UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JÉSSICA CONDE

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

CURITIBA

2024

JÉSSICA CONDE

DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Conde, Jéssica
Desigualdades das médias / Jéssica Conde. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Inequações (Matemática). 2. Desigualdade das Médias. 3. Regras de L'Hospital. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). III. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **JÉSSICA CONDE** intitulada: **DESIGULDADES DAS MÉDIAS**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 01 de Novembro de 2024.

Assinatura Eletrônica
19/11/2024 21:20:48.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
20/11/2024 12:29:58.0
PAULA ROGÉRIA LIMA COUTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
19/11/2024 21:37:42.0
JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANA- CURITIBA)

Agradecimentos

Aos meus pais e meus irmãos que sempre me apoiaram e me ajudaram quando eu precisava.

Ao meu marido William que esteve junto comigo durante toda essa caminhada e me ajudou em muitos momentos de dificuldades. Obrigada por me ouvir e me ajudar.

Ao meu orientador Luizão que me ajudou muito com esse trabalho. Obrigada por tudo.

A todos professores que tive contato, principalmente durante o mestrado, me auxiliaram na vida acadêmica.

Aos meus amigos que sempre arrumam tempo pra mim, apesar da vida corrida de cada um.

Àqueles que de alguma maneira me ajudaram a conquistar o título de mestra. Obrigada.

Resumo

O trabalho tem como objetivo ir além de somente trazer uma tradução do trabalho de P. P. Korovkin, intitulado "Inequalities"de 1975: Este trabalho contém teoremas sobre as médias aritméticas e geométricas, a desigualdade de Bernoulli, a definição de média potencial, contando com os seus 3 casos para se encontrar as outras médias, e ainda as duas regras de L'Hospital, que estarão presentes aqui. Por fim, demonstramos uma maneira de chegar à média geométrica através da média ponderada, utilizando as ferramentas de cálculo necessárias.

Palavras-chave: Inequações, Desigualdade das Médias, Desigualdade de Bernouli, Regras de L'Hospital.

ABSTRACT

The work aims to go beyond just bringing a translation of P. P. Korovkin's work, entitled "Inequalities" from 1975: This work contains theorems about arithmetic and geometric means, Bernoulli's inequality, the definition of potential mean, counting on its 3 cases to find the other means, and also the two rules of L'Hospital, who will be present here. Finally, we demonstrate a way to obtain the geometric mean through the weighted average, using the necessary calculation tools.

Keywords: Fibonacci, Proof by Induction, Combinatorial Proof.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal do trabalho não é somente fazer uma tradução do trabalho de P. P. Korovkin titulado Inequalities de 1975: é também apresentar uma forma de demonstrar que, a partir da média ponderada, podemos chegar à média geométrica, aplicando alguns conhecimentos de cálculo, como limites e a regra de L'Hospital, já que ela não está definida no caso de $x = 0$. Sendo assim, o público alvo será para os professores de Matemática.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: primeiro vamos ter um capítulo sobre as médias mais usadas, a saber aritmética e geométrica, com um teorema que vai ser utilizado na demonstração do segundo que é a desigualdade envolvendo essas médias. No segundo capítulo será apresentada a desigualdade de Bernoulli e sua demonstração.

O terceiro capítulo se trata da definição da média potencial e seus 3 casos específicos que originam a média aritmética, a média dos quadrados e a média harmônica. O quarto capítulo é sobre um problema e um teorema envolvendo a média potencial e suas respectivas demonstrações.

O quinto capítulo fala sobre as regras de L'Hospital, que vai ser importante para o sexto capítulo que vai conter a demonstração de como a partir da média ponderada, pode-se chegar à média geométrica, que é o foco do trabalho.

2 MÉDIA ARITMÉTICA E MÉDIA GEOMÉTRICA

Neste capítulo apresentaremos as médias citadas acima e a provaremos a desigualdade envolvendo as mesmas.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos, então

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ e } g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

são chamadas, respectivamente, de Média Aritmética e Média Geométrica dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Agora, provaremos que $g \leqslant a$ via o Teorema 1, que será apresentado a seguir.

2.1 TEOREMA 1

Se o produto dos n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é igual a 1, então a soma desses números é maior ou igual a n. Ou seja:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

Demonstração: Usaremos o método da indução. Primeiramente, provaremos para $n = 2$:

$$x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geqslant 2.$$

Para solucionarmos esse problema, temos dois casos:

1. $x_1 = x_2 = 1$.
2. $0 < x_1 < x_2, x_1 < 1$ e $x_2 > 1$.

No caso 1, temos $x_1 + x_2 = 2$, o que prova o teorema para $n = 2$. No caso 2, partiremos da equação: $(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_2 + x_1 - x_1 x_2 - 1$. Fazendo algumas mudanças, apenas dos lados das igualdades, temos:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Por hipótese, $x_1 x_2 = 1$. Então:

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Como $x_1 < 1 < x_2$, então $(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$. Logo, $x_1 + x_2 > 2$. Portanto, para $n = 2$, o teorema foi provado.

Note que, a equação $x_1 + x_2 = 2$ só será verdadeira se $x_1 = x_2 = 1$. Contudo, se $x_1 \neq x_2$, então $x_1 + x_2 > 2$.

Agora, consideremos que o teorema vale para $n = k$, isto é,

$$x_1 x_2 \dots x_k = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant k.$$

Vamos provar que vale para $n = k + 1$, ou seja,

$$x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1.$$

Dividiremos em dois casos:

1. $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$.
2. Para algum índice i, $x_i \neq 1$.

No caso 1, $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$, pois temos k + 1 termos somados e eles são iguais a 1. Então, o teorema está provado para o caso 1, que é a igualdade.

Agora para o caso 2, como nem todos os termos são iguais a 1, suponha $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$, sem perda de generalidade. Portanto:

$$(x_1 x_{k+1}) x_2 . x_3 \dots x_k = 1.$$

Assumindo $y_1 = x_1 x_{k+1}$, assim:

$$y_1 x_2 . x_3 \dots x_k = 1.$$

Por hipótese, temos que $x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = 1$.Substituindo o $x_1 x_{k+1}$ por y_1, ficamos com $y_1 x_2 \dots x_k = 1$, o que implica $y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \geqslant k$.

Agora,

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \\
& = (y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\
& \geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1.
\end{aligned}$$

Acrescentando-se $+1 - 1$ na última parte da desigualdade e fazendo a substituição de $y_1 = x_1 x_{k+1}$, fica:

$$k + 1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 = (k + 1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1).$$

Como $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$, então $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$. Portanto,

$$(k + 1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1.$$

Assim, concluímos que: $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} > k + 1 \cdot$ ■

2.2 TEOREMA 2

A *média geométrica* de números positivos é menor ou igual a *média aritmética* dos mesmos números. Ou seja, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e a seja a *média aritmética* entre eles e g a *média geométrica*, podemos escrever:

$$g = \sqrt[n]{x_1.x_2.\cdots.x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$$

Demonstração: Como $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, segue que

$$1 = \sqrt[n]{\frac{x_1.x_2.\cdots.x_n}{g}},$$

ou seja,

$$1^n = \frac{x_1.x_2.\cdots.x_n}{g},$$

isto é,

$$\frac{x_1.x_2.\cdots.x_n}{g} = 1.$$

Pelo Teorema 1, podemos concluir que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{g} \geqslant n.$$

Multiplicando por g e dividindo por n , temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant g.$$

Como

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

concluímos que $a \geqslant g \cdot$ ■

3 DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Nesse capítulo, iremos enunciar e demonstrar o Teorema de Bernoulli, que vai ser usado em demonstrações de teoremas adicionais. Aqui eu coloquei esse capítulo antes de enunciar a média potencial, diferente do livro, já que esse trabalho não se trata apenas de uma tradução do mesmo.

3.1 TEOREMA 3

Se $x \geqslant -1$ e $0 < \alpha < 1$, então

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x. \tag{3.1}$$

No entanto se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, então

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x. \tag{3.2}$$

Demonstração de (3.1) : Seja α um número racional tal que $0 < \alpha < 1$. Considere $\alpha = \dfrac{m}{n}$, com m e n números inteiros positivos tais que $1 \leqslant m < n$. Por hipótese, temos que $x \geqslant -1$, ou seja $1 + x \geqslant 0$. Então

$$(1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\frac{m}{n}}. \tag{3.3}$$

Como 1 é o elemento neutro da multiplicação e $n - m > 0$, podemos rescrever (3.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{m}{n}} \\
&= (1+x)^{\frac{m}{n}}.1^{n-m} \\
&= \sqrt[n]{(1+x)^m.1^{n-m}} \\
&= \sqrt[n]{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)11\ldots1}.
\end{aligned}$$

Note que $(1+x)$ foi escrito m vezes e o 1 foi escrito $n - m$ vezes, totalizando n elementos dentro de uma raiz n-ésima, exatamente como na média geométrica. Assim, podemos aplicar o Teorema 2, isto é, $g \leqslant a$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{(1+x)\cdot(1+x).\cdots.(1+x)\cdot 1\cdot 1.\cdots.1} \\
&\leqslant \frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+\cdots+1}{n} \\
&= \frac{n+mx}{n} \\
&= 1+\frac{m}{n}x \\
&= 1+\alpha x.
\end{aligned}$$

Concluímos que $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x$, onde $\alpha = \dfrac{m}{n}$.

Note que a igualdade ocorre da mesma maneira que no Teorema 2, isto é, quando $1+x=1$, ou seja, $x=0$. Quando $x \neq 0$, temos $(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x$.

Suponhamos, agora, que α seja irracional e que $0<\alpha<1$. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma sequência de números racionais com limite igual à α. Se $0<r_n<1$, temos $(1+x)^{r_n} \leqslant 1+r_n x$,pela Desigualdade de Bernoulli, para $x \leqslant -1$, $n=1,2,3,\ldots$. Portanto:

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha}(1+x)^{r_n} \geqslant \lim_{r_n\to\alpha}(1+r_n x) = 1+\alpha x.$$

Falta mostrarmos que, para α irracional, $x \neq 0$ e $0<\alpha<1$, temos $(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x$. Assim, se r é racional tal que $\alpha < r < 1$, temos $(1+x)^{\alpha} = [(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}]^{r}$.

Pela desigualdade $\alpha<r<1$, podemos concluir também que $0<\dfrac{\alpha}{r}<1$. Consequentemente, podemos utilizar a desigualdade de Bernoulli, ficando com:

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \leq 1+\frac{\alpha}{r} \Rightarrow (1+x)^{\alpha} \leq (1+\frac{\alpha}{r}x)^{r}.$$

Como $x \neq 0$, então $(1+\dfrac{\alpha}{r}x)^{r} < 1+r\dfrac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x$. Portanto,

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x.$$

■

Demonstração de (3.2): Se $1+\alpha x<0$ e $(1+x)^{\alpha}>0$, então $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$. Além disso se $1+\alpha x \geqslant 0$, então $\alpha x \geqslant -1$. Observe que os casos de $\alpha=0$ e $\alpha=1$ são imediatos, já que $0 \geqslant -1$ e $1x \geqslant -1$, pois $x \geqslant -1$, por hipótese. Faltando apenas os casos de $\alpha<0$ ou $\alpha>1$, que vamos analisar separadamente:

1º) $\alpha > 1$.

Como já foi provado anteriormente para números racionais,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1+\frac{1}{\alpha}\alpha x = 1+x.$$

Aqui, a igualdade será verdadeira quando $x = 0$ (como foi visto na demonstração de (3.1)). Elevando ambos os lados a α, temos: $1 + \alpha x \leqslant (1 + x)^{\alpha}$. Portanto, $(1 + x)^{\alpha} \geqslant (1 + x)^{\alpha}$.

2º) $\alpha < 0$.

Se $1 + \alpha x \geqslant 0$, escolha um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $-\dfrac{\alpha}{n} < 1$ seja válida. Pela desigualdade de (3.1), temos:

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{-\alpha}{n}} \\
&\leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}x \\
&\Rightarrow (1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&\geqslant \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n}x} \\
&\geqslant 1 + \frac{\alpha}{n}x.
\end{aligned}
$$

Note que a última inequação é verdadeira caso $1 \geqslant 1 - \dfrac{\alpha^2}{n^2}x^2$. Agora, elevando-se $(1 + x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{\alpha}{n}x$ a n,

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^{\alpha} \\
&\geqslant (1 + \frac{\alpha}{n}x)^{n} \\
&\geqslant 1 + n\frac{\alpha}{n}x \\
&= 1 + \alpha x \\
&\Rightarrow (1+x)^{\alpha} \\
&\geqslant 1 + \alpha x,
\end{aligned}
$$

com a igualdade sendo possível quando $x \neq 0$. ■

4 DEFINIÇÃO DE MÉDIA POTENCIAL

Neste capítulo iremos definir a média potencial e anunciaremos outras médias que são casos específicos da média supracitada, além de alguns exemplos de aplicações. E mais a frente, mostraremos que a partir da potencial pode-se chegar também a média geométrica.

4.1 DEFINIÇÃO

O número

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

é chamado de *média potencial* dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de ordem α.

4.2 CASOS

1. Para $\alpha = 1$, temos:

   $$c_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   que é chamada de *média aritmética*.

   Simplesmente a média mais conhecida, pois tem várias aplicações, como calcular as médias dos alunos na escola, colégio, faculdade, e assim por diante. Pode ser usada para calcular médias de gols em partidas ou ainda média de gols da rodada, calcular o consumo médio anual de água ou luz, entre outras.

2. Para $\alpha = 2$, temos:

   $$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

   que é chamada de *média dos quadrados*.

   Suas aplicações são mais para a área da estatística, para calcular o desvio-padrão da população, por exemplo. Além disso, ela pode ser vista na área da física também.

3. Para $\alpha = -1$, temos:

   $$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

que é chamada de *média harmônica*.

Pode ser usada na física também, para calcular velocidade média, por exemplo. Ou ainda em situações problema que envolvem grandezas inversamente proporcionais.

5 MÉDIA POTENCIAL DOS NÚMEROS

Neste capítulo provaremos algumas desigualdades relacionadas a média potencial.

5.1 PROBLEMA 1

Prove que se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números positivos e $\alpha < 0 < \beta$, então $c_\alpha \leq g \leq c_\beta$.

Demonstração: Já foi provado, no teorema 2, que $g \leq a$, isto é,

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \dots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}.$$

Elevando ambos os lados dessa inequação por $\dfrac{1}{\alpha} < 0$, temos:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha.$$

De forma semelhante prova-se para o β.

$$\sqrt[n]{a_1^\beta a_2^\beta \dots a_n^\beta} \leqslant \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta}{n}.$$

Elevando ambos os lados dessa inequação por $\frac{1}{\beta} > 0$, temos:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = c_\beta.$$

$\blacksquare$

5.2 TEOREMA 4

Se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números positivos e $\alpha < \beta$, então $c_\alpha \leq c_\beta$. E o caso $c_\alpha = c_\beta$ ocorre apenas quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração: Observe que para α e β com sinais contrários, isto é $\alpha < 0 < \beta$, já foi provado no problema anterior. Agora falta provar o caso de α e β terem o mesmo sinal.

1º) Assumimos que $0 < \alpha < \beta$.

Chamando de $k = c_\alpha$, temos:

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dividindo c_β por k, fica:

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{(\frac{a_1}{k})^\beta + (\frac{a_2}{k})^\beta + \cdots + (\frac{a_n}{k})^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Agora, supondo $d_1 = (\frac{a_1}{k})^\alpha$,$d_2 = (\frac{a_2}{k})^\alpha, \cdots, d_n = (\frac{a_n}{k})^\alpha$, obtemos:

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} + (d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + (d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Fazendo as efetuações necessárias, fica:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\frac{(\frac{a_1}{k})^\alpha + \frac{a_2}{k})^\alpha + \cdots + (\frac{a_n}{k})^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{k}c_\alpha \\
&= \frac{1}{c_\alpha}c_\alpha \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Com isso, $\dfrac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n} = 1$, daí $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n$. Agora, supondo $d_1 = 1 + x_1$, $d_2 = 1 + x_2, \cdots, d_n = 1 + x_n$. Substituindo na equação $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n$ e fazendo as operações necessárias, temos: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Pelo teorema de Bernoulli e notando que $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$, temos:

$$(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_1,$$

$$(d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_2,$$

$$\cdots$$

$$(d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n.$$

Somando as equações acima, fica:

$$(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} + (d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + (d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n.$$

Com disso, voltamos para a seguinte equação:

$$\frac{c_\beta}{k} = \left[\frac{(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} + (d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + (d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}} \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1.$$

Logo, $\frac{c_\beta}{k} \geqslant 1 \Rightarrow c_\beta \geqslant k \Rightarrow c_\beta \geqslant c_\alpha$. Nesse caso, temos que $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$ e consequentemente $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = k$. Porém, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ não forem iguais, temos $c_\beta > c_\alpha$. Assim provamos o teorema para $0 < \alpha < \beta, \frac{\beta}{\alpha} > 1$.

Agora, se $\alpha < \beta < 0, \frac{\beta}{\alpha} < 1$, temos os sinais opostos que no teorema de Bernoulli e na soma deles, ficando:

$$\left(\frac{(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} + (d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + (d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right) \geqslant 1.$$

Daí, concluímos:

$$\frac{c_\beta}{k} = (\frac{(d_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} + (d_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + (d_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n})^{\frac{1}{\beta}} \geqslant 1^{\frac{1}{\beta}} = 1.$$

Então, $c_\beta \geqslant k = c_\alpha$.

$\blacksquare$

6 REGRA DE L'HOSPITAL

As regras de L'Hospital são utilizadas para calcular limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Além disso, ela será utilizada na prova do próximo capítulo. Porém ela não se encontra no trabalho no qual esse foi baseado.

6.1 1ª REGRA DE L'HOSPITAL

Sejam f e g funções deriváveis em $]p-r,p[$ e em $]p,p+r[$ com $r>0$ e com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to\ p} f(x)=0, \lim_{x\to\ p} g(x)=0$$

e se $\lim\limits_{x\to\ p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, indo tanto para finito quanto para infinito, então $\lim\limits_{x\to\ p}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to\ p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\ p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Observação: Essa regra continuá válida para se substituir "$x\to p$"por "$x\to p^+$"ou por "$x\to p^-$"ou por "$x\to\pm\infty$".

6.2 2ª REGRA DE L'HOSPITAL

Sejam f e g deriváveis em $]m,p[$, com $g'(x)\neq 0$ em $]m,p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to\ p^-} f(x)=+\infty, \lim_{x\to\ p^-} g(x)=+\infty$$

e se $\lim\limits_{x\to\ p^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, tanto finito quanto infinito, então $\lim\limits_{x\to\ p^-}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to\ p^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\ p^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação: Essa regra,também, continuá válida para se substituir " $x\to p$" por " $x\to p^+$" ou por " $x\to p^-$" ou por " $x\to\pm\infty$". Ou ainda se substituirmos um ou ambos os $+\infty$ por $-\infty$.

A demonstração das regras de L'Hospital pode ser encontrada no livro Um Curso de Cálculo, volume 1 do Hamilton Luiz Guidorizzi.

7 A DEMONSTRAÇÃO

Neste capítulo irei demonstrar como podemos utilizar a média ponderada para chegar à média geométrica, que foi um resultado que não foi encontrado no livro base, foi feito por mim. Repare que a média ponderada não é definida quando $x = 0$, por isso temos que aplicar limite na função.

Seja $f(x) = (\frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}}$ com $x \in R$ e $a_1, a_2, ..., a_n$ números positivos. Assim, pela continuidade da função logarítmica, temos:

$$\lim_{x\to\ 0} lnf(x) = \lim_{x\to\ 0} ln(\frac{a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}}.$$

Aplicando propriedades do ln:

$$= \lim_{x\to\ 0} \frac{1}{x} ln(a_1^x + ... + a_n^x) - lnn$$

$$= \lim_{x\to\ 0^+} \frac{ln(a_1^x + ... + a_n^x) - lnn}{x}$$

Aplicando a 1ª Regra de L'Hospital, fica:

$$= \lim_{x\to\ 0^+} \frac{1}{a_1^x + ... + a_n^x}(a_1^x lna_1 + ... + a_n^x lna_n)$$

$$= \frac{lna_1 + ... + lna_n}{n}$$

$$= ln\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

■

Assim conseguimos chegar na média geométrica utilizando a média ponderada.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia do trabalho foi trazer algo além de uma tradução formal do trabalho o qual esse foi baseado. Com isso, foram colocadas alguns conhecimentos da tradução mesmo, como os teoremas contendo a Média Aritmética e a Geométrica, a Desigualdade de Bernoulli, a definição de Média Potencial. Também foram colocadas informações a mais como as regras de L'Hospital, para depois demonstrar um jeito de partir da Média Ponderada para chegar na Média Geométrica.

Assim, o trabalho consta com informações sobre o mesmo tema, isto é, desigualdades e desigualdades das mádias, porém de uma maneira diferente do que a trazida em 1975.

Referências

CVETKOVSKI, Z. **Inequalities, Theorems, Techniques and Selected Problems**. Berlim, Alemanha: Springer, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, volume 1**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LIMA, E. CARVALHO et al. **A Matemética do Ensino Médio, volume 2**. [S.l.]: SBM, 2006.

KOROVKIN, P. P. **Inequalities**. [S.l.].