Fabrício A. Macedo

Contribuições para o ensino de geometria espacial com uso do GeoGebra em articulação com realidade aumentada

Vitória

2024

Fabrício A. Macedo

Contribuições para o ensino de geometria espacial com uso do GeoGebra em articulação com realidade aumentada

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof.Dr. Alancardek Pereira Araujo

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Alves Macedo, Fabrício, 1979-
A474c Contribuições para o ensino de geometria espacial com uso do GeoGebra em articulação com realidade aumentada / Fabrício Alves Macedo. - 2024.
88 p.

Orientador: Alancardek Pereira Araújo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria Espacial. 2. Ensino de Matemática. 3. Tecnologias Educacionais. 4. Geogebra. 5. Realidade Aumentada. I. Pereira Araújo, Alancardek. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Fabrício A. Macedo

Contribuições para o ensino de geometria espacial com uso do GeoGebra em articulação com realidade aumentada

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 30 de novembro de 2024:

Prof.Dr. Alancardek Pereira Araujo
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr.Mateus Mendes Magela
Instituto Federal do Espírito Santo
Membro Externo

Vitória
2024

Dedico este trabalho primeiramenta a Deus e a minha esposa e finhas, que nos momentos mais dificeis sempre estiveram do meu lado

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças e sabedoria para concluir esta dissertação. Este é um marco importante em minha vida acadêmica e pessoal, e sou profundamente grato a todos que contribuíram para que este momento fosse possível.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo apoio incondicional e compreensão ao longo desta jornada. Minha mãe, que me ensinou a importância da educação e me incentivou a seguir meus sonhos, você é a base de tudo o que sou. A minha esposa Shirley, por sua paciência, amor e encorajamento nos momentos mais difíceis. Sua dedicação e apoio foram fundamentais para que eu pudesse me dedicar a este trabalho. E às minhas filhas Cecília e Victória que sempre encheiram meus dias de alegria e motivação. Vocês são minha maior fonte de inspiração e força.

Ao meu orientador, professor Alancardek Araujo, expresso minha profunda gratidão por sua orientação e paciência. Suas valiosas sugestões, críticas construtivas e suporte acadêmico foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação ao ensino e à pesquisa é uma fonte de inspiração, e serei eternamente grato por sua confiança em meu potencial.

Agradeço também aos demais professores do Profmat que contribuíram para minha formação acadêmica. Suas aulas, conselhos e incentivos foram fundamentais para o meu crescimento como pesquisador e profissional. Aos amigos que fiz ao longo deste percurso, vocês foram uma parte importante desta jornada, oferecendo apoio, companheirismo e muitas risadas nos momentos de tensão. A amizade de vocês é um tesouro que levarei comigo para sempre.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação. Cada um de vocês tem uma parte nesta conquista.

Muito obrigado!

“Porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele seja a glória para sempre"
(Romanos 11:36)

Resumo

Esta dissertação apresenta uma sequência didática para o ensino de área e volume de prismas e pirâmides, utilizando o aplicativo Geogebra com realidade aumentada como ferramenta de apoio. O objetivo do estudo é explorar o potencial pedagógico da tecnologia no ensino de geometria espacial, buscando proporcionar uma aprendizagem mais dinâmica e significativa para estudantes do ensino médio.

O trabalho inicia-se com uma revisão dos conceitos fundamentais de geometria espacial, incluindo definições de prismas, pirâmides e os cálculos de suas áreas e volumes. Em seguida, é detalhada a sequência didática desenvolvida, que foi aplicada aos alunos da segunda série do ensino médio. A sequência inclui atividades de construção e manipulação de sólidos geométricos utilizando o Geogebra, permitindo que os alunos visualizem e interajam com os objetos tridimensionais de maneira inovadora, facilitando a compreensão dos conceitos abrangentes.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Geogebra; Realidade Aumentada; Ensino de Matemática; Tecnologias Educacionais.

Abstract

This dissertation presents a didactic sequence for teaching the area and volume of prisms and pyramids, using the Geogebra application with augmented reality as a support tool. The aim of the study is to explore the pedagogical potential of technology in the teaching of spatial geometry, seeking to provide more dynamic and meaningful learning for high school students.

The work begins with a review of the fundamental concepts of spatial geometry, including definitions of prisms, pyramids and calculations of their areas and volumes. It then goes on to detail the didactic sequence developed, which was applied to secondary school students. The sequence includes activities for constructing and manipulating geometric solids using Geogebra, allowing students to visualize and interact with three-dimensional objects in an innovative way, facilitating understanding of the overarching concepts.

Keywords: Spatial Geometry; Geogebra; Augmented Reality; Mathematics Teaching; Educational Technologies.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

’*

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) define as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em cada etapa da educação básica, incluindo o ensino da matemática. A BNCC destaca a importância da utilização de tecnologia no ensino da matemática como forma de tornar o aprendizado mais dinâmico e significativo para os estudantes, onde a tecnologia pode ser utilizada de forma integrada ao ensino da matemática para ampliar a compreensão dos alunos sobre os conceitos matemáticos, estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas, bem como para desenvolver habilidades digitais e competências para lidar com as tecnologias digitais Ainda segundo a (BNCC, 2018) A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se no desenvolvimento da compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos, visando à resolução de situações-problema. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área. A geometria ocupa um lugar muito importante no ensino de matemática, tendo um papel relevante na vida do aluno, e devido a essa importância em que se tem, os parâmetros curriculares da educação destaca que:

> A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento espacial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas ideias as principais norteadoras da presente abordagem. (FUNDAMENTAL; EDUCAÇÃO, 2000)

O foco desta dissertação é apresentar um referencial didático voltado para professores do Ensino Médio interessados em implementar o uso do GeoGebra, em articulação com a Realidade Aumentada, no ensino de prismas e pirâmides nas aulas de geometria espacial.

Segundo Lima (2021), a Realidade Aumentada no ensino de prismas permite aos alunos uma interação mais direta e imersiva com os objetos geométricos, o que potencializa o entendimento espacial e a aplicação dos conceitos matemáticos aprendidos O presente trabalho não tem objetivo apresentar uma fórmula salvadora ou metodologia nova, mas sim apresentar como a tecnologia pode ser algo somativo a outras metodologias, sendo elas inovadoras ou tradicionais. Em um cenário onde a tecnologia se faz cada vez mais presente é de extrema importância que profissionais da educação estejam cada dia mais qualificados para utiliza-la de forma eficiente no ensino da matemática, isso se fará por meio de formação continuada de um planejamento pedagógico com o fim de integrar a tecnologia à atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, criando situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e seus projetos de vida e favoreçam seu protagonismo, segundo (KENSKI, 2003) :

> Para que as TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) [1] possam trazer alterações no processo educativo, no entanto, elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente, faça diferença. Não bastar usar a televisão ou o computador, é preciso saber usar de forma pedagogicamente correta a tecnologia escolhida.

> "As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC's) se apresentam na atualidade como ferramentas que têm influenciado e transformado as interações sociais e as buscas por informações, alterando as formas de trabalhar, de se comunicar e de aprender. Na Educação, as TDIC's têm sido incorporadas às práticas docentes como meio para promover uma aprendizagem mais significativa, buscando despertar maior interesse e engajamento dos alunos, gerando transformações nas formas de ensinar e aprender."(DANTAS, 2018).

Algumas formas de utilizar a tecnologia no ensino da matemática incluem a utilização de softwares educativos, jogos digitais, recursos multissensoriais e recursos de visualização, como gráficos e simulações. A tecnologia da a possibilidade e a facilidade para investigar, analisar e comparar e compartilhar os conhecimentos adquiridos fazendo assim com que o aluno tire suas próprias conclusões tornando-se individuo ativo e participante nesse processo de ensino e aprendizado.
A realidade aumentada não é uma tecnologia tão nova, criada para a indústria aeronáutica, onde possibilitava a criação em ambiente virtual, objetos que seria posteriormente criado em ambiente real. A possibilidade de se visualizar de investigar, analisar possíveis defeito era possíveis antes de se construir objetos reais gerando assim mais eficiência na produção industrial, bem como a redução dos custos. Tal tecnologia utilizada na educação, permiti ao aluno criar objetos virtuais e comparar com objetos real antes difíceis de serem visualizados e analisados. Na livro "Introdução à Geometria Espacial" do professor Paulo Cezar Pinto Carvalho (CARVALHO, 2005), em sua introdução ele fala das dificuldades de se ensinar bem como a dificuldades de muitos alunos enxergarem figuras tridimensionais em um espaço bidimensional.

[1] Atualmente o termo TICs foi substituido pelo termo TDICs (Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação)

> "A transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial, em geral efetuada no final do Segundo Grau, é muitas vezes difícil para o aluno. É fácil entender porque isto ocorre. Como habitantes de um mundo tridimensional, temos grande facilidade para lidar com o mundo bidimensional da Geometria Plana. Modelos concretos para os objetos com que lidamos na Geometria Plana são fáceis de construir e manipular. As superfícies sobre as quais escrevemos ou desenhamos são excelentes modelos para o plano da Geometria e permitem representar com fidelidade retas, polígonos, círculos e demais figuras planas. Ou seja, podemos facilmente concretizar as noções abstratas da Geometria.
>
> Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversa ordem. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral, recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos. Mas estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção". (CARVALHO, 2005)

Diante das dificuldades já ditas em visualizar figuras tridimensionais que os alunos possuem, o trabalho apresentara uma sequência didática com utilização do geogebra 3D com realidade aumentada onde o aluno construirá sólidos geométricos, onde irá analisar, comparar resultados, e discuti-los com os colegas em sala. Com apoio a realidade aumentada poderá projetar o objeto virtual em ambiente real bem como comparar como outros objetos do seu cotidiano. Espera-se que esse trabalho vem trazer mais engajamentos dos alunos em uma atividade de pesquisa e investigação sobre sólidos geométricos e que se possa proporcionar uma experiência educacional significativa. Iniciaremos analisando e definindo alguns elementos da geometria que são de grande importância na construção de figuras espaciais, entendendo que a falta de uma boa fundamentação faz com que o reconhecimento das formas e de suas características e elementos que as compõe torne um empecilho para os alunos de ensino médio na aprendizagem de geometria espacial.

1.1 A Necessidade da Tecnologia para Construir a Visão Geométrica.

A integração de tecnologias no ensino da geometria é essencial para superar desafios históricos relacionados à abstração matemática e à dificuldade de visualização espacial enfrentada por estudantes. A utilização de ferramentas como a Realidade Aumentada (RA) tem demonstrado ser uma abordagem eficaz nesse contexto.

Segundo Dantas (2018), a RA proporciona um recurso pedagógico atrativo, que capta a atenção e a curiosidade dos alunos, promovendo autonomia no aprendizado da geometria espacial. Através de atividades interativas, os estudantes conseguem visualizar sólidos geométricos em 3D, facilitando a compreensão de conceitos abstratos, como áreas e volumes.

Silva (2017) reforça essa perspectiva ao demonstrar que o uso do aplicativo ARSolids, baseado em RA, elevou a interação e o desempenho dos alunos em atividades que envolviam os sólidos de Platão. O experimento realizado revelou uma média de acertos de 82%, destacando a eficácia da tecnologia na melhoria da aprendizagem matemática.

Gomes 2015 também aponta que o uso de tecnologias como a RA contribui para reduzir barreiras na visualização de elementos matemáticos tridimensionais. Em seu trabalho, propôs atividades que envolvem a manipulação virtual de objetos, promovendo um entendimento mais concreto dos conceitos espaciais, como vetores e poliedros. Portanto, a adoção de tecnologias avançadas, como a RA, não apenas moderniza o ensino de matemática, mas também responde à necessidade de contextualizar e dinamizar o processo de aprendizagem, tornando a matemática mais acessível e significativa para os estudantes.

2 CONCEITOS BÁSICOS EM GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo, serão definidos e detalhados elementos essenciais da geometria que servirão de base para a construção de figuras espaciais. A falta de uma fundamentação sólida em geometria muitas vezes dificulta que os alunos do ensino médio reconheçam formas tridimensionais e compreendam suas características e elementos constitutivos, o que impacta o aprendizado de geometria espacial.

Com o objetivo de superar essas dificuldades, abordaremos definições, proposições e teoremas que fundamentam a construção e identificação precisa de sólidos geométricos, utilizando o aplicativo GeoGebra com realidade aumentada como ferramenta didática. Assim como ocorre na geometria plana, na geometria espacial admitimos os conceitos primitivos [1] de ponto, reta, plano e espaço euclidiano como bases do estudo.

Além disso, os cinco axiomas de Euclides — fundamentais para a estrutura da geometria euclidiana — serão apresentados:

1. Por dois pontos diferentes, passa uma e somente uma linha reta.
2. Um segmento de linha reta pode ser estendido indefinidamente em ambas as direções.
3. A partir de um ponto fixo e uma distância fixa, é possível traçar um círculo.
4. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
5. (Axioma das Paralelas): Se uma linha reta, ao cruzar duas outras retas, formar ângulos internos de um lado cuja soma seja menor que dois ângulos retos, então essas duas retas se encontram do lado em que esses ângulos internos são menores que dois ângulos retos.

Desta forma, ao fundamentar a geometria espacial por meio dos conceitos básicos e do uso da tecnologia, é possível facilitar a identificação e construção de sólidos geométricos pelos alunos. Ao longo dessa dissertação pretedemos mostra que a introdução de recursos tecnológicos como o GeoGebra com realidade aumentada proporciona um ensino mais eficaz de geometria espacial, tornando o aprendizado de conceitos geométricos mais acessível e visualmente compreensível.

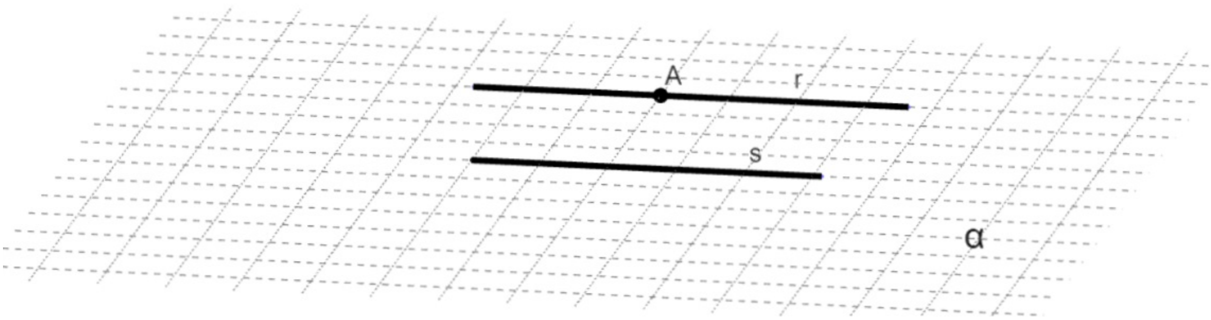
[1] Um conceito primitivo, em matemática , é um termo que não é definido por outros termos mais básicos dentro do sistema. Esses conceitos são aceitos sem definição.

2.1 Paralelismo de retas

Definição 2.1.1. *Duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto comum, mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica em que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas de retas reversas.*

Segundo (CARVALHO, 2005) a partir dessa definição, podemos deduzir a determinação de um plano através de duas retas paralelas r e s. De acordo com a definição, existe um plano que as contém. Para mostrar a unicidade do plano α, consideremos um ponto A qualquer sobre a reta s (Figura 1), que é paralela à reta r.

Figura 1 – Retas paralelas contidas no plano



Fonte: (CARVALHO, 2005)

Teorema 2.1.2. *Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.*

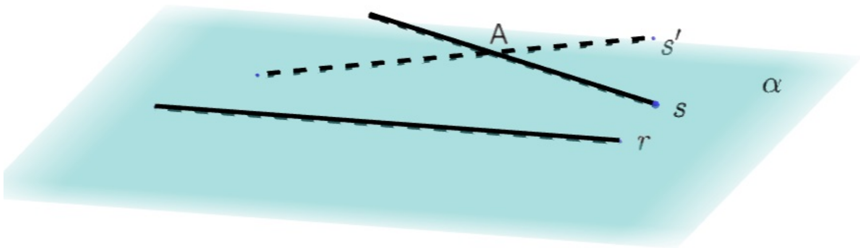
Demonstração. Por hipótese, considera-se a existência de uma reta r no plano α e um ponto A no plano α que não pertence à reta r. A tese a ser provada é que é possível traçar uma única reta s que passe pelo ponto A e seja paralela à reta r.

Para demonstrar o teorema, seguimos os seguintes passos: dados uma reta r e um ponto A fora da reta r, o objetivo é traçar uma reta s passando por A que seja paralela à reta r. Suponha que seja possível traçar duas retas diferentes s e s' passando por A e ambas paralelas à reta r.

Se s e s' são diferentes e ambas paralelas a r, então elas não podem se encontrar, de acordo com a definição de retas paralelas. No entanto, pelo postulado das paralelas de Euclides, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar no máximo uma única reta paralela a ela. Assim, a suposição de que existem duas retas diferentes s e s' paralelas a r é uma contradição.

Portanto, por um ponto A fora de uma reta r, pode-se traçar apenas uma única reta s paralela à reta r. $\square$

Figura 2 – Retas paralelas



Fonte: Produção do próprio autor

2.1.1 Construção de um paralelepípedo

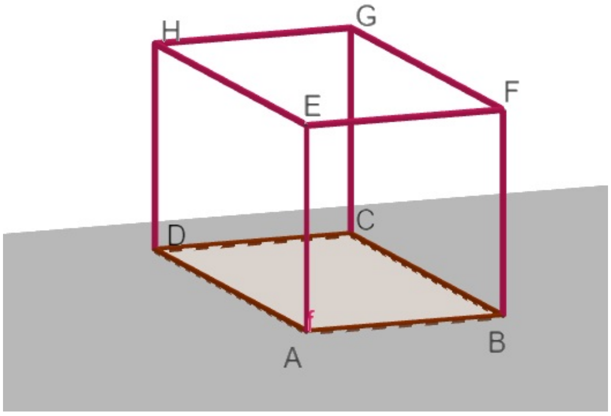
A construção do paralelepípedo $ABCDEFGH$ baseia-se na utilização de três segmentos de reta não coplanares: $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, com origem comum no ponto A. Inicialmente, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ determinam um plano base, onde o ponto E não está contido. Para formar o paralelogramo $ABCD$, traçam-se retas paralelas ao segmento $\overline{AB}$ a partir do ponto D e ao segmento $\overline{AD}$ a partir do ponto B, marcando os pontos C e D como as interseções que completam o contorno da base.

A partir dos vértices da base (A, B, C, D), são traçadas paralelas ao segmento $\overline{AE}$, resultando em segmentos congruentes a $\overline{AE}$ que determinam os pontos superiores E, F, G e H, todos situados no mesmo semiespaço de E. Os pontos superiores são conectados pelos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HE}$, formando o paralelogramo $EFGH$. Este paralelogramo está contido em um plano paralelo ao da base, e suas arestas são paralelas e congruentes às da base $ABCD$, assegurando a simetria do sólido.

Por fim, as arestas laterais $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ conectam os vértices superiores aos inferiores, completando a construção do paralelepípedo. Todas as faces do sólido são paralelogramos, com faces opostas paralelas e congruentes, garantindo que o paralelepípedo esteja inteiramente contido no semiespaço determinado por suas faces.

Essa construção também demonstra a existência de retas reversas. Um exemplo disso são as retas AE e BC, que não pertencem ao mesmo plano, não são paralelas e tampouco se intersectam, caracterizando-se como retas reversas.

Figura 3 – Construção de um paralelepipedo



Fonte: Produção do próprio autor.

De acordo com Carvalho (2005), dadas duas retas concorrentes no espaço, o ângulo entre elas é definido, de acordo com a Geometria Plana, como o menor ângulo formado por essas retas. No caso de retas reversas, o ângulo entre elas é definido como o ângulo formado por duas retas concorrentes que sejam paralelas às retas originais (reversas). Para garantir a consistência dessa definição, é necessário que o ângulo seja independente da escolha das paralelas utilizadas. Esse fato é assegurado pelo teorema apresentado a seguir.

Teorema 2.1.3. *Sejam (r, s) e (r', s') dois pares de retas concorrentes tais que r e r' são paralelas entre si e s e s' também são paralelas entre si. O ângulo formado por r e s é igual ao ângulo formado por r' e s'.*

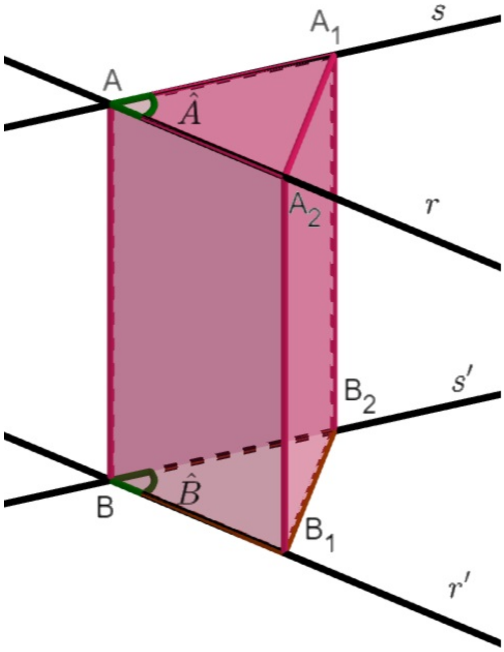
Demosntração: Sejam A o ponto de interseção de r e s e B o ponto de interseção de r' e s' (figura 4). Sobre r e s, tomemos pontos A_1 e A_2 respectivamente e tracemos as paralelas A_1 B_1 e A_2 B_2 à reta AB. Os quadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B e $A_1A_2B_2B_1$ são paralelogramos. Logo, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_2}$ e $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Logo, os triângulos AA_1A_2 e BB_1B_2 são iguais, o que mostra que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são iguais.
Portanto, o ângulo entre as retas r e s é igual ao ângulo entre as retas r' e s'.

Retas do espaço que formam um ângulo reto (ângulo de 90 graus) são chamadas de retas ortogonais. Assim, retas perpendiculares são retas ortogonais que são coplanares (portanto, concorrentes).

2.2 Paralelismo de reta e plano

Compreender como uma reta r e um plano α podem se relacionar no espaço tridimensional é essencial para diversas aplicações em matemática, física, engenharia e outras áreas. As posições relativas entre uma reta e um plano podem ser vistos nos três

Figura 4 – Pares de retas paralelas determinam ângulos iguais



Fonte: Produção do próprio autor.

casos possíveis para a interseção de r e α. Caso a reta r possua dois ou mais pontos de interseção, então ela estará contida em α. Se existir um único ponto comum a r e α, dizemos que r e α são secantes. E quando r e α não possuem pontos em comum, eles são paralelos. Como já sabemos, planos são definidos por meio de pontos e retas, mas é necessario estabelecer critérios capazes de oferecer conclusões a respeito dos planos, baseados em propriedades de suas retas.

Teorema 2.2.1. *Um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se e somente se existe uma reta s paralela a r e contida em α.*

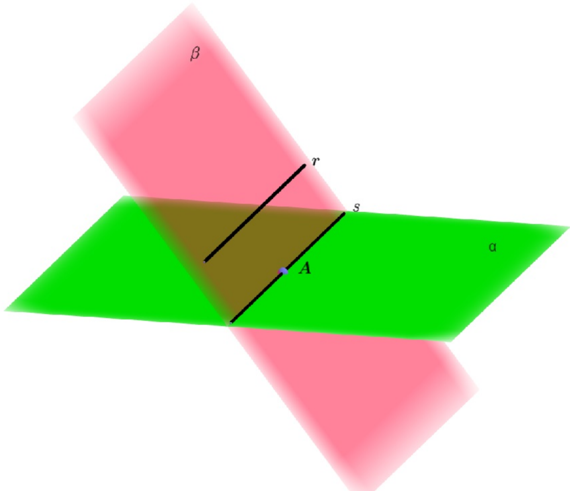
Demonstração: Primeiramente, considere que a reta r seja paralela ao plano α (Figura 5). Seja A um ponto arbitrário pertencente a α e suponha o plano β, que é determinado pela reta r e pelo ponto A. Os planos α e β são distintos, mas compartilham o ponto A. Assim, eles têm em comum uma reta s.

A reta r deve ser paralela à reta s, já que ambas são coplanares e não possuem nenhum ponto de interseção (caso contrário, haveria um ponto comum entre r e α, o que contradiz a premissa de que r é paralela a α). Portanto, existe necessariamente uma reta s em α que é paralela a r.

Para analisar a segunda parte, suponha agora que uma reta s contida em α seja paralela à reta r. Seja β um plano determinado pelas retas r e s. Os planos α e β, por serem distintos, possuem a reta s em comum. Como r pertence ao plano β, caso ela cortasse o plano α, o ponto de interseção deveria pertencer simultaneamente às retas r e s. Contudo, isso é impossível, já que r e s são paralelas. Assim, podemos concluir que r é paralela ao plano α.

Considere agora dois planos α e β, que se intersectam ao longo de uma reta. Se r é uma reta do plano β e é paralela à reta s, que pertence ao plano α, então r é paralela ao plano α, conforme demonstra o teorema previamente apresentado. Esse resultado pode ser utilizado como um recurso para determinar o paralelismo entre retas no espaço.

Figura 5 – Critério de paralelismo entre reta e plano



Fonte: Produção do próprio autor.

2.3 Paralelismo de planos

Para dois planos α e β no espaço, existem três possibilidades distintas:

- **Os planos α e β são coincidentes:** Neste caso, os dois planos coincidem completamente, ou seja, todos os pontos de α são também pontos de β. Eles são, essencialmente, o mesmo plano.

- **Os planos α e β são secantes:** Aqui, os dois planos se intersectam ao longo de uma reta. Esse cenário resulta em uma interseção que não é apenas um ponto, mas uma reta onde todos os pontos pertencem a ambos os planos.

- **Os planos α e β são paralelos:** Se os planos são paralelos, eles não se intersectam em nenhum ponto.

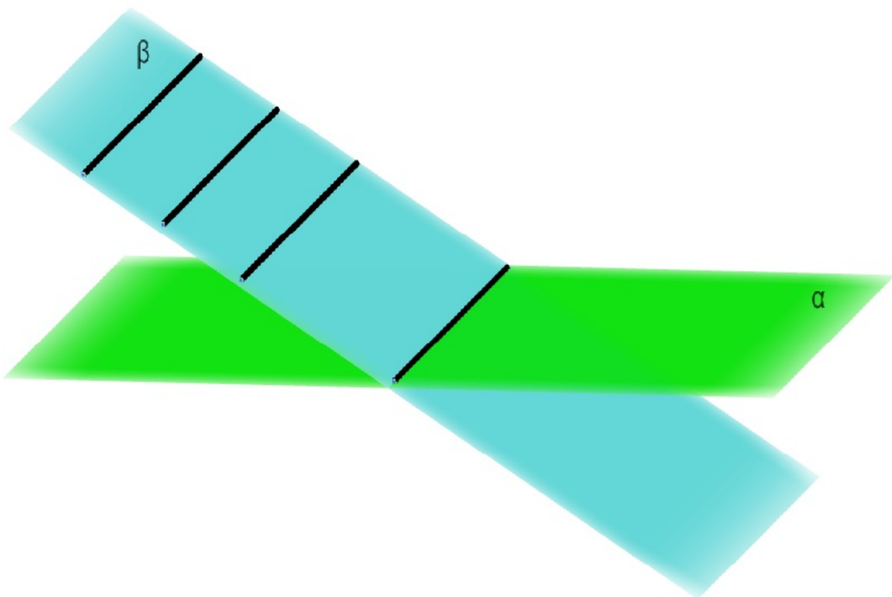
  Nesta seção, será apresentada a construção de planos paralelos, assim como os critérios para identificá-los a partir de suas retas paralela

Teorema 2.3.1. *Se α e β são planos paralelos, então α é paralelo a cada reta de β. Reciprocamente, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas ao plano β, então α e β são paralelos*

Demonstração: Para a primeira parte temos que uma reta r de β não pode ter pontos comuns com α e é, portanto, paralela a α.
Para a segunda parte , tomemos duas retas r e s do plano β, concorrentes em A, ambas paralelas ao plano α (Figura 7). Os planos α e β são distintos; suponhamos que se cortem segundo uma reta t. As retas r e s não cortam α e, portanto, não podem cortar a reta t que está contida em α. Mas isto significa que as retas r e s (que estão no mesmo plano β que t) são ambas paralelas a t, o que contradiz a unicidade da paralela a t passando por A. Logo α e β não possuem uma reta comum, o que mostra que eles são paralelos.

O teorema anterior estabelece que quando dois planos são paralelos, cada reta de um é paralela ao outro. Por outro lado, para demonstrar que dois planos são paralelos basta exibir um par de retas concorrentes de um deles tais que ambas sejam paralelas ao outro plano. É fundamental que as retas sejam efetivamente concorrentes. Um plano pode ser paralelo a uma infinidade de retas paralelas de outro sem que os planos sejam paralelos. De fato, se dois planos são secantes, cada um deles é paralelo a todas as retas do outro que são paralelas à sua reta de interseção (Figura 6).

Figura 6 – Plano alpha é paralelo a uma infinidade de retas de beta



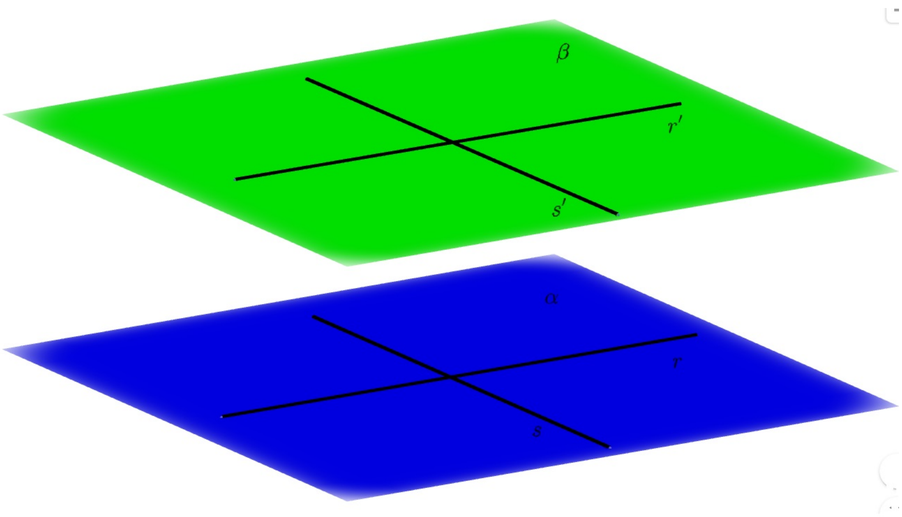
Fonte: Produção do próprio autor.

Com o auxílio do teorema anterior estamos aptos, agora, a construir planos paralelos.

Teorema 2.3.2. *Por todo ponto A exterior a um plano dado α passa exatamente um plano β paralelo a α.*

Demonstração: Para demonstrar a existência do plano, tomemos duas retas concorrentes r e s contidas em α (Figura 7). Sejam r' e s' as paralelas a r e s traçadas por A e seja β o plano definido por r' e s'. As retas r' e s' são paralelas a α e portanto o plano β é paralelo a α.

Figura 7 – Construção de planos paralelos



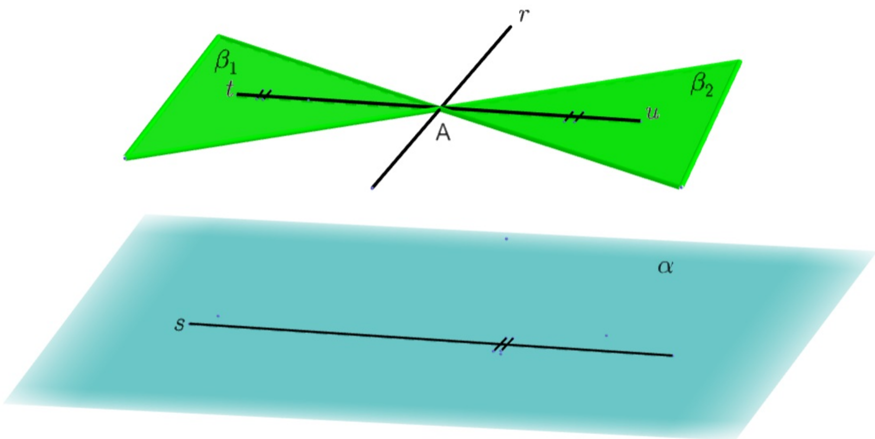
Fonte: (CARVALHO, 2005) pág.31

Para mostrar que o plano é único, suponhamos que existam dois planos β_1 e β_2 paralelos a α, ambos passando por A (Figura 8).
Como os planos são distintos e ambos passam por A, sua interseção é uma reta r, paralela a α. Tomamos uma reta s em α, não paralela a r, que determina com A um plano γ. A interseção de γ e β_1 é uma reta t, que é necessariamente paralela a s (já que t e s são coplanares e estão contidas em planos paralelos). Observe que, por ser paralela a s, t é necessariamente distinta de r. Analogamente, a interseção de γ e β_2 é uma reta u, também paralela a s. Como t e u passam ambas por A, elas são necessariamente coincidentes. Logo β_1 e β_2 contêm, além da reta r de interseção, uma segunda reta comum $t = u$. Logo,β_1 e β_2 são necessariamente coincidentes. Portanto, o plano paralelo a α por A é único.

□

No teorema anterior, construímos o (único) plano paralelo a α por A através de duas retas concorrentes quaisquer, ambas paralelas a α. Como as retas escolhidas foram completamente arbitrárias, o argumento do teorema anterior mostra que o plano β, paralelo a α passando por A, contém todas as paralelas a α conduzidas por A. Na verdade o plano paralelo β é a união de todas estas retas. Uma outra forma de fazer a mesma afirmação é dizer que uma reta não pode ser paralela a um plano α e secante a um plano β paralelo a α. Mais precisamente, temos o teorema a seguir:

Figura 8 – Unicidade do plano



Fonte: Produzido pelo próprio autor.

Teorema 2.3.3. *Se um plano α corta um plano β segundo uma reta r, ele corta um plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r.*

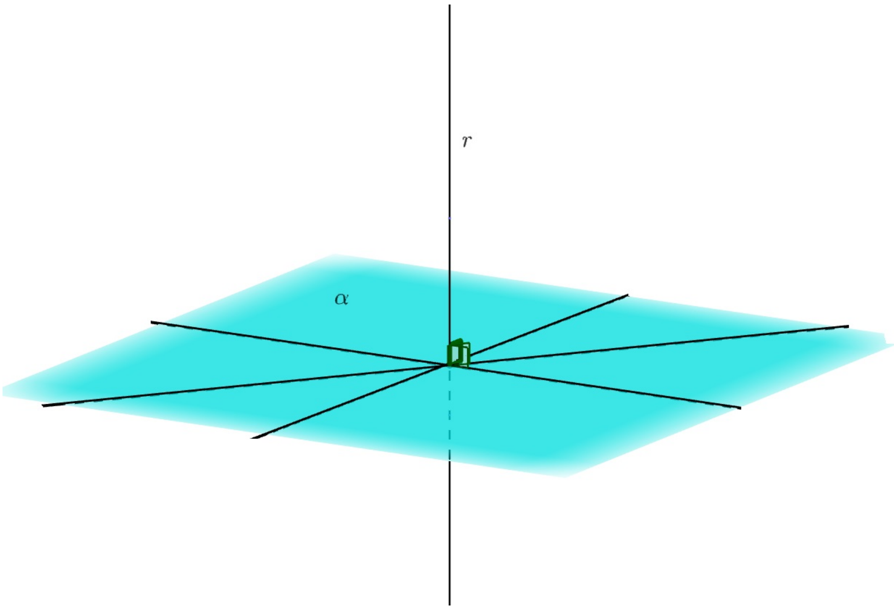
Demonstração: Seja β' um plano paralelo a β. O plano α é distinto de β' (por cortar um plano paralelo a β') e não é paralelo a β', já que por um ponto qualquer de r passa um único plano β paralelo a β'. Logo, α corta β' segundo uma reta s. As retas r e s são coplanares e não têm pontos comuns, por estarem em planos paralelos. Logo, s é paralela a r.

2.4 Perpendicularismo de reta e plano

Definição 2.4.1. *Diz-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta contida no plano (Figura 9).*

Observe que para r ser perpendicular a α basta, na verdade, que ela seja perpendicular às retas de α que passam pelo seu ponto A de interseção com α; se isto ocorrer, ela será necessariamente ortogonal a qualquer outra reta de α, já que toda reta de α possui uma paralela passando por A. Este tipo de argumento pode ser utilizado para obter algumas relações importantes entre paralelismo e perpendicularismo.

Figura 9 – Uma reta perpendicular a um plano



Fonte: Produção do próprio autor.

(1) Se a reta r e o plano α são perpendiculares, toda reta r' paralela a r é perpendicular a α; todo plano α' paralelo a α é perpendicular a r.

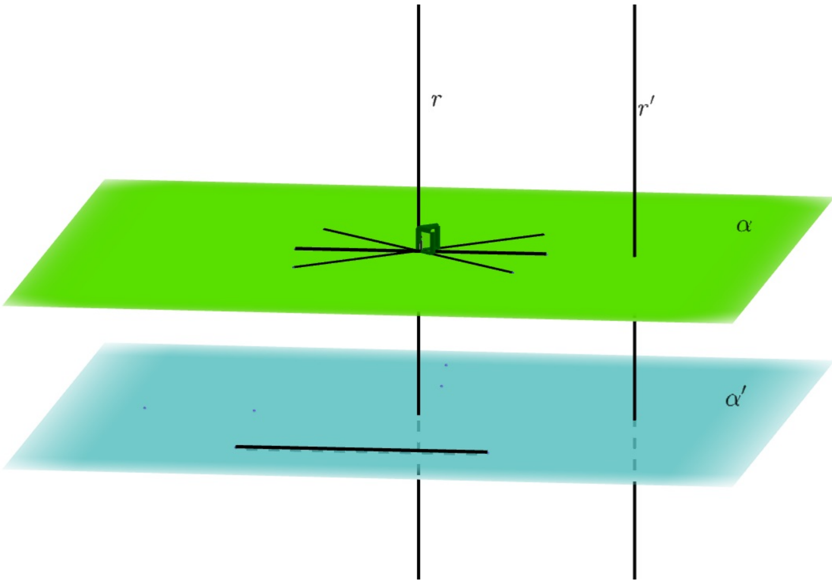
A afirmativa 1 é verdadeira, pois, se r é paralelo a r', todos angulo de r com α serão conguente ao angulos formados por r' e α. Como os angulos formado por r e α são angulos retos, temos então que os angulos formados por r' e α tambem serão angulos retos, logo r' e α também serão perpendiculares. Da segunda parte da afirmação 1 temos que, se um plano α perpendicular a uma reta r, qualquer plano α' paralelo ao plano α também será perpendicular a r. Isso acontece porque os planos paralelos têm a mesma orientação no espaço, e se um deles é perpendicular a uma reta, o outro também será.

(2) Duas retas distintas r e r' perpendiculares a um mesmo plano são paralelas; dois planos distintos α e β perpendiculares a uma mesma reta r são paralelos (figura 10).

Para demonstrar as afirmativas em (2) precisamos usar a tridimensionalidade do espaço, o que faz com essa demonstração seja mais sutil.

Suponhamos que r e r' sejam ambas perpendiculares ao plano α e que r e r' não sejam paralelas (figura 11). Pelo ponto de interseção de r' e α traçamos a reta r”, paralela a r. Como r' não é paralela a r, as retas r' e r” são distintas e determinam um plano β, que corta α segundo a reta s.
Como r' e r” são ambas perpendiculares a α, resulta que r' e r” são ambas perpendiculares a s. Mas isto significa que, no plano β, existem duas perpendiculares à reta s passando pelo mesmo ponto, o que é uma contradição. Logo, se as retas r e r' são ambas perpendiculares a α, então elas são necessariamente paralelas entre si. A demonstração da outra afirmativa

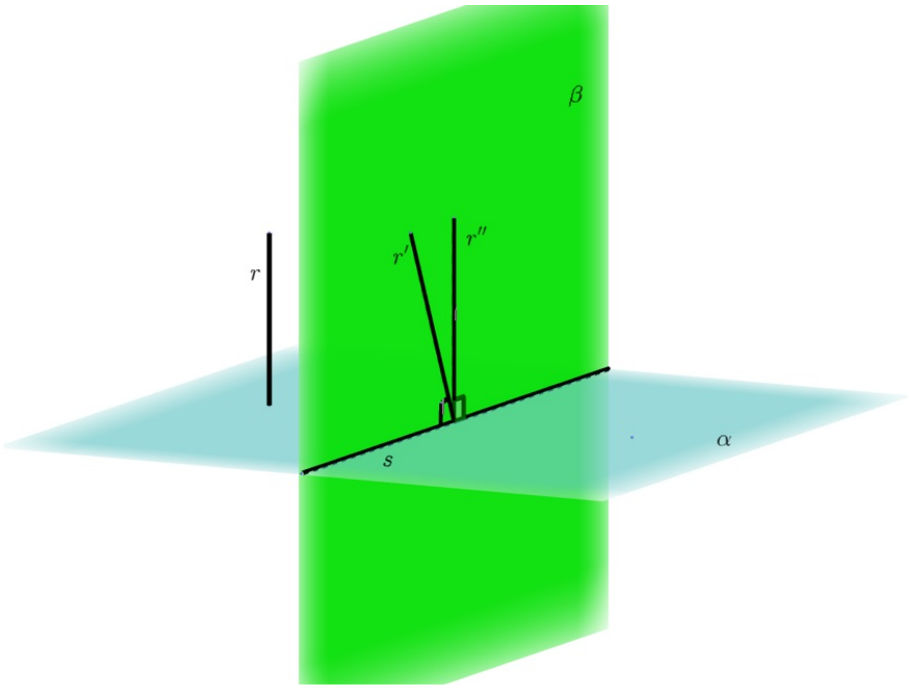
Figura 10 – Retas paralelas perpendiculares a planos paralelos



Fonte: Produção do próprio autor.

em (2) é análoga.

Figura 11 – Retas distintas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas



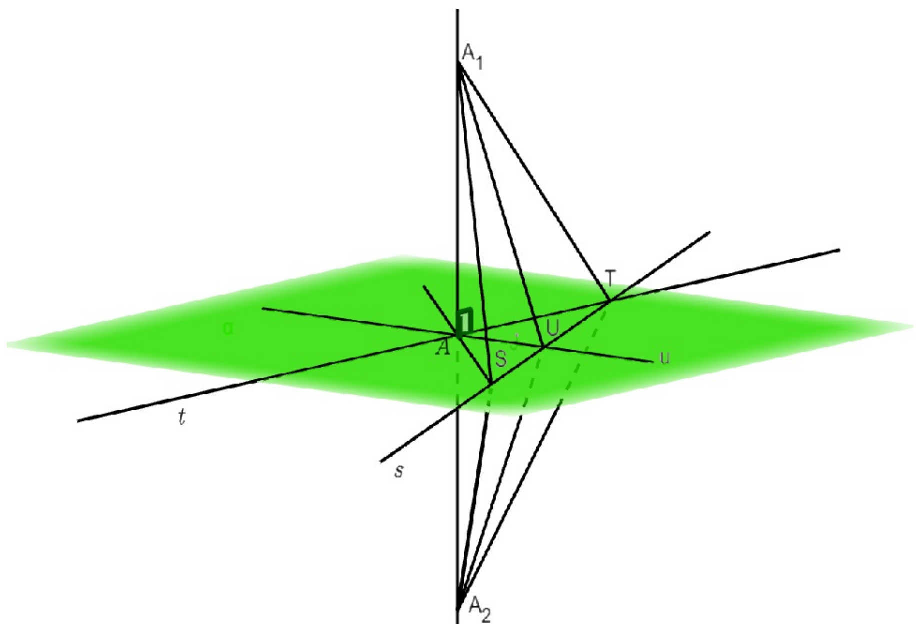
Fonte: Produção do próprio autor.

Na definição 2.4.1,ficou definido reta perpendicula a um plano e em seguida foi enunciado algumas propriedade recorrentes dessa definição, no entanto, ainda não foi demonstrado se de fato existe reta perpendicular a um plano e em quais condições isso poderia acontecer. Nesse próximo teorema, demonstraremos que, para que uma reta seja perpendicular a um plano, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes no plano. Esse resultado simplificara de forma significativa a construção de um plano perpendicular a uma reta, bastando somente escolher duas retas no plano que sejam perpendiculares à reta dada. Após a demonstração deste teorema, veremos como essa abordagem torna a tarefa muito mais acessível.

Teorema 2.4.2. *Se r é ortogonal a um par de retas concorrentes de α então r é perpendicular a α.*

Demonstração. Sejam s e t duas retas de α que se encontram em A, ambas ortogonais a r. Sem perda de generalidade, podemos supor que r passa por A (senão tomamos uma paralela a r passando por A) (Figura 12). Vamos mostrar que toda reta u de α passando por A é perpendicular a r. Se u coincide com s ou t, então u é certamente perpendicular a r. Senão, tomemos uma reta v de α tal que seu ponto de interseção U com u esteja entre os pontos de interseção S e T com s e t. Em cada semiplano determinado por a tomemos pontos A_1 e A_2 tais que $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$

Figura 12 – Condição para perpendicularismo de reta e plano



Fonte: Produção do próprio autor.

Os triângulos retângulos A_1AS e A_2AS são certamente iguais, já que $\overline{A_1A} = \overline{A_2A}$ e o cateto $\overline{AS}$ é comum. Logo, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$. Analogamente, os triângulos A_1AT e A_2AT são iguais, daí resultando $\overline{A_1T} = \overline{A_2T}$. Examinando, então, os triângulos A_1ST e A_2ST, observamos que o lado $\overline{ST}$ é comum e os demais lados são respectivamente iguais. Portanto, estes triângulos são iguais. Mas da igualdade de A_1ST e A_2ST resulta também a igualdade de A_1SU e A_2SU ($\overline{SU}$ é comum, $\overline{A_1S} = \overline{A_2S}$ e os ângulos $\widehat{A_1SU}$ e $\widehat{A_2SU}$ são iguais).

Logo, $\overline{A_1U} = \overline{A_2U}$ e, daí, os triângulos A_1AU e A_2AU são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais. Mas isto acarreta a igualdade dos ângulos $\widehat{A_1AU}$ e $\widehat{A_2AU}$. Como A_1 , A e A_2 são colineares, cada um daqueles ângulos é necessariamente reto. Ou seja, u é perpendicular a r. Assim, provamos que toda reta de α passando por A é perpendicular a r e, portanto, que r e α são perpendiculares. $\square$

3 Alguns sólidos simples

Neste capítulo, abordaremos alguns dos sólidos geométricos mais simples, como prismas e pirâmides, que são fundamentais para o estudo da geometria espacial. A compreensão dessas figuras é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Inicialmente, serão apresentadas as definições desses sólidos, seguidas por suas construções, preparando o terreno para as aplicações práticas discutidas posteriormente no estudo didático da sequência com o uso do Geogebra e da realidade aumentada.

3.1 Prismas

De acordo com (IEZZI; DOLCE; PAIVA, 1998), o prisma é descrito como um poliedro cujas bases são polígonos congruentes situados em planos paralelos, e as faces laterais são paralelogramos. O prisma pode ser classificado em reto (quando as arestas laterais são perpendiculares às bases) ou oblíquo (quando as arestas laterais não são perpendiculares às bases).

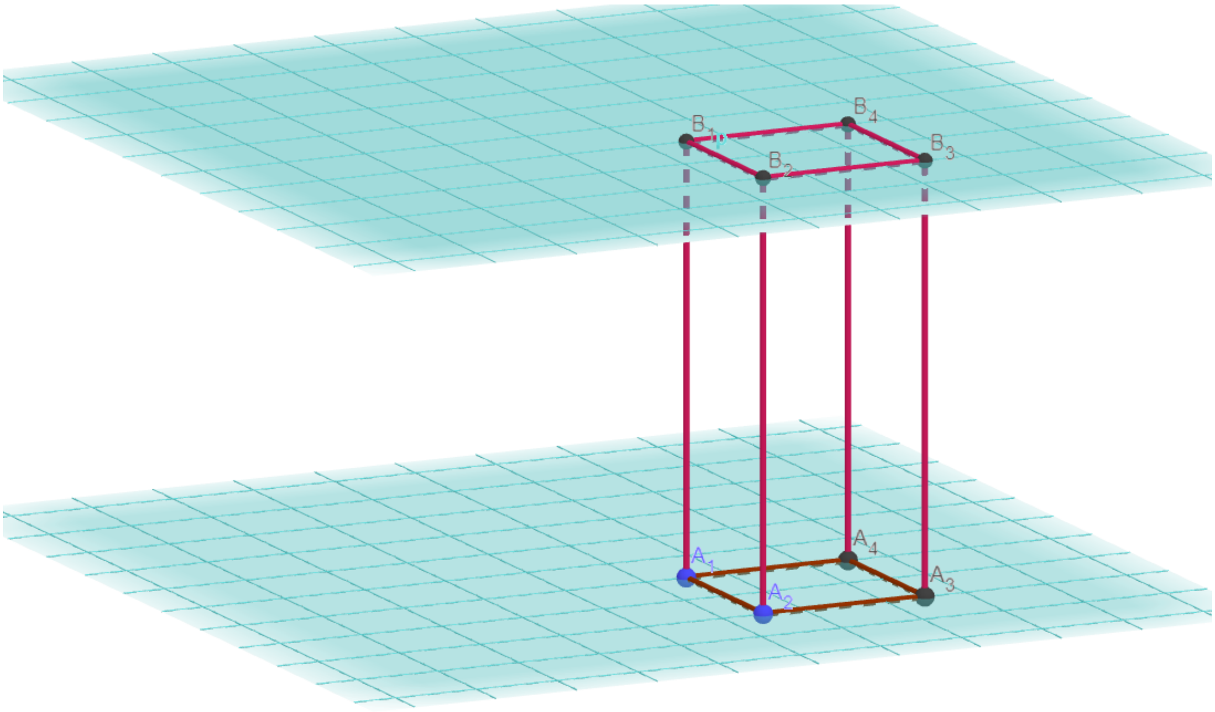
3.1.1 Construção de um prisma

De acordo com Carvalho (2005), considere um polígono $A_1A_2 \dots A_n$ situado em um plano α (Figura 13). A partir de um ponto B_1, fora desse plano, traça-se um plano β paralelo a α. Para os vértices $A_2, A_3, \dots, A_n$, são traçadas retas paralelas a $\overline{A_1B_1}$, que interceptam o plano β nos pontos $B_2, B_3, \dots, B_n$. Quando dois segmentos consecutivos, como $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$, são analisados, observa-se que o quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ é plano, pois os lados $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos. Além disso, os demais lados também são paralelos, visto que estão contidos em planos paralelos.

Assim, o quadrilátero é um paralelogramo. Esses paralelogramos, juntamente com os polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, formam um prisma. As arestas laterais, $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, possuem a mesma medida, e as faces laterais formadas por arestas consecutivas são paralelogramos. As bases $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ são compostas por lados correspondentes iguais e paralelos, garantindo que as faces laterais sejam paralelogramos.

Essa definição é apresentada na obra *Introdução à geometria espacial*, onde o autor explora de forma detalhada a estrutura e as propriedades dos prismas (CARVALHO, 2005).

Figura 13 – Prisma

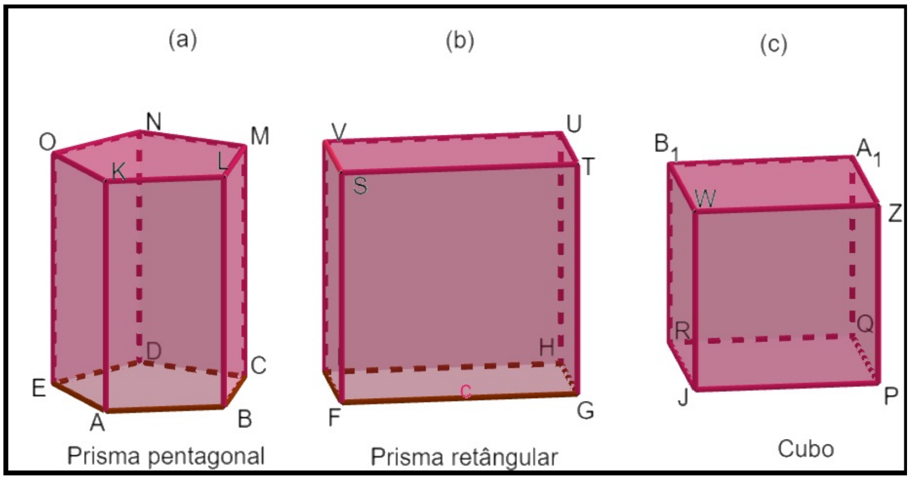


Fonte: Produção do próprio autor.

3.1.2 Prisma reto

Um prisma será denominado prisma reto quando suas arestas laterais forem perpendiculares a base (Figura 14 (b)). Assim em uma prisma reto as faces laterais serão retângulos. Há diversos casos particulares importantes. Quando a base é um polígono regular obtemos um prisma regular. Quando a base é um retângulo obtemos um paralelepípedo retângulo (ou bloco retangular), no qual cada face é um retângulo (assim, um paralelepípedo retângulo é um prisma reto onde qualquer face serve como base). No caso do cubo, ele pode ser denominado como hexágono regular ou paralepipedo retângulo, na qual cada face é um quadrado. (Figura 14 (c)).
Definimos como a altura do prisma a distância entre os planos paralelos de suas bases, em particular,quando o prisma é reto , ou seja, possui arestas laterais perpendiculares aos planos de suas bases, a medida da altura coincidira com as medidas de suas arestas laterais.

Figura 14 – Prismas retos



Fonte: Produção do próprio autor.

3.2 Pirâmides

Segundo (IEZZI; DOLCE; PAIVA, 1998) uma pirâmide é definida como um sólido geométrico que possui uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um único ponto chamado de vértice. O livro ainda descreve as principais características das pirâmides, enfatizando que a base pode ser qualquer polígono (triângulo, quadrado, pentágono, etc.), e o número de faces laterais será sempre igual ao número de lados da base.

3.2.1 Construção de um Pirâmide

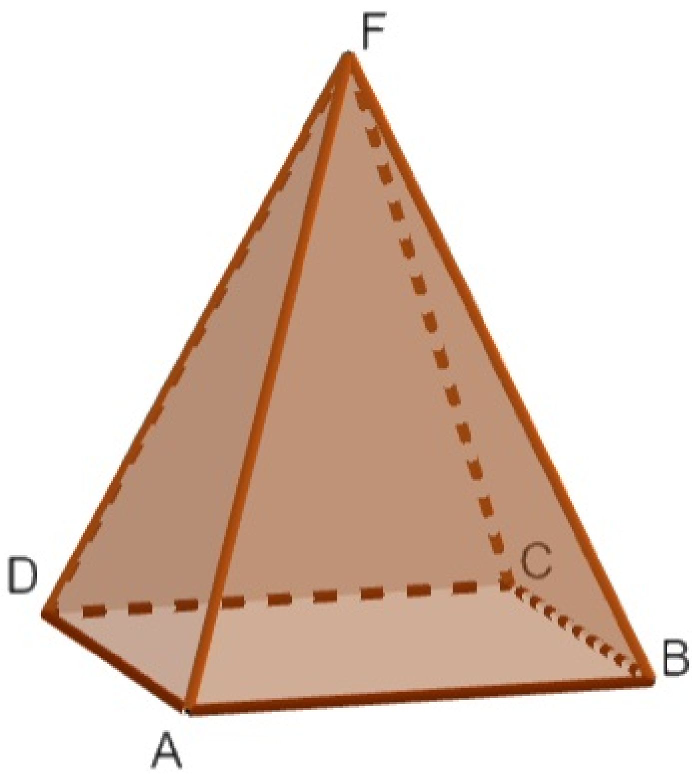
Conforme Carvalho (2005), dado um polígono plano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e um ponto V localizado fora do plano onde está o polígono, é possível construir segmentos como $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \ldots, \overline{VA_n}$. Cada um desses segmentos, em conjunto com dois vértices consecutivos do polígono $A_1A_2 \ldots A_n$, forma triângulos que, junto com o próprio polígono, delimitam uma região do espaço. Essa região é o que se chama *pirâmide*, sendo $A_1A_2 \ldots A_n$ a base e V o vértice.

A pirâmide compreende o espaço delimitado pelos segmentos de reta que unem V aos vértices do polígono-base. Os segmentos $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \ldots, \overline{VA_n}$ são as chamadas arestas laterais, e os triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \ldots, VA_nA_1$ constituem as faces laterais da pirâmide. Pirâmides de base triangular ou de outras formas poligonais apresentam a característica de que qualquer uma de suas faces pode ser interpretada como base, dependendo da aplicação ou análise.

Carvalho (2005) ressalta que uma pirâmide é um caso especial de poliedro. De maneira geral, um poliedro é definido como uma região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos planos, denominados faces, que atendem as condições:

- a interseção de dois polígonos é vazia, é um vértice comum a ambos ou é um lado (ou aresta) compartilhado pelos dois;
- cada lado de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Figura 15 – Pirâmide



Fonte: Produção do próprio autor.

15

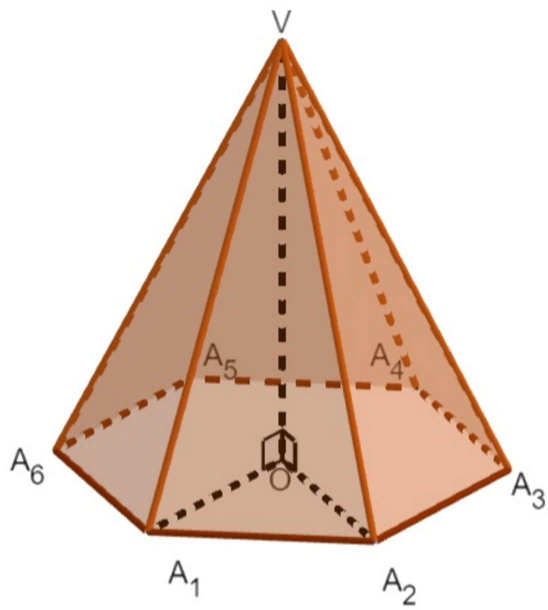
3.2.2 Pirâmide regulares

Uma pirâmide regular é um tipo específico de pirâmide caracterizada por uma base que é um polígono regular e por ter todas as faces laterais iguais, formando triângulos isósceles (Figura 16). As características principais de uma pirâmide regular são:

- **Base:** A base é um polígono regular, ou seja, todos os lados e ângulos da base são iguais. Exemplos de bases regulares incluem triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos regulares, etc.
- **Vértice:** O vértice da pirâmide está alinhado diretamente acima do centro da base, em uma linha perpendicular ao plano da base.

- **Faces Laterais:** As faces laterais da pirâmide são triângulos isósceles iguais, cada um com dois lados de comprimento igual (os lados que se encontram no vértice) e um lado que é um dos lados do polígono da base.

Figura 16 – Pirâmide regular



Fonte: Produção do próprio autor.

3.2.3 Tetraedro regular

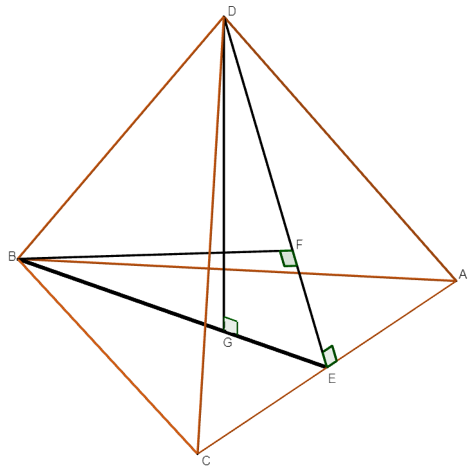
Considere uma pirâmide triangular regular com base ABC e vértice V. Um tetraedro regular pode ser construído posicionando o vértice V sobre a perpendicular ao plano da base, passando pelo centro O. Para que o tetraedro seja regular, é necessário que as arestas laterais VA, VB e VC tenham o mesmo comprimento das arestas da base AB, AC e BC. Dessa forma, todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros (CARVALHO, 2005).

Se traçarmos a perpendicular ao plano VBC a partir do ponto A, que intersecta esse plano no ponto P, os triângulos retângulos APB, APV e APC serão congruentes, pois compartilham o lado AP e possuem hipotenusas iguais. Assim, as medidas PB, PC e PV também são iguais, o que posiciona P como o centro do triângulo equilátero VBC. Isso garante que a pirâmide seja regular, independentemente da face escolhida como base.

Como ilustrado na Figura 17, as retas VO e AP, ambas perpendiculares às faces do tetraedro, estão em um mesmo plano, denominado α. Esse plano, definido pela reta VO e pelo vértice A, corta o plano da base ABC ao longo da reta AO. Sabendo que ABC é um triângulo equilátero com O como centro, a reta AO intercepta o lado BC em seu ponto médio M. Dessa maneira, a altura VM da face VBC está no plano α, assim como o ponto P. Isso implica que a reta VP pertence ao plano α, demonstrando que VP e AO se cruzam.

Além disso, como todos os pontos na reta VO são equidistantes de A, B e C, e os pontos na reta AP são equidistantes de V, B e C, o ponto de interseção entre essas retas é equidistante dos quatro vértices do tetraedro. Esse ponto, chamado de centro do tetraedro, confirma que as perpendiculares traçadas de cada vértice à face oposta se encontram em O (CARVALHO, 2005).

Figura 17 – Tetraedro regular



Fonte: Produção do próprio autor.

4 Volume de sólidos

Durante a vida e no cotidiano, as pessoas aprendem, de forma intuitiva, que o volume de um sólido é a medida do espaço que ele ocupa, sendo expresso a partir de uma determinada unidade de medida.

Nesta seção, abordaremos o conceito de volume de maneira mais rigorosa, utilizando conceitos e definições extraídos do livro Geometria, da coleção PROFMAT (NETO, 2013)

4.1 Sólido geométrico

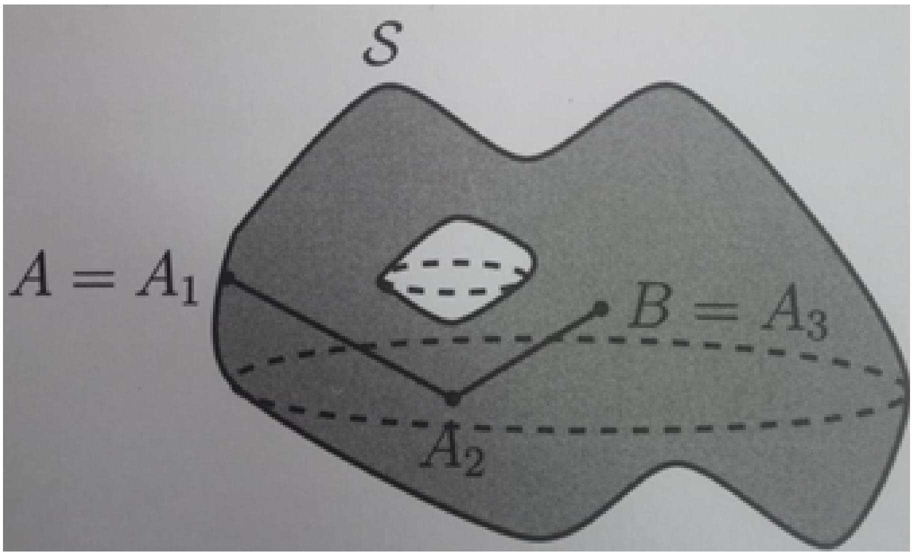
Definição 4.1.1. *Um sólido é um conjunto S de pontos do espaço satisfazendo as seguintes condições:*

(a) S é fechado, limitado e tem interior não vazio.[1]

(b) Para todos $A, B \in S$, existe uma poligonal $A_1, A_2 \ldots, A_k$ ligando $A = A_1$ a $B = A_k$ e contida em $Int(S) \cup \{A, B\}$.[2]

Pelo item (b) da definição a cima temos que intuitivamente todo sólido possui um único pedaço (Figura 18)

Figura 18 – Volume de sólidos



Fonte: Produção do próprio autor.

[1] No contexto de sólidos geométricos, isso significa que o conjunto inclui tanto os pontos interiores(interior não vazio) quanto os pontos da superfície (fronteira) do sólido.

[2] Int(S) refere-se ao interior do conjunto S.

A partir da definição de sólido pode-se verificar que poliedros convexos e bolas fechadas. assim como cilindros, cones e sólidos de revolução são facialmente identificados como sólidos.
Diante da definição já exposta precisa-se buscar uma condição que seja suficiente para mensurar o volume de um sólido, a qual consiste em uma primeira formulação do princípio de Cavalieri.

Definição 4.1.2. *Princípio de cavalieri I*
Um sólido S é mensuravel se $S \cap \alpha$ for um conjunto de área mensurável, para todo plano α que intersecte $Int(S)$.(NETO, 2013)

Segundo Neto (2013), da definição acima pode-se concluir que bolas fechadas e poliedros convexos são sólidos mensurveis. Por essa definição ainda é possivel mostrar que sólidos de revolução também são sólidos mensuráveis, desde que que sejam gerados pela rotação, em torno do eixo das abscissas, de gráficos $f : (a, b) \to R$ sendo duas vezes derivavel e com derivada da segunda $f" : (a, b) \to R$ contínua.
A cada sólido mensurável S é possivel associa a um número real positivo $V(S)$ denominado volume de S, de tal maneira que as condições abaixo sejam satisfeitas:

1. Se S é um cubo de aresta 1 então $V(S) = 1$.

2. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $Int(S_1) \cap Int(S_2) = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$.

3. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \leq V(S_2)$.

4. (Princípio de Cavalieri II). Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis e α é um plano tal que, para todo plano α' paralelo ao plano α, tenhamos $A(S_1 \cap \alpha') = A(S_2 \cap \alpha')$ então $V(S_1) = V(S_2)$.[3] [4]

5. Se S_1 é um solido mensurável, e S_2 puder ser obtido de S_1 por meio de uma translação ao longo de um vetor, uma rotação ao longo de um eixo ou uma reflexão ao longo de um plano, então S_2 também é mensurável e $V(S_1) = V(S_2)$.

Consideraremos os itens de 1 a 5 como postulados de medição de volume, estes postulados nos possibilitará calcular facillmento o volume de todos os sólidos já mencionados até aqui.

[3] $S_1 \cap \alpha'$: Representa a interseção do sólido S_1 com o plano α', resultando em uma figura plana.
[4] $A(S_1 \cap \alpha')$: É a área da figura plana obtida pela interseção de S_1 com o plano α'.

A proposição a seguir será o resultado central do que é estudado nessa seção.

Proposição 4.1. *Seja P um paralelepipedo de base B e altura h. Então:*

$$V(P) = A(B)h.$$

Demonstração A prova dessa proposição será feita em quatro etapas

1. P é uma paralelepípedo reto retângulo, cujas arestas tem comprimento $a, b, c \in \mathbb{N}$: particionando P em abc cubos de aresta 1, segue dos postulados 1. e 2. de medição de volumes que

$$V(P) = abc = A(B)h.$$

2. P é um paralelepípedo reto retângulo cujas aresta tem comprimento $a, b, c \in \mathbb{Q}$: sejam $a = \frac{m}{q}$, $b = \frac{n}{q}$ e $c = \frac{p}{q}$, com $m, n, q \in \mathbb{N}$. Empilhemos q^3 cópias de P, de modo a obter um paralelepípedo reto Q de aresta m, n e p. O item (1), juntamente com os postulados 1. e 2. de medição de volume, fornece

$$q^3V(P) = V(Q) = mnp$$

e daí,

$$V(P) = \frac{mnq}{q^3} = A(B)h.$$

3. P é um paralelepípedo reto retângulo cujas arestas tem comprimentos $a, b, c \in \mathbb{R}$: sejam $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ sequências de números racionais, tais que $a_n < a$, $b_n < b$ e $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $c_n \to c$ quando $n \to +\infty$. Seja, ainda, P_n um paralelepípedo reto retângulo contido em P e com arestas de comprimento a_n, b_n e c_n. O item 2, juntamente com o postulado 3. de medição de volume, fornece, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$V(P) \geq V(P_n) = a_nb_nc_n.$$

Tendo em vista a veracidade da desigualdade apresentada para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $a_nb_nc_n$ implicará em abc fizermos $n \to +\infty$, assim nessa desigualdade obteremos $V(P) \geq abc$.

De modo semelhante tomando as sequências $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ de números racionais de forma que $a_n > a$, $b_n > b$, $C_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to a$,$b_n \to b$, $c_n \to c$ quando $n \to \infty$, concluimos de maneira análoga que $V(P) \geq abc$. Portanto concluimos que, $V(P) = abc = A(B)h$.

4. P é um paralelepipedo qualquer: Seja P' um paralelepípedo reto retângulo de mesma altura h que P, cuja base seja um retangulo B' com área igual a base B do paralelepioedo P e que tenhamos B e B' contidos em um mesmo semiespaço determinado por α.
   Se α' ´é um plano paralelo a α, a igualdade das duas alturas dos dois paralelelpípedo garante que $P \cap \alpha \neq \emptyset$ se, e só se, $\mathcal{P}' \cap \alpha' \neq \emptyset$. Diante de tal ocorrência, as interseções serão quadriláteros respectivamentes congruentes a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, sendo assim, tem área igual.Portanto, pelo item 3 e juntamente com o Princípio de Cavalieri II, pode-se garantir que

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}') = \mathcal{A}(\mathcal{B}')h = \mathcal{A}(\mathcal{B})h.$$

Corolário 4.1.3. *Seja $\mathcal{P}$ um prisma de base $\mathcal{B}$ e altura h, então*

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{A}(\mathcal{B})h.$$

Demonstração:

Seja $\mathcal{P}'$ um paralelepipedo e $\mathcal{P}$ um prisma,ambos com a mesma altura h e a área base do paralelogramo $\mathcal{B}'$ igual a base $\mathcal{B}$ do prisma, tal que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ estejam contidos em um mesmo plano α, com $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ contidos em um mesmo semiespaço, dos que α determina. Tomemos um plano α' paralelo ao plano α . Como a altura de $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}$ é a mesma, teremos $\mathcal{P} \cap \alpha' = \emptyset$ se, e só se $\mathcal{P}' \cap \alpha' = \emptyset$. Caso haja interseção, essas interseções serão respectivamentes congruentes a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, sendo assim, terão áreas iguais. Portanto, segue da proposição 4.1.3 e pelo princípio de Cavalieri que

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}') = \mathcal{A}(\mathcal{B}')h = \mathcal{A}(\mathcal{B})h.$$

Corolário 4.1.4. *Seja $\mathcal{C}$ um cilindro sólido de revolução, de raio R e altura h, então*

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \pi R^2 h.$$

Demonstração:

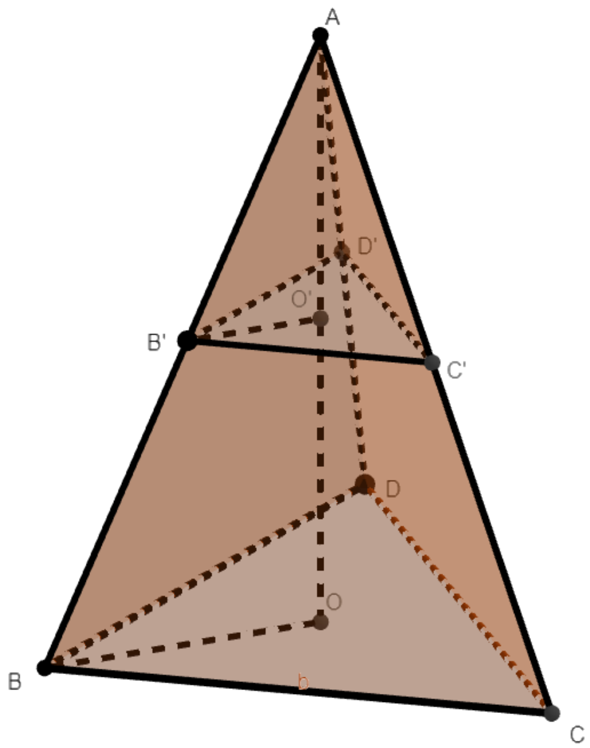
Lema 4.1.5. *1. Seja $\mathcal{T}$ um tetraedro de base $\mathcal{B}$ e altura h e α um plano paralelo ao plano $\mathcal{B}$, situado à distância h' do vértice de $\mathcal{T}$, com $h' < h$. Então α intersecta $\mathcal{T}$ em um triângulo $\mathcal{B}'$ semelhante a $\mathcal{B}$ e tal que*

$$\frac{\mathcal{A}(\mathcal{B}')}{\mathcal{A}(\mathcal{B})} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

2. *Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ tetraedros de alturas iguais e bases respectivamente $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Se $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$, então $\mathcal{V}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{V}(\mathcal{T}_2)$*

O lema acima será utilizado em resultados posteriores desta dissertação para fundamentar cálculos e análises envolvendo sólidos geométricos. Sua demonstração pode ser encontrada no livro 'Geometria' de Antônio Caminha Muniz Neto (NETO, 2013, p. 341).

Figura 19 – Seccionado um tetraedro por um plano paralelo à base



Fonte: Produção do próprio autor.

Proposição 4.1.6. *Se $\mathcal{T}$ é um tetraedro de base $\mathcal{B}$ e altura h, então*

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \tfrac{1}{3}\mathcal{A}(\mathcal{B})h.$$

Demonstração

Seja $\mathcal{T}$ um tetraedro de vértice $UVWX$ e UVW sua base $\mathcal{B}$. Construa os pontos Y e Z de tal forma que $UVXY$ e $UWZX$ sejam paralelogramos.Como UY é paralelo a WZ e como medida igual VX , segue que $UWZY$ também é um paralelogramo e que $UVWYXZ$ é um prisma triangular de altura h e bases UVW e XYZ sendo v o seu volume. Temos que:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(UVW).h = \mathcal{A}(\mathcal{B}).h.$$

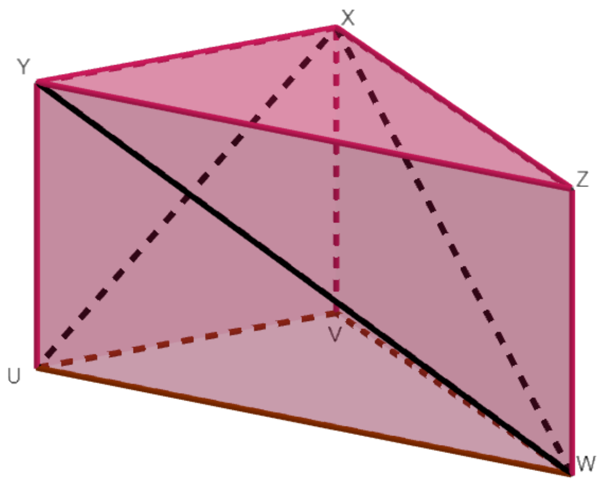
Particionando o prisma em tetraedros $WXYZ$, $UVWX$ e $UWXY$. Devemos mostrar que o volume dos três tetraedros são iguais. Com base no que foi feito anteriormente juntamente com o postulado 2 de medição de volumes, teremos que

$$3\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{V}(UVWX) + \mathcal{V}(WXYZ) + \mathcal{V}(UWXY) = \mathcal{V} = \mathcal{A}(\mathcal{B}).h.$$

Complementando, observemos que:

- Do paralelogramo $UVXY$, temos que $\mathcal{A}(UVX) = \mathcal{A}(UXY)$ Os tetraedros $UVWX$ de base UVX e $UWXY$ de base UXY tem a mesma altura, traçada a partir de W, pelo item(b) do lema 4.1.5, temos garantido que $\mathcal{V}(UVWX) = \mathcal{V}(UWXY)$
- Do paralelogramo $UWZY$, temos que $\mathcal{A}(UWY) = \mathcal{A}(WYZ)$. Como os tetraedros $UWZY$ e $WXYZ$ tem áreas das bases iguais e alturas também iguais a partir de X, novamente pelo lema 4.1.5 pode-se concluir que $\mathcal{V}(UWXY) = \mathcal{V}(WXYZ)$. Portanto, $\mathcal{V}(UVWX) = \mathcal{V}(UWXY) = \mathcal{V}(WXYZ)$.

Figura 20 – Particionado um prisma triangular em três tetraedros



Fonte: Produção do próprio autor.

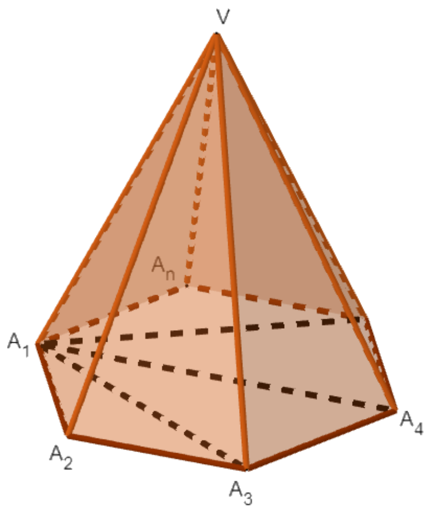
Corolário 4.1.7. *Se $\mathcal{P}$ é uma pirâmide de base $\mathcal{B}$ e altura h, então*

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \tfrac{1}{3}\mathcal{A}(\mathcal{B})h$$

Demonstração:

Sejam V o vértice da pirâmide e $\mathcal{B} = A_1A_2A_3...A_k$ a base dessa pirâmide. Para $2 \geq k \geq n-1$, e sejam $\mathcal{T}_k$ o tetraedro $VA_1A_kA_{k+1}$ e $\mathcal{B}_k = A_1A_kA_{k+1}$ (Figura 21)

Figura 21 – Pirâmide particionada em tetraedros



Fonte: Produção do próprio autor.

Se h é a altura da pirâmide $\mathcal{P}$, então h também será a altura do tetraedro $\mathcal{T}_k$, para $2 \geq i \geq n-1$. Sendo assim, pelo postulado 2. de medidas de volumes e pela proposição 4.1.6 ,temos que

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{T}_2) + ... + \mathcal{V}(\mathcal{T}_{n-1}) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)h + ... + \frac{1}{3}\mathcal{A}(\mathcal{B}_{n-1})h =$$
$$\frac{1}{3}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)h + ... + \mathcal{A}(\mathcal{B}_{n-1}))h = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\mathcal{B})h$$

5 Sequência didática para construção e análise de sólidos geométricos utilizando o GeoGebra 3D com realidade aumentada

A sequência didática apresentada neste capítulo pode ser desenvolvida em duplas, considerando que nem todo aluno possua dispositivo eletrônico ou que os dispositivos disponíveis não possuam a configuração necessária para o funcionamento do aplicativo GeoGebra. Trabalhar em dupla também proporciona uma melhor interação entre os alunos, incentivando a troca de experiências e conhecimentos. Esta sequência foi aplicada a alunos da segunda série do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio e Fundamental "Professora Regina Banhos Paixão", localizada no município de Linhares-ES.

O desenvolvimento da sequência ocorrerá em cinco aulas de 100 minutos cada. Na Aula 1, será apresentado o GeoGebra, onde os alunos farão o download do aplicativo em seus dispositivos móveis e criarão contas no site do GeoGebra para salvar os projetos. Na Aula 2, serão abordados problemas envolvendo cubos, com análise de elementos como arestas, faces, vértices, diagonais e o cálculo de volume e planificação. As Aulas 3 e 4 abordarão problemas envolvendo prismas e pirâmides, respectivamente.

A primeira figura a ser trabalhada na sequência didática será o cubo, figura conhecida dos alunos. Abordaremos nessa construção, sua planificação, diagonais, área de superfície, planos paralelos, planos perpendiculares e o calculo de seu volume. Analisaremos o volume de outros prismas tendo como ponto de parttida o volume de um cubo. Deve-se considerar que nos anos de pandemia da covid-19 houve uma perda significativa no ensino e que devido a isso, a defasagem do ensino que já existia foi agravada. No primeiro momento será realizada uma revisão de sobre área de figuras planas tendo observado que a maioria dos alunos tem muita dificuldade em calcular, ou até mesmo de reconhecer formas mais simples.

Os alunos deverão ter baixado o app no celular no play store ou utilizando o QR code disponibilizado pelo professor, bem como criar uma conta no Site do Geogebra com fim de salvar os projetos desenvolvidos.

Figura 22 – Qr code de instalação do geogebra

Fonte: Produção do próprio autor.

Objetivos:

- Compreender os conceitos de área e volume de prismas e pirâmides.
- Aplicar conhecimentos matemáticos para calcular a área e o volume dessas figuras.
- Utilizar ferramentas de realidade aumentada para visualizar e manipular prismas e pirâmides.
- Desenvolver habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

Descritores da BNCC:

- EF07MA19: Resolver e elaborar problemas que envolvam as unidades usuais de medida de comprimento, área, volume e massa.
- EF07MA20: Reconhecer e resolver problemas que envolvam o cálculo da área e do volume de prismas e pirâmides.
- EF09MA19: Aplicar o conhecimento sobre figuras geométricas espaciais para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos.

5.1 Etapa 1: Avaliação Diagnóstica

Para iniciar a sequência didática foi aplicado uma avaliação diagnóstica sobre noções de geometria plana e espacial com objetivo de se verificar em que ponto está o conhecimento prévio dos alunos necessários para o melhor desenvolvimentos das atividades a serem trabalhadas. Essa etapa é de suma importância, pois nela é possível verificar o nível de conhecimento de cada aluno, adequando as atividades de acordo com as necessidades apresentadas.

Duração: 1 aula (50 minutos).

5.1.1 Revisão de Geometria Plana

Diante dos resultados apresentados na avaliação diagnóstica, verificou-se a necessidade de uma revisão dos conceitos básicos de geometria plana (pontos, linhas, ângulos, polígonos). As aulas foram desenvolvidas de forma expositiva e dialogada com resoluções de exemplos de exercícios

- Recursos: Quadro branco, data show, lista de exercícios.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

5.1.2 Exercícios Práticos de Geometria Plana

Ao fim da aula de revisão, onde foi revisto de forma breve alguns tópicos de geometria plana foi proposto uma lista de exercícios práticos para reforço a revisão. Durante a realização dos exercícios os alunos poderam sentar em duplas ou trios o que propicinou para eles um momento de interação e análise dos resultados obtidos.

- Recursos: Caderno de exercícios.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

5.2 Etapa 2: Conceituação de Prismas e Pirâmides

5.2.1 Aula Expositiva sobre Prismas e Pirâmides

Os conceitos de prismas e pirâmides é apresentado explorando o geogebra para uma melhor visualização dos elementos que compõem cada figura apresentada, objetivo dessa aula é que aluno possa definir prismas e pirâmide de maneira formal mas com a visualização utilizando recursos tecnológicos, o que facilita a compreensão dos conceitos, bem como reconhecimento dos elementos necessários para resolução dos exercícios (faces, arestas, vértices, altura, apótema e diagonais).

- Recursos: Quadro branco, data show, modelos físicos.
- Duração: 1 aula (50 minutos).
- Conteúdo: Características de prismas e pirâmides (faces, arestas, vértices, altura, apótema, diagonais).

5.2.2 Introdução à Realidade Aumentada

Apresentado aos alunos o que é realidade aumentada e sua utilização nos dias de hoje e como essa tecnologia contribuirá no aprendizado de geometria espacial. É mostrado a eles realidade aumentada como um dos recursos do Geogebra e como utilizar essa tecnologia para compreensão de geometria espacial.

Santos (2015) destaca as dificuldades enfrentadas por alunos na visualização de formas tridimensionais em geometria espacial:

> A visualização dos objetos tridimensionais em geometria, representadas na lousa, não é uma tarefa fácil, pois exige dos discentes uma percepção espacial bem apurada. O aluno simplesmente não consegue conjecturar o que está por trás do objeto, na parte não visualizada por ele, algumas vezes representada pelas linhas pontilhadas (SANTOS, 2015, p. 12).

As imagens mostram cubos construídos no geogebra e com realidade aumentada inserido em um ambiente real, podendo o aluno interagir com o objeto criado.

> O uso de tecnologias digitais no ensino de matemática pode permitir a criação de ambientes de aprendizagem mais atraentes e interativos, o que pode contribuir para o aumento da motivação dos alunos e, consequentemente, para o seu desempenho na disciplina. No entanto, é importante destacar que o uso dessas tecnologias deve estar sempre vinculado à compreensão dos conceitos matemáticos, para evitar a simples repetição de procedimentos sem a compreensão do significado desses procedimentos ((MALTEMPI; BICUDO; BORBA, 2012) p. 126)

- Recursos: Smartphones/tablets com aplicativos de RA.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

5.2.3 Explorando Prismas e Pirâmides com RA

É pedido aos alunos que em duplas desenvolva a construção de quatro figuras espaciais seguindo o passo a passo apresentado na seção 5.5:

1. Um cubo com medida de aresta controlada por controle deslizante

Figura 23 – Cubo construido pelos alunos

Fonte: Produção do próprio autor.

2. Um prisma de base triangular com medidas de arestas e altura controlada por controle deslizante
3. Prisma de base hexagonal com dimensões controladas por controle deslizante
4. Pirâmide de base quadrada com suas dimensões controladas por controle deslizante.
   - Recursos: Smartphones/tablets, aplicativos de RA. • Duração: 2 aulas (50 minutos cada).

- Recursos: Smartphones/tablets, aplicativos de RA.
- 2 aulas (50 minutos cada).

5.2.4 Exploração de Prismas e Pirâmides no Geogebra

Com os objetos construídos na etapa anterior é pedido aos alunos que explore os prismas e pirâmides. Respondendo aos questionamentos, preenchendo a tabela 1 Tendo respondido as perguntas abaixo e preenchido a tabela é pedido aos alunos que verifique a validade da relação de Euler $V - A + F = 2$. para cada figura construida.

Qual a figura poligonal da base da base?

Qual a figura poligonal das laterais?

Quantas arestas tem ?

Quantos vértices tem?

Quantas faces?

- Recursos: Smartphones/tablets com Geogebra.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

Tabela 1 – Número de elementos de um sólido

Poligono da base	**Vértice**	**Arestas**	**faces**

Fonte: Produção do próprio autor.

5.2.5 Discussão e Exemplos de Prismas e Pirâmides no Cotidiano

É pedido aos alunos que apresente alguns exemplos do cotidiano que tenha a forma das figuras construídas. Durante a aula o professor também apresenta algumas imagens conhecidas pelos estudantes para que eles com auxilio da realidade aumentada compare os objetos físicos com objetos virtuais. É proposto algumas questões relacionadas às imagens apresentadas.

Questão 1.

Uma caixa d'água cúbica localizada no bairro Linhares 5 (Figura 24) tem medidas internas de 5 metros de aresta. Sabe-se que o consumo de água no bairro é de 10.000 litros por hora.

A . Determine a capacidade total da caixa d'água em litros.

B . Calcule por quantas horas essa caixa d'água seria capaz de atender ao consumo do bairro se estivesse completamente cheia, sem ser reabastecida.

C . Se a caixa estiver com apenas 40% de sua capacidade total, por quanto tempo ela poderá atender ao consumo do bairro?

Dados adicionais:

1 metro cúbico equivale a 1.000 litros.

Questão 2

Um container adaptado como escritório tem as seguintes dimensões internas: 6 metros de comprimento, 2,5 metros de largura e 2,5 metros de altura. Ele será utilizado por três pessoas. Sabendo que o local tem incidência diária de luz solar, é necessário calcular a quantidade ideal de BTUs para o ar-condicionado que será instalado, utilizando as informações a seguir:

Para cada pessoa adicional no ambiente (excluindo a primeira), adicione $800BTUs$. Perguntas:

- Para calcular os $BTUs$ necessários por área (em mš), utilize $800BTUs$ por metro quadrado devido à incidência de sol.

- Para cada pessoa adicional no ambiente (excluindo a primeira), adicione $800 BTUs$.

A Calcule a área total do piso do container.

B Determine a quantidade de $BTUs$ necessária para refrigerar o ambiente considerando o tamanho do cômodo e o número de pessoas presentes.

C Qual seria a capacidade mínima (em $BTUs$) que o arcondicionado deve ter para climatizar adequadamente o espaço?

A Figura 24 mostra a caixa d'água do bairro Linhres 5 e um container no bairro São José.

Figura 24 – Exemplos de prismas retângulares

Fonte: Produção do próprio autor.

A Figura 25 apresenta uma placa de banco 24 horas no Bairro Linhres 5 em forma de prisma triangular,

Figura 25 – Exemplo de prisma triangular

Fonte: Produção do próprio autor.

Uma sinalização de "Banco 24 Horas"tem a forma de um prisma triangular (Figura 25) regular com altura de 1,8 metros e arestas da base medindo 30 centímetros.

1. Calcule a área da base do prisma triangular.
   - Dica: Use a fórmula da área do triângulo equilátero:
     $$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2,$$
     onde a é a medida do lado do triângulo.
2. Determine o volume da sinalização, considerando que o volume de um prisma é dado por:
   $$V = \text{Área da base} \cdot \text{Altura}.$$
3. Se toda a superfície lateral e as duas bases do prisma forem pintadas com uma tinta especial, calcule a área total a ser pintada.
   - Dica: A área lateral é a soma das áreas de três retângulos, cada um com altura de 1,8 metros e base de 30 centímetros.

A Figura 26 apresenta o sistema de captação de água de chuva da "EEEM EMIR DE MACEDO GOMES"localizada no bairro Shell em forma de pirâmide invertida.

Figura 26 – Exemplo de Pirâmide

Fonte: Produção do próprio autor.

A escola Emir de Macedo Gomes, localizada na cidade de Linhares, possui um sistema de coleta de água composto por 20 pirâmides invertidas. Cada pirâmide é quadrangular, com as seguintes características:**Apótema da pirâmide**: 3 metros **Aresta lateral (medida externa)**: 5 metros

1. Calcule a área da base de uma única pirâmide.
   - Dica: Para calcular a área da base de um quadrado, use a fórmula:
   $$A_{\text{base}} = a^2,$$
   onde a é a medida do lado da base.
2. Determine o volume de uma única pirâmide.
   - Dica: A fórmula do volume de uma pirâmide é:
   $$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h,$$
   onde h é a altura da pirâmide. Para encontrar h, use o apótema e a aresta lateral.
3. Calcule o volume total de água que todas as 20 pirâmides podem armazenar.
   - Dica: Multiplique o volume de uma pirâmide pelo número total de pirâmides.
4. Se a capacidade de um reservatório cilíndrico for de 100.000 litros, quantas pirâmides seriam necessárias para alcançar essa capacidade de armazenamento?

– Dica: Lembre-se de converter o volume de água de metros cúbicos para litros, sabendo que 1 metro cúbico equivale a 1.000 litros.

- Recursos: Quadro branco,notbook, data show.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

5.3 Etapa 3: Introdução aos Conceitos de Área e Volume

5.3.1 Aula Expositiva sobre Área e Volume

Introdução aos conceitos de área e volume de prismas e pirâmide abordando o principio de Cavalieri. Os conceitos e teoremas foram trabalhados com utilização do Geogebra de forma que as informações fossem transmitidas sem prejuízos a compreensão e se adequando a uma linguagem acessível aos alunos. Durante a aula foi necessário relembrar formas de se calcular a área de polígono e aplicação do teorema de Pitágoras para determinação de altura,medida de apótema e arestas de prismas e pirâmides.

Figura 27 – Utilizando geogebra para ensinar volume de pirâmide

Fonte: Produção do próprio autor.

- Recursos: Quadro branco, data show, notbook.
- Duração: 1 aula (50 minutos).
- Conteúdo: Fórmulas de área e volume de prismas e pirâmides.

5.3.2 Discussão e Exemplos Práticos de Cálculo de Área e Volume

Após a aula expositiva sobre área e volume foi proposto alguns exemplos de problemas práticos onde os alunos com suporte do Geogebra poderam visualizar, e juntos com o professor e colegas analisar e discutir possíveis soluções para os problemas propostos, o que contribuiu para consolidação do conhecimento adquirido.

- Recursos: Data show, smartphone, calculadora.
- Duração: 1 aula (50 minutos).

5.4 Etapa 4: Cálculo de Área e Volume com RA

5.4.1 Problemas Práticos com RA

Sendo já discutido e resolvido exemplos de questões de área e volume de prismas e pirâmides é proposto aos alunos que em duplas resolvam uma lista de exercícios com o objetivo de verificar o aprendizado. Nessas atividades é permitido o uso do celular para resolução dos problemas propostos. A lista de exercícios consta no apêndice A

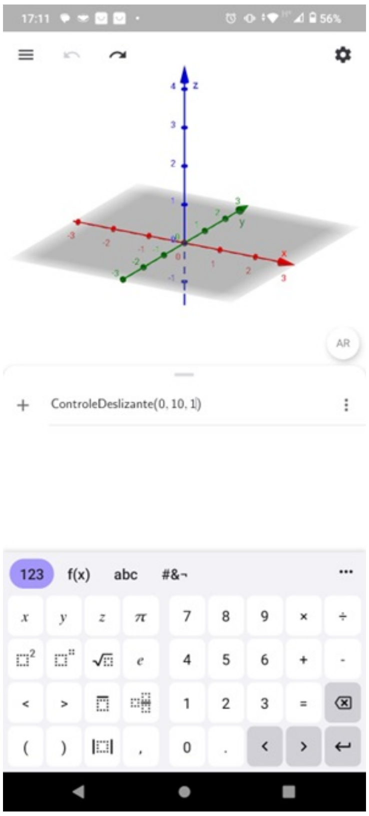
- Recursos: Smartphones/tablets, lista de exercícios.
- Duração: 2 aulas (50 minutos cada).

5.5 Construção de alguns sólido geométricos

5.5.1 Construção de um cubo como medidas controladas por controles deslizantes

1. Criar um controle deslizante para a variável a. Na caixa entrada digite a letra a em seguida enter, será criado um controle deslizante para variavel a. Em configurações defina o valor mínimo e máximo de a, defina o valor do incremento, que é de quanto em quanto o valor de a vai variar. Com esse controle deslizante criado será possivel controlar a medida das aresta do cubo.

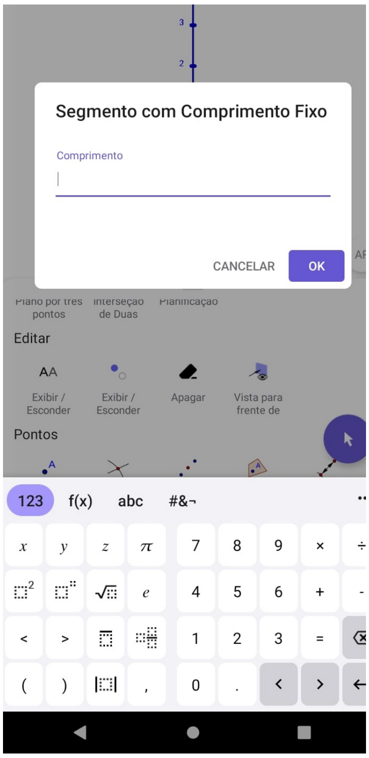
Figura 28 – Controle deslizante



Fonte: Produção do próprio autor.

2. Criar um seguimento com comprimento fixo com valor do comprimento igual a, que será a medida da aresta do cubo.Em ferramentas clique em "segmento de comprimento fixo",em seguida defina um ponto no plano, abrirá uma caixa de diálogo em que será digitado a letra a, que será a medida da aresta do cubo.

Figura 29 – Segmento de comprimento fixo

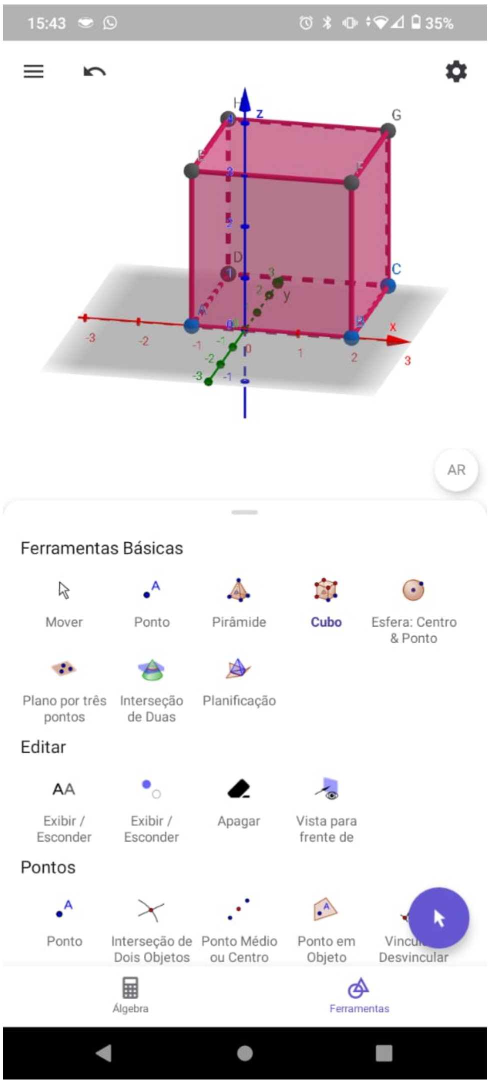


Fonte: Produção do próprio autor.

3. Construir um cubo com aresta medindo a. Em ferramentas, clicar na figura de cubo que aparece na tela, em seguida clicar em dois pontos do plano, nesse caso, nos pontos definidos do passo anterior quando se criou o segmento com comprimento fixo. Concluído os quatro passos, um cubo aparecera na tela com medida da aresta sendo controlada pelo controle deslizante criado em passos anteriores. Nesse momento poderá questionado ao aluno, quais objetos tem uma forma cubica em seu dia a dia e quais são as principais caraterísticas do cubo. Diante da figura construída estimular os alunos a investigar situações envolvendo teorema de Pitágoras, quantidade de vértice, quantidade de arestas, quantidades de faces, área das faces e somatório das medidas das arestas.

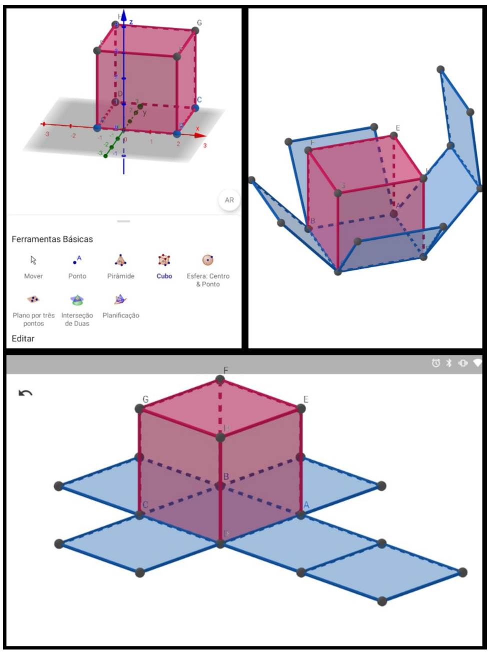
4. Determinar uma planificação do cubo Em ferramentas, clicar no ícone planificação e em seguida clicar em cima do cubo. Na parte algébrica se criara um controle deslizante para a planificação com o objetivo de abrir e fechar o cubo. Nesse passo será apresentado uma das planificações possiveis de um cubo, poderá ser questionado a existencias de outras possiveis planificações e quais são elas.

Figura 30 – Criando cubo



Fonte: Produção do próprio autor.

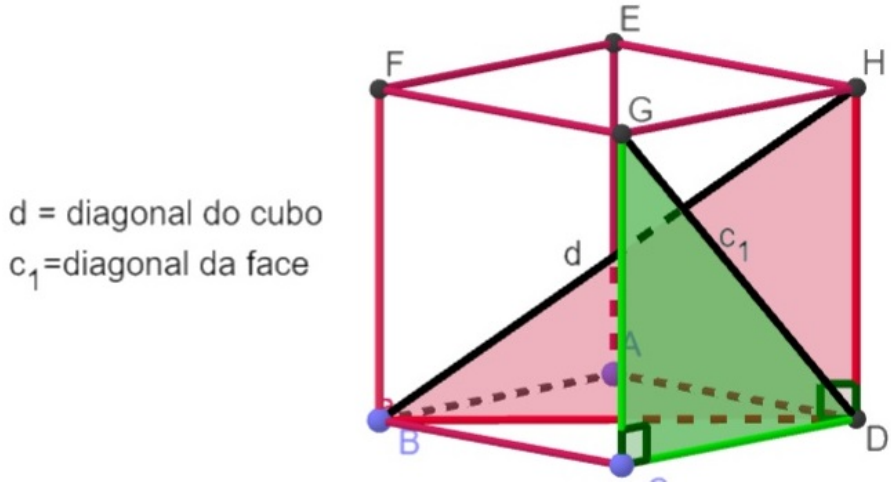
Figura 31 – Planificação do cubo



Fonte: Produção do próprio autor.

5. Determinar diagonal da face e diagonal do cubo. Nessa etapa já é posssivel enxergar o aparecimento de triângulos retângulos no cubo e possiveis aplicações do teorema de Pitágoras pra resolução de problemas provaveis que poderam surgir.

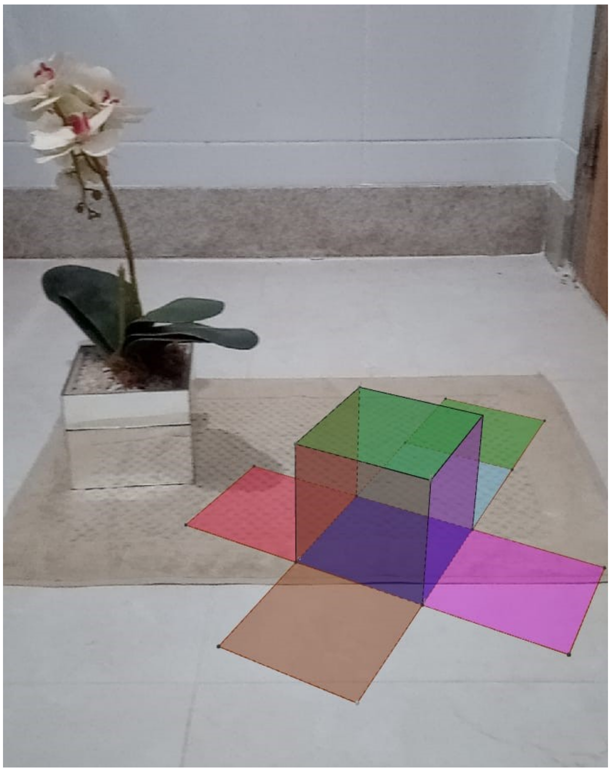
Figura 32 – Diagonal da face e diagonal do cubo



Fonte: Produção do próprio autor.

6. Utilizando a função de realidade aumentada projete o cubo em ambiente real comparado-o com um cubo real.Planifique o cubo. ‘A imagem projetada apresenta uma das planificações do cubos.

Figura 33 – Cubo virtual projetado em ambiente real



Fonte: Produção do próprio autor.

Quantas planificações possiveis além da que foi apresentada possui o cubo? Quais são elas?

7. Utilizando o geogebra, calcule o volume do cubo. Preencha a tabela variando as medidas das arestas. Analise o que acontece com as medidas da área da superficie

Tabela 2 – Análise de medidas do cubo

Aresta	**Área lateral**	**Área total**	**volume**

Fonte: Produção do próprio autor.

do cubo e com a medida do volume quando variamos a medida da aresta movendo o controlhe deslizante.

Nesse primeiro processo de construção o aluno foi avaliado por meio de observação e uma atividade relacinada à figura do cubo, onde se avalia a capacidade de se reconhecer elementos que compõem o cubo, calculo de volume, de área de superficie e a problematização em torno desses itens.

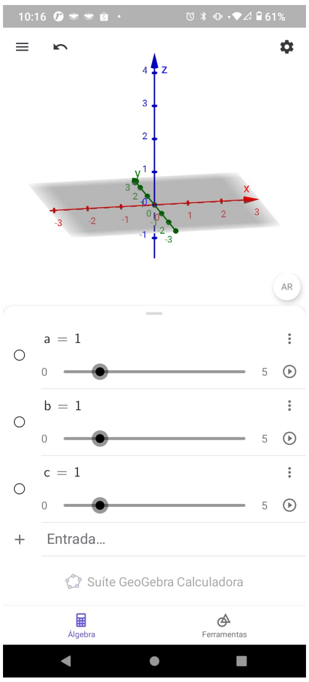
5.5.2 Construção de um paralelepipedo retângulo com suas dimensões controladas por controles deslizantes.

O objetivo dessa construção é analisar como se comporta as medidas de volume e área da superficie do paralelepipedo a media que variamos as medidas de suas dimensões assim como ajuda-lo a compriender de uma for mais ludica os problemas a serem abordados posteriormente.

1. Criar controle deslizante para as variaveis a, b e c.

Na caixa de de entrada digitar a em seguida enter, b em seguida enter e c em sguida enter.

Figura 34 – Controles deslizantes

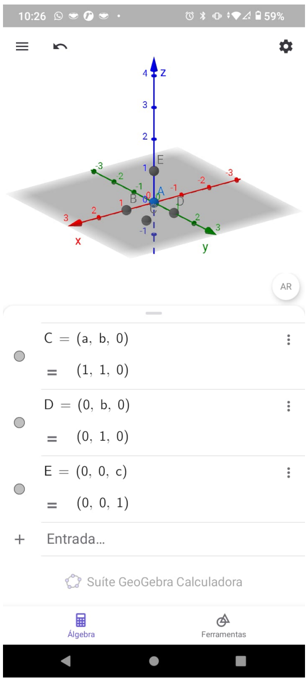


Fonte: Produção do próprio autor.

2. Criar coordenadas dos vértices do paralelepipedo.

Na caixa de entrada digitar coordenadas $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(a, b, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$. O app criará os pontos A, B, C, D e E.

Figura 35 – Pontos do Paralelepipedo



.

Fonte: Produção do próprio autor.

3. Criar o Paralelepipedo.

Na caixa de entrada digitar "Prisma(A,B,C,D,E)". O app criara um prisma com os vértices construidos no segundo passo.

4 Definir as medidas das aresta do paralelepipe.

Em ferramentas clicar em "distância, comprimento"em seguida clicar nos ponto A e B, B e C e por fim B e F. As medidas das arestas aparecerão junto as sua arestas correspondentes.

5. Planificar o Paralelepipedo.

Em ferramentas clique em "Planificação"e em seguida clique na figura, o app dará uma planificação para o paralelepipedo retângulo.

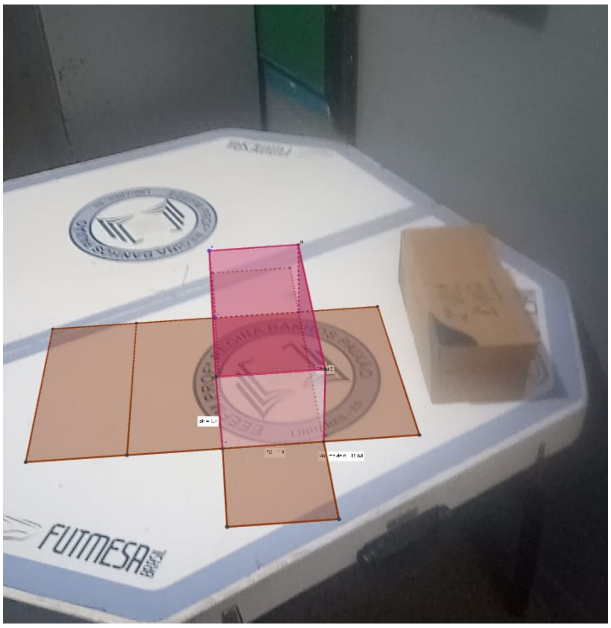
..

6. Utilizar realidade aumentada.

Na tela de visualização clicar em "AR"em seguida aponta a camera do celular para a superficie a ser projetado o paralelepipedo, clicando na tela o objeto virtual será projetado na superfície podendo ser comparado a outros objetos reais (Figura 36).

Após todo o processo de construção o aluno poderá salvar o objeto construido em sua pasta on line no site do Geogebra.

Figura 36 – Paralelpipedo virtual projetado em ambiente real



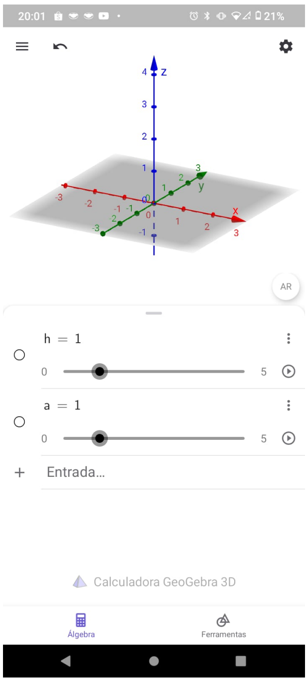
Fonte: Proprio autor

5.5.3 Construção de um Prisma de base hexagonal regular com suas dimensões controladas por controles deslizantes

.

1. Criar controles deslizantes para altura (h) do prisma e para medidada da aresta da base (a).

Figura 37 – Controle deslizante

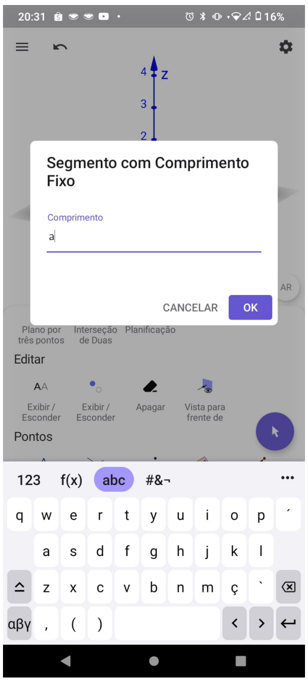


.

Fonte: Produção do próprio autor.

2. Em ferramentas clique em segmento de comprimento fixo e em seguida clique em um ponto do plano, o app pedirá uma medida de comprimento, digite *a* pra medida de comprimento.

Figura 38 – Segmento de Conprimento fixo

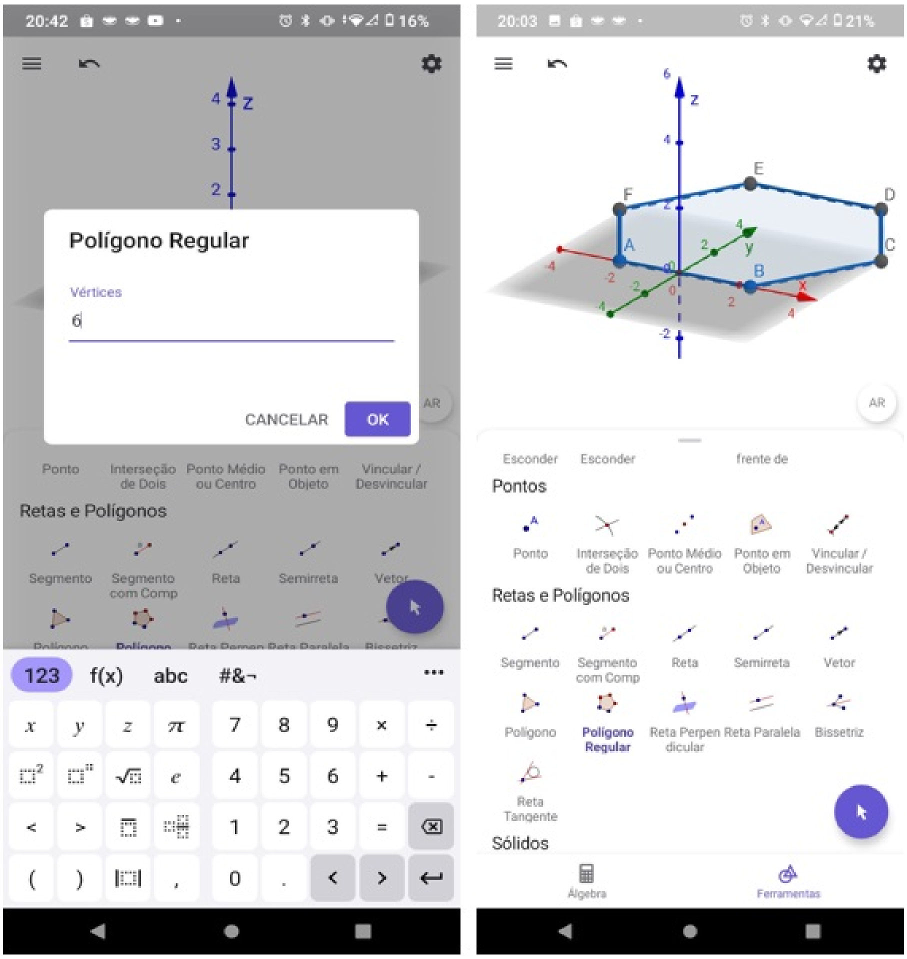


.

Fonte: Produção do próprio autor.

3. Clique em poligono regula, em seguida em seguida clique nos dois pontos extremos do segmento definido anteriormente, o app pedirá a quantidade de lados do poligono, digite 6 para a quantidade de lados. Aparecerá na tela um hexágono regular em que a medida do lado será controlado pelo controle deslizante com a variavel a.

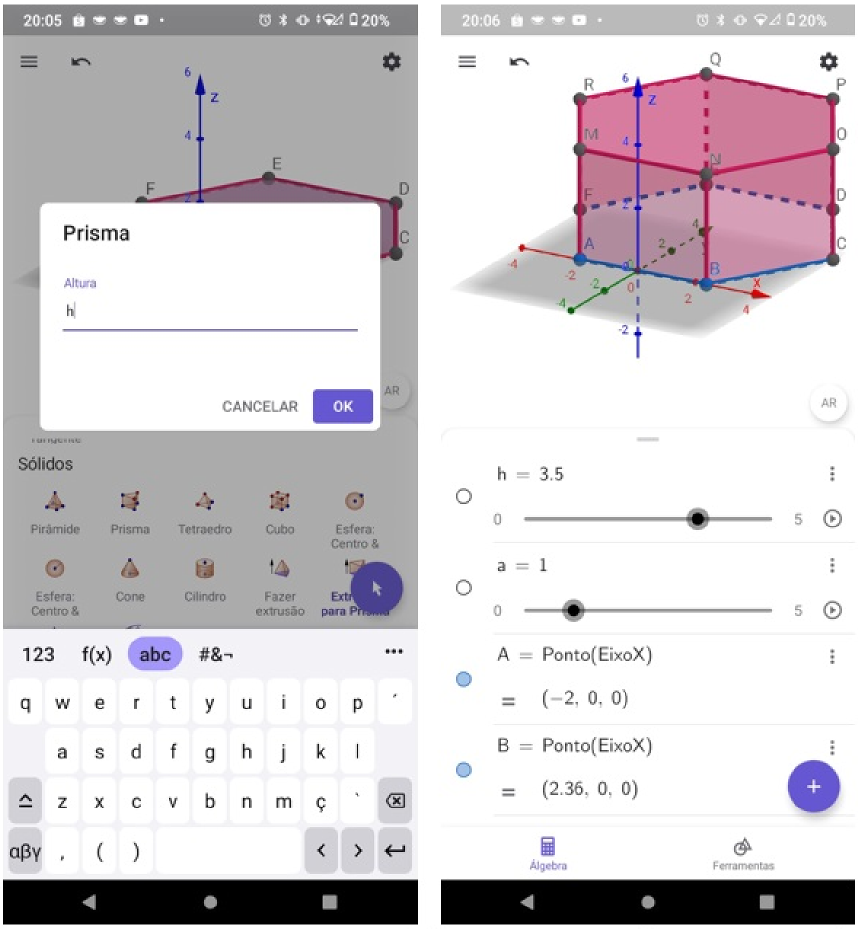
Figura 39 – Polígono hexagonal



Fonte: Produção do próprio autor.

4. Clique em Extrusão de prisma em seguida no poligono criado, o app pedirá a altura do prisma, no campo aberto digite h, será gerado um prisma de base hexagonal onde a altura e medida da aresta poderá ser controlada por controle deslizante.

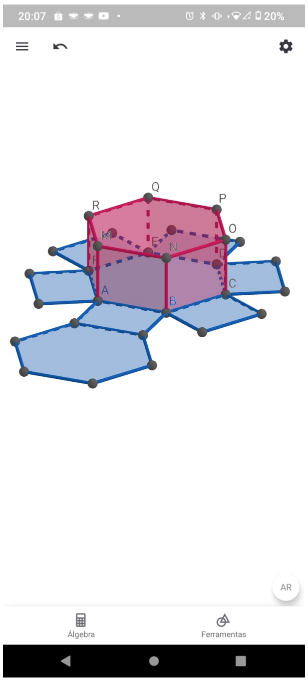
Figura 40 – Extrução de prisma



Fonte: Produção do próprio autor.

5. Clique em Planifição e em seguida na figura, o app criará um controle deslizante para planificar e fechar o prisma.

Figura 41 – Prisma hexagonal planificado

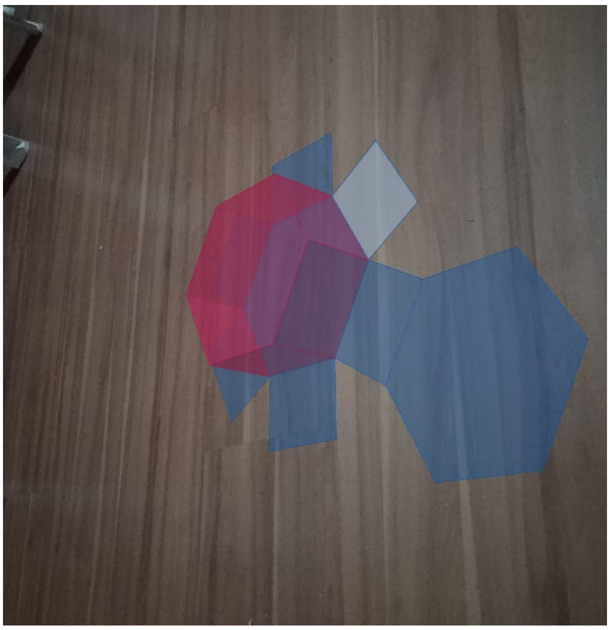


.

Fonte: Produção do próprio autor.

6. Com o recurso de realidade aumenta (AR) projete o objeto em ambiente real.

Figura 42 – Prisma hexagonal em ambiente real



.

Fonte: Produção do próprio autor.

O mesmo processo de criação poderá ser repetido para outros prisma, mudando somente a quantidade de lado do poligono da base.

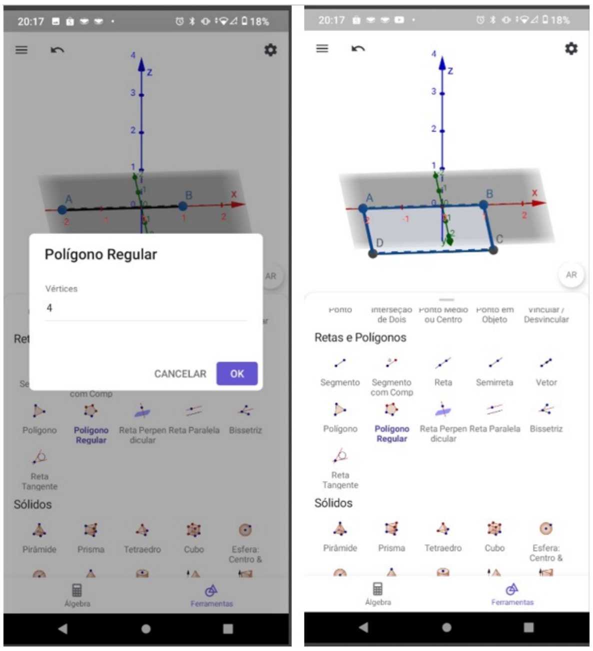
5.5.4 Construção de uma pirâmide de base poligonal regular com suas dimensões controladas por controles deslizantes

1. Criar controles deslizantes para altura (h) do prisma e para medida da aresta da base (a)(Figura 37).

2. Em ferramentas clique em segmento de comprimento fixo e em seguida clique em um ponto do plano, o app pedirá uma medida de comprimento, digite a pra medida de comprimento (Figura 38).

3. Clique em poligono regula, em seguida em seguida clique nos dois pontos extremos do segmento definido anteriormente, o app pedirá a quantidade de lados do poligono, digite 4 para a quantidade de lados. Aparecerá na tela um quadrado em que a medida do lado será controlado pelo controle deslizante com a variavel a.

Figura 43 – Polígono da base da pirâmide

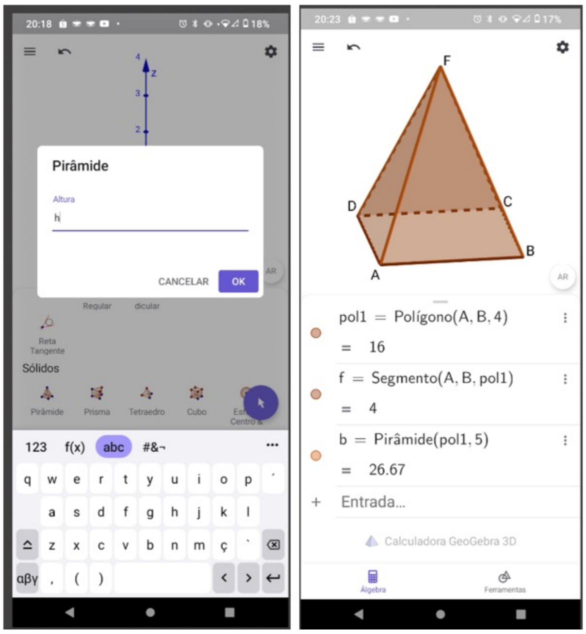


.

Fonte: Produção do próprio autor.

4. Clique em Extrução de pirâmide em seguida no poligono criado, o app pedirá a altura do prisma, no campo aberto digite h, será gerado uma pirâmide de base quadrada onde a altura e medida da aresta poderá ser controlada por controle deslizante.

Figura 44 – Extrusão de pirâmide

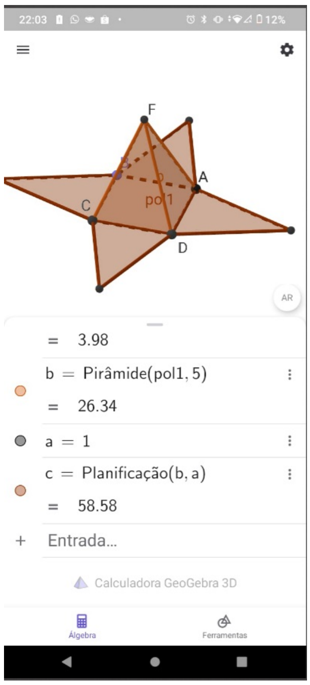


.

Fonte: Produção do próprio autor.

5. Clique em Planificação e em seguida na figura, o app criará um controle deslizante para planificar e fechar a pirâmide.

Figura 45 – Pirâmide planificada



.

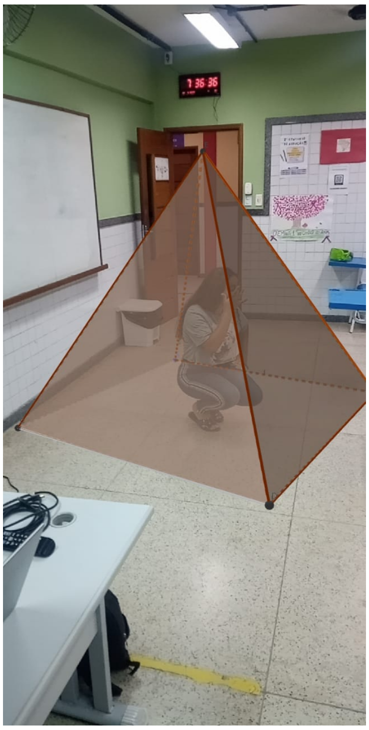
Fonte: Produção do próprio autor.

6. Com o recurso de realidade aumenta (AR) projete o objeto em ambiente real

(Figura 46).

Durante a construção dos sólidos foi possivel rever alguns conhecimentos referentes a geometria plana,tais como: reconhecimento de poligonos, relaçoes de congruência, relações de semelhanças, calculo de áreas poligonais, retas paralelas, retas perpendiculares, angulos internos e externos de um poligono, sendo esses, conteúdos necessários para o bom desenvolvimentos das atividades a serem desenvolvidas sobre geometria espacial.

Figura 46 – Pirãmide em realidade aumentada.



Fonte: Proprio autor

..

5.6 Avaliação da Aprendizagem

Após as etapas de construção dos sólidos e familirização com software, foi propostas atividades relacionadas a área da superfície e volume de prismas e pirâmide onde se pode analisar a compreenção dos alunos com relação ao conteúdo estudado, tambem foi questionado aos alunos sobre o que eles achavam sobre o uso de tecnologia em sala de aula. Dentro ainda desse contexto de avaliação foi feito analises de outras dissertações que abordavam o mesmo assunto aqui pesquisado. O desenvolvimento da sequência didática foi aplicada para 28 alunos da 2ª série do ensino médio da EEEFM Regina Banhos Paixão.

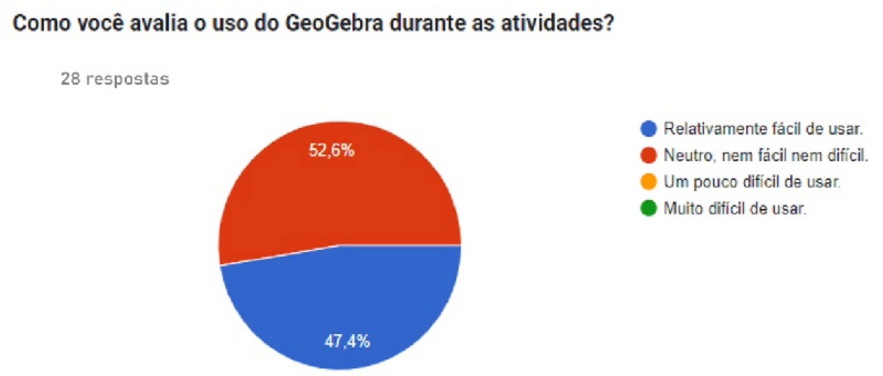
Após o desenvolvimento da sequência foi aplicado um questinario no Google forms buscando saber qual a visão dos alunos com relação a utilização do Geogebra nas aulas de matemática.

O gráfico 1 (figura 47) apresentado mostra a avaliação dos alunos do 2º ano do ensino médio sobre o uso do GeoGebra durante as atividades. Os resultados indicam uma divisão quase equilibrada entre os estudantes, com $52,6\%$ acham o Geogebra relativamente facil de usar e $47,4\%$ são neutros, não acham fácil e nem dificil.

Esses dados sugerem que, para a maioria dos alunos, o GeoGebra não apresenta grandes dificuldades, mas também não é percebido como extremamente intuitivo. O gráfico indica que para quase a metade dos estudadnte, o uso do software é relativamente fácil e acessível . No entanto, o grupo que avalia o uso do GeoGebra como neutro pode indicar a necessidade de um suporte ou treinamento adicional para que esses alunos se sintam mais confortáveis e confiantes ao utilizá-lo.

Não houve menções a dificuldades acentuadas, como "Um pouco difícil de usar"ou "Muito difícil de usar", o que reforça a ideia de que o GeoGebra é uma ferramenta viável para uso em sala de aula, apesar de haver espaço para melhorar a familiaridade e o domínio da ferramenta entre os alunos. Esse equilíbrio sugere que, com um pouco mais de prática e orientação, é possível que mais estudantes passem a considerar o uso do GeoGebra mais fácil e intuitivo.

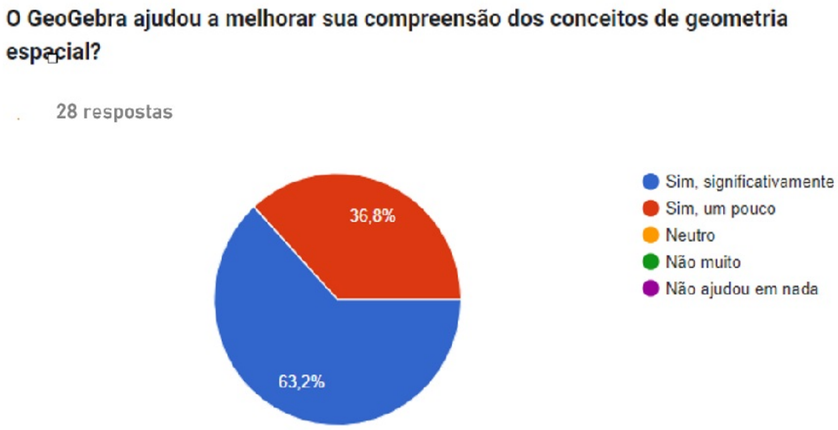
Figura 47 – Gráfico 1



Fonte: Produção do próprio autor.

O gráfico 2 (Figura 48) apresenta os resultados da avaliação dos alunos sobre a eficácia do GeoGebra em melhorar sua compreensão dos conceitos de geometria espacial. Os dados indicam que $63,2\%$ dos alunos acreditam que o uso do GeoGebra contribuiu significativamente para a sua compreensão desses conceitos, o que destaca a importância da ferramenta como um recurso educacional eficaz nesse aspecto. Além disso, $36,8\%$ dos alunos afirmaram que o GeoGebra ajudou "um pouco", o que sugere que, embora tenha havido uma melhora na compreensão, ela não foi tão marcante para todos os estudantes. Esse grupo, embora menor, ainda reconhece a utilidade do software, o que reforça seu valor como ferramenta complementar no aprendizado da geometria espacial. É importante notar que não houve respostas indicando que o GeoGebra não ajudou em nada ou ajudou muito pouco, o que é um sinal positivo de que o software, de alguma forma, beneficiou todos os alunos participantes da pesquisa.

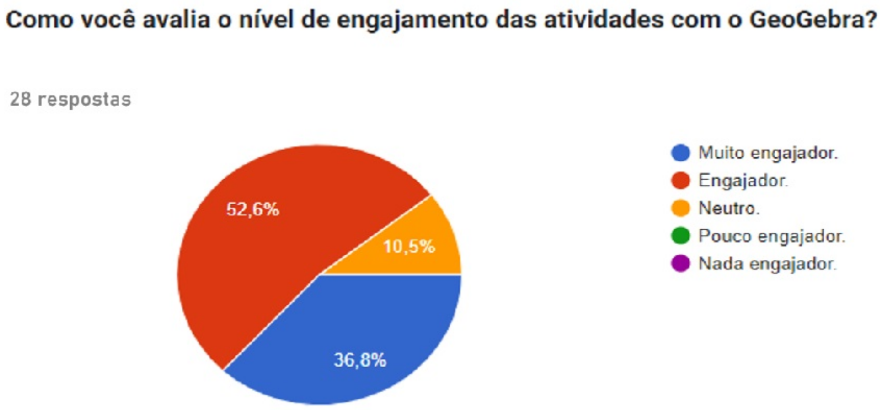
Figura 48 – Gráfico 2



Fonte: Produção do próprio autor.

O gráfico 3 (Figura 49) apresentado, avalia o nível de engajamento dos alunos durante as atividades com o GeoGebra. A maioria dos alunos, $52,6\%$, considerou as atividades "Engajadoras", o que indica que o software conseguiu captar o interesse de mais da metade dos participantes, tornando as atividades envolventes. Além disso, temos que $36,8\%$ dos estudantes avaliaram as atividades como "Muito engajadoras", reforçando ainda mais a percepção positiva do GeoGebra como uma ferramenta que promove um alto nível de envolvimento durante o aprendizado. Este dado é significativo, pois demonstra que uma parcela considerável dos alunos encontrou nas atividades com o GeoGebra uma experiência não apenas interessante, mas altamente cativante. No entanto, $10,5\%$ dos alunos classificaram o engajamento como "Neutro", o que sugere que, para alguns, as atividades não foram nem particularmente envolventes nem desinteressantes. É importante observar que não houve respostas indicando que as atividades foram "Pouco engajadoras"ou "Nada engajadoras", o que é um indicativo positivo da eficácia do GeoGebra em manter o interesse dos alunos durante as aulas. Em suma, o GeoGebra parece ser uma ferramenta bem aceita e eficaz para promover o engajamento nas atividades matemáticas entre os alunos do 2º ano do ensino médio, com uma predominância de avaliações positivas que destacam seu potencial para tornar o aprendizado mais dinâmico e participativo.

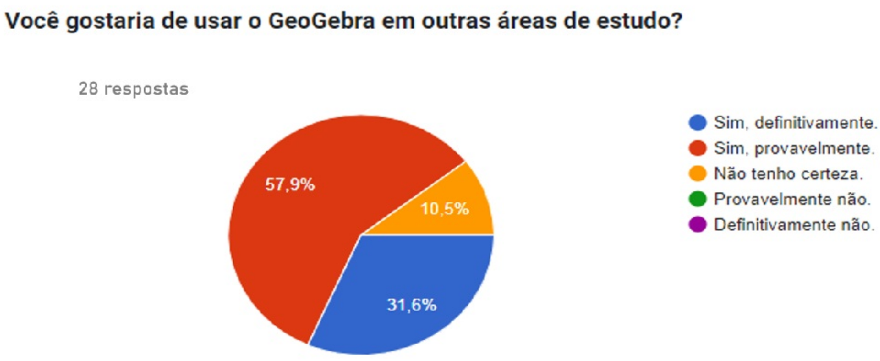
Figura 49 – Gráfico 3



Fonte: Produção do próprio autor.

O gráfico 4 (figura 50 apresentado, aborda o interesse dos alunos em utilizar o GeoGebra em outras áreas de estudo, como, algebra e trigonometria. Os resultados mostram que $57,9\%$ dos alunos responderam que "Sim, provavelmente"gostariam de usar o GeoGebra em outras áreas de estudo, o que demonstra um interesse significativo pela aplicação do software em diferentes contextos educacionais. Temos ainda $31,6\%$ dos estudantes indicando "Sim, definitivamente"gostariam de explorar o GeoGebra em outras áreas, reforçando ainda mais o potencial do software como uma ferramenta versátil e útil em diversos componetes da área de matemática. Este resultado é positivo e sugere que os alunos reconhecem o valor do GeoGebra não apenas para o aprendizado de geometria, mas também para outros componentes da área de matemática.

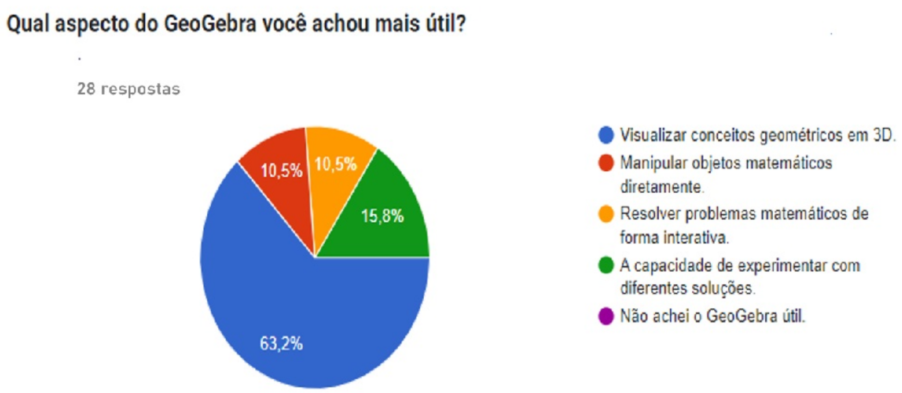
Figura 50 – Gráfico 4



Fonte: Produção do próprio autor.

Os resultados apresentados no gráfico 5 (figura 51 refletem as percepções dos alunos sobre a utilidade do software GeoGebra em suas aulas de matemática. A maioria significativa dos estudantes, representando $63,2\%$, destacou a funcionalidade de visualização de conceitos geométricos em 3D como o aspecto mais útil do programa. Esse dado sugere que os alunos valorizam a capacidade do GeoGebra de representar visualmente conceitos que, de outra forma, poderiam ser abstratos e difíceis de entender, especialmente em um nível de ensino médio onde o entendimento espacial e geométrico começa a se tornar mais complexo. Além disso, $15,8\%$ dos alunos apontaram a capacidade de experimentar com diferentes soluções como uma característica valiosa. Isso indica que esses estudantes apreciam a possibilidade de explorar várias abordagens para resolver problemas matemáticos, o que pode incentivar o pensamento crítico e a criatividade. Outros $10,5\%$ dos alunos reconheceram a utilidade de manipular diretamente objetos matemáticos, sugerindo que essa interação direta facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, enquanto outros $10,5\%$ valorizaram a resolução de problemas de forma interativa, o que pode estar relacionado à dinâmica e à praticidade do aprendizado que o software proporciona. Por fim, é relevante notar que nenhum dos alunos indicou não ter achado o GeoGebra útil. Esse resultado é um indicativo positivo da aceitação e da eficácia da ferramenta no apoio ao aprendizado matemático dos estudantes do 2º ano do ensino médio, mostrando que o software atende a uma variedade de necessidades e preferências de aprendizado, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada dos conteúdos matemáticos.

Figura 51 – Gráfico 5



Fonte: Produção do próprio autor.

Com relação as atividades apresentadas no apêndice B os alunos apresentaram um bom desempenho, apresentam uma boa compreensão do assunto e conseguem reconhecer os elementos que compões cada figura. Apesar das dificuldades devido a defasagem de aprendizagem que se acumularam duram os anos anteriores e agravado no período de pandemia da covid-19, o que se observou foi uma participação muito ativa nas atividades propostas, tendo assim um resultado satisfatório.

Os resultados apresentados na pesquisa se assemelham aos resultados de outras dissertações que trabalharam com a mesma temática e obtiverem bons resultados.

> "Apesar desse cenário, os alunos tiveram uma melhoria bastante significativa na compreensão do conteúdo. E mesmo com uma carência enorme dos conteúdos que eram pré- requisitos para a pesquisa, foi possível observar que os alunos desenvolveram habilidades desejadas e alcançaram um nível satisfatório de aprendizado". (ARAÚJO, 2023)

> "Após a realização das experiências em RA, observou-se também que os participantes demonstraram ter compreendido a ideia de volume de um sólido como sendo o espaço ocupado por ele. Constatou-se, nas respostas dos questionários, que eles passaram a perceber que o valor obtido no processo algébrico representa o número de unidades de volume que preenchem o espaço ocupado por este sólido, não sendo apenas o resultado de uma operação matemática entre suas medidas. Observou-se também, que eles passaram a compreender melhor o Princípio de Cavalieri, e a perceber sua aplicabilidade no cálculo do volume de prismas". (OLIVEIRA, 2021)

6 Conclusão

Ao longo do estudo, a dissertação mostra que a utilização do Geogebra, aliada à realidade aumentada, proporciona um ambiente de aprendizagem mais atrativo e interativo. Os alunos puderam visualizar e manipular sólidos geométricos tridimensionais, o que favoreceu uma compreensão mais aprofundada e intuitiva dos conceitos de área e volume. Essa abordagem permitiu também uma maior interação entre os estudantes, promovendo a discussão colaborativa e o desenvolvimento do pensamento crítico. Os resultados obtidos durante a aplicação da sequência didática mostram que o uso de tecnologias como o Geogebra com realidade aumentada não apenas envolveu os alunos, mas também melhorou significativamente a retenção de conhecimentos geométricos. Observou-se que os estudantes se sentiram mais motivados e confiantes ao resolver problemas envolvendo sólidos geométricos, demonstrando maior habilidade em visualizar e analisar figuras tridimensionais. Além disso, a experiência com a realidade aumentada revelou-se especialmente eficaz para superar as dificuldades tradicionais associadas ao ensino da geometria espacial, tais como a transição da percepção bidimensional para a tridimensional. A capacidade de projetar objetos virtuais no ambiente real facilitou a compreensão dos alunos, permitindo que relacionassem os conceitos geométricos aprendidos com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo e contextualizado.

Claro que, é importante destacar que a integração de tecnologias digitais no ensino requer uma preparação adequada dos professores, tanto no domínio técnico das ferramentas quanto no desenvolvimento de estratégias pedagógicas eficazes. A formação continuada dos docentes é essencial para garantir que o uso dessas tecnologias resulte em melhorias reais no processo educativo.

Podemos concluir então que a utilização do Geogebra com realidade aumentada é uma prática inovadora e eficaz para o ensino de geometria espacial. Ao explorar novas formas de ensino que combinam tecnologias digitais e metodologias ativas, os professores podem criar ambientes de aprendizagem mais ricos e diversificados, capazes de atender às necessidades dos alunos de maneira mais eficaz. Espera-se que esta pesquisa possa contribuir para novas investigações e práticas no ensino de geometria, contribuindo para a formação de alunos mais críticos, criativos e preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

Referências

ARAÚJO, F. S. de. *Tecnologias na educação matemática: o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino da geometria espacial no Ensino Médio*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023. Citado na página 74.

BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Citado na página 14.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2005. v. 4. Citado 9 vezes nas páginas 15, 16, 19, 21, 25, 31, 33, 35 e 36.

DANTAS, E. H. *Uso da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Espacial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2018. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

FUNDAMENTAL, B. S. de E.; EDUCAÇÃO, B. M. da. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. [S.l.]: Ministerio da Euducação, 2000. v. 3. Citado na página 14.

GOMES, N. A. *Possibilidades do Uso da Realidade Aumentada na Visualização de Elementos Matemáticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Jataí, GO, 2015. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Citado na página 17.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; PAIVA, A. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 3. ed. São Paulo: Atual, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. [S.l.]: Papirus editora, 2003. Citado na página 15.

LIMA, R. M. L. *O uso da realidade aumentada no ensino de prismas: um referencial didático para professores do ensino médio*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)), 2021. Citado na página 14.

MALTEMPI, M. V.; BICUDO, M.; BORBA, M. *Educação matemática: pesquisa em movimento*. 2012. Citado na página 47.

NETO, A. C. M. *Geometria*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 41.

OLIVEIRA, O. G. de. *O uso do geogebra 3d com realidade aumentada no ensino de geometria espacial*. 139 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2021. Citado na página 74.

SANTOS, F. C. dos. *Realidade aumentada aplicada ao ensino de geometria espacial: um desafio para a educação matemática*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2015. Citado na página 47.

SILVA, F. O. da. *Utilização de Dispositivos Móveis e Recursos de Realidade Aumentada nas Aulas de Matemática para Elucidação dos Sólidos de Platão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, SP, 2017. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Citado na página 17.

APÊNDICE A – Lista de exercícios

Figura 52 – Atividade de Geometria espacial - parte 1

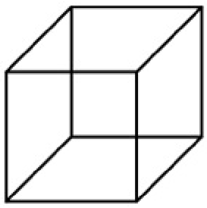
Atividade de Geometria espacial

Nome: Data: Turma:

Questão1

Um cubo tem uma aresta de 8 cm. Calcule:

a) A área total das faces do cubo.
b) A medida da diagonal da face
c) A medida da diagonal do cubo
d) O volume do cubo.



Questão 2

Calcule a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

a) cubo b) paralelepípedo retângulo c) paralelepípedo retângulo

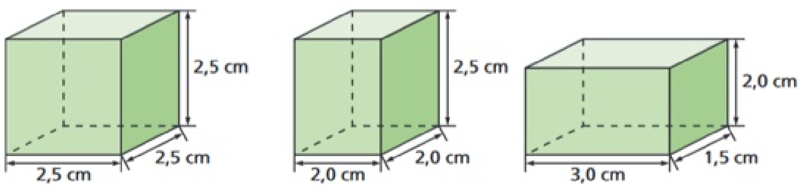
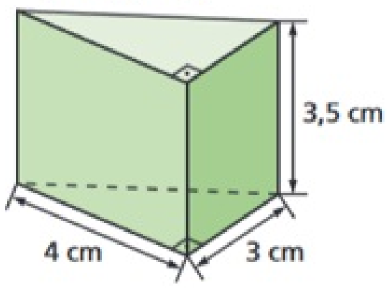


Figura 53 – Atividade de Geometria espacial - parte 2

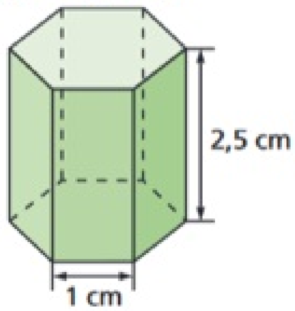
Questão 3

Calcule a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) Prisma reto (triangular)

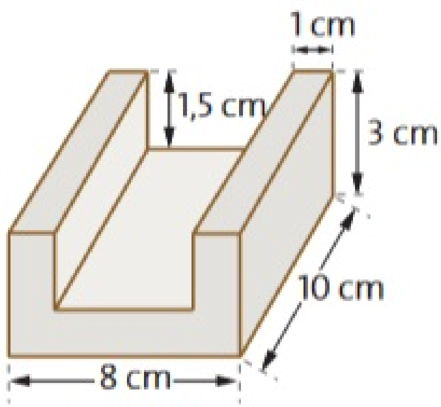


b) Prisma regular (hexagonal)



Questão 4

. Qual é o volume de um sólido cuja forma e medidas estão na figura abaixo?



Questão 5

. Observe a piscina representada abaixo e as dimensões indicadas. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?

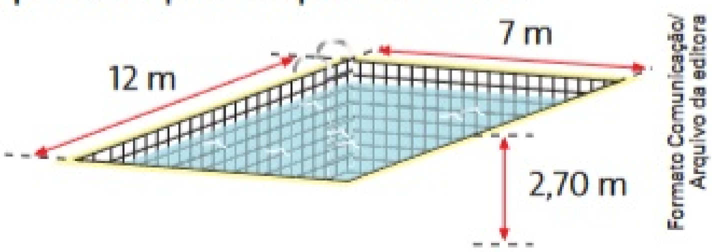
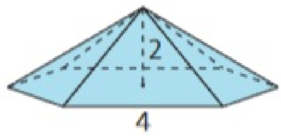


Figura 54 – Atividades de Geometria espacial-parte3

Questão 6

Uma pirâmide regular hexagonal tem 2 cm de altura e a aresta da sua base mede 4 cm. Calcule:

a) o apótema da base;
b) o apótema da pirâmide;
c) a aresta lateral;
d) a área da base;
e) a área lateral;
f) a área total.



Questão 8

A Pirâmide de Quéops é conhecida como a Grande Pirâmide do Egito. Sua base tem aproximadamente

230 m de aresta e sua altura é de 137 m. Qual é o volume dessa pirâmide?

Petr Svarc/Getty Images

Pirâmide de Quéops.

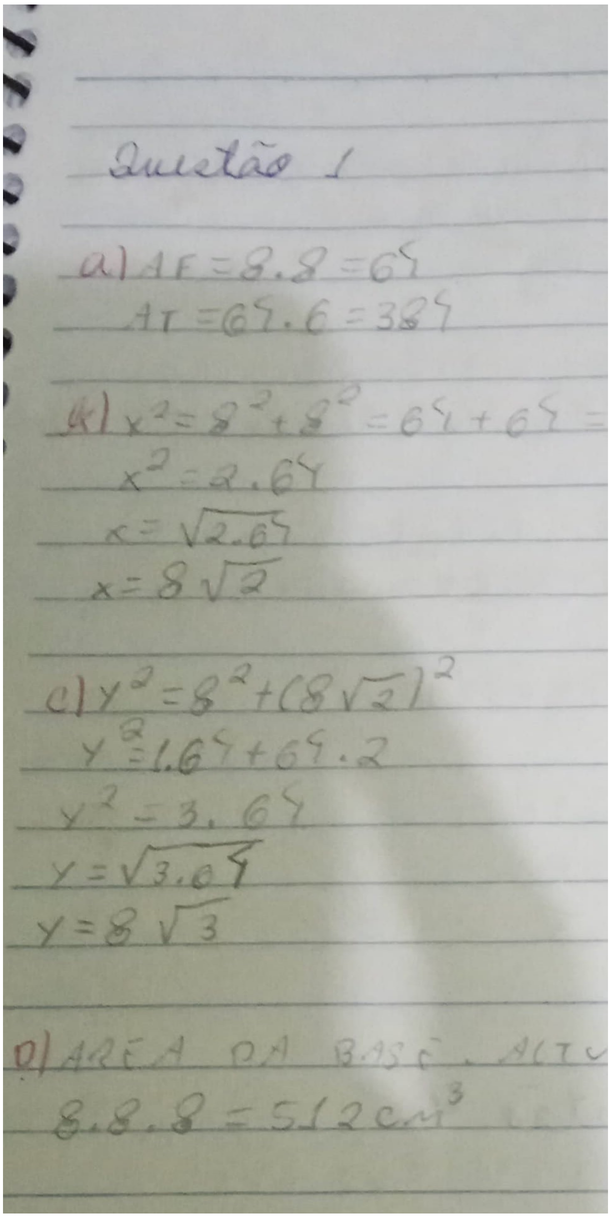
Fonte: Produção do próprio autor.

APÊNDICE B – Resoluções de alunos

Aqui estão apresentadas algumas resoluçoes.Denominaremos os alunos como Aluno A. Aluno B , Aluno C e Aluno D.

Questão 1.

Figura 55 – Questão 1 aluno A



Questão 1

a) $A_F = 8.8 = 64$

$A_T = 64.6 = 384$

b) $x^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 =$

$x^2 = 2.64$

$x = \sqrt{2.64}$

$x = 8\sqrt{2}$

c) $y^2 = 8^2 + (8\sqrt{2})^2$

$y^2 = 1.64 + 64.2$

$y^2 = 3.64$

$y = \sqrt{3.64}$

$y = 8\sqrt{3}$

D) AREA DA BASE . ALTU

$8.8.8 = 512cm^3$

Figura 56 – Questão 1 e 2 do aluno B

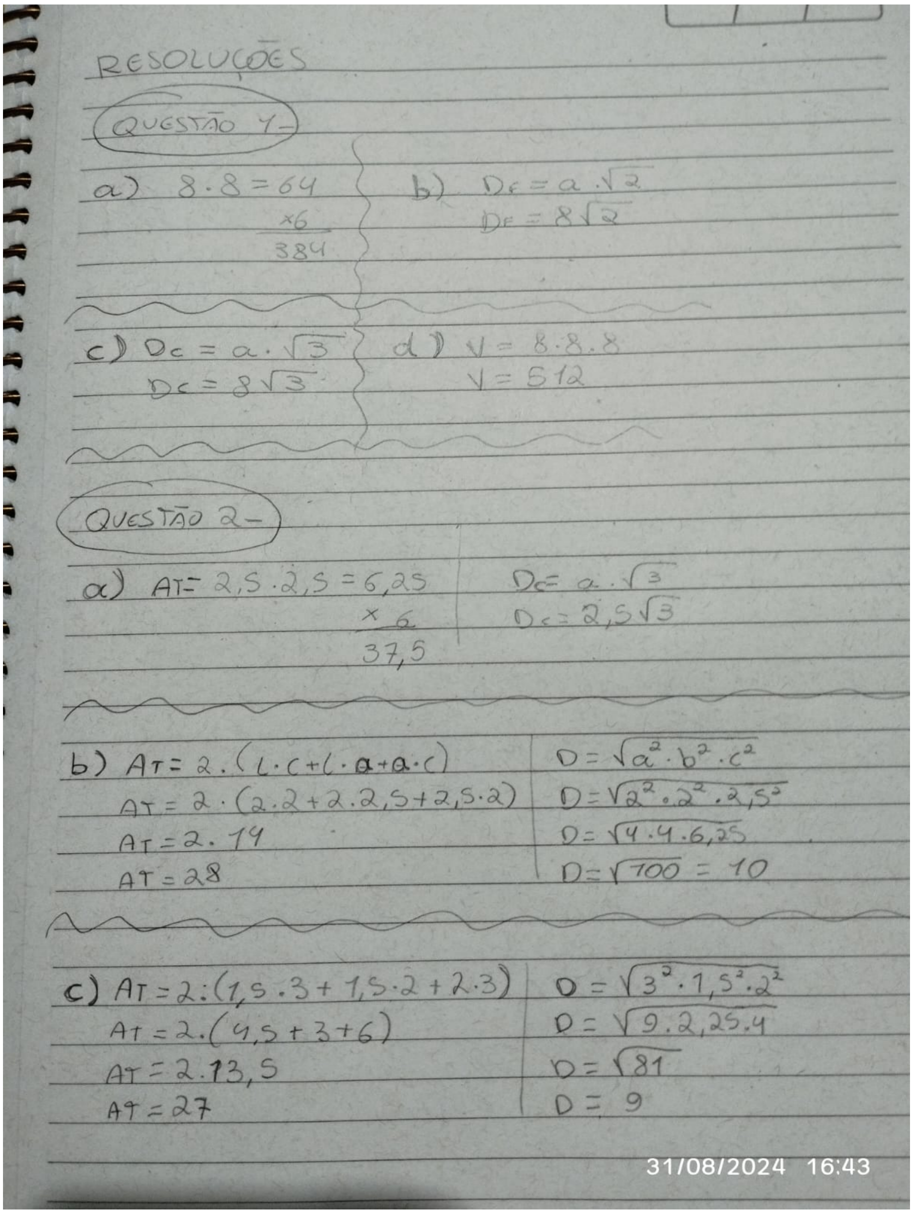


Figura 57 – Continuação-Questão 1 resolvida do aluno C

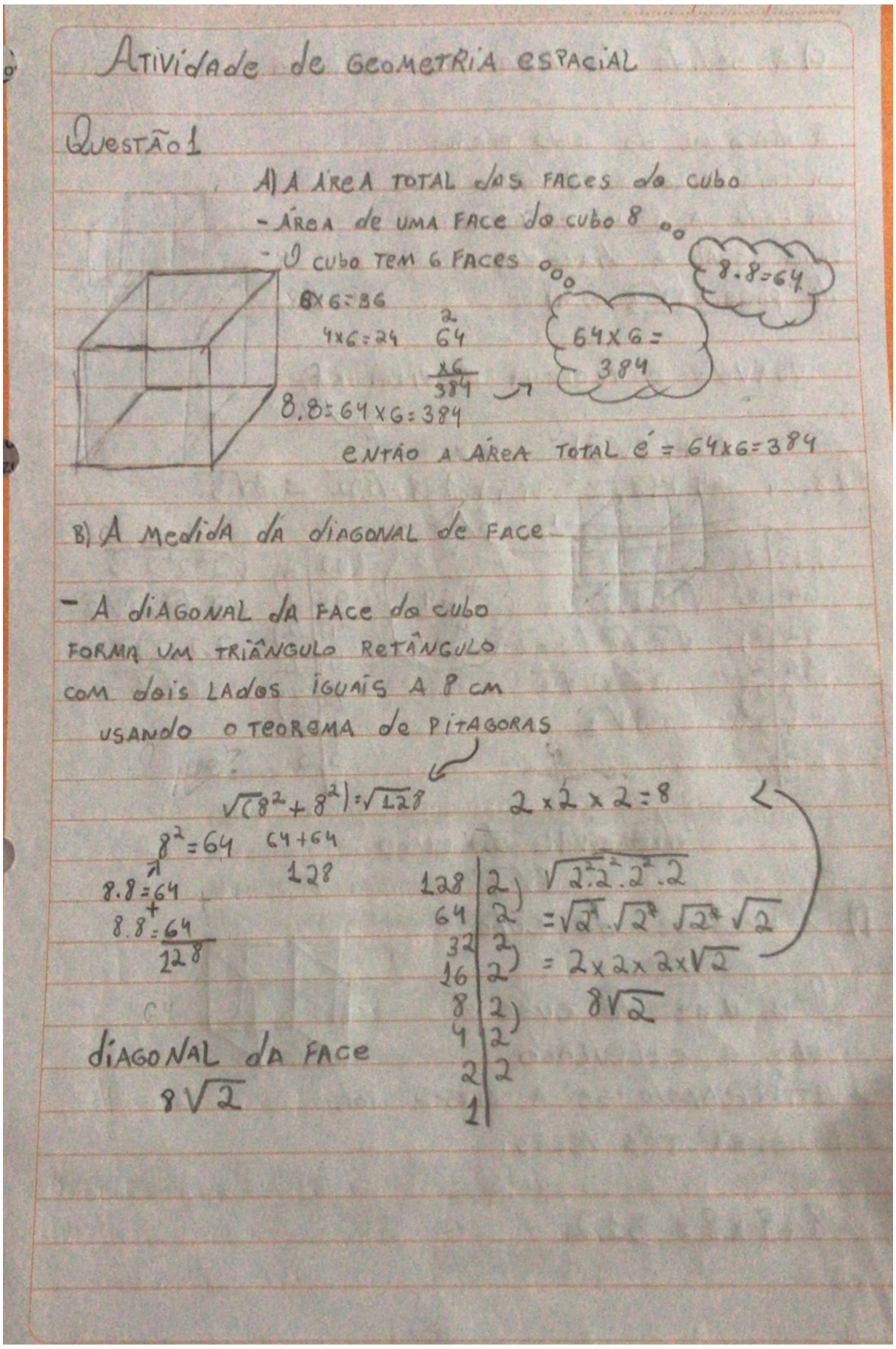
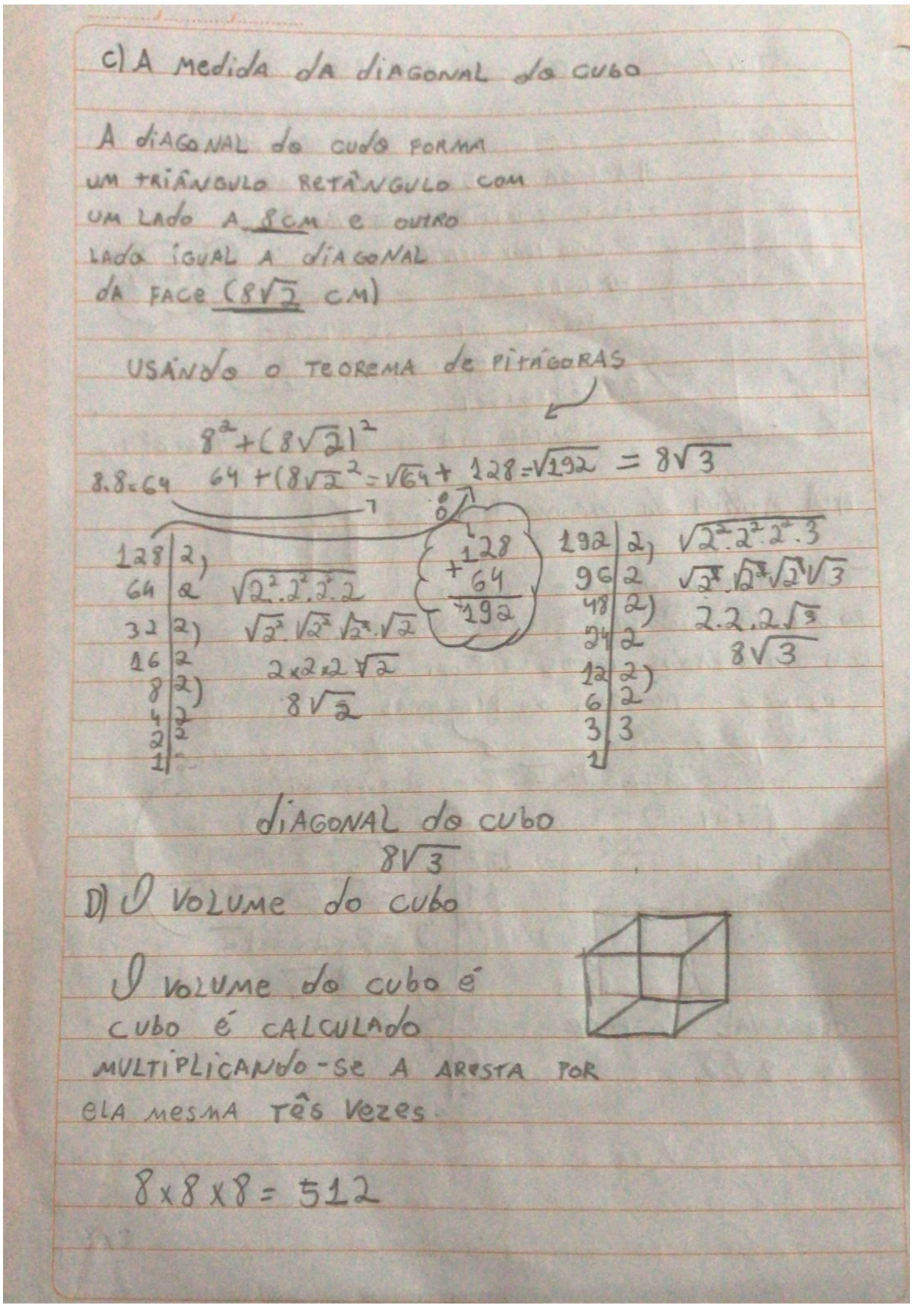


Figura 58 – Questão 1 resolvida do aluno C



c) A medida da diagonal do cubo

A diagonal do cubo forma
um triângulo retângulo com
um lado a 8cm e outro
lado igual a diagonal
da face ($8\sqrt{2}$ cm)

Usando o teorema de Pitágoras

$8^2 + (8\sqrt{2})^2$

$8.8 = 64 \quad 64 + (8\sqrt{2})^2 = \sqrt{64 + 128} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

$128 + 64 = 192$

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2}$

$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2}$

$2 \times 2 \times 2\sqrt{2}$

$8\sqrt{2}$

192	2
96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3}$

$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3}$

$2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}$

$8\sqrt{3}$

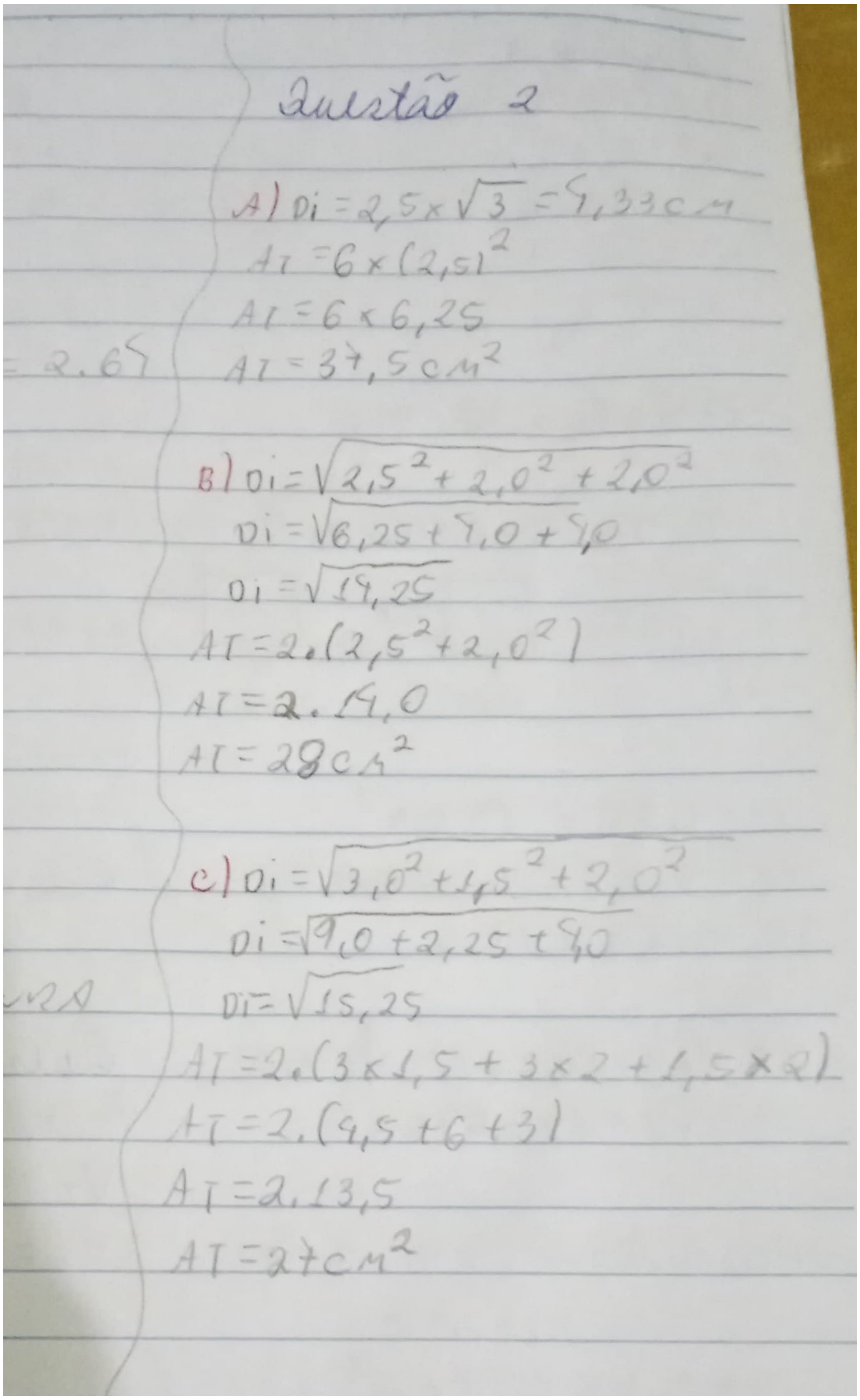
Diagonal do cubo
$8\sqrt{3}$

D) O volume do cubo

O volume do cubo é
cubo é calculado
multiplicando-se a aresta por
ela mesma três vezes.

$8 \times 8 \times 8 = 512$

Figura 59 – Questão 2 resolvida do aluno A



Questão 2

A) $Di = 2{,}5 \times \sqrt{3} = 4{,}33cm$

$A_T = 6 \times (2{,}5)^2$

$A_T = 6 \times 6{,}25$

$A_T = 37{,}5 cm^2$

B) $Di = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}0^2 + 2{,}0^2}$

$Di = \sqrt{6{,}25 + 4{,}0 + 4{,}0}$

$Di = \sqrt{14{,}25}$

$A_T = 2.(2{,}5^2 + 2{,}0^2)$

$A_T = 2 . 14{,}0$

$A_T = 28 cm^2$

c) $Di = \sqrt{3{,}0^2 + 1{,}5^2 + 2{,}0^2}$

$Di = \sqrt{9{,}0 + 2{,}25 + 4{,}0}$

$Di = \sqrt{15{,}25}$

$A_T = 2.(3 \times 1{,}5 + 3 \times 2 + 1{,}5 \times 2)$

$A_T = 2.(4{,}5 + 6 + 3)$

$A_T = 2 . 13{,}5$

$A_T = 27 cm^2$

Figura 60 – Questão 3 e 4 resolvida do aluno A

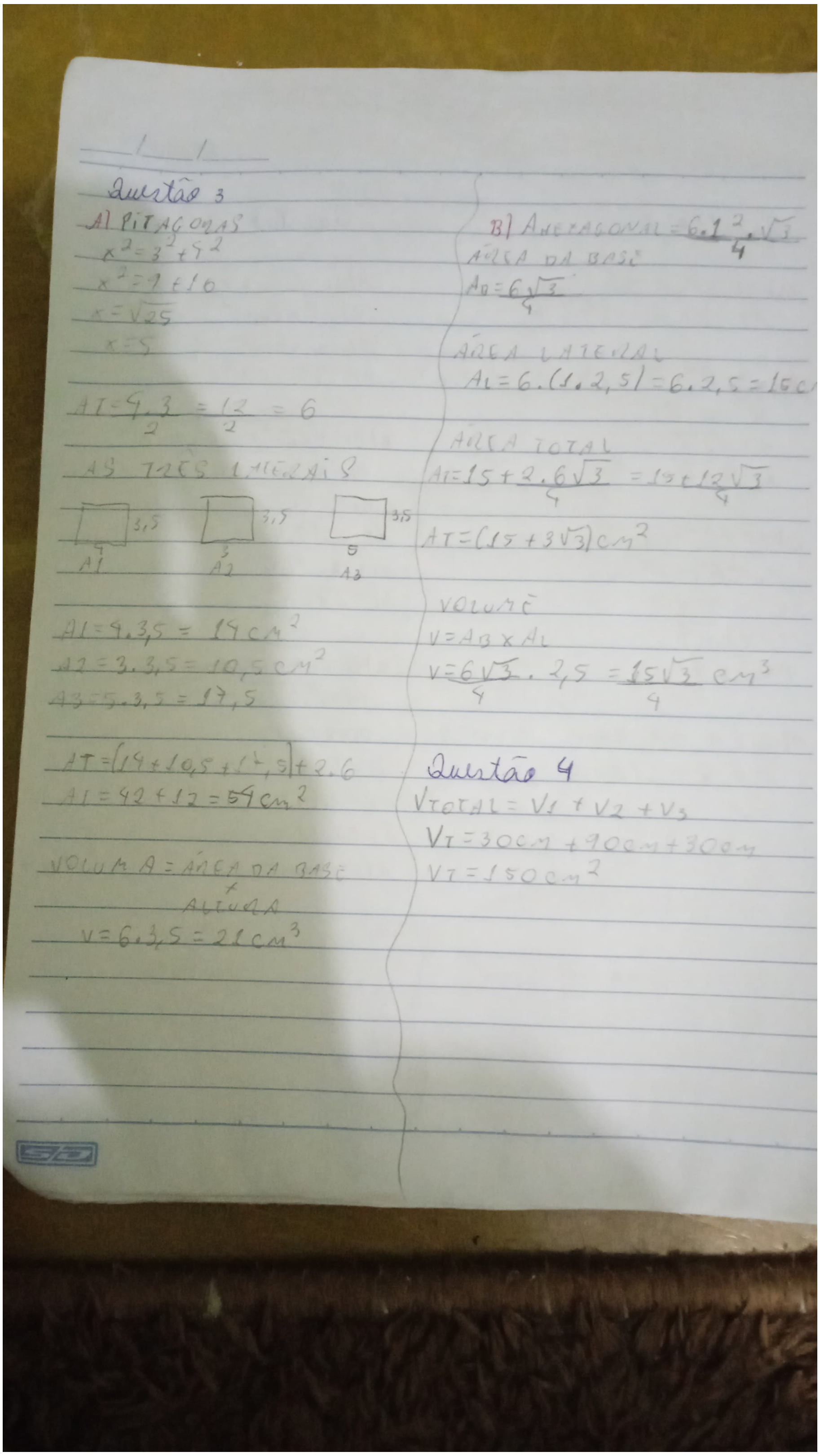


Figura 61 – Questão 5 resolvida do aluno A

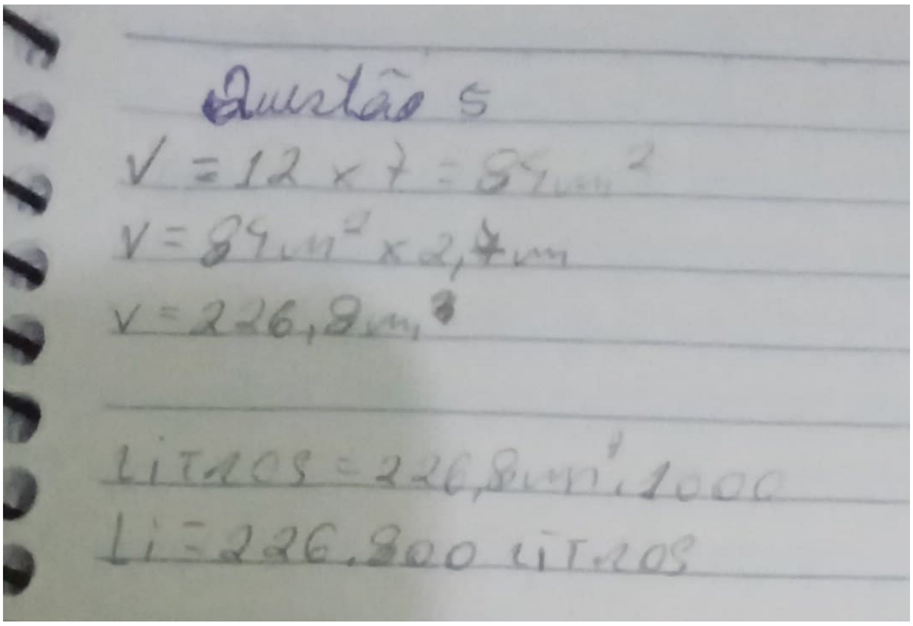
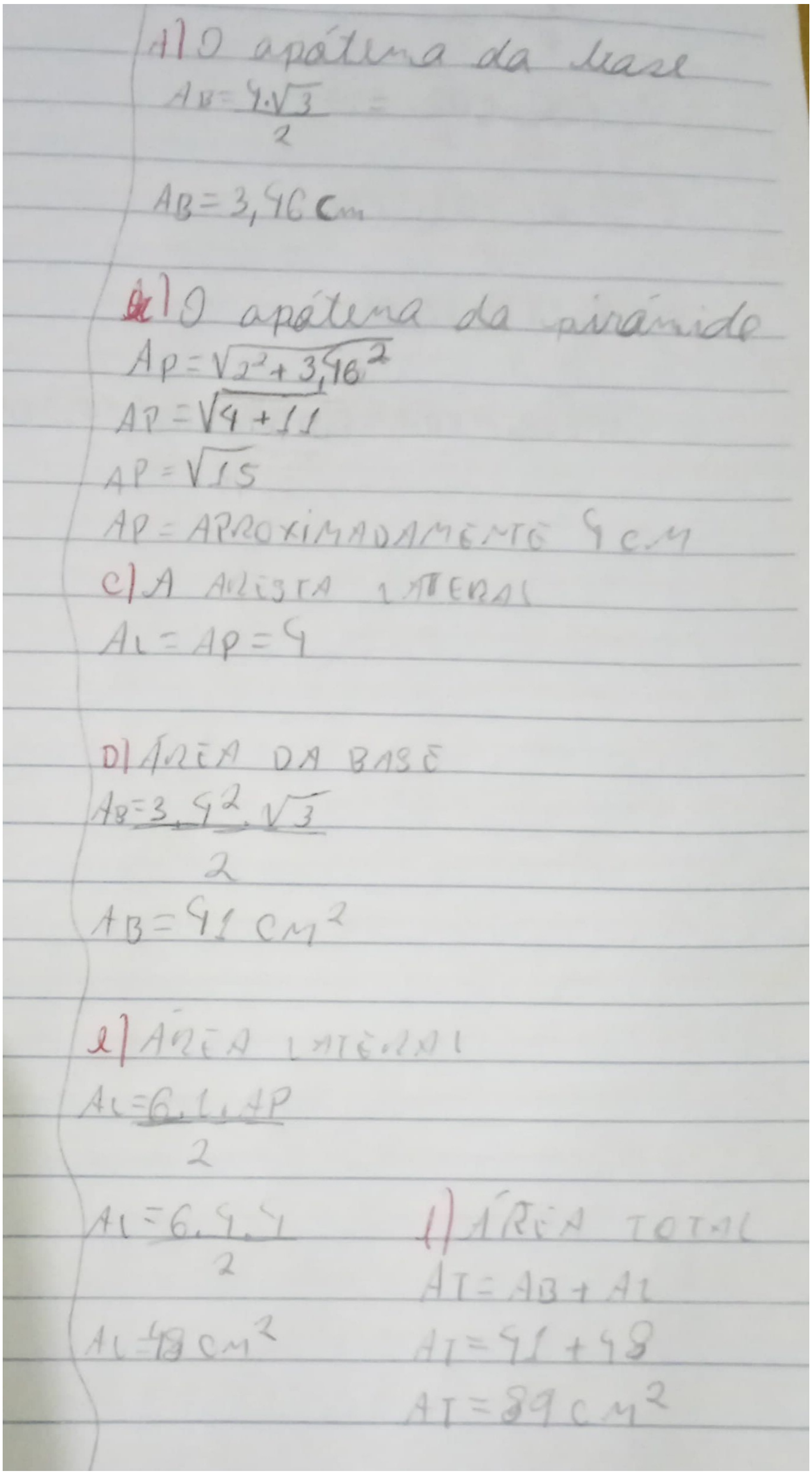


Figura 62 – Questão 6 resolvida do aluno A



a) O apótema da base

$A_B = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$A_B = 3{,}46$ cm

b) O apótema da pirâmide

$Ap = \sqrt{2^2 + 3{,}46^2}$

$AP = \sqrt{4 + 11}$

$AP = \sqrt{15}$

AP = APROXIMADAMENTE 4 CM

c) A ARESTA LATERAL

$A_L = AP = 4$

D) ÁREA DA BASE

$A_B = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$A_B = 41$ CM²

e) ÁREA LATERAL

$A_L = \frac{6 \cdot L \cdot AP}{2}$

$A_L = \frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{2}$

$A_L = 48$ CM²

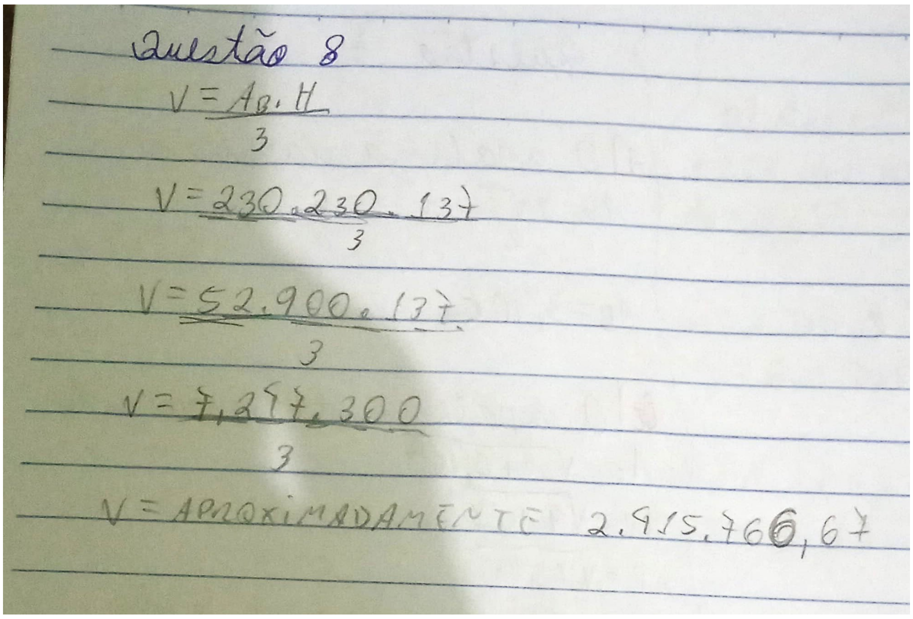
f) ÁREA TOTAL

$A_T = A_B + A_L$

$A_T = 41 + 48$

$A_T = 89$ CM²

Figura 63 – Questão 7 resolvida do aluno A



Questão 8

$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$

$V = \frac{230 \cdot 230 \cdot 137}{3}$

$V = \frac{52.900 \cdot 137}{3}$

$V = \frac{7.247.300}{3}$

V = APROXIMADAMENTE 2.415.766,67