo da unidade é o 1 diferente de 0 e 5.

Note que 10 = 2x5, assim:

$84330 = 8x10^4 + 4x10^3 + 3x10^2 + 3x10 + 0 = 10x(8x10^3 + 4x10^2 + 3x10^1 + 3) + 0 = 5q + 0 = 5q$, logo divisível por 5.

$84335 = 8x10^4 + 4x10^3 + 3x10^2 + 3x10 + 5 = 10x(8x10^3 + 4x10^2 + 3x10^1 + 3) + 0 = 5q + 5$, logo divisível por 5.

$84331 = 8x10^4 + 4x10^3 + 3x10^2 + 3x10 + 1 = 10x(8x10^3 + 4x10^2 + 3x10^1 + 3) + 1 = 5q + 1$, logo não é divisível por 5.

Seja um número inteiro p escrito da seguinte maneira: $p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1$, então:

$p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 = a_n x10^n + a_{n-1} x10^{n-1} + ... + a_1 = 10x(a_n x10^{n-1} + a_{n-1} x10^{n-2} + ... +a_2) + a_1 = 5q + a_1$, portanto se o 5 dividir a unidade a_1, dividirá a soma que por sua dividirá p. Mas isto só ocorrerá para $a_1 = 0$ ou $a_1 = 5$, pois a_1 é unidade de p.

3.4.5 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 6

Para que um número inteiro qualquer seja divisível por 6 basta que ele seja divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3.

Nesse sentido a divisibilidade por 6 não requer um novo entendimento sendo necessário apenas agrupar os dois entendimentos anteriormente descritos. Perceba que o 6 pode ser escrito como produto de fatores primos entre 2 e 3, isto é: 6 = 2x3. Portanto um número que o 6 como divisor é composto e aparecerá o 2 e o 3 como fatores.

85224 é divisível por 2, pois é um número par com o algarismo da unidade igual a 4. Também é divisível por 3, pois a soma dos algarismos 8+5+2+2+4

= 21 = 3x7 é divisível por 3. Portanto o número 85224 é divisível por 6 já que os fatores primos 2 e 3 aparecem em sua composição.

85222 é divisível por 2, pois é um número par com o algarismo da unidade igual a 2, más não é divisível por 3 já que a soma dos seus algarismos 8+5+2+2+2 = 19 não é divisível por 3. Portanto o número 3 não é um fator de 85222

85221 é divisível por 3, pois a soma dos algarismos 8+5+2+2+1 = 18 = 3x6. Entretanto não é divisível por 2, sendo impar com o algarismo da unidade igual a 1, assim não tem o fator 2 em sua composição.

3.4.6 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 8

Um número inteiro qualquer é divisível por 8 quando a parte de sua centena for divisível por 8.

A divisibilidade por 8 utiliza a mesma lógica de compreensão e demonstração dos critérios de divisibilidade por 2 e por 4. Note que para que um número inteiro qualquer seja divisível por 2, basta que o algarismo da unidade seja divisível por 2. Para que um número inteiro qualquer seja divisível por 4, basta que a dezena seja divisível por 4. Assim seguindo a mesma linha de raciocínio para o 8 analisara-se apenas a centena.

85224 é divisível por 8, pois 224 é divisível por 8; 224 = 28x8.

85222 não é divisível por 8, pois pela divisão euclidiana tem-se 222 = 8x27 + 6, sendo o 6 resto da divisão.

Note que $10^3 = 8x125$.

Seja um número inteiro qualquer escrito da forma $p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1$, então:

$p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1 = a_n x10^{n-1} + a_{n-1} x10^{n-2} + ... + a_4 x10^3 + a_3 a_2 a_1 = 10^3 x(a_n x10^{n-4} + a_{n-1} x10^{n-5} + ... + a_4) + a_3 a_2 a_1 = 8q + a_3 a_2 a_1$. Logo se $a_3 a_2 a_1$ for divisível por 8, a soma também será divisível por 8 e consequentemente p.

3.4.7 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9

Um número inteiro qualquer será divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

O critério de divisibilidade do 9 é uma resultante direta do mesmo procedimento do critério de divisibilidade por 3, isto vem do fato de 9 ser um número composto por um produto de fatores 3; 3x3 = 9. Da mesma maneira adota na construção das demonstrações do 2, 4 e 8, tendo um princípio lógico para os três números, utilizaremos para o 9 com relação ao 3.

85221 é divisível por 9, pois a soma dos algarismos 8+5+2+2+1 = 18 = 9x2 é divisível por 9.

85224 não é divisível por 9, pois a soma dos algarismos 8+5+2+2+4 = 21 não é divisível por 9. Perceba que 85224 é divisível por 3, isto quer dizer que existe apenas um fator 3 na sua construção de número composto.

Seja um número inteiro qualquer p, escrito da forma $p= a_na_{n-1}a_{n-2}...a_1$, então:

$p= a_na_{n-1}a_{n-2}...a_1 = a_nx10^{n-1} + a_{n-1}x10^{n-2} + ... + a_1 = a_nx(999...9 + 1) + a_{n-1}x(99...9 + 1) + ...+ a_2x(9 + 1) + a_1 = 9q + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1)$, assim p será divisível por 9 quando a soma $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1)$ for divisível por 9.

3.4.8 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 10, 100, 1000

Um número qualquer inteiro será divisível por 10 quando o algarismo da unidade for igual a 0. 0 é divisível por 10 advém das propriedades de divisibilidade.

85220 é divisível por 10, pois seu algarismo da unidade é 0.

85221 não é divisível por 10, pois seu algarismo da unidade é diferente de 0.

Seja um número inteiro qualquer p escrito da forma $p= a_na_{n-1}a_{n-2}...a_1$, então:

$p = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 = a_n x10^{n-1} + a_{n-1} x10^{n-2} + ... + a_1 = 10x(a_n x10^{n-2} + a_{n-1} x10^{n-3} + ... + a_2) + a_1 = 10q + a_1$, deste modo p será divisível por 10 quando $a_1 = 0$, note que a variação de a_1 é de 0 a 9, pois a_1 é unidade na construção de p.

Analogamente pode ser descrita a divisibilidade por 100 e 1000, acrescentando-se apenas zeros as casas finais.

Um número inteiro qualquer será divisível por 100 quando terminar em dois zeros, sucessivamente, um número inteiro qualquer será divisível por 1000 quando terminar em três zeros.

Seja um número inteiro qualquer p escrito da forma $p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1$, então:

$p = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 = a_n x10^{n-1} + a_{n-1} x10^{n-2} + ... + a_1 = 10^2 x(a_n x10^{n-3} + a_{n-1} x10^{n-4} + ... + a_3) + a_2 a_1 = 10^2 q + a_2 a_1$, deste modo p será divisível por 100 quando $a_2 a_1 = 0$, note que a variação de $a_2 a_1$ é de 0 a 99, pois $a_2 a_1$ é dezena na construção de p.

Seja um número inteiro qualquer p escrito da forma $p= a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1$, então:

$p = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 = a_n x10^{n-1} + a_{n-1} x10^{n-2} + ... + a_1 = 10^3 x(a_n x10^{n-4} + a_{n-1} x10^{n-5} + ... + a_4) + a_3 a_2 a_1 = 10^3 q + a_3 a_2 a_1$, deste modo p será divisível por 1000 quando $a_3 a_2 a_1 = 0$, note que a variação de $a_3 a_2 a_1$ é de 0 a 999, pois $a_3 a_2 a_1$ é centena na construção de p.

3.5 NÚMEROS NATURAIS PRIMOS E COMPOSTOS.

Todo número natural maior do que 1 é primo ou composto.

Dizemos que um número natural é composto quando escrito como um produto de fatores primos, ou produto de fatores primos com compostos, ou de produto de fatores compostos.

Os números escritos a seguir são compostos.

6 = 2x3;   12 = 3x4;   24 = 4x6;

Todo número natural maior do que 1 que tem como divisores apenas o 1 e o próprio número é chamado de número primo. Decorre direto do Teorema fundamental da aritmética.

Admita p e q números primos e a um natural qualquer, daí temos que:

I. Se $p \mid q$, então $p = q$
II. Se $p \nmid a$, lê-se p não divide a, então: $(p,a) = 1$, lê-se o máximo divisor entre p e a é 1.

Demonstração.

De I. Se $p \mid q$ e como q é primo, então $p = 1$ ou $p = q$, más p também é primo, logo maior do que 1. Portanto $p = q$.

De II. Seja d o maior divisor entre p e a, isto é $(p,a) = d$. Deste modo, como p é um divisor de p ocorre que $d = p$ ou $d = 1$, mas $p \nmid a$, assim p não é fator de a, o que implica em $d = 1$.

Os números primos são, do ponto de vista de construção nos naturais, os mais básicos e deles forma-se todos os naturais pela propriedade multiplicativa.

3.5.1 EXISTÊNCIA DE INFINITOS PRIMOS NOS NATURAIS

A distribuição dos primos não tem um padrão definido e sua possível aleatoriedade nos faz questionar sobre a quantidade de primos existentes, se são infinitos ou não. Euclides no Livro IX dos Elementos responde esta questão e mostra que há uma infinidade de primos (HEFEZ, Aritmética, 2022, p.101). Nele, Euclides utiliza uma demonstração por redução ao absurdo, a qual foi uma das primeiras já registradas.

Demonstração.

Suponha por absurdo que os números primos fossem finitos e expressos pela sequência p_1, p_2, p_3, ...p_m, em que $_m$ é quantidade de primos existentes. Tome um número natural n tal que:

$$n = p_1.p_2.p_3.(...).p_m + 1 > 1$$

logo n não seria primo e, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, o número n possui um fator primo p que, portanto, deve ser algum p_m, e consequentemente, divide $p_1.p_2.p_3.(...).p_m$ e divide 1. Absurdo.

Assim, o absurdo está em presumir que os números primos são finitos.

Dado que agora sabemos que os números primos são infinitos, a questão que se segue é se há como listá-los. De modo simples, não há como listar todos os primos, mas para alguma quantidade inicial, na ordem das centenas, o Crivo de Eratóstenes é eficiente.

Erastóstenes foi um matemático grego que viveu por volta do século II antes de Cristo. Propôs um método simples para determinar todos os primos até uma quantidade definida, método chamado por Crivo de Erastóstenes. (ABRAMO HEFEZ, 2022, p.102)

Por exemplo: Vamos determinar todos os primos existentes até 100 pelo Crivo de Erastóstenes.

i. Liste todos os números naturais até 100.
ii. Vamos riscar todos não primos começando pelo 1 e os múltiplos de 2, acima de 2.
iii. Risque todos os múltiplos de 3, acima de 3.
iv. Risque todos os múltiplos de 5, acima de 5. E assim em diante.

Para determinar todos os primos existentes não seria necessário repetir este processo até 100, mas até o número primo p, tal que $p^2 \leq 100$. Esse argumento foi provado pelo próprio Erastóstenes. Deste modo o processo aplicado ao exemplo anterior finalizaria no 7, pois o quadrado do próximo primo, 11, é maior do que 100.

Lema e demonstração retirados do livro Aritmética de Abramo Hefez (2022).

Lema 3.1

Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

Demonstração

Suponhamos, por absurdo, que *n* não seja divisível por nenhum número primo *p* tal que $p^2 \leq n$ e que *n* não seja primo. Seja *q* o menor número primo que divide n; então $n = qn_1$, com $q \leq n_1$. Seque daí que $q^2 \leq qn_1 = n$. Logo, *n* é divisível por um número primo *q* tal que $q^2 \leq n$, absurdo.

Tanto pelo método do crivo de Erastóstenes quanto pelo o lema 3.1 o encontro de novos primos *p*, cada vez maior, se torna lento e laborioso. (ABRAMO HEFEZ, 2022, p.102).

3.6 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.

Pra qualquer n natural, onde $n \geq 2$, decorre que n é primo ou n pode ser escrito como um produto de fatores primos.

Demonstração:

Mostraremos a existência pelo Princípio da indução completa.

Para n = 2 o resulta é de imediato.

Suponhamos que a proposição é válida para todo natural menor do que n e vamos provar que vale para n.

Se n for um número primo nada temos a demonstrar.

Suponhamos então que n seja um número composto. Logo existem números naturais a e b tais que $n = a.b$, com $1 < a < n$, $1 < b < n$. Pela hipótese de indução a e b podem ser expressos como produtos de primos, onde, $p_1p_2...p_m$ e $q_1q_2...q_r$, representam a e b respectivamente. Logo $n = p_1p_2...p_m\, q_1q_2...q_r$.

Unicidade:

Suponha que exista $n = p_1p_2...p_m = q_1q_2...q_r$, onde p_m e q_r são primos, deste modo $p_1 \mid q_1q_2...q_r$, logo para algum r, temos que $p_1 = q_r$, reordenando os fatores temos que $p_2 \mid q_1q_2...q_r$, logo para algum r, temos que $p_2 = q_r$, reordenando os fatores e repetindo processo conclui-se que para qualquer m e r, temos $p_m = q_r$, portanto: $p_1p_2...p_m = q_1q_2...q_r$.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética podemos escrever os números naturais de diversas formas, por exemplo.

$24 = 4x6 = 2^2x3$; $210 = 2x3x5x7$; $8820 = 2^2x3^2x5x7^2$ $635250 = 2x3x5^3x7x11^2$

3.7 MÁXIMO DIVISOR COMUM - MDC

Sejam a e b números inteiros diferentes de 0. Um número inteiro d será considerado divisor de a e b se d | a e d | b.

Definição 3.2

Diremos ainda que d será o maior divisor de a e b e podendo ser escrito como MDC(a,b) ou simplesmente (a,b), se:

i. d é um divisor comum de a e b.
ii. se c é um divisor comum de a e b, então c | d.

Seja $d > 0$ o (a,b), não nulos, suponha que exista um c divisor comum de a e b, então |c| divide d, logo $c \leq |c| \leq d$. Portanto o máximo divisor de a e b é efetivamente o maior dentre todos os divisores.

Unicidade

De ii segue que, se d e d’ são dois (a,b), então d | d’ e d’ | d, como d e d’ são maiores do que 0, temos d = d’.

Exemplo 1: Os divisores de 18 e 24 são: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Sendo (18,24) = 6, note que os outros divisores de 18 e 24 também são divisores de 6.

É comum nos livros do ensino fundamental II utilizar o processo abaixo para encontrar o (a,b) efetuando a fatoração simultânea destes fatores primos, tomando apenas os fatores primos que são comum aos dois.

Exemplo 2: Para determinar o (36,60) vamos procurar os fatores comuns de 36 e 60.

Figura 3.1- Cálculo do MDC

36;	60	2
18;	30	2
9;	15	3
3;	5	

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Note que no processo acima, a fatoração será feita até os números do lado esquerdo serem primos entre si. Neste caso o Máximo Divisor Comum encontrado é o produto dos fatores comuns de 36 e 60: (36,60) = 12

Proposição 3.7.1

Se $(a,b) = 1$ e $a \mid bc$, então $a \mid c$.

Demonstração

Como $(a,b) = 1$, existem $x,y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$, então $a.cx + (bc).y = c$. Do fato de a dividir cada termo do lado esquerdo, temos que $a \mid b$. (MOREIRA, 2021).

3.8 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM - MMC

Uma forma de resolver soma ou subtração de frações é encontrando o MMC dos denominadores. Aos alunos dizemos de uma maneira menos formal que é escrever os denominadores com números iguais.

Sejam M_a e M_b o conjunto formado pelos múltiplos de a e b naturais, com a e b pertencentes aos inteiros não nulos. Chamaremos de Mínimo Múltiplo comum e escreveremos como MMC(a,b) ou simplesmente [a,b] o menor elemento de $M_a \cap M_b$. Note que $M_a \cap M_b$ é não vazio pois |ab|, lê-se módulo de ab, pertence ao conjunto. Pelo princípio da boa ordenação é garantido que $M_a \cap M_b$ tem um menor elemento m, tal que MMC(a,b) = m.

O mínimo múltiplo comum pode ser escrito de modo único, assim, se dado m e m' dois mínimos múltiplos comum de a e b, existe c múltiplo de a e b, onde m | c, deste modo m | m' e m' | m, como m e m' são naturais, tem-se que m = m'.

Exemplo 1: Desejamos definir o MMC(a,b).

O conjunto dos múltiplos de 3 é:

$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 60, 63, ...\}$

O conjunto dos múltiplos de 5 é:

$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, ..., 60, 65, ...\}$

Note que 60 é múltiplo de 3 e 5 pois pertence ao conjunto dos múltiplos de ambos os números, más não o menor. Neste exemplo o menor múltiplo entre 3 e 5, MMC(3,5) = 15. Neste caso como 3 e 5 são primos entre si o produto dos dois correspondem ao menor múltiplo comum.

Proposição 3.8.1

Sejam *a* e *b* dois números naturais, então

$$\text{MDC}(a,b).\text{MMC}(a,b) = ab$$

Demonstração:

Escreva $d = \text{MDC}(a,b)$ e $a = da_1$ e $b = db_1$ onde $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ são tais que $\text{MDC}(a_1,b_1) = 1.$ Temos $\text{MMC}(a,b) = al$ para algum $l \in \mathbb{Z}$; além disso, $b \mid \text{MMC}(a,b) \leftrightarrow db_1 \mid a_1 l.$ Como $\text{MDC}(a_1,b_1) = 1,$ isso implica que $b_1 \mid l$ pela proposição **3.9.1** Pela definição de mínimo múltiplo comum, temos que l deve ser o mínimo número divisível por $b_1,$ assim concluímos que $l = b_1$ e portanto $\text{MMC}(a,b) = b_1 a$. Logo $\text{MDC}(a,b).MMC(a,b) = ab.$ (MOREIRA 2021).

3.9 OPERAÇÕES BÁSICAS COM FRAÇÕES.

Sejam a e b, números inteiros quaisquer, com b diferente de 0.

Escrevemos uma fração de a por b com b diferente de 0 como: $\frac{a}{b}$, a e b são chamados, respectivamente, de numerador e denominador.

Proposição 3.9.1

Sejam a, b, c e d números inteiros quaisquer, com b e d diferentes de 0. Temos:

I. $\frac{a}{a}$ = 1, para qualquer a inteiro.

II. $\frac{ab}{b} = a$

III. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

IV. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

Demonstração:

I. é imediato.

II. Note que a propriedade de associatividade vale dentro dos racionais, então:

$\frac{ab}{b} = (a)\,\frac{b}{b}$ de I, temos que:

$\frac{ab}{b} = (a)\,\frac{b}{b} = (a)$.1. logo

$\frac{ab}{b} = a$

III. Vamos demonstrar para a soma. O caso da subtração será de maneira análoga.

Seja $a + b = d$, inteiros, multiplique ambos os membros por $\frac{1}{c}$.

$\frac{1}{c}(a+b) = \frac{1}{c}(d)$, então

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{d}{c}$, logo

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

IV. Vamos demonstrar para a soma. A subtração se dará de maneira análoga.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\frac{b}{b}$, por III, temos

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

4 AO PROFESSOR

Neste capítulo, apresenta-se um possível caminho para organizar uma sequência de conteúdos de modo a facilitar a abordagem do professor na construção do conhecimento aritmético sobre frações, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética como base. Essa proposta visa oferecer um percurso lógico e simplificado, acompanhado de exemplos relacionados a cada tópico, visando contribuir para um processo de ensino aprendizagem mais eficiente e compreensível.

Para esta atividade utilizaremos peças de montar também conhecidas como peças de lego. Elas serão usadas para tornar concreto alguns conceitos abstratos das aulas 1, 2, 3 e 4.

As peças utilizadas para representar os primeiros números primos estão representadas a seguir, tendo sido adaptadas de modo que o aluno possa fazer uma correlação direta entre a quantidade de pinos e o número primo à peça associada. Para a representação dos números 3, 5 e 7 foi cortado um pino de cada peça correspondente. Na representação do número 11, além de ter sido cortado um pino, foi colado duas peças. Não foi encontrado peças de montar com a quantidade de pinos iguais aos números 3, 5, 7, 11 e 13.

Figura 4.1 - representação do número dois (2)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Figura 4.2 - representação do número (3)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

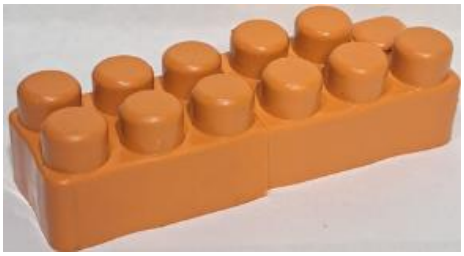
Figura 4.3 - representação número cinco (5)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Figura 4.4 - representação do número sete (7)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Figura 4.5 - representação do número onze (11)



Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Os alunos do 6° ano podem se apropriar do TFA, desde que expresso em linguagem adequada à idade. O TFA não é um conteúdo isolado, necessita por parte do aluno um domínio de alguns conteúdos prévios como: números naturais primos e compostos, critério de divisibilidade e fatoração.

Relacionado à fatoração, é de esperar que o discente entenda a construção de um número natural composto como produto de outros números naturais primos ou compostos. Por exemplo: 24 = 4x6, a princípio entender o 24 como um produto de 4 vezes 6 é um excelente ponto, haja vista que a ideia central e futura é o trabalho com frações. Em seguida, saber que 4 = 2x2 e 6 = 2x3 é o ponto final, ou seja, 24 = 2x2x2x3

A sequência de aulas atribuídas são:

Aula 1 – Números Naturais Primos e Compostos

Aula 2 – Critério de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000

Aula 3 – TFA – Teorema fundamental da Aritmética

Aula 4 – MDC – Máximo divisor comum

Aula 5 – Resolução de atividades

4.1 ESTUDO DIRIGIDO

A seguir segue um caminho lógico de 4 aulas explicativas e 1 aula de resolução de atividades utilizando peças de montar na construção dos números, ao qual o professor pode conduzir o aluno ao domínio nas operações aritméticas de soma e subtração com frações aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética.

4.1.1 AULA 1: NÚMEROS NATURAIS PRIMOS E COMPOSTOS

Nesta aula vamos expressar aos alunos que todos os números naturais, que surgiu para contagem, são expressos em dois tipos: primos e compostos.

Os primos são peças individualizada que podem ser descritos exemplarmente como tijolos, peça de montar (lego), etc.

Os compostos são formados pela multiplicação dos primos. Neste caso se usarmos a abstração para dizer que os primos são tijolos, então os compostos são tipos paredes; se os primos são peças de lego, então os compostos são os objetos construídos com a junção das peças.

Seria interessante utilizar as peças de montar (lego) como tijolos. Caso não as tenham, desenhar é uma alternativa possível, ou até mesmo imagens da internet para enfatizar a ideia.

Trazer as peças de montar individualmente e relacioná-las com números primos, como nas imagens 4.1 a 4.5 e montar uma estrutura combinando as peças e relacionar com números compostos. Por exemplo: 60 = 2x2x3x5.

Figura 4.6 - representação do número sessenta (60)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

O interessante neste momento é desenvolver os múltiplos, gerar números compostos a partir de primos. Seguir do início, da base, para montar algo. De fato, o vetor aqui é a montagem, é construir.

Espera-se que no final o aluno entenda que se um número natural qualquer não for primo, ele pode ser escrito como o produto de multiplicação entre primos ou compostos.

4.1.1.1 AULA 1: DIFERENCIAR NÚMERO PRIMO E COMPOSTO COM PEÇAS DE MONTAR (LEGO)

Objetivos Gerais

- Compreender que todo número natural ou é primo ou é composto.
- Compreender que todo número natural composto pode ser escrito como o produto de outros números naturais, sejam primos ou compostos.
- Estimular o trabalho em equipe

Objetivos específicos.

- Identificar todos os números primos até 100.
- Resolver os propostos associando a montagem das peças de lego com números compostos.

- Escrever números compostos como algum produto utilizando fatores primos ou compostos.

Didática da aula

O professor regente da turma deve definir a melhor estratégia para aplicação da atividade. Cada aluno tem seu tempo para aprender. Conhecer a sala e modo como ela se comporta no dia a dia é essencial para adequar a didática aplicada.

Uma metodologia ativa que deixo como exemplo é a resolução de problemas deixando o aluno como ponto central, mostrando apenas os desafios da aula.

Material didático

- Peças de lego repetidas e variadas
- Material dourado (alternativa as peças de lego)

Atividades

Desenvolvimento

Separar os alunos em grupos ou desenvolver individualmente dependendo da quantidade de alunos presentes.

1. Definir as peças de lego individualmente como os números primos. Necessita de peças repetidas para a resolução quando os números forem repetidos, exemplo: 8 = 2x2x2.

Figura 4.7 - representação do número oito (8)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

2. Definir os números compostos como algum tipo de montagem utilizando as peças de montar (lego). Fica a critério do grupo ou do professor qual montagem representa qual número, exemplo: Dado uma montagem qualquer e associada a ela o número 6, então o 6 será sempre esta montagem. Nesse sentido grupos distintos ou alunos destintos podem associar diferentes montagens a um mesmo número. Um exemplo de representação para o número seis é a figura 4.8, abaixo.

Figura 4.8 - representação do número seis (6)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Caso o professor decida aplicar esta atividade de maneira individualizada seria interessante associar uma mesma montagem para um único número e esta regra seguir até o final.

Atividade ao aluno

1. Escreva todos os números naturais primos até o 100.
2. Associe a cada primo encontrado uma peça de montar distinta. Pelo menos até o número 11.
3. Crie uma montagem utilizando as peças de lego para os números compostos como no exemplo a seguir.
    a. Utilizando as peças de lego que foram associadas aos números em 2, construa objetos pela montagem das peças de montar e as associe a números compostos baseado no produto de cada peça utilizada. Por exemplo.

Figura 4.9 - representação do número quinze (15)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

4. Dado os números compostos associe uma montagem a cada um deles conforme exemplo abaixo.

    a. 6 = 2x3. Faça uma montagem com as peças de montar 2 e 3 que foi escolhida em 1. Exemplo dado na figura 4.8
    b. 24 = 6x4 = 8x3 = 2x2x2x3. Faça uma montagem com as peças de montar que foi escolhida em 1. Note que 6x4 = 24, neste caso pode utilizar a montagem do 6 e apenas complementar. Por exemplo:

Figura 4.10 - representação do número vinte e quatro (24)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

Acredita-se que no final fique claro para o aluno o processo de construção de um número composto qualquer.

Nesta aula 1 estamos utilizando o conceito de múltiplo em atividade ao aluno 1 e divisores em atividades ao aluno 2, sem necessariamente abordarmos sobre o tema. Expressar neste momento as ideias de múltiplos e divisores juntos pode gera confusão no aluno do 6° ano, em alguns casos ele trocam múltiplo por divisor e divisor por múltiplo.

4.1.2 AULA 2: CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE

Agora que o aluno sabe que os números naturais ou são primos ou são compostos cabe fazer uma reflexão sobre a “desmontagem” deles, se possível.

Oposto à Aula 1, os critérios de divisibilidade auxiliam na desmontagem dos números compostos. Como se o critério de divisibilidade fosse a ferramenta que desconstruiria os números, retornando-os a sua base original. Vale lembrar que neste ponto essa “desmontagem” não está relacionada a destruição, até porque um número composto escrito como produto de outros números primos ou compostos continuariam tendo sua representação original. Por exemplo: 6x4 ou 2x2x2x3 continuariam sendo o 24, mas visto de outra maneira. Em vez de olhar e analisar uma montagem, analisa-se as peças do ponto de vista da composição.

Ao final espera-se que o aluno consiga identificar se os números apresentados são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 ou 1000 que por sua vez está fundamentada na habilidade 5 do 6° ano do ensino fundamental ll conforme a BNCC.

4.1.2.1 AULA 2: CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE COM PEÇAS DE MONTAR (LEGO)

Objetivos gerais

- Classificar os números naturais em primos ou compostos
- Estabelecer uma relação entre os números primos e compostos
- Reconhecer quando um número composto é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 ou 1000.

Objetivos específicos

- Escrever os números compostos como produtos de outros números, sejam eles primos ou compostos.
- Escrever números compostos como produto utilizando, caso tenha, os fatores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 ou 1000

Didática da aula

O professor regente da turma deve definir a melhor estratégia para aplicação da atividade. Cada aluno tem seu tempo para aprender. Conhecer a sala e modo como ela se comporta no dia a dia é essencial para adequar a didática aplicada.

Uma metodologia ativa que pode ser aplicada é a resolução de problemas deixando o aluno como ponto central, mostrando apenas os desafios a serem superados para a resolução de um problema dado em aula.

Material didático

- Peças de montar (lego) repetidas e variadas
- Material dourado (alternativa as peças de lego)

Atividades

Desenvolvimento

Continuando com a mesma abordagem da aula 1 espera-se que neste momento o aluno tenha claro o entendimento da associação feita das peças e montagens com os números primos e compostos.

Atividade ao aluno

Partindo da aula 1, Atividades ao aluno, 4 a e b.

1. Identificar qual dos números compostos tem as peças que correspondem aos números 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 ou 1000.

Após a atividade realizada é o momento para o professor descrever os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 10, 100 e 1000.

Disponho alguns exercícios que podem contribuir, além de mostrar ao professor uma excelente bibliografia do tema e sua importância.

Os 5 exercícios a seguir foram retirados do livro “Círculos matemáticos: a experiencia russa” (2019).

EXERCÍCIO 1

O número $2^9.3$ é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e/ou 9?

Utilizando as peças de montar, note que não há a peça que representa o número 5, nem uma combinação para o 9, duas peças que representam o 3. Entretanto, há a peça que representa o número 2 e 3, além de combinações para o 4, 6 e 8. Veja a figura 4.11 a seguir

Figura 4.11 - representação do número 2^9x3

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

EXERCÍCIO 2

É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 3, então ele tem que ser divisível por 4.3 = 12?

Sim. Como 4 e 3 não tem fatores primos comuns implica que o número dado tem estes fatores na sua composição. Analise a figura a seguir.

Figura 4.12 - representação do número doze (12)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

EXERCÍCIO 3

É verdade que, se um número natural for divisível por 4 e por 6, então ele tem que ser divisível por $4 \cdot 6 = 24$?

A resposta é "Falso". Utilize como exemplo o número 60 representado na figura 4.6

EXERCÍCIO 4

O número A é par. É verdade que 3A tem que ser divisível por 6?

Sim. Como A é par há o fator primo 2 na sua composição. Exemplo: 18 = 3x6. Outra forma de exemplificar está na figura 4.13 abaixo.

Figura 4.13 - representação do número dezoito (18)

Fonte: autoria própria, Paint, (2024).

EXERCÍCIO 5

O número 15A é divisível por 6. É verdade que A tem quer ser divisível por 6? Não. Tome o sessenta como exemplo. 60 = 15x4, sendo A = 4.

EXERCÍCIO 6

(Espcex - Adaptada) No número *34n27*, qual é o algarismo que substitui *n* para que ele seja divisível por 9?

Um número é divisível por 9 quando a soma dos algarismos for divisível por 9.

3 + 4 + 2 + 7 = 16, o próximo múltiplo de 9 é o 18. Basta substituir *n* por 2.

4.1.3 AULA 3: TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Com os critérios de divisibilidade aprendidos, além dos números primos e compostos, o aluno neste estágio conseguirá expressar um número composto como produto de outros números. De fato, ainda não foi descrito o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), apenas que se um número for composto ele pode ser escrito como produto de outros números primos ou compostos, por exemplo: 60 = 6x10.

Neste ponto, pode-se aprofundar mais e, de maneira mais sequencial, propor que, se a multiplicação descoberta de imediato, pelo aluno, resultante no número composto, tiver algum fator composto, a ideia de escrevê-lo como produto deve se estender até todos os fatores do produto ser primo.

Notavelmente, surgi a importância dos critérios de divisibilidade. Esse pensamento é o que norteia a ideia de que o TFA não pode ser expresso inicialmente. Esse conhecimento requer uma base anterior fundamentada na percepção dos números e em sua construção.

Entendido este conteúdo, é deste ponto em diante que mostraremos as frações. Cabe lembrar que os nossos estudos e a tese central desta dissertação são propor mecanismos nas resoluções de frações pela aritmética, não abstrairemos as frações como representações geométricas ou percentualmente, mas relacionado ao algoritmo aritmético.

Neste ponto, os exercícios propostos serão basicamente multiplicações, divisões e simplificações de frações. Assim, o aluno já deve ter como premissa o entendimento sobre o que seriam frações irredutíveis e o que significa uma fração em determinados problemas, como: parte de uma conta, parte de um desenho, etc.

É importante dizer que, segundo a BNCC, a habilidade 9 do 6° ano está ligada a resolver e elaborar problemas com frações que o resultado seja um número natural.

4.1.3.1 AULA 3: TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA ADAPTADO AO 6° ANO

Objetivos gerais

- Escrever um número natural composto como um produto de fatores primos.

- Resolver multiplicação e divisão com números naturais

Objetivos específicos

- Reconhecer que todo número natural ou é primo ou composto.
- Escrever um número natural composto como produto de outros números naturais compostos ou primos
- Identificar quando os fatores de um número composto são números compostos ou primo
- Reconhecer que se um número natural for composto pode ser escrito como um produto de números primos.
- Escrever um número composto como produto de números primos

Didática da aula

O professor regente da turma deve definir a melhor estratégia para aplicação da atividade. Cada aluno tem seu tempo para aprender. Conhecer a sala e modo como ela se comporta no dia a dia é essencial para adequar a didática aplicada.

Uma metodologia ativa que deixo como exemplo é a resolução de problemas deixando o aluno como ponto central, mostrando apenas os desafios da aula.

Outra metodologia ativa que pode contribuir é a sala de aula invertida nela os alunos estudam o material antes da aula. É aconselhável que os alunos revisem conteúdos fundamentais ao TFA, como: multiplicação, divisão, critérios de divisibilidade.

Material didático

- Peças de lego repetidas e variadas
- Material dourado (alternativa as peças de lego)

Atividades

Desenvolvimento

Revisitando a aula 1, atividade ao aluno 4: Dado os números compostos associe uma montagem a cada um deles conforme exemplo a seguir.

c. 6 = 2x3. Faça uma montagem com as peças de lego 2 e 3 que foi escolhida em 1. Exemplo na figura 4.8.
d. 24 = 6x4 = 8x3 = 2x2x2x3. Faça uma montagem com as peças de lego que foi escolhida em 1. Note que 6x4 = 24, neste caso pode utilizar a montagem do 6 e apenas completar. Exemplo na figura 4.10.

Neste momento iremos associar os números compostos a representação do exemplo d, 24 = 2x2x2x3.

A ideia é associar cada montagem feita com as peças de lego às suas peças individualizadas. Nesse sentido, propõe que se desmonte e cada peça, isto é, cada número primo correspondente, escreveremos como uma multiplicação. Entre esse resultado, no processo de desmontagem, pode associar as combinações de multiplicações distintas, por exemplo:

Tome o 24 como uma montagem qualquer, assim as peças utilizadas na montagem são os números 2, 2, 2 e 3, a cada uma dela uma peça associada. Sendo que para o número 2 a peça deve ser idêntica (repetida).

Desmontando o 24 temos:

24 = 2x2x2x3

Além, podemos construir outras multiplicações antes mesmo do resultado final relacionado ao TFA, como por exemplo:

24 = 12x2

24 = 6x4

24 = 8x3

Atividade ao aluno

EXERCÍCIO 1

Dados os números compostos a seguir associado a cada montagem. Desmonte e escreva como produto de fatores primos.

a. 24
b. 60
c. 18
d. 75

EXERCÍCIO 2

Escreva como produto de fatores primos os números compostos a seguir

a. 32
b. 45
c. 120
d. 600

Espera-se que neste ponto o aluno consiga resolver a atividade 2 sem usar as peças de lego.

4.1.4 AULA 4: MDC – MÁXIMO DIVISOR COMUM

O algoritmo utilizado para multiplicação e divisão de fração é bem distinto do algoritmo utilizado para soma e subtração. Neste sentido, para o aluno ter essa habilidade desenvolvida, requer o acréscimo de, pelo menos, mais um conteúdo, MDC.

Nesta aula será proposto para o aluno encontrar o maior divisor entre apenas dois números naturais.

Quando introduzida esta nova ideia, é importante deixar claro que não, necessariamente, o MDC destes dois números será primo.

Vale recordar que por sequência é de se esperar que o aluno já entenda o TFA, deste modo uma possível duvida poderá ou não surgir é quando o número composto expresso como produto de primos o aluno tenda a procurar apenas o maior primo descrito, exemplo:

Encontrar o MDC de 12 e 60.

Note que:

12 = 2x2x3

60 = 2x2x3x5

Um possível erro seguindo esta abordagem é o aluno pensar em escrever o 12 e o 60 pelo TFA e dizer que o 3 é o maior divisor comum, o que seria falso. O 3 não é o maior fator primo comum. Assim, fica a premissa de recordar que o MDC nestes casos é o produto de todos os fatores comuns 2x2x3 = 12.

As figuras 4.12 e 4.6 podem auxiliar a encontrar o MDC, basta encontrar as peças comuns a ambos os números.

De todo modo, este processo traz vantagens quando as frações não estão na forma irredutível, além de neste ponto o aluno compreender boa parte das multiplicações básicas, dita em parte como tabuada.

É importante dizer que, segundo a BNCC, a habilidade 9 do 6° ano está ligada a resolver e elaborar problemas com frações que o resultado seja um número natural.

4.1.4.1 AULA 4: MÁXIMO DIVISOR COMUM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Objetivos gerais

- Identificar o maior divisor comum entre dois números
- Identificar denominadores primos entre si

Objetivos específicos

- Escrever o máximo divisor comum entre dois números naturais
- Escrever denominadores com números naturais compostos como produto entre fatores primos
- Reconhecer frações não irredutíveis
- Simplificar frações até se tornarem irredutíveis

Didática da aula

O professor regente da turma deve definir a melhor estratégia para aplicação da atividade. Cada aluno tem seu tempo para aprender. Conhecer a sala e modo como ela se comporta no dia a dia é essencial para adequar a didática aplicada.

Uma metodologia ativa que fica como exemplo é a resolução de problemas deixando o aluno como ponto central, mostrando apenas os desafios da aula.

Outra metodologia ativa que pode contribuir é a sala de aula invertida nela os alunos estudam o material antes da aula. É aconselhável que os alunos revisem conteúdos fundamentais ao TFA, como: multiplicação, divisão, critérios de divisibilidade.

Material didático

- Peças de lego repetidas e variadas
- Material dourado (alternativa as peças de lego)

Atividades

Desenvolvimento

No primeiro momento deve ser mostrado que o máximo divisor comum ou maior divisor comum pode ser escrito como: $(a,b) = d$, com a, b e d números naturais, sendo d o máximo divisor comum de a e b.

Admita que o MDC pode ser escrito como Máximo Divisor Comum ou Maior Divisor Comum.

Ainda utilizando as peças de lego iremos demonstrar que o maior divisor comum entre dois números é produto dos fatores primos comuns aos dois números.

Exemplo:

a) Determinar o máximo divisor comum entre 12 e 18. MDC (12,18)
   Solução:

   Note que:

$$12 = 2x2x3$$

$$18 = 2x3x3$$

Os fatores primos comuns ao 12 e 18 são apenas 2 e 3, portanto; MDC (12,18) = 6.

Utilizando as peças de lego teríamos 1 peça equivalente a 1 número primo 2 e 1 peça equivalente a 1 número primo 3. Estas duas peças comuns em ambas montagens gera a resultante do MDC. Veja figuras 4.12 e 4.13.

b) Determinar o MDC (12, 24).
   Solução:

Note que:

$$12 = 2x2x3$$

$$24 = 2x2x2x3$$

Neste exemplo os fatores primos comuns são: 2, 2 e 3, logo: MDC (12, 24) = 12.

Quando utilizado as peças de montar das montagens correspondentes ao 12 e 24, teríamos: 2 peças equivalente ao número primo 2 e uma peça equivalente ao número primo 3. Assim as peças comuns as montagens para 12 e 24 seriam 3, logo: 2x2x3 = 12. Veja figuras 4.12 e 4.10.

Atividades ao aluno

1. Desenvolver atividades voltadas a determinar MDC entre dois números naturais quaisquer.
2. Desenvolver atividades voltadas a determinar MDC dos denominadores de pares de frações.
3. Dada os pares de frações distintas reescreve-las de modo que os denominadores sejam iguais.

4.1.5 AULA 5: RESOLUÇÃO DE ATIVIDADES

Resolvendo operações básicas com frações aplicando as ideais de primos e compostos, critérios de divisibilidade, TFA e MDC.

Objetivos gerais

- Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos com frações cujo o resultado final seja um número natural (EF06MA09)
- Resolver e elaborar problemas que envolvam adição e subtração com números racionais positivos na representação fracionária (EF06MA10)

Objetivos específicos

- Escrever denominadores com números naturais compostos como produto entre fatores primos
- Reconhecer frações não irredutíveis
- Simplificar frações até se tornarem irredutíveis
- Transformar frações com denominadores diferentes em iguais.
- Resolver multiplicações e divisões com números naturais
- Resolver soma e subtração de fração

Didática da aula

O professor regente da turma deve definir a melhor estratégia para aplicação da atividade. Cada aluno tem seu tempo para aprender. Conhecer a sala e modo como ela se comporta no dia a dia é essencial para adequar a didática aplicada.

Uma metodologia ativa que deixo como exemplo é a resolução de problemas deixando o aluno como ponto central, mostrando apenas os desafios da aula. Outra metodologia ativa que pode contribuir é a sala de aula invertida nela os alunos estudam o material antes da aula. É aconselhável que os alunos revisem conteúdos fundamentais ao TFA, como: multiplicação, divisão, critérios de divisibilidade.

Atividades

Desenvolvimento

Este é o momento de culminância das aprendizagens e conteúdos ministrados utilizando o TFA e o critério de divisibilidade descrito na habilidade 5 da BNCC para gerar as soluções.

Será proposto atividades de fixação do conteúdo e atividades baseadas em resolução de problemas para aprofundar o conhecimento

Esta é uma aula típica de resolução de atividades, momento para pôr em prática o que foi aprendido e testar o nível de conhecimento adquirido de cada estudante.

EXERCÍCIO 1

a) Dada as frações $\frac{3}{12}$ e $\frac{7}{18}$ determine o máximo divisor comum dos denominadores.

Voltando a aula anterior, seguindo a mesma ideia de resolução, concluiríamos que a resposta é 6.

b) Utilizando as peças de montar escreva as frações $\frac{3}{12}$ e $\frac{7}{18}$ de modo que tenha um mesmo denominador.

Solução:

Note que:

$$12 = 2x2x3$$

$$18 = 2x3x3$$

Perceba que para que estes números fiquem iguais teríamos que acrescentar um fator (peça de montar) 3 para o número 12 e um fator (peça de montar) 2 para o número 18, logo:

$$2x2x3x3 = 36$$

$$2x3x3x2 = 36$$

Lembre-se que pelo princípio da igualdade os fatores acrescentados aos denominadores deveram serem acrescentados aos numeradores respectivamente, tendo a resposta como:

$$\frac{3x3}{12x3} \text{ e } \frac{7x2}{18x2}$$

$$\frac{9}{36} \text{ e } \frac{14}{36}$$

EXERCÍCIO 2.

Determine a soma entre as frações $\frac{3}{12}$ e $\frac{7}{18}$.

Solução: Vamos transformar os denominadores em números iguais e depois somar os numeradores.

$$\frac{3}{12} + \frac{7}{18} = \frac{9}{36} + \frac{14}{36} = \frac{9+14}{36} = \frac{25}{36}$$

4.1.5.1 ATIVIDADES AO ALUNO

Atividades ao aluno

Resolução de lista de exercícios sobre soma e subtração de fração. (EF06MA09), (EF06MA10).

Exercícios retirados do material estruturado da secretaria de educação do estado do Mato Grosso.

EXERCÍCIO 1

Um projeto foi desenvolvido com algumas costureiras da cidade de Agulha. Nele, a intenção é dar apoio aos jovens sem-teto, com produtos feitos de colchas coloridas de retalhos. Para cada colcha é necessário cortar 90 pedaços de tecido. A costureira Cissa cortou $\frac{2}{3}$ dos pedaços, Joice cortou a terça parte do número de pedaços cortados de Cissa e o quádruplo do número de pedaços cortados por Duda. Determine: (RAFAEL ZATTONI, 2021)

a) Que fração do total de pedaços de tecido Joice Cortou?

Se Cissa cortou $\frac{2}{3}$ do total, e Joice cortou $\frac{1}{3}$ do que Cissa cortou, logo: $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$.

Joice cortou 20 pedaços, que corresponde: $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. O passo de simplificação se dá pelo bom entendimento do critério de divisibilidade ou pelo TFA identificando 20 e 90 como números compostos escrevendo-os como produto de fatores primos.

b) Que fração do total de pedaços de tecido Duda cortou?

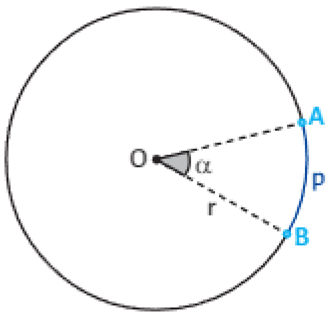
Como Duda cortou a quarta parte de Joice, então Duda cortou 5 partes. Portanto:

$\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. A simplificação desta fração se dá pela mesma ideia utilizada no item a.

EXERCÍCIO 2

Determine a medida (p) do arco AB, referente aos ângulos centrais e arcos indicados em cada item. (ZATTONI, 2021)

Figura 4.14 - circunferência



Fonte: Rafael Zattoni, (2021).

a) $\alpha = 72° \; e \; r = 30mm$

Solução: $p = \frac{72}{360}.2.\pi.30 \Rightarrow p = 12\pi.$

b) $\alpha = 60° \; e \; r = 24mm$

Solução: $p = \frac{60}{360}.2.\pi.24 \Rightarrow p = 8\pi$

É natural que o aluno tente resolver primeiro as multiplicações, visto que os denominadores nas frações acima são maiores, nesse sentido a chance de cometer um erro pode vir a ser maior. Note que multiplicando primeiro e dividindo por últimos temos $\frac{4320}{360}$ e $\frac{2880}{360}$ respectivamente. Essas divisões finais tendem a ser complicadas de resolver para alunos de 6° e 7° ano. Pensar os números compostos como blocos de montar e simplificando torna a solução mais simples. Deste modo teríamos alternativas de soluções para a e b, respectivamente, como:

a) $\alpha = 72° \; e \; r = 30mm$

Solução: $p = \frac{2^3.3^2}{2^3.3^2.5}.2.\pi.30 \Rightarrow p = 12\pi.$

b) $\alpha = 60° \; e \; r = 24mm$

Solução: $p = \frac{2^2.3.5}{2^2.2.3.3.5}.2.\pi.24 \Rightarrow p = 8\pi$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular — BNCC — (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000; (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora e (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Mostramos a necessidade de concentrar um maior esforço aos alunos, não só para a compreensão do porquê estar fazendo essas operações matemáticas, mas também os algoritmos de resolução que compõem cada problema. Assim, este trabalho se preocupou em contribuir com o professor na área da Aritmética, mais precisamente nas construções dos números naturais e, em seguida, na resolução de operações básicas com números fracionários. Tendo como aplicação final a resolução da soma e subtração de fração, aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética.

Deste modo, foi proposta uma sequência de conteúdos que culminaria na compreensão de como os números naturais podem ser construídos ou desconstruídos e uma forma de como operar com números fracionários.

Seguindo nesta ideia a proposta do trabalho se dividiu em expor ao professor alguns conceitos básicos sobre o tema que são fundamentais ao domínio pelo discente para se desenvolver a aula, como: números primos e compostos, critérios de divisibilidade e Teorema Fundamental da Aritmética, além da formação de todos os reais e sua distribuição na reta. Em seguida, um conjunto de aulas utilizando metodologias ativas (aprendizagem baseada em problemas, sala de aula invertida) elencando os conteúdos, como num percurso a ser seguido pelo aluno. Nesse conjunto de aulas descrito no Capítulo 4, foram pensadas para serem desenvolvidas com material auxiliar, neste caso, peças de montar (LEGO), mas nada impede que o professor possa utilizar outras ferramentas concretas ou abstratas no processo de ensino aprendizagem dos conteúdos. Tais aulas apresentadas como exemplos foram apenas um auxílio que referenda o pensamento original do trabalho.

Assim espera-se que esta dissertação sirva de fonte, inspiração ou suporte aos discentes na busca do ensino aprendizagem com qualidade proporcionando caminhos distintos relacionados ao tema de operações básicas com frações e que culmine no completo domínio das habilidades propostas na BNCC por todos os alunos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1988.

BARBOSA, E. F.; MOURA, G. D. **Metodologias Ativas de Aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica**. Boletim Técnico do Senac, Rio de Janeiro, v. 39, n. 2, p. 48-67, 2013.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem.** Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BORGES, M. C. et al. **Aprendizado baseado em problemas**. Medicina, v. 47, n. 3, p. 301-307, 2014.

BRASlL. Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular*.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 24/07/2024

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Livraria Sá da Costa Editora. 1ª Edição. Lisboa, 1951.

COELHO, S.; MACHADO, S. e MARANHÃO, C. **Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?** Atas do CIBEM V, Cd-rom, Cidade do Porto, 2005.

COURANT, Richard. ROBBINS, Herbert. **What is Matematics?.** 2ª Edição. Oxford. New York, 1996.

EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática.** 5ª Edição. Campinas, 2011.

FOMIN, Dmitri. **Círculos Matemáticos. A experiência russa.** 1ª Edição. Impa. Rio de Janeiro, 2019.

GIL, A. C. **Didática do ensino superior**. São Paulo: Atlas, 2012.

HEFEZ, A. **Aritmética**. SBM. 3ª Edição. Rio de Janeiro, 2022.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos e funções.** 9ª Edição. Atual. São Paulo, 2013.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário básico de filosofia.** 5ª Edição. Editora Zahar. Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon Lages. Et. al. **A Matemática do Ensino Médio**.11ª Edição. SBM. Rio de Janeiro, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Análise na reta. Volume 1. Funções de uma variável.** 8ª Edição. IMPA. Rio de Janeiro, 2006.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Educação Matemática: um compromisso social. Recife: UFPE/Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

MOREIRA, Carlos Gustavo. **Tópicos de Teoria dos Números**. 2ª Edição. SBIM. Rio de Janeiro, 2021.

ROQUE, Tatiana. PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª Edição. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

SANTOS, José Plínio de O. **Introdução a Teoria dos Números**. Rio de Janeiro,

1998.

ZATTONI, Rafael. CARVALHO, Thomas Dall'Acqua **MAXI: 6° ano: ensino fundamental, anos finais**. Maxi. 1ª Edição. São Paulo. 2021.

ZATTONI, Rafael. CARVALHO, Thomas Dall'Acqua **MAXI: 7° ano: ensino fundamental, anos finais**. Maxi. 1ª Edição. São Paulo. 2021.