



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS BLUMENAU  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jonathan Eduardo Weber

**Recorrências: Teoria e aplicações no processo de ensino-aprendizagem**

Blumenau  
2024

Jonathan Eduardo Weber

**Recorrências: Teoria e aplicações no processo de ensino-aprendizagem**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.

Blumenau  
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Weber, Jonathan Eduardo

Recorrências: Teoria e aplicações no processo de ensino  
aprendizagem / Jonathan Eduardo Weber ; orientador,  
Francis Felix Cordova Puma, 2024.

100 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Recorrências. 3. Sistemas Dinâmicos.  
4. Ensino-aprendizagem. I. Puma, Francis Felix Cordova.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT. III. Título.

Jonathan Eduardo Weber

**Recorrências: Teoria e aplicações no processo de ensino-aprendizagem**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Francis Felix Cordova Puma, Dr(a).  
UFSC

Prof.(a) Louise Reips, Dr(a).  
UFSC

Prof.(a) Rafael Aleixo de Carvalho, Dr(a).  
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em matemática.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.  
Orientador

Blumenau, 2024.

Dedico este trabalho à minha família e a todos que, de alguma forma, contribuíram para sua realização.

## **AGRADECIMENTOS**

A conclusão deste trabalho só foi possível graças ao apoio e incentivo de várias pessoas, a quem sou profundamente grato.

Aos professores do PROFMAT/BNU que me forneceram uma base matemática necessária para enfrentar os desafios desta dissertação. Em especial, agradeço ao meu orientador Francis Felix Cordova Puma, cuja orientação foi fundamental para a construção deste trabalho.

À minha esposa Ana Caroline Sheffer Weber, cujo suporte e compreensão foram inestimáveis. Seu apoio emocional e o tempo que generosamente disponibilizou para que eu pudesse me dedicar ao desenvolvimento deste trabalho foram essenciais para minha chegada até aqui.

Aos meus pais, Sonia Maria Haerchen Weber e Eduardo Weber, que desde os primeiros anos de minha vida plantaram em mim o valor do estudo e do conhecimento. Seu incentivo constante e confiança no meu potencial serviram de motivação em cada etapa do meu caminho acadêmico.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado.

## RESUMO

Esta dissertação investiga sistemas modelados por uma ou mais recorrências e as sequências que constituem suas soluções. A partir desse estudo teórico, são apresentadas propostas de exercícios voltadas para o contexto educacional, com o objetivo de conectar a modelagem matemática à prática pedagógica. Nesta pesquisa, são exploradas as recorrências como meio de modelar fenômenos discretos, como o crescimento populacional e as interações entre as populações das espécies de uma comunidade e é mostrado como suas soluções, representadas por sequências, podem ser utilizadas didaticamente. A aplicação de recorrências no ensino tem como intuito permitir que os alunos compreendam de forma prática a evolução de fenômenos reais e revisem conceitos matemáticos importantes, tais como, progressões geométricas, equações quadráticas, sistemas de equações lineares e matrizes. Além disso, essa abordagem visa promover uma interdisciplinaridade da matemática com a biologia, tornando a aprendizagem mais significativa e contextualizada.

**Palavras-chave:** Recorrências. Sistemas dinâmicos discretos. Sequências. Ensino-Aprendizagem. Modelos biológicos.

## ABSTRACT

This dissertation investigates systems modeled by one or more difference equations and the sequences that constitute their solutions. Based on this theoretical study, exercise proposals are presented for educational context, aiming to connect mathematical modeling with pedagogical practice. In this research, difference equations are explored as a means of modeling discrete phenomena, such as population growth and the interactions between species within a community, demonstrating how their solutions, represented by sequences, can be used didactically. The application of difference equations in education aims to help students practically understand the evolution of real-world phenomena and review important mathematical concepts, such as geometric progressions, quadratic equations, systems of linear equations, and matrices. Furthermore, this approach seeks to promote interdisciplinary connections between mathematics and other fields, such as biology, making learning more meaningful and contextualized.

**Keywords:** Difference equations. Discrete dynamical systems. Sequences. Teaching and Learning. Biological models.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sequência de triângulos. . . . .	15
Figura 2 – Pontos fixos estável e instável . . . . .	29
Figura 3 – Ponto fixo assintoticamente estável na recorrência $x_{n+1} = -0,8x_n + 9$ . . . . .	29
Figura 4 – Teoria Malthusiana . . . . .	35
Figura 5 – Modelo de Verhulst . . . . .	41
Figura 6 – Simulações de formigas dos Exemplos 4.5 e 4.6 . . . . .	42
Figura 7 – Problema dos coelhos de Fibonacci . . . . .	56
Figura 8 – Antepassados de um zangão . . . . .	57
Figura 9 – Propagação anual de plantas . . . . .	59
Figura 10 – Simulação de Pulgões e Joaninhas ao longo do tempo . . . . .	81
Figura 11 – Gráfico de fase Lotka-Volterra . . . . .	83
Figura 12 – Simulação de duas populações de formigas ao longo do tempo . . . . .	85
Figura 13 – Simulação de Formigas e Besouros ao longo do tempo . . . . .	87
Figura 14 – Simulação de Formigas e Pulgões ao longo do tempo . . . . .	90
Figura 15 – Simulação de Abelhas, Formigas e Cochonilhas ao longo do tempo . . . . .	93

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Proposta de atividade sobre modelo de Malthus . . . . .	37
Quadro 2 – Proposta de atividade sobre modelo de Verhulst . . . . .	45
Quadro 3 – Proposta de atividade sobre recorrências lineares de 2ª ordem homogênea . . . . .	68
Quadro 4 – Proposta de atividade sobre recorrência linear de 2ª ordem não homogênea . . . . .	71
Quadro 5 – Proposta de atividade sobre sistemas lineares homogêneos . . . .	91
Quadro 6 – Proposta de atividade sobre Ponto de equilíbrio . . . . .	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Soluções reais de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ . . . . .	55
Tabela 2 – Soluções reais de $x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ , para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ . . . . .	66

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>ESPAÇO VETORIAL DAS SEQUÊNCIAS REAIS</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>RECORRÊNCIAS DE 1ª ORDEM</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1	SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE 1ª ORDEM . . .	21
3.2	EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE . . . . .	27
<b>4</b>	<b>MODELOS POPULACIONAIS</b> . . . . .	<b>33</b>
4.1	MODELO POPULACIONAL DE MALTHUS . . . . .	33
4.2	MODELOS POPULACIONAIS DE VERHULST . . . . .	38
<b>5</b>	<b>RECORRÊNCIAS DE ORDEM K</b> . . . . .	<b>46</b>
5.1	SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE 2ª ORDEM . . .	49
5.2	SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM K HO- MOGÊNEAS . . . . .	60
5.3	SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM K NÃO HOMOGÊNEAS . . . . .	69
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DE RECORRÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>
6.1	SISTEMA HOMOGÊNEO DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE 2 INCÓGNITAS . . . . .	72
6.2	SISTEMA DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE K INCÓGNITAS HO- MOGÊNEO . . . . .	75
6.3	EQUILÍBRIO DE SISTEMAS DE RECORRÊNCIAS . . . . .	77
<b>7</b>	<b>MODELOS DE RELAÇÕES ECOLÓGICAS</b> . . . . .	<b>79</b>
7.1	MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA VOLTERRA . . . . .	79
7.2	MODELOS DAS DEMAIS INTERAÇÕES INTERESPECÍFICAS . . .	83
<b>7.2.1</b>	<b>Modelo de interações interespecíficas com resistência do meio</b> .	<b>86</b>
7.3	MODELAGEM DE RELAÇÕES ECOLÓGICAS COM MAIS DE DUAS ESPÉCIES . . . . .	92
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE A – RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS</b>	<b>97</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho investigaremos teoricamente as recorrências e as sequências que formam suas soluções. A partir disso, apresentaremos modelos que utilizam estas recorrências na prática e proporemos exercícios para serem utilizados no contexto educacional.

Uma recorrência é uma ferramenta matemática usada para descrever a evolução de um fenômeno ao longo de um tempo discreto. Esse tipo de modelagem é utilizado em diversas áreas do conhecimento para compreender e prever o comportamento de diversos fenômenos. Exemplos desses fenômenos incluem a altura de um objeto em queda livre, o nível de água em uma represa, as flutuações no valor de um produto no mercado ou então o crescimento populacional de formigas em um certo formigueiro. Uma característica fundamental desses fenômenos é que o estado do sistema em um dado momento depende do seu estado em momentos anteriores, sendo regido por regras que determinam sua evolução ao longo do tempo, como acontece no exemplo do formigueiro, onde a população de formigas da próxima semana será definida a partir da população atual.

As recorrências são equações que expressam o valor de uma variável em um momento futuro com base em seus valores passados. Geralmente as recorrências são pouco exploradas ao longo do Ensino Médio, focando apenas nas progressões aritméticas e geométricas, porém, as sequências que compõem a solução das recorrências não só fornecem uma forma prática de prever o comportamento de sistemas ao longo do tempo, como também permitem que os estudantes desenvolvam uma compreensão mais profunda de como a matemática pode ser aplicada para modelar fenômenos reais de maneira simples.

Uma das competências específicas da matemática na BNCC é utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Ainda de acordo com a BNCC, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos (BRASIL, 2018). O objetivo deste trabalho é auxiliar na formação continuada de professores da educação básica, lhes mostrando como o uso de recorrências pode oferecer uma oportunidade valiosa para explorar e aprofundar com seus alunos diversos conceitos matemáticos do Ensino Médio, através de aplicações.

No Capítulo 2, apresentaremos as sequências reais, que constituem as soluções das recorrências presentes nos modelos que abordaremos. Exploraremos suas propriedades e a estrutura matemática que permite estudar as sequências como elementos vetoriais, finalizando com a apresentação do conceito de limite de sequências.

No Capítulo 3, discutiremos as recorrências de 1ª ordem, com foco na resolução de recorrências lineares, algumas de suas propriedades e o estudo de pontos de

equilíbrio e estabilidade.

Em seguida, no Capítulo 4, exploraremos os Modelos Populacionais de Malthus e de Verhulst. Através desses modelos, mostraremos como as recorrências podem ser aplicadas para descrever o crescimento populacional de uma espécie, além de destacar como essas aplicações podem ser usadas como ferramentas no processo de ensino-aprendizagem, com exemplos práticos.

No Capítulo 5, aprofundaremos o conceito de recorrências com as recorrências de ordem  $k$ , apresentando as soluções para as recorrências lineares de 2ª ordem e, em seguida, algumas soluções para as recorrências de ordem  $k$ , tanto homogêneas quanto não homogêneas. Neste capítulo discutiremos também exemplos de suas aplicações, como no famoso problema dos coelhos de Fibonacci, na propagação de plantas anuais e na dinâmica populacional de insetos com faixas etárias, assim como os conceitos matemáticos que são trabalhados com esses exemplos.

Continuaremos nosso estudo no Capítulo 6 com os sistemas de recorrências, começando com a solução de sistemas lineares com 2 e  $k$  incógnitas e finalizando o capítulo com a análise dos pontos de equilíbrio para sistemas.

Por fim, no Capítulo 7, analisaremos modelos de relações ecológicas, como o Modelo de Lotka-Volterra para interações predador-presa, bem como modelos de outros tipos de interações interespecíficas, como a competição entre duas ou mais espécies.

## 2 ESPAÇO VETORIAL DAS SEQUÊNCIAS REAIS

As recorrências ou equações de diferenças são equações matemáticas que descrevem a evolução de uma sequência de números, estabelecendo uma relação entre termos sucessivos dessa sequência. As noções e técnicas associadas às sequências serão amplamente utilizadas nos capítulos subsequentes, onde exploraremos suas aplicações em sistemas biológicos.

**Definição 2.1.** Seja a função:

$$\begin{aligned}x &: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x(n),\end{aligned}$$

em que  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . A lista ordenada das imagens  $x_n = x(n)$  será chamada de sequência e a denotaremos por:

$$(x_n) = (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Aqui  $x_n$  é chamado de termo geral da sequência  $(x_n)$  e  $n$  é chamado de posição do termo  $x_n$  na sequência.

**Exemplo 2.1.** São exemplos de sequências:

- Sequência formada pelas imagens da função  $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $x(n) = n + 1$ , ou seja,  $(x_n) = (n + 1) = (1, 2, 3, \dots)$ .
- Sequência formada pelos inteiros pares não negativos, ou seja,  $(2n) = (0, 2, 4, \dots)$ .
- Sequência formada pelos cubos dos inteiros não negativos, ou seja,  $(n^3) = (0, 1, 8, \dots)$ .

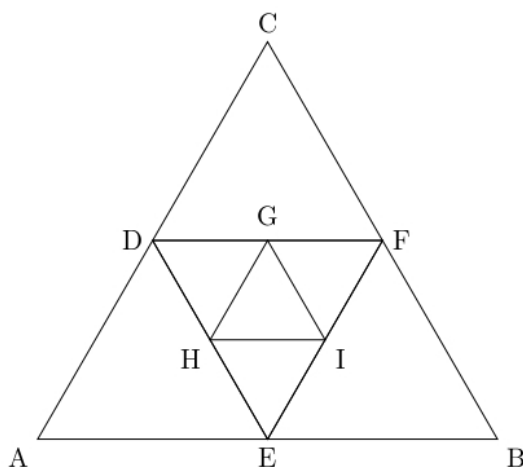
As sequências numéricas estão profundamente integradas ao nosso cotidiano, frequentemente de forma tão natural que muitas vezes nem nos damos conta de sua presença. O exemplo a seguir corrobora essa afirmação.

**Exemplo 2.2.** Considere que a partir do quilômetro 5 de uma rodovia foram instalados pontos de ônibus a cada 2km. Neste caso, há pontos de ônibus nos quilômetros 5, 7, 9, 11 e assim sucessivamente, formando a sequência  $(x_n) = (5, 7, 9, 11, \dots)$ .

**Exemplo 2.3** (Sequência de triângulos). Dado um triângulo equilátero de lado  $l$ , sabemos que sua área é igual a  $A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$ . Consideremos, inicialmente, um triângulo equilátero de lado  $l_0 = 1\text{m}$ , logo sua área é igual a  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{m}^2$ . Se dentro deste triângulo inscrevermos um outro triângulo equilátero, em que os vértices são os pontos médios dos lados do primeiro triângulo, podemos notar que a área deste novo triângulo é igual a  $A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ , ou seja,  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo anterior<sup>1</sup>. Na Figura 1 estão ilustrados os três primeiros triângulos equiláteros dessa sequência.

<sup>1</sup>Consequência dos postulados da congruência de triângulos.

Figura 1 – Sequência de triângulos.



Fonte: O autor.

Uma sequência infinita de áreas de triângulos equiláteros decrescente pode ser criada inscrevendo um triângulo dentro do outro, a partir do primeiro. Usando um argumento indutivo, temos que esta sequência é dada portanto por

$$(A_n) = \left( \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} \right) = \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{\sqrt{3}}{64}, \dots \right).$$

Veremos agora que as sequências reais formam um espaço vetorial sobre os corpo dos números reais. O espaço vetorial é um dos conceitos fundamentais da matemática, desempenhando um papel crucial em diversas áreas. A importância dos espaços vetoriais se estende além da abstração matemática, eles fornecem as bases para a modelagem de fenômenos em diversas áreas da ciência. Na física, por exemplo, os vetores são usados para descrever forças, velocidades e outros conceitos fundamentais, já na computação, os espaços vetoriais são essenciais para o processamento de imagens.

Espaços vetoriais permitem analisar as propriedades das sequências que satisfazem uma equação de recorrência de forma mais sistemática. Por exemplo, ao estudar uma equação linear de recorrência com coeficientes constantes, as soluções podem ser vistas como vetores em um espaço vetorial, e a busca por uma base para esse espaço ajuda a determinar todas as soluções possíveis da equação. A seguir, listamos algumas definições e proposições a cerca de espaços vetoriais.

**Definição 2.2.** Um conjunto não vazio  $L$  é dito ser um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  (também chamado de  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial) se for unido de uma operação binária interna  $L \times L \rightarrow L$ , denominada adição  $(l_1, l_2) \mapsto l_1 + l_2$  e uma operação binária externa  $\mathbb{K} \times L \rightarrow L$ , denominada multiplicação por escalar  $(\alpha, l) \mapsto \alpha l$ , que satisfazem as propriedades:



- A1)  $l_1 + l_2 = l_2 + l_1, \forall l_1, l_2 \in L$ .  
 A2)  $l_1 + (l_2 + l_3) = (l_1 + l_2) + l_3, \forall l_1, l_2, l_3 \in L$ .  
 A3) Existe  $0 \in L$  tal que  $0 + l = l, \forall l \in L$ .  
 A4) Para cada  $l \in L$ , existe  $-l \in L$  tal que  $l + (-l) = 0$ .  
 M1) Existe  $1 \in \mathbb{K}$  tal que  $1l = l, \forall l \in L$ .  
 M2)  $\alpha(\beta l) = (\alpha\beta)l, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $l \in L$ .  
 D1)  $\alpha(l_1 + l_2) = \alpha l_1 + \alpha l_2, \forall \alpha \in \mathbb{K}$  e  $l_1, l_2 \in L$ .  
 D2)  $(\alpha + \beta)l = \alpha l + \beta l, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $l \in L$ .

**Proposição 2.1.** O conjunto de todas as sequências reais:

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_n) ; x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

juntamente com as operações de adição de sequências:

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots),$$

e de multiplicação de sequência por escalar:

$$\alpha(x_n) := (\alpha x_n) = (\alpha x_0, \alpha x_1, \dots), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

*Demonstração.* Para provar que  $\mathbb{R}^\infty$  forma um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , devemos demonstrar que são válidas todas as 8 propriedades de espaço vetorial.

Sejam  $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^\infty$ , temos que  $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Portanto,

A1)  $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (y_n + x_n) = (y_n) + (x_n)$ ;

A2)  $((x_n) + (y_n)) + (z_n) = ((x_n + y_n) + z_n) = (x_n + (y_n + z_n)) = (x_n) + ((y_n) + (z_n))$ ;

A3)  $(x_n) + (0, 0, \dots) = (x_0 + 0, x_1 + 0, \dots) = (x_0, x_1, \dots) = (x_n)$ ;

A4) Sendo  $-1(x_n) = (-x_n)$ , note que  $(-x_n) \in \mathbb{R}^\infty$ . Consequentemente, temos que  $(x_n) + (-x_n) = (x_0 - x_0, x_1 - x_1, \dots) = (0, 0, \dots)$ ;

M1)  $1(x_n) = (1x_n) = (x_n)$ ;

Ademais, sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , temos que:

M2)  $(\alpha\beta)(x_n) = (\alpha\beta x_n) = \alpha(\beta x_n)$ ;

D1)  $\alpha(x_n + y_n) = (\alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_n) + (\alpha y_n)$ ;

D2)  $(\alpha + \beta)(x_n) = ((\alpha + \beta)x_n) = (\alpha x_n + \beta x_n) = (\alpha x_n) + (\beta x_n)$ .

Concluimos então, que o conjunto de todas as sequências reais, juntamente com as operações de adição entre sequências e de produto de sequência por escalar real formam um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.  $\square$

*Observação:* O conjunto de todas as sequências de números complexos  $\mathbb{C}^\infty$  juntamente com as operações de adição de sequências e multiplicação por escalar forma um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e a demonstração é análoga ao  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Para

um estudo mais aprofundado de definições e resultados envolvendo espaços vetoriais, ver Lima (2014a), visto que esse conteúdo foge do escopo do trabalho.

Em muitos fenômenos, podemos estar interessados em prever o que ocorrerá no futuro, se as variáveis observadas se estabilizarão em um valor específico, aumentarão indefinidamente ou apresentarão um padrão cíclico. No Exemplo 2.3, observamos que, à medida que o valor de  $n$  aumenta, a área do triângulo diminui, aproximando-se cada vez mais de zero. Nesse contexto, dizemos então que a sequência converge para zero.

**Definição 2.3.** Seja  $L$  um número real, dizemos que uma sequência  $(x_n)$  converge para  $L$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Neste caso,  $L$  é chamado de limite da sequência  $(x_n)$ , denotado por  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ . Caso não exista um número  $L$  tal que a sequência  $(x_n)$  convirja, dizemos que  $(x_n)$  é divergente.

**Exemplo 2.4.** Determinar se a sequência  $\left(\frac{1}{n+1}\right)$  é convergente.

Solução: Seja  $\varepsilon > 0$ , pela propriedade arquimediana<sup>2</sup> dos números reais, temos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ . Sendo assim,

$$n \geq N \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ , ou seja, a sequência  $\left(\frac{1}{n+1}\right)$  converge para 0.

**Exemplo 2.5.** Sendo  $C \in \mathbb{R}$ , determinar se a sequência constante  $(x_n) = (C)$  é convergente.

Solução: Como  $(x_n) = (C)$ , temos que  $|x_n - C| = |C - C| = 0$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $|x_n - C| < \varepsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Concluímos então que a sequência  $(x_n) = (C)$  converge para  $C$ .

Apresentamos a seguir, nas Proposições 2.2 e 2.3, limites importantes para os próximos capítulos, utilizados para estudar propriedades qualitativas das recorrências.

**Proposição 2.2.** Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Se  $a > 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a^n}\right) = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $a > 1$ , pela propriedade arquimediana temos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N \ln(a) > -\ln \varepsilon$ , ou seja, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln(a)}$ . Portanto:

$$n \geq N \Rightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln(a)} \Rightarrow 0 < \ln(\varepsilon) + n \ln(a) \Rightarrow 0 < \ln(\varepsilon a^n).$$

<sup>2</sup> $\mathbb{R}$  é um corpo arquimediano, isto é, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $aN > b$ , ver Lima (2014b).

Como a função exponencial é injetiva e crescente, temos que:

$$1 < \varepsilon a^n \Rightarrow \frac{1}{a^n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Sendo assim, concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a^n} \right) = 0$ .  $\square$

**Exemplo 2.6.** Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) = 0$ .

Solução: Como  $\frac{3}{2} > 1$ , pela Proposição 2.2, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{\frac{3}{2}} \right)^n \right) = 0.$$

**Proposição 2.3.** Sejam  $C \in \mathbb{R}$  e  $(x_n)$  uma seqüência convergente em que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = CL$ .

*Demonstração.* Para  $C = 0$  a proposição é trivial, vamos então demonstrar para  $C \neq 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\frac{\varepsilon}{|C|} > 0$  e, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ , segue que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{|C|} \Rightarrow |C||x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow |Cx_n - CL| < \varepsilon,$$

concluindo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Cx_n) = CL$ .  $\square$

**Exemplo 2.7.** Mostre que a seqüência de áreas de triângulos do Exemplo 2.3 converge para zero.

Solução: De acordo com o Exemplo 2.3, a área do  $n$ -ésimo triângulo é dada por  $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{4^n} \right) \right).$$

Portanto, pela Proposição 2.3, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4^n} \right) = 0$$

e, pela Proposição 2.2, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = 0$$

**Proposição 2.4.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  duas seqüências convergentes, com  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = K$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = L + K$ .

*Demonstração.* Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Analogamente, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = K$ , então existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - K| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Seja  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , temos que

$$\begin{aligned}n \geq N \Rightarrow n \geq N_1 \text{ e } n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |y_n - K| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - L| + |y_n - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow |x_n - L| + |y_n - K| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ademais, pela desigualdade triangular, temos

$$|(x_n + y_n) - (L + K)| = |x_n - L + y_n - K| \leq |x_n - L| + |y_n - K|.$$

Portanto, segue que  $|(x_n + y_n) - (L + K)| < \varepsilon$ , concluindo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = L + K$ .  $\square$

**Exemplo 2.8.** Determinar a convergência da sequência  $\left(\frac{1}{n} + 3\right)$ .

$$\text{Solução: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (3) = 0 + 3 = 3.$$

Neste capítulo, vimos como as operações de soma de sequências e multiplicação por escalares seguem os axiomas de um espaço vetorial. Isso nos permite usar conceitos como linearidade, dependência e independência linear, e bases para estudar as sequências de forma mais profunda. Além disso, ao tratar sequências reais como vetores, conseguiremos abordar, nos capítulos seguintes, questões como a solução de equações de recorrência e a representação de sequências como combinações lineares. Compreender sequências reais como espaços vetoriais facilita o estudo teórico e amplia as aplicações em áreas como modelagem matemática e resolução de problemas discretos. O conhecimento adquirido neste capítulo servirá de base para os próximos, onde exploraremos técnicas avançadas para resolver equações de recorrência e suas aplicações práticas.

### 3 RECORRÊNCIAS DE 1ª ORDEM

As recorrências de primeira ordem são equações que descrevem a evolução de uma sequência em função de seu termo imediatamente anterior. Elas são uma das formas mais simples e fundamentais de equações de recorrência e têm ampla aplicação em diversos campos da matemática e da ciência, como em algoritmos e análise de crescimento populacional. Iniciaremos agora o estudo dessa poderosa ferramenta matemática.

**Definição 3.1.** Uma relação de recorrência (também chamada de equação de diferença ou apenas recorrência) de 1ª ordem é uma relação que determina o valor de cada termo  $x_{n+1}$  de uma sequência em função do termo anterior  $x_n$  dessa sequência da seguinte forma:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Ou seja, cada termo  $x_{n+1}$  é dado por uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuja variável independente é o termo anterior  $x_n$ . A função  $f$  pode depender também de  $n \in \mathbb{N}_0$  e, neste caso, a recorrência possui a forma:

$$x_{n+1} = f(x_n, n). \quad (2)$$

Caso a função  $f$  não dependa da variável  $n$  ela é chamada de *autônoma* e, caso contrário, é chamada de *não autônoma*.

Note que como  $n \in \mathbb{N}_0$ , o primeiro termo a ser definido pela recorrência  $x_{n+1} = f(x_n, n)$  é o termo  $x_1$  (quando  $n = 0$ ). Sendo assim, o termo inicial  $x_0$  da sequência não é definido pela recorrência. Para uma sequência ser dada por uma recorrência precisamos, além da relação de recorrência, do valor de  $x_0$ , também chamado de condição inicial. Seguem alguns exemplos:

**Exemplo 3.1.** A recorrência  $x_{n+1} = x_n + n$  é uma recorrência não autônoma que determina, por exemplo, a sequência  $(1, 1, 2, 4, 7, \dots)$ , caso  $x_0 = 1$  e determina também a sequência  $(3, 3, 4, 6, 9, \dots)$ , caso  $x_0 = 3$ .

**Exemplo 3.2.** A recorrência  $x_{n+1} = 2x_n + 1$  é uma recorrência autônoma que determina, por exemplo, a sequência  $(2, 5, 11, 23, \dots)$ , caso  $x_0 = 2$ , como também determina a sequência  $(3, 7, 15, 31, \dots)$ , caso  $x_0 = 3$ .

Os Exemplos 3.1 e 3.2 nos mostram que uma recorrência pode ter mais de uma solução, pois, diferentes valores iniciais  $x_0$  podem definir diferentes sequências que satisfazem a recorrência.

**Definição 3.2.** Uma sequência  $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$  é dita uma solução real da recorrência (1) se o termo  $x_n$  satisfaz a relação de recorrência para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Da mesma forma,

uma sequência  $(x_n) \in \mathbb{C}^\infty$  é dita uma solução complexa da recorrência (1) se o termo  $x_n$  satisfaz a relação de recorrência para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ <sup>1</sup>.

O conjunto de todas as sequências que são soluções de uma recorrência é chamado de *conjunto solução* enquanto que cada elemento desse conjunto é dito ser uma *solução particular da recorrência*.

**Exemplo 3.3.** As sequências  $(a_n) = (2n) = (0, 2, 4, \dots)$  e  $(b_n) = (2n + i) = (i, 2 + i, 4 + i, \dots)$  são, respectivamente, uma solução real e uma solução complexa da recorrência  $x_{n+1} = x_n + 2$ . De fato, já que  $a_{n+1} = 2(n + 1) = 2n + 2 = a_n + 2$  e também  $b_{n+1} = 2(n + 1) + i = 2n + 2 + i = (2n + i) + 2 = b_n + 2$ .

### 3.1 SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE 1ª ORDEM

Analisaremos agora as soluções de uma importante classe de recorrências, as recorrências lineares de 1ª ordem com coeficientes constantes, soluções essas associadas à álgebra linear.

**Definição 3.3.** Uma recorrência é chamada de *linear* se  $f(x_n, n)$  for linear na variável  $x_n$ . Sendo assim, as recorrências lineares de 1ª ordem são da forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \quad (3)$$

onde  $g(n)$  e  $h(n)$  são funções  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso  $h(n) = 0$ , a recorrência linear é dita *homogênea*. Caso contrário, chamaremos a recorrência linear de *não homogênea*.

**Exemplo 3.4.** São exemplos de recorrências lineares: A recorrência  $x_{n+1} = 2x_n + 3n$  é uma recorrência linear não homogênea em que  $g(n) = 2$  e  $h(n) = 3n$ .

**Exemplo 3.5.** A recorrência  $x_{n+1} = n^2 x_n$  é uma recorrência linear homogênea em que  $g(n) = n^2$ .

**Exemplo 3.6.** A recorrência  $x_{n+1} = x_n^2$  é um exemplo de recorrência não linear.

Começaremos nosso estudo pela recorrência linear homogênea, ou seja, em que  $h(n) = 0$  e  $g(n) = q \in \mathbb{R}$ , possuindo a forma:

$$x_{n+1} = qx_n, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

**Proposição 3.1.** A solução real da recorrência (4) é dada por:

$$(x_n) = (x_0 q^n).$$

*Demonstração.* Pela recorrência (4), seguem as seguintes igualdades:

<sup>1</sup>A solução da recorrência (1) é definida de maneira análoga.

$$\begin{aligned}x_1 &= qx_0, \\x_2 &= qx_1, \\x_3 &= qx_2, \\&\vdots \\x_n &= qx_{n-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades acima membro a membro, temos que:

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = q^n x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \Rightarrow x_n = q^n x_0,$$

concluindo que a solução real da recorrência (4) é dada por:

$$(x_n) = (x_0 q^n).$$

□

**Exemplo 3.7.** Determine a solução geral da recorrência  $x_{n+1} = 2x_n$  e a solução particular para  $x_0 = 3$ .

Solução: Pela Proposição 3.1, segue que a solução geral de  $x_{n+1} = 2x_n$  é dada por  $x_n = x_0 \cdot 2^n$ , em que  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $x_n = 3 \cdot 2^n = (3, 6, 12, \dots)$  é a solução particular para  $x_0 = 3$ .

A solução da recorrência linear homogênea (4) estudada nesta seção é uma importante sequência conhecida também como Progressão Geométrica, uma das sequências mais estudadas ao longo do Ensino Médio.

**Definição 3.4.** Uma Progressão Geométrica (ou PG) é uma sequência em que cada termo, a partir de  $x_1$ , é dado pelo produto do termo anterior a uma constante real  $q$ , chamada de razão da PG. Sendo assim, uma Progressão Geométrica é uma solução da recorrência  $x_{n+1} = qx_n$ .

Perceba que por consequência dessa definição, se  $x_n \neq 0$ , a razão  $q$  da PG é a razão entre dois de seus termos consecutivos, ou seja:

$$q = \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Seguem alguns exemplos:

**Exemplo 3.8.** Uma PG  $(a_n)$  de razão  $q = 4$  e  $x_0 = 1$  é dada pela sequência  $(a_n) = (1, 4, 16, \dots)$ .

**Exemplo 3.9.** Sabendo que a sequência  $(a_n) = (2, 6, 18, \dots)$  é uma PG, determinar o seu termo geral e o valor de  $a_{10}$ .

Solução: Como  $(a_n)$  é uma PG, sua razão  $q$  é dada pela razão entre dois termos consecutivos, portanto:

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{6}{2} = 3.$$

Sendo assim, pela Proposição 3.1, o termo geral da solução é dado por  $a_n = 2 \cdot 3^n$ . Calculando o valor do termo  $a_{10}$ , temos que:

$$a_{10} = 2 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 59049 = 118098.$$

Ao resolver um problema envolvendo progressões geométricas, em muitos casos precisaremos da soma dos  $k$  primeiros termos da PG, o que pode ser trabalhoso, dependendo do número de termos que compõem a soma. A seguir será apresentada uma expressão para se obter tal soma.

**Proposição 3.2.** Seja  $S_k$  a soma dos  $k$  primeiros termos de uma PG  $(x_n)$ , temos que

$$S_k = x_0 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

*Demonstração.* Note que:

$$S_k = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}.$$

Reescrevendo as parcelas usando o termo geral da PG, segue que

$$\begin{aligned} S_k &= (x_0 q^0) + (x_0 q^1) + (x_0 q^2) + \cdots + (x_0 q^{k-1}) \\ \Rightarrow S_k &= x_0(1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{k-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (5) por  $(q - 1)$ , temos que

$$\begin{aligned} (q - 1)S_k &= x_0(1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{k-1})(q - 1) \\ \Rightarrow (q - 1)S_k &= x_0(q^k - 1) \Rightarrow S_k = x_0 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.10.** Calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG  $(a_n) = (2 \cdot 3^n)$ .

Solução: A soma dos 11 primeiros termos de uma sequência  $(a_n)$  é dada pela soma dos termos entre  $a_0$  e  $a_{10}$  que, pela Proposição 3.2, é dada por

$$S_{11} = 2 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} = 2 \cdot \frac{177146}{2} = 177146.$$

Analisaremos agora as recorrências lineares não homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, em que  $g(n) = q$  e  $h(n) = r$ , onde  $q, r \in \mathbb{R}$ :

$$x_{n+1} = qx_n + r. \quad (6)$$

**Proposição 3.3.** Seja  $(\hat{x}_n)$  uma solução qualquer da recorrência (6), então toda solução  $(x_n)$  desta recorrência pode ser escrita por:

$$(x_n) = ((x_0 - \hat{x}_0) \cdot q^n + \hat{x}_n).$$



*Demonstração.* Sejam  $(x_n)$  e  $(\hat{x}_n)$  duas soluções distintas da recorrência (6), temos que a sequência definida por  $(u_n) = (x_n - \hat{x}_n)$  é solução da recorrência linear homogênea  $x_{n+1} = qx_n$ . De fato,

$$u_{n+1} = x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} = qx_n + r - (q\hat{x}_n + r) = q(x_n - \hat{x}_n) = qu_n.$$

Como  $(u_n)$  é solução da recorrência  $x_{n+1} = qx_n$ , pela Proposição 3.1,  $(u_n)$  é dada por:

$$(u_n) = (u_0 \cdot q^n), \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, segue que

$$u_n = x_n - \hat{x}_n \Rightarrow u_0 \cdot q^n = x_n - \hat{x}_n \Rightarrow x_n = u_0 \cdot q^n + \hat{x}_n.$$

Como  $u_0 = x_0 - \hat{x}_0$ , concluímos que se  $(\hat{x}_n)$  for uma solução qualquer da recorrência (6), então toda solução  $(x_n)$  desta recorrência pode ser escrita por

$$(x_n) = ((x_0 - \hat{x}_0) \cdot q^n + \hat{x}_n).$$

□

Perceba que se na recorrência (6) tomarmos  $q = 1$ , temos um caso particular muito interessante de recorrência linear não homogênea, a Progressão Aritmética. Assim como a Progressão Geométrica, a Progressão Aritmética também é muito abordada no Ensino Médio.

**Definição 3.5.** Uma Progressão Aritmética (ou PA) é uma sequência em que cada termo, a partir de  $x_1$ , é dado pela soma do termo anterior a uma constante real  $r$ , chamada de razão da PA. Sendo assim, uma Progressão Aritmética é uma solução da recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Perceba que por consequência desta definição, a razão  $r$  é dada pela diferença entre dois termos consecutivos da PA, ou seja:

$$r = x_{n+1} - x_n.$$

**Exemplo 3.11.** Uma PA  $(a_n)$  de razão  $r = 4$  e termo inicial  $x_0 = 1$  é dada pela sequência  $(a_n) = (1, 5, 9, \dots)$ .

As Proposições 3.4 e 3.5 a seguir determinam, respectivamente, uma solução particular e a solução geral das Progressões Aritméticas.

**Proposição 3.4.** A sequência  $(\hat{x}_n) = (rn)$  é uma solução particular da recorrência (7).

*Demonstração.* Da recorrência (7) seguem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + r, \\
 x_2 &= x_1 + r, \\
 x_3 &= x_2 + r, \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + r.
 \end{aligned}$$

Somando estas igualdades membro a membro, temos que:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + rn \\
 \Rightarrow x_n &= x_0 + rn.
 \end{aligned}$$

Tomando  $x_0 = 0$ , segue que  $(\hat{x}_n) = (rn)$  é uma solução da recorrência (7). □

**Proposição 3.5.** Toda solução da progressão aritmética (7) é dada por:

$$(x_n) = (x_0 + rn).$$

*Demonstração.* Consequência direta das Proposições 3.3 e 3.4. □

**Exemplo 3.12.** Determinar o termo  $x_{100}$  da PA do Exemplo 3.11, de  $r = 4$  e  $x_0 = 1$   
 Solução: Pela Proposição (3.5), esta PA possui o termo geral  $x_n = 1 + 4n$ . Portanto,  $x_{100} = 1 + 4 \cdot 100 = 401$ .

Assim como feito na progressão geométrica, analisaremos agora a soma dos  $k$  primeiros termos da progressão aritmética.

**Proposição 3.6.** Seja  $S_k$  a soma dos  $k$  primeiros termos de uma PA  $(x_n)$ , temos que

$$S_k = \frac{(x_0 + x_{k-1})k}{2}.$$

*Demonstração.* Como  $S_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-2} + x_{k-1}$ , temos:

$$2S_k = (x_0 + x_0) + (x_1 + x_1) + \cdots + (x_{k-2} + x_{k-2}) + (x_{k-1} + x_{k-1}).$$

Reordenando os termos do segundo membro desta igualdade, temos que

$$2S_k = (x_0 + x_{k-1}) + (x_1 + x_{k-2}) + \cdots + (x_{k-2} + x_1) + (x_{k-1} + x_0)$$

$$\Rightarrow 2S_k = \sum_{i=0}^{k-1} (x_i + x_{k-1-i}).$$

Substituindo os termos  $x_i$  e  $x_{k-1-i}$  por seus termos gerais da PA, segue que

$$2S_k = \sum_{i=0}^{k-1} [(x_0 + ri) + (x_0 + r(k-1-i))]$$

$$\Rightarrow 2S_k = \sum_{i=0}^{k-1} [x_0 + x_0 + r(k-1)] \Rightarrow 2S_k = \sum_{i=0}^{k-1} (x_0 + x_{k-1}) \Rightarrow 2S_k = (x_0 + x_{k-1})k,$$

concluindo que

$$S_k = \frac{(x_0 + x_{k-1})k}{2}.$$

□

**Exemplo 3.13.** A soma dos 100 primeiros termos da PA  $(x_n) = (n + 1) = (1, 2, 3, \dots)$  é dada por:

$$S_{100} = \frac{(x_0 + x_{99})100}{2} = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5050.$$

Vamos agora analisar a solução da recorrência linear não homogênea (6) no caso em que esta não forma uma PA, ou seja, quando  $q \neq 1$ .

**Proposição 3.7.** Se  $q \neq 1$ , então a sequência constante  $(\hat{x}_n) = \left(\frac{r}{1-q}\right)$  é uma solução particular da recorrência (6).

*Demonstração.* Como a recorrência (6) possui um termo independente constante, testaremos se existe uma solução constante  $(\hat{x}_n) = (K) = (K, K, K, \dots)$ , onde  $K \in \mathbb{R}$ , que seja solução desta recorrência. Substituindo  $K$  na recorrência (6), temos que:

$$K = qK + r \Rightarrow K(1 - q) = r \Rightarrow K = \frac{r}{1 - q}.$$

Vemos, então, que se  $q \neq 1$ , a sequência constante  $(\hat{x}_n) = \left(\frac{r}{1-q}\right)$  é uma solução particular da recorrência (6). □

**Proposição 3.8.** Se  $q \neq 1$  então todas as soluções da recorrência (6) são dadas por

$$(x_n) = \left(x_0 q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

*Demonstração.* Pela Proposição 3.3, temos que se  $(\hat{x}_n)$  é uma solução da recorrência (6), então toda solução é dada por  $(x_n) = ((x_0 - \hat{x}_0)q^n + \hat{x}_n)$ . De acordo com a Proposição 3.7, a sequência  $\left(\frac{r}{1-q}\right)$  é uma solução particular da recorrência (6), portanto segue que

$$(x_n) = \left(\left(x_0 - \frac{r}{1-q}\right)q^n + \left(\frac{r}{1-q}\right)\right) \Rightarrow (x_n) = \left(x_0 q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

□

Segue um tipo de exemplo bastante abordado no Ensino Médio:

**Exemplo 3.14.** Considere que a partir de um certo mês uma pessoa decida depositar em seu banco uma quantia de R\$100,00 em todo o dia 10 do mês. Sabendo que o banco gera por mês um juro composto de 2% ao mês sobre o valor total guardado,

calculado sempre no 1º dia de cada mês, qual valor esta pessoa possuirá no banco ao final de um mês  $t$ ?

Solução: Como a cada mês o banco gera 2% de juros sobre o valor guardado e em seguida são depositados 100 reais, temos que a cada mês  $(t + 1)$  o valor presente  $v_{t+1}$  no banco em relação ao valor do mês anterior  $t$ ,  $v_t$ , é dado pela recorrência

$$v_{t+1} = 1,02v_t + 100.$$

Como inicialmente foi depositado R\$100,00, temos que o valor inicial é de  $v_0 = 100$ . Temos então que solução da recorrência é dada por:

$$(v_t) = \left( 100 \cdot 1,02^t + 100 \cdot \frac{1,02^t - 1}{1,02 - 1} \right) = (5100 \cdot 1,02^t - 5000).$$

Portanto, após  $t$  meses, a pessoa possuirá o valor de  $100(51 \cdot 1,02^t - 50)$  reais.

### 3.2 EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE

Não são todas as recorrências que possuem um método analítico geral para se obter a sua solução, como é o caso das recorrências não lineares. Portanto, ao invés destas recorrências serem estudadas de forma quantitativa pela sua solução, elas são estudadas de forma qualitativa, como por exemplo, através da análise da existência de pontos de equilíbrio e da estabilidade desses pontos.

**Definição 3.6.** Considere a recorrência de 1ª ordem autônoma  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Um ponto  $x^*$  do domínio da função  $f$  é chamado de ponto fixo (ou ponto de equilíbrio) da recorrência se  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , ou seja,

$$x^* = f(x^*).$$

Note que se  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , então  $x^*$  forma uma solução constante  $(x_n) = (x^*, x^*, x^*, \dots)$  para a recorrência.

**Exemplo 3.15.** Determinar os pontos de equilíbrio e as soluções constantes da recorrência:

$$x_{n+1} = x_n(x_n + 1) - 4.$$

Solução: Sendo  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , segue que  $x^* = x^*(x^* + 1) - 4 \Rightarrow (x^*)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^* = -2$  ou  $x^* = 2$ .

Portanto, a recorrência dada possui dois pontos de equilíbrio,  $x_1^* = -2$  e  $x_2^* = 2$ . Temos assim duas sequências constantes que são soluções da recorrência  $x_{n+1} = x_n(x_n + 1) - 4$ , as sequências  $(-2, -2, -2, \dots)$  e  $(2, 2, 2, \dots)$ .

**Exemplo 3.16.** Encontrar os pontos de equilíbrio da recorrência linear não homogênea

$$x_{n+1} = qx_n + r, \text{ para } q \neq 1.$$

Solução: Sendo  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , segue que:

$$x^* = qx^* + r \Rightarrow (1 - q)x^* = r$$

Logo, os pontos de equilíbrio são da forma

$$x^* = \frac{r}{1 - q}.$$

**Exemplo 3.17.** Encontrar os pontos de equilíbrio da recorrência  $x_{n+1} = (x_n)^3$ .

Solução: Sendo  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , segue que:

$$x^* = (x^*)^3 \Rightarrow x^*[(x^*)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow x_1^* = -1 \quad \text{ou} \quad x_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad x_3^* = 1.$$

Portanto,  $x^* = -1$ ,  $x^* = 0$  e  $x^* = 1$  são os pontos de equilíbrio de  $x_{n+1} = (x_n)^3$ .

Vamos agora analisar a estabilidade nos pontos de equilíbrio de uma recorrência, ou seja, estudar o comportamento das suas soluções próximas aos pontos de equilíbrio.

**Definição 3.7.** Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é chamado de estável<sup>2</sup> se dado um  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, se  $|x_0 - x^*| < \delta$ , então  $|x_n - x^*| < \varepsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Caso  $x^*$  não for estável, dizemos que  $x^*$  é instável.

Um ponto de equilíbrio ser estável significa que sempre é possível encontrar um valor inicial  $x_0$  próximo ao ponto fixo tal que a sequência esteja toda dentro de um intervalo de raio  $\varepsilon$ , centrado no ponto fixo (Figura 2a). O ponto de equilíbrio ser instável significa que para todo valor inicial  $x_0$  a uma distância  $\delta > 0$  do ponto fixo existirá algum  $N \in \mathbb{N}_0$  em que a distância entre  $x_n$  e o ponto fixo ficará maior que  $\varepsilon$  (Figura 2b).

**Exemplo 3.18.** Determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x^* = 5$  da recorrência  $x_{n+1} = -x_n + 10$  (Figura 2a).

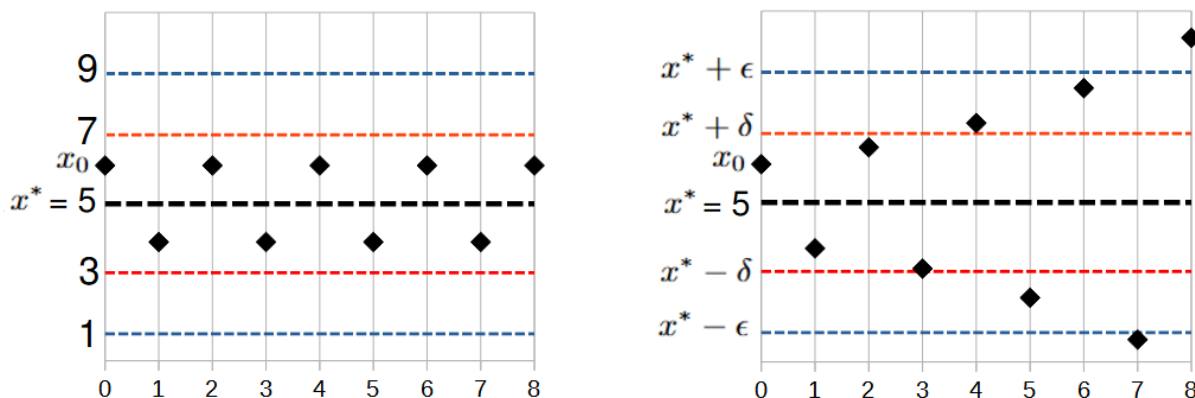
Solução: A recorrência  $x_{n+1} = -x_n + 10$  é uma recorrência linear não homogênea de solução  $x_n = (x_0 - 5)(-1)^n + 5$ , portanto

$$|x_n - x^*| = |(x_0 - 5)(-1)^n + 5 - 5| = |(x_0 - 5)(-1)^n| = |x_0 - 5||(-1)^n| = |x_0 - 5| = |x_0 - x^*|.$$

Sendo assim,  $|x_n - x^*| = |x_0 - x^*|$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$ , temos que existe  $\delta = \varepsilon$  tal que,  $|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon$ , concluindo que  $x^* = 5$  é um ponto estável.

<sup>2</sup>Esta definição é conhecida na literatura como estabilidade de Lyapunov, ver mais em Elaydi (2000).

Figura 2 – Pontos fixos estável e instável



(a) Ponto fixo  $x^* = 5$  estável na recorrência  $x_{n+1} = -x_n + 10$  (para  $\epsilon = 4$  e  $\delta = 2$ ).

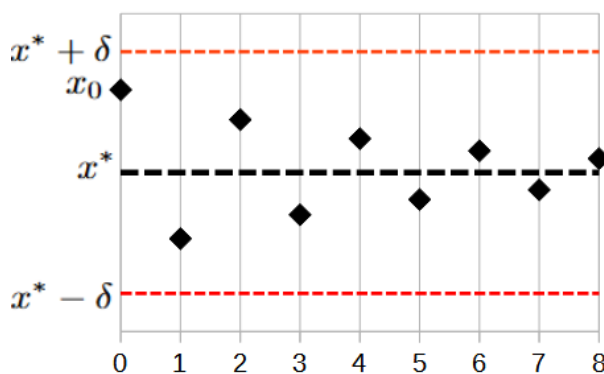
(b) Ponto fixo  $x^* = 5$  instável na recorrência  $x_{n+1} = -1,2x_n + 11$ .

Fonte: O autor.

**Definição 3.8.** Um ponto de equilíbrio  $x^*$  estável é chamado de assintoticamente estável se existe algum  $\eta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .

Vemos então que um ponto de equilíbrio  $x^*$  é assintoticamente estável se para valores iniciais  $x_0$  próximos a  $x^*$ , a sequência  $x_n$  converge para  $x^*$  (Figura 3).

Figura 3 – Ponto fixo assintoticamente estável na recorrência  $x_{n+1} = -0,8x_n + 9$



Fonte: O autor.

**Exemplo 3.19.** Determinar a estabilidade da recorrência  $x_{n+1} = qx_n + r$ , em que  $q \neq 1$ , no ponto de equilíbrio  $x^* = \frac{r}{1-q}$ .

Solução: Como se trata de uma recorrência linear, podemos analisar a estabilidade do ponto  $x^* = \frac{r}{1-q}$  pela sua solução, que no caso não homogêneo com  $q \neq 1$  é dado por

$$(x_n) = \left( x_0 q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right).$$

Note que se  $|q| < 1$ , então para qualquer valor de  $x_0$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_0 q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \frac{r}{1 - q},$$

ou seja, a sequência converge para  $x^* = \frac{r}{1-q}$ . Portanto, este é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Já, se  $|q| > 1$ , para qualquer valor inicial  $x_0$  a sequência irá divergir e portanto,  $x^* = \frac{r}{1-q}$  é um ponto de equilíbrio instável.

No exemplo da Figura 2b temos a recorrência  $x_{n+1} = -1,2x_n + 11$ , que possui o ponto de equilíbrio  $x^* = 5$ . Como esta recorrência possui o coeficiente  $q = -1,2$ , temos que  $x^* = 5$  é um ponto de equilíbrio instável. Já no exemplo da Figura 3, temos a recorrência  $x_{n+1} = -0,8x_n + 9$ , que também possui o ponto de equilíbrio  $x^* = 5$ . Como esta recorrência possui o coeficiente  $q = -0,8$ , temos que aqui  $x^* = 5$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Como não temos um método geral para a obtenção da solução geral para recorrências  $x_{n+1} = f(x_n)$  em que  $f(x_n)$  é não linear, muitas análises feitas sobre estas recorrências se tornam mais complexas. Porém, em alguns casos, se aproximarmos a função  $f(x)$  a uma função polinomial do 1º grau em torno de um ponto de equilíbrio  $x^*$ , poderemos identificar algumas características da recorrência.

**Definição 3.9.** Seja  $f(x)$  uma função diferenciável no ponto  $x^*$ , chamaremos de aproximação linear<sup>3</sup> da recorrência  $x_{n+1} = f(x_n)$  no ponto de equilíbrio  $x^*$ , a recorrência  $\hat{x}_{n+1} = L(\hat{x}_n)$ , em que  $L(x)$  é a função cujo gráfico representa a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x^*$ . Portanto:

$$L(x) = f'(x^*)(x - x^*) + x^*,$$

onde  $f'(x^*)$  é a derivada de  $f(x)$  no ponto  $x^*$ .

**Exemplo 3.20.** Determinar os pontos de equilíbrio e as respectivas linearizações da recorrência  $x_{n+1} = ax_n - b(x_n)^2$ .

Solução: Sendo  $x_{n+1} = x_n = x^*$ , temos que:

$$\begin{aligned} x^* &= ax^* - b(x^*)^2 \Rightarrow x^*(a - 1 - bx^*) = 0 \\ &\Rightarrow x^* = 0 \quad \text{ou} \quad x^* = \frac{a-1}{b}. \end{aligned}$$

Portanto,  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \frac{a-1}{b}$  são os pontos de equilíbrio da recorrência. Vamos agora determinar as derivadas de  $f$  em  $x_1^*$  e  $x_2^*$ .

Como  $f(x) = ax - bx^2$ , temos que  $f'(x) = a - 2bx$ . Portanto,  $f'(x_1^*) = a - 2b \cdot 0 = a$  e  $f'(x_2^*) = a - 2b \left( \frac{a-1}{b} \right) = 2 - a$ .

<sup>3</sup>A aproximação linear está baseada na interpretação geométrica da derivada, isto é, a reta tangente aproxima a curva  $f(x)$  localmente, para mais conhecimentos sobre derivadas, recomendamos Lima (2014b).

Temos, então, que as aproximações lineares da recorrência  $x_{n+1} = ax_n - b(x_n)^2$  nos pontos de equilíbrio  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \frac{a-1}{b}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\hat{x}_{n+1} = a\hat{x}_n \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{n+1} = (2-a)\tilde{x}_n + \frac{(a-1)^2}{b}.$$

Em alguns casos, a análise da estabilidade do ponto de equilíbrio  $x^*$  de uma recorrência pode ser realizada através da aproximação linear da recorrência em torno de  $x^*$ . De acordo com Elaydi (2000), a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $x^*$  para uma recorrência não linear  $x_{n+1} = f(x_n)$  é equivalente à estabilidade da recorrência linearizada próxima a  $x^*$  que, conforme vimos, possui a forma  $\hat{x}_{n+1} = f'(x^*)(\hat{x}_n - x^*) + x^*$ , que se trata de uma recorrência linear não homogênea com coeficientes constantes  $q = f'(x^*)$  e  $r = -f'(x^*)x^* + x^*$ .

No Exemplo 3.19, vimos que se  $q = |f'(x^*)| < 1$ , o ponto de equilíbrio  $x^*$  é assintoticamente estável e, portanto, as soluções próximas ao ponto  $x^*$  se aproximam de  $x^*$ . Já se  $q = |f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é um ponto de equilíbrio instável e, portanto, as soluções se afastam de  $x^*$ .

A Proposição 3.9 nos fornece portanto um método para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de algumas recorrências não lineares.

**Proposição 3.9.** Seja  $f$  uma função diferenciável e  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico da recorrência  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Temos então que

- i) Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável;
- ii) se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é um ponto de equilíbrio instável.

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Elaydi (2000).

**Exemplo 3.21.** Analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio da recorrência  $x_{n+1} = (x_n)^3$ .

Solução: Pelo Exemplo (3.17), sabemos que a recorrência  $x_{n+1} = (x_n)^3$  possui os pontos de equilíbrio  $x_1^* = -1$ ,  $x_2^* = 0$  e  $x_3^* = 1$ . Vamos, então, encontrar as aproximações lineares da recorrência em torno destes 3 pontos:

Calculando a derivada de  $f(x) = x^3$ , obtemos  $f'(x) = 3x^2$ , sendo assim:

Para  $x_1^* = -1$ , temos que  $|f'(x_1^*)| = |3 \cdot (-1)^2| = 3 > 1$ , portanto  $x_1^* = -1$  é um ponto de equilíbrio instável.

Para  $x_2^* = 0$ , temos que  $|f'(x_2^*)| = |3 \cdot 0^2| = 0 < 1$ , portanto  $x_2^* = 0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Por último, para  $x_3^* = 1$ , temos que  $|f'(x_3^*)| = |3 \cdot 1^2| = 3 > 1$ , portanto  $x_3^* = 1$  também é um ponto de equilíbrio instável.

Neste capítulo, exploramos as recorrências de primeira ordem autônomas, apresentando suas soluções no caso linear e discutindo o conceito de ponto de equilíbrio e estabilidade. Apesar da análise de estabilidade para as recorrências não lineares ter



vido realizada com o uso de derivadas, que não faz parte do escopo do Ensino Médio, ela servirá como um instrumento de análise das propriedades qualitativas do Modelo de Verhulst, apresentado no próximo capítulo. Ressaltamos que este tema não constitui o foco central desta dissertação, mas sim um recurso adicional para enriquecer a compreensão dos modelos. Para aprofundar o tema de derivadas, recomendamos Lima (2014b).

## 4 MODELOS POPULACIONAIS

As recorrências estudadas no Capítulo 3 possuem aplicações na modelagem para representar modelos que descrevem fenômenos que variam ao longo de um tempo discreto. Estudaremos agora modelos de dinâmica populacionais discretos, ou seja, modelos que descrevem a variação populacional de um grupo de indivíduos ao longo de um tempo discreto. Daremos ênfase aos modelos de Malthus e Verhulst, como segue.

### 4.1 MODELO POPULACIONAL DE MALTHUS

O Modelo Malthusiano é um modelo demográfico que foi proposto no final do século XVIII durante a primeira revolução industrial pelo economista inglês Thomas Robert Malthus, considerado o pai da demografia, em seu trabalho intitulado "Um Ensaio sobre o Princípio da População".

No Modelo de Malthus, considera-se que a taxa de variação populacional relativa  $\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}$  de um determinado grupo de indivíduos entre quaisquer dois instantes  $n$  e  $n + 1$  é uma taxa constante. De acordo com Bassanezi (2002), em tempo discreto, o modelo é descrito pela seguinte relação de recorrência:

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \alpha, \quad \alpha \geq -1.$$

A diferença populacional  $P_{n+1} - P_n$  de um grupo de indivíduos é causada por 4 fatores principais: nascimentos  $N$ , imigrações  $I$ , mortes  $M$  e emigrações  $E$ , sendo os dois primeiros positivos e os dois últimos negativos. Vamos, então, considerar que  $P_{n+1} - P_n = (N + I) - (M + E)$ .

Note que  $M + E \leq P_n$ , afinal é impossível haver mais óbitos e emigrações do que a população em si. Supondo que não hajam nascimentos ou imigrações, temos que  $P_{n+1} - P_n = -(M + E) \geq -P_n$  e portanto,  $\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} \geq -1$ , o que explica a restrição  $\alpha \geq -1$ . Rearranjando o Modelo de Malthus, podemos determinar o valor da população no instante  $n + 1$  em relação ao valor da população no instante  $n$  pela recorrência

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n.$$

Note que o Modelo de Malthus se trata então de uma recorrência linear homogênea com coeficiente constante. Sendo assim, a população varia de acordo com uma progressão geométrica de razão  $q = 1 + \alpha$  e termo inicial  $P_0 \in \mathbb{R}^+$ , cuja solução geral vista no Capítulo (3) é dada por

$$P_n = P_0(1 + \alpha)^n, \quad P_0 \in \mathbb{R}^+.$$

O Modelo de Malthus é aplicado também em outras áreas além da demografia, como, por exemplo na biologia, em que é usado para estudar o crescimento popula-

cional e a interação entre espécies em um ecossistema. Nesse contexto biológico, o coeficiente  $(1 + \alpha)$  do modelo é chamado de *potencial biótico* da espécie.

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor com base no Modelo de Malthus.

**Exemplo 4.1.** Suponha que uma população de inicialmente 100 lebres terá um aumento percentual de 20% ao mês nos próximos 10 meses. Escreva, utilizando o Modelo de Malthus correspondente a esta população e use-o para calcular a estimativa de lebres após os 10 meses.

Solução: Temos que a população inicial de lebres é dada por  $P_0 = 100$  e, como o aumento percentual desta população é de 20% ao mês, temos que a sua taxa de variação relativa é dada por  $\alpha = 0,2$ . Portanto, temos o seguinte modelo de Malthus para esta situação

$$\begin{cases} P_{n+1} = 1,2P_n \\ P_0 = 100 \end{cases} .$$

Resolvendo esta recorrência, vemos que o termo geral da solução é dado por  $P_n = 100 \cdot 1,2^n$ . Sendo assim, a estimativa da população desse grupo de lebres após os 10 meses é de  $P_{10} = 100 \cdot (1,2)^{10} = 100 \cdot (6,1917) \approx 619$  lebres.

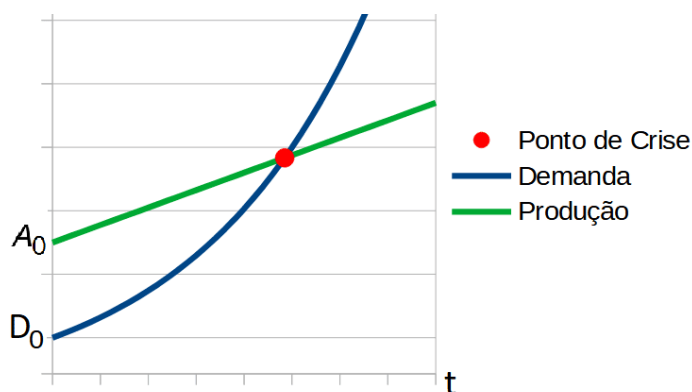
**Exemplo 4.2.** (Divisão celular) Além da variação populacional de espécies, o Modelo de Malthus pode ser usado também para descrever outros fenômenos, como a divisão celular. A divisão celular é o processo pelo qual uma célula-mãe se divide para formar duas células-filhas geneticamente idênticas. Podemos, então, calcular o número de células da geração  $n + 1$  de uma amostra em relação ao número de células da geração  $n$  pela recorrência  $N_{n+1} = 2N_n$ . Temos aqui novamente uma recorrência linear homogênea de coeficiente constante, cuja solução geral é dada por

$$N_n = N_0 2^n.$$

Em seu trabalho, Malthus também apresentou a sua teoria, conhecida hoje como teoria Malthusiana ou Malthusianismo. Thomas Malthus argumentava que, enquanto a população humana crescia de acordo com uma progressão geométrica, a produção de alimentos crescia em uma progressão aritmética. Analisando os dados demográficos de sua época, Malthus estimou que a população mundial dobraria a cada 25 anos e, sendo assim, em algum momento a demanda de alimento da população iria superar a produção, causando fome, pobreza e guerras, concluindo que a humanidade estaria destinada à miséria.

Supondo que cada indivíduo demande a mesma quantidade  $\gamma$  de alimento, a demanda de alimento  $D_n$  da população no tempo  $n$  é dada por  $D_n = \gamma P_n$ . Como a população é dada por  $P_n = P_0(1 + \alpha)^n$ , temos que  $D_n$  é determinado pela progressão

Figura 4 – Teoria Malthusiana



Fonte: O autor.

geométrica:

$$D_n = \gamma P_0 (1 + \alpha)^n.$$

Seguindo a Teoria de Malthus, a produção de alimentos crescerá de acordo com uma progressão aritmética. Portanto, sendo  $r$  o aumento da produção de alimentos, temos que a recorrência que descreve a disponibilidade de alimento para a população em cada tempo  $n$  é dada por  $A_{n+1} = A_n + r$ , cuja solução geral vista no Capítulo (3) é dada por

$$A_t = A_0 + nr.$$

O instante em que a oferta de alimento seria superada pela demanda da população ficou conhecido como ponto de crise e é determinado pelo instante  $n \in \mathbb{N}_0$  em que  $D_n$  se torna maior ou igual a  $A_n$ .

**Exemplo 4.3.** Suponha que um certo país com atualmente 1 milhão de habitantes possua uma taxa de crescimento populacional de 10% ao ano e produza anualmente uma quantidade constante de 3 milhões de toneladas de alimentos. Supondo ainda que cada habitante consuma 1 tonelada de alimentos durante o ano, determine o ponto de crise dessa população de acordo com a Teoria Malthusiana.

Solução: Temos que a demanda anual de alimentos dessa população é dada por  $D_n = 1 \cdot 1(1 + 0,1)^n = 1,1^n$  milhões de toneladas.

Já a produção anual de alimentos é dada pela sequência constante de termo geral  $A_n = 3$  milhões de toneladas. Vamos procurar um instante  $\hat{n}$  tal que  $A_{\hat{n}} = D_{\hat{n}}$ :

$$A_{\hat{n}} = D_{\hat{n}} \Rightarrow 1,1^{\hat{n}} = 3 \Rightarrow \hat{n} = \log_{1,1} 3 \approx 11,52.$$

Portanto,  $A_{\hat{n}} > D_{\hat{n}}$ , se  $\hat{n} = 12$  e  $A_{\hat{n}} < D_{\hat{n}}$ , se  $\hat{n} = 11$ . Sendo assim, o ponto de crise ocorrerá em  $\hat{n} = 12$  anos.

Hoje vemos que a Teoria Malthusiana não se concretizou. De acordo com Bassanezi (2002), isto se deu principalmente pelo fato de que Malthus não previu a segunda revolução industrial, o que gerou inovações tecnológicas que aumentaram a taxa de produção de alimentos. Outro fator que Malthus não levou em conta foi de que, dependendo do meio em que o grupo de indivíduos se encontra, o aumento da densidade demográfica gera uma inibição na taxa de variação de sua população. Este fenômeno faz com que o crescimento populacional deixe de seguir uma progressão geométrica, o que será abordado na próxima seção.

Do ponto de vista didático, a Teoria Malthusiana pode ser uma ferramenta para contextualizar diversos temas da matemática no Ensino Médio, com destaque para as Progressões Geométrica e Aritmética. Sendo assim, estudar as recorrências dos modelos de tal teoria pode ser uma oportunidade de desenvolver habilidades da BNCC como a habilidade (EM13MAT508) "Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" e a habilidade (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. No Quadro 1 é proposta uma atividade de duas questões baseada no modelo de Malthus aplicado ao crescimento de colônias de insetos, permitindo aos professores trabalharem com seus alunos objetos do conhecimento do componente curricular da matemática, como as progressões, as propriedades da potência e os logaritmos. O gabarito desta atividade assim como o das atividade propostas nas próximas seções se encontra no Apêndice A.

Vamos agora aprofundar o tema de dinâmica populacional através de um exemplo que elaboramos contendo a modelagem da população de peixes em um pesque-pague.

**Exemplo 4.4.** Um pesque-pague é um local com lagos onde visitantes podem praticar pesca esportiva e, então, pagar por quilo de peixe pescado. Vamos supor que em um pesque-pague a população de uma espécie de peixe, sem o fator da pesca, aumente de acordo com o Modelo de Malthus, ou seja,  $P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n$ , em que  $\alpha > 0$ . Vamos agora analisar como essa dinâmica é afetada por um fator de pesca e como o pesque-pague pode evitar a extinção dos peixes pela pesca.

**a)** Suponha que a quantidade de peixes pescada no tempo  $(n+1)$  seja proporcional à população total de peixes no tempo  $n$ . Neste caso, sendo  $\alpha$  a taxa de crescimento da população de peixes e  $0 \leq \beta \leq 1$  a taxa de peixes pescados, temos o seguinte modelo que descreve a população dos peixes no tempo  $n + 1$ :

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n - \beta P_n \quad \Rightarrow \quad P_{n+1} = (1 + \alpha - \beta)P_n.$$

Portanto, o modelo continua sendo uma recorrência linear homogênea de coefi-

## Quadro 1 – Proposta de atividade sobre modelo de Malthus

**Questão 1:** Considere que a população  $F_n$  de uma certa colônia de formigas cresce exponencialmente em seu 1º ano, aumentando a sua população em 25% a cada quinzena. Sendo  $F_0 = 20$  a população inicial de formigas, responda:

- Calcule a população de formigas nas 3 primeiras quinzenas.
- Modele esta situação através de uma recorrência linear.
- Dê o termo geral da solução do modelo obtido.
- Em qual quinzena de vida do formigueiro a população de formigas ultrapassará a quantia de 2500 formigas? (Use a aproximação  $\log_{10} 2 \approx 0,301$ ).

**Questão 2:** Considere uma colônia de cupins em que a população  $C_n$  cresce exponencialmente em seu 1º semestre, aumentando a sua população em 50% a cada quinzena. Sendo  $C_0 = 48$  a população inicial de cupins, responda:

- Escreva a recorrência linear correspondente a esta situação e então encontre o termo geral da sua solução.
- Use o termo geral obtido para estimar o número de cupins ao se completarem 8 quinzenas (Use  $3^9 = 19683$ ).

Fonte: O Autor.

ciente constante, cuja solução é dada por:

$$P_n = P_0(1 + \alpha - \beta)^n.$$

Considerando que a população de peixes em um lago, sem pesca, aumente 20% ao mês e, supondo que a cada mês são pescados uma média de 32% dos peixes, em quantos meses a população de peixes cairá para 10% do seu valor?

Solução: O modelo que descreve a população de peixes nesse lago a cada mês  $n$  é dado por  $P_{n+1} = (1 + 0,2 - 0,32)P_n = 0,88P_n$ , cuja solução geral é a sequência  $P_n = P_0 0,88^n$ . Sendo assim, para  $P_n = 0,1P_0$ , temos

$$0,1P_0 = P_0 0,88^n \Rightarrow n = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,88} \approx 18 \text{ meses.}$$

**b)** Pelo modelo do item a), vemos que se  $\beta > \alpha$ , a população de peixes decrescerá, causando a extinção desses peixes. Vamos supor que para evitar a extinção dos peixes, a administração do pesque-pague decida criar peixes e soltar no lago. Caso criem uma quantidade constante  $\gamma$  de peixes a cada tempo  $n$ , o modelo será dado por

$$P_{n+1} = (1 + \alpha - \beta)P_n + \gamma.$$

Portanto, temos agora uma recorrência linear não homogênea, com coeficientes constantes, cuja solução vista no Capítulo 3 é dada por:

$$P_n = P_0(1 + \alpha - \beta)^n + \gamma \left[ \frac{(1 + \alpha - \beta)^n - 1}{\alpha - \beta} \right].$$

Para que a população seja não decrescente, devemos ter  $P_n \leq P_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Portanto, sendo  $r = 1 + \alpha - \beta$ , segue que

$$P_0 r^n + \gamma \left[ \frac{r^n - 1}{r - 1} \right] \leq P_0 r^{n+1} + \gamma \left[ \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \right] \Rightarrow P_0 r^n - P_0 r^{n+1} \leq \gamma \left[ \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \right] - \gamma \left[ \frac{r^n - 1}{r - 1} \right]$$

$$\Rightarrow P_0 r^n (1 - r) \leq \gamma \left[ \frac{(r - 1) r^n}{r - 1} \right] \Rightarrow P_0 r^n (1 - r) \leq \gamma r^n \Rightarrow \gamma \geq P_0 (\beta - \alpha).$$

Sendo assim, devem ser inseridos no lago  $\gamma \geq P_0 (\beta - \alpha)$  peixes a cada tempo  $n$  para que a população não decresça.

Considerando o exemplo a), em que  $\alpha = 0,2$  e  $\beta = 0,32$  e considerando também que a população inicial é de  $P_0 = 100$  peixes, qual o número mínimo de peixes que devem ser adicionados mensalmente ao lago para que a população de peixes não decresça?

Solução:  $\gamma = 100 \cdot (0,32 - 0,2) = 100 \cdot 0,12 = 12$  peixes.

Tanto no empreendedorismo quanto na educação financeira, a habilidade de entender e resolver recorrências oferece uma base sólida para tomar decisões financeiras mais informadas, prever resultados e otimizar recursos. Os exemplos apresentados podem ajudar a explorar como as equações de recorrência podem ser aplicadas para modelar e resolver problemas típicos nesses campos, ajudando a tomar decisões mais estratégicas e eficazes sobre seus empreendimentos e/ou finanças.

## 4.2 MODELOS POPULACIONAIS DE VERHULST

O Modelo de Verhulst é um modelo populacional elaborado pelo matemático belga Pierre François Verhulst, em 1838. Após um estudo estatístico da população ao longo dos anos de alguns países, como a Bélgica, Verhulst pode constatar que o Modelo de Malthus não estava completo pois percebeu que, conforme a densidade populacional de um grupo de indivíduos aumenta, a taxa de variação populacional tende a diminuir, fazendo com que a população chegue a um limite e deixando de ser uma progressão geométrica, como deveria ser de acordo com o Modelo de Malthus. Verhulst começou então, propondo que a taxa de crescimento relativa de uma população que foi proposta por Malthus diminui em função da própria densidade populacional. De forma discreta, temos então que:

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \alpha - \varphi(P_n), \quad \alpha > -1.$$

Perceba que a única diferença em relação ao Modelo de Malthus é o termo  $\varphi(P_n)$ , uma função de variável  $P_n$  que representa uma inibição no crescimento populacional. No contexto biológico, esta inibição da taxa de variação da população conforme uma população aumenta é causada pela resistência do meio, ou seja, existem diversos

fatores no ambiente que freiam o crescimento populacional, tais como disponibilidade de alimento e abrigo, espaço físico e condições climáticas. Esta escassez de recursos faz com que indivíduos da mesma espécie acabem competindo entre si por estes recursos, fenômeno este chamado de competição intraespecífica. Já para a demografia, estas questões podem ser melhor explicadas através de fatores sociais como desemprego, acesso à moradia, saúde, saneamento e alimentação de qualidade, que afetam significativamente a densidade populacional.

Após um estudo estatístico, Verhulst elaborou então o seu primeiro modelo, conhecido hoje como Modelo de Verhulst, ou Modelo Logístico, em que ele considera que a inibição que a taxa de variação populacional relativa sofre em um instante  $n$  é proporcional à população no instante  $n$ . Portanto, neste modelo, Verhulst considera que  $\varphi(P_n)$  é dada por uma função linear  $\beta P_n$ , fazendo com que a taxa de variação relativa da população tenha a forma

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \alpha - \beta P_n.$$

De acordo com Almeida e Oliveira (2015), Verhulst assume em seu trabalho que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer, o que pode ser observado rearranjando os termos deste modelo:

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n - \beta P_n^2,$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de inibição do crescimento populacional causado pelo meio e  $(1 + \alpha)$  é o potencial biótico da espécie. Note que esta recorrência não é linear, pois apresenta um termo  $P_n^2$  e, sendo assim, não há um método geral para a obtenção de sua solução. Portanto, no caso do tempo discreto, este modelo é estudado de forma qualitativa. Vamos determinar os pontos de equilíbrio do Modelo de Verhulst, ou seja, os valores  $P^*$  para que a população não se altere ao longo do tempo.

Seja  $P^* \in \mathbb{R}$ , tal que  $P_{n+1} = P_n = P^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , segue que:

$$\begin{aligned} P^* &= (1 + \alpha)P^* - \beta(P^*)^2 \Rightarrow 0 = \alpha P^* - \beta(P^*)^2 \Rightarrow 0 = P^*(\alpha - \beta P^*) \\ &\Rightarrow P^* = 0 \quad \text{ou} \quad P^* = \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Portanto,  $P_1^* = 0$  e  $P_2^* = \frac{\alpha}{\beta}$  são os pontos de equilíbrio do Modelo de Verhulst. Sendo assim, as sequências  $(0) = (0, 0, 0, \dots)$  e  $(\frac{\alpha}{\beta}) = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \dots)$  são soluções constantes deste modelo. A solução  $(0, 0, 0, \dots)$  nos mostra que, se uma população não possui indivíduos, ela irá se manter sem indivíduos, o que é trivial, já que não haverá nascimentos. O que nos interessa então, é a solução de equilíbrio  $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \dots)$ , que nos indica que se um grupo de indivíduos possuir uma população dada pela razão entre os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , então a população permanecerá constante ao longo do



tempo. Caso este ponto de equilíbrio seja estável, uma população que está próxima da razão  $\frac{\alpha}{\beta}$ , tenderá a se manter sem muitas alterações ao longo do tempo.

Vamos agora analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Para isto, linearizaremos o modelo em torno destes pontos, ou seja, calcularemos a derivada de  $f(P) = (1 + \alpha)P - \beta P^2$  nos pontos  $P_1^* = 0$  e  $P_2^* = \frac{\alpha}{\beta}$ . Para  $P_1^* = 0$ , temos que:

$$f'(P_1^*) = (1 + \alpha) - 2\beta \cdot 0 = 1 + \alpha.$$

Veja que se  $-1 < \alpha < 0$ , temos que  $|1 + \alpha| < 1$ . Portanto, perto de  $P_1^* = 0$  o modelo é assintoticamente estável quando  $-1 < \alpha < 0$  e instável quando  $\alpha > 0$ .

Para  $P_2^* = \frac{\alpha}{\beta}$ , temos que:

$$f'(P_2^*) = (1 + \alpha) - 2\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1 - \alpha.$$

Como  $|1 - \alpha| < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$ , temos que perto do ponto  $P_2^* = \frac{\alpha}{\beta}$ , o modelo é assintoticamente estável quando  $0 < \alpha < 2$  e instável quando  $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 2$ .

Com isso, vemos que se a população possui uma taxa  $\alpha$  negativa, a população tende a diminuir e se aproximar à extinção ( $P_n = 0$ ). Porém, caso a população possua uma taxa  $\alpha$  positiva e menor que 2, a população tende a se aproximar de forma assintótica de uma população limite dada por  $P_n = \frac{\alpha}{\beta}$ . Esta população limite é comumente chamada de população suporte  $k = \frac{\alpha}{\beta}$ . Podemos notar ainda que a população tende à  $P_n = k$  de forma assintoticamente crescente, se  $P_0 < k$  e de forma assintoticamente decrescente, se  $P_0 > k$ .

Por fim, temos que, se  $\alpha > 2$ , o modelo é instável para ambos pontos fixos, o que acaba dificultando a análise do modelo, podendo ocorrer uma extinção da população ou uma explosão populacional. Como a população suporte  $k$  representa uma característica interessante do Modelo de Verhulst, é comum ela aparecer no modelo ao invés do coeficiente  $\beta$ . Como  $\beta = \frac{\alpha}{k}$ , segue que o modelo pode ser escrito da forma

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n - \frac{\alpha P_n^2}{k}.$$

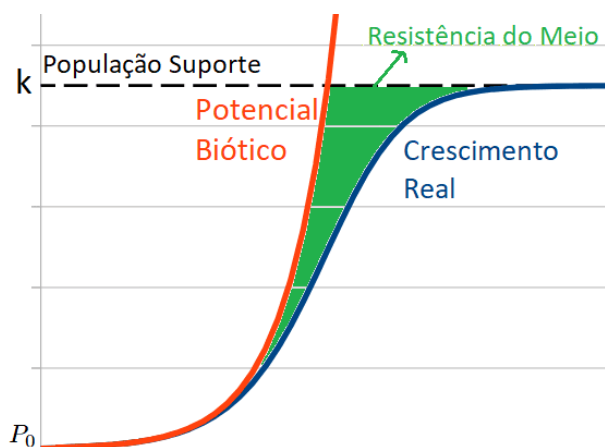
Ou então:

$$P_{n+1} = P_n + \alpha P_n \left(1 - \frac{P_n}{k}\right).$$

Na análise da população de uma espécie, o Modelo de Malthus,  $P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n$  descreve seu potencial biótico, ou seja, o crescimento em condições ideais sem limitações ambientais. Já o Modelo de Verhulst considera o crescimento real da população, levando em conta a resistência ambiental e a capacidade de suporte  $k$ . A Figura 5 ilustra essas características do crescimento populacional, comparando o crescimento ideal com o crescimento ajustado pelas restrições do ambiente.

Os exemplos a seguir foram criados pelo autor com o objetivo de ilustrar de forma prática a aplicação das recorrências nos contextos biológicos. Esses exemplos

Figura 5 – Modelo de Verhulst



Fonte: O autor.

foram elaborados para proporcionar uma compreensão mais clara de como as equações de recorrência podem ser usadas em situações naturais e aproveitar conteúdos da BNCC referentes a vida e ecologia.

**Exemplo 4.5.** No processo de criação de uma nova colônia, a formiga rainha começa gerando algumas dezenas de operárias que saem em busca de recursos para a criação do formigueiro e alimentação de novas larvas. Conforme os recursos no formigueiro vão aumentando, a rainha gera cada vez mais operárias, porém os recursos em um ambiente não são ilimitados, fazendo com que a produção de novas formigas diminua, chegando à uma população suporte dentro do formigueiro, podendo variar desde milhares até a casa dos milhões de formigas.

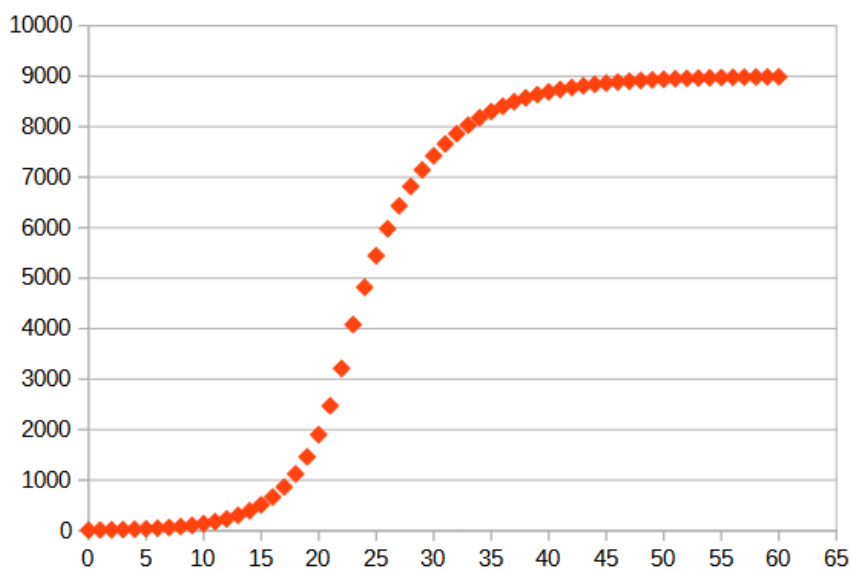
Considere uma colônia de formigas inicialmente com 10 indivíduos. Assumindo que, sem a resistência do meio a população desta colônia cresça 30% por mês e que a disponibilidade de recursos no meio limite esta população em 9000 formigas, temos o seguinte Modelo de Verhulst

$$F_{n+1} = F_n + 0,3F_n \left(1 - \frac{F_n}{9000}\right), \quad F_0 = 10.$$

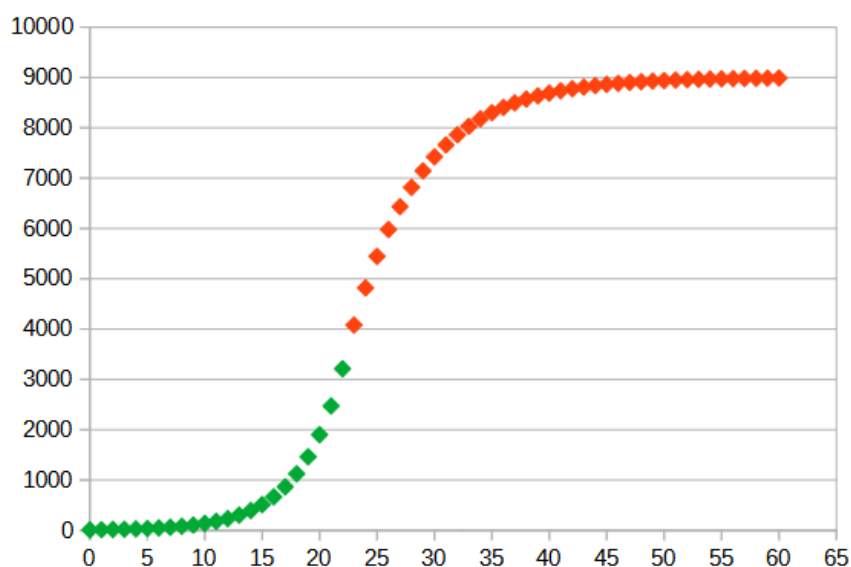
A Figura 6a apresenta o gráfico contendo a simulação da população de formigas nos 5 primeiros anos. Esta simulação, assim como todas as simulações que serão apresentadas neste trabalho foram realizadas em planilhas eletrônicas através do software LibreOffice Calc.

O gráfico desta simulação ilustra como esta população de formigas cresce inicialmente de maneira exponencial, mas com o tempo sua taxa de crescimento diminui à medida que se aproxima de um limite superior conhecido como população suporte ou capacidade de carga do ambiente.

Figura 6 – Simulações de formigas dos Exemplos 4.5 e 4.6



(a) Simulação de formigas do Exemplo 4.5



(b) Simulação de formigas do Exemplo 4.6

Fonte: O autor.

Após elaborar seu primeiro modelo, Verhulst percebeu que nos primeiros instantes  $n$ , o crescimento populacional de um grupo de indivíduos segue praticamente uma progressão geométrica, pois o meio em que a população está inserida ainda não afeta a variação desta população, passando a afetar significativamente apenas após a população atingir certa densidade populacional. De acordo com Almeida e Oliveira (2015), em 1846 Verhulst escreveu um 2º modelo, onde considera que, antes da população atingir um certo limiar  $b$ , que nomeou de população normal, a população segue o Modelo Malthusiano e, após  $P_n = b$ , o meio começa a inibir o crescimento populacional. Desta vez Verhulst considerou que a inibição do crescimento da população  $\varphi(P_n)$  é

proporcional à razão entre a população em excesso afetada pelo meio ( $P_n - b$ ) e a população total  $P_n$ , ou seja,  $\varphi(P_n) = \beta \frac{(P_n - b)}{P_n}$ .

Temos, então, o seguinte modelo, que chamaremos aqui de 2º Modelo de Verhulst

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \alpha - \beta \frac{(P_n - b)}{P_n}.$$

Rearranjando os termos deste modelo, temos que a população no tempo  $n + 1$  em relação à população no tempo  $n$  é dada pela recorrência

$$P_{n+1} = (1 + \alpha)P_n - \beta(P_n - b),$$

onde  $(1 + \alpha)P_n$  representa o crescimento Malthusiano e  $\beta(P_n - b)$  representa a inibição causada pelo meio, após a população  $P_n$  ultrapassar a população normal  $b$ . Fazendo a substituição  $a = 1 + \alpha - \beta$  e reorganizando novamente o modelo, temos a seguinte recorrência linear não homogênea:

$$P_{n+1} = aP_n + \beta b.$$

Se começarmos a analisar uma população a partir de um instante em que  $P_0 \geq b$ , então a solução deste modelo para  $\alpha \neq \beta$  (ou seja,  $a \neq 1$ , de acordo com a análise feita no Capítulo 3, é dada por

$$P_n = P_0 a^n + \beta b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Se  $\alpha < \beta$ , temos que este modelo, assim como o 1º Modelo de Verhulst, também possui uma população suporte, já que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( P_0 a^n + \beta b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \right) = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n) + \frac{\beta b}{a - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - 1) = \frac{\beta b}{1 - a} = \frac{\beta b}{\beta - \alpha}.$$

Portanto,  $k = \frac{\beta b}{\beta - \alpha}$  é a população suporte no 2º Modelo de Verhulst. Note que  $\frac{\beta b}{a - 1} = -k$ . Substituindo na solução deste modelo, temos

$$P_n = P_0 a^n + \beta b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow P_n = P_0 a^n - k(a^n - 1) \Rightarrow P_n = (P_0 - k)a^n + k.$$

Adaptaremos agora o modelo das formigas do Exemplo 4.5 usando o 2º Modelo de Verhulst.

**Exemplo 4.6.** Suponha que a população de formigas do Exemplo 4.5 cresça de forma exponencial até atingir a população de 3000 formigas (população normal) e, a partir de então, siga o 2º Modelo de Verhulst, com uma população suporte de 9000 formigas. Sendo  $\alpha = 0,3$ ,  $b = 3000$  e  $k = 9000$ , temos:

$$k = \frac{\beta b}{\beta - \alpha} \Rightarrow 9000 = \frac{3000\beta}{\beta - 0,3} \Rightarrow \beta = 0,45.$$

Portanto, seguindo o 2º Modelo de Verhulst, a população de formigas é de:

$$F_{n+1} = \begin{cases} 1,3F_n, & \text{se } F_n < 3000 \\ 1,3F_n - 0,45(F_n - 3000), & \text{se } F_n \geq 3000 \end{cases}.$$

A Figura 6b apresenta a população de formigas nos 5 primeiros anos para uma população inicial  $F_0 = 10$ . Comparando com o gráfico da Figura 6a, podemos notar características semelhantes nos 2 modelos, tais como um crescimento inicial mais acelerado, seguido de uma suavização e então estabilização na população suporte.

Como as duas sentenças desse modelo são lineares, podemos determinar a sua solução. Para  $F_0 = 10$ , temos que a recorrência  $F_{n+1} = 1,3F_n$  possui a solução  $F_n = 10 \cdot 1,3^n$  e sendo assim, temos que  $F_{21} \approx 2470$  formigas e  $F_{22} = 3211,83887795486$  formigas. Portanto, a partir do 23º mês, a população das formigas seguirá a 2ª sentença do modelo, com  $F_{22} = 3211,83887795486$ .

A 2ª sentença é dada por  $F_{n+1} = 1,3F_n - 0,45(F_n - 3000) \Rightarrow F_{n+1} = 0,85F_n + 1350$ , cuja solução geral é dada por

$$F_n = F_0(0,85)^n + 1350 \frac{(0,85)^n - 1}{-0,15} = (F_0 - 9000)(0,85)^n + 9000.$$

Como  $F_{22} = 3211,83887795486$ , temos que

$$(F_0 - 9000)(0,85)^{22} + 9000 = 3211,83887795486 \Rightarrow (F_0 - 9000) = \frac{-5788,16112204514}{(0,85)^{22}}.$$

Portanto,

$$F_n = \left( \frac{-5788,16112204514}{(0,85)^{22}} \right) (0,85)^n + 9000 = -5788,16112204514 \cdot 0,85^{n-22} + 9000.$$

Sendo assim, a solução deste modelo é dada por

$$F_n = \begin{cases} 10 \cdot 1,3^n, & \text{se } n < 23 \\ -5788,16112204514 \cdot 0,85^{n-22} + 9000, & \text{se } n \geq 23 \end{cases}.$$

O exemplo a seguir apresenta a modelagem de uma população de abelhas, considerando o 2º Modelo de Verhulst para uma população inicial acima da população suporte  $b$ .

**Exemplo 4.7** (Enxameação). O processo de formação de uma colmeia de abelhas é chamado enxameação. Após uma colmeia entrar em superpopulação, a abelha rainha sai da colmeia juntamente com um enxame de milhares de abelhas para procurar um local com novos recursos e formar uma nova colmeia, enquanto que a colmeia antiga fica liderada por uma nova rainha.

Suponha que no processo de enxameação, um enxame de 5000 abelhas, na falta de um ambiente melhor, encontrem um local em que a resistência do meio afete a

população de abelhas a partir de uma população normal de  $b = 3000$  abelhas, fazendo com que essa população evolua ao longo de  $n$  meses de acordo com o modelo

$$A_{n+1} = 1,6A_n - 0,7(A_n - 3000).$$

Determine o número de abelhas após  $n$  meses.

Solução: Calculando a população suporte deste modelo, temos que  $k = 21000$  abelhas. Portanto, a solução deste modelo para  $A_0 = 5000$  é dada por

$$A_n = (5000 - 21000)(1,6 - 0,7)^n + 21000 \Rightarrow A_n = -16000(0,9)^n + 21000.$$

Por ser um modelo linear, o segundo Modelo de Verhulst também pode ter utilidade como ferramenta didática para o Ensino Médio, abordando recorrências lineares não homogêneas para além das PAs e PGs, um tema pouco explorado nesse nível de ensino. Embora esse tópico seja incomum, ele oferece importantes vantagens, como a possibilidade de interdisciplinaridade entre a matemática e a biologia, uma vez que modelos populacionais com população de suporte são, em muitos casos, mais realistas do que o Modelo de Malthus. O Quadro 2 apresenta uma proposta de questão que pode ser utilizada por professores do Ensino Médio que possuam interesse em aprofundar este tema com seus estudantes com exemplos ou exercícios.

#### Quadro 2 – Proposta de atividade sobre modelo de Verhulst

**Questão 1:** Considerando que após o processo de enxameação, a população de  $A_0 = 2000$  abelhas encontra um ambiente para uma nova colmeia, que inicia um crescimento populacional mensal dado pelo modelo abaixo, responda:

$$A_{n+1} = 0,8A_n + 2000$$

- Qual o termo geral da solução deste modelo?
- Use o termo geral para estimar a população de abelhas após 8 meses.
- Qual a população suporte fornecida pelo meio de acordo com este modelo?
- Se  $b = 2000$  é a população normal em que o meio não afeta o crescimento populacional dessas abelhas, qual o potencial biótico dessa colmeia?

Fonte: O Autor.

## 5 RECORRÊNCIAS DE ORDEM K

Até aqui estudamos as recorrências de 1ª ordem, ou seja, recorrências em que cada termo de uma sequência é determinado pelo termo anterior. Veremos agora as recorrências de uma ordem  $k$ , aquelas em que cada termo é determinado pelos seus  $k$  termos anteriores.

**Definição 5.1.** Uma recorrência de ordem  $k \in \mathbb{N}$  é uma relação que determina o valor de um termo  $x_{n+k}$  de uma sequência em função dos seus  $k$  termos anteriores, podendo ou não depender também de  $n \in \mathbb{N}_0$ , ou seja:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n, n).$$

Caso  $x_{n+k}$  não dependa de  $n$ , a recorrência é chamada de recorrência de ordem  $k$  autônoma, possuindo a forma:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n). \quad (8)$$

Nas recorrências de ordem  $k$ , ao tomarmos  $n = 0$ , o primeiro termo de uma sequência a ser determinado pela relação de recorrência é o termo  $x_k$ , que será definido em função dos termos  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ . Sendo assim, estes termos não serão definidos pela recorrência, precisando serem dados para determinarmos uma solução particular desta recorrência.

**Exemplo 5.1.** A recorrência  $x_{n+2} = x_{n+1}x_n$  é uma recorrência de 2ª ordem que determina, por exemplo, a sequência  $(x_0, x_1, x_0x_1, x_1x_2, \dots) = (2, 3, 6, 18, \dots)$ , caso  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 3$ , como também determina a sequência  $(x_0, x_1, x_0x_1, x_1x_2, \dots) = (2, 2, 4, 8, \dots)$ , caso  $x_0 = x_1 = 2$ .

**Exemplo 5.2.** A recorrência  $x_{n+3} = (x_{n+2})^2 + 2x_{n+1} - x_n$  é uma recorrência de 3ª ordem que possui a sequência  $(1, 1, 1, 2, 5, \dots)$  como uma de suas soluções, para quando  $x_0 = x_1 = x_2 = 1$ .

**Definição 5.2.** Uma sequência  $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$  é dita uma solução real de uma recorrência de ordem  $k$  se  $x_n$  satisfaz a relação de recorrência para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Da mesma forma, uma sequência  $(x_n) \in \mathbb{C}^\infty$  é dita uma solução complexa de uma recorrência se o termo  $x_{n+k}$  satisfaz a relação de recorrência para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Como  $f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n)$  é uma função, temos que cada valor  $x_{n+k}$  da solução da recorrência é unicamente definido para cada  $k$ -upla ordenada de termos anteriores  $(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n)$ . Desta forma, temos que, fixados os valores iniciais  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , a solução da recorrência de ordem  $k$  autônoma é única.

**Definição 5.3.** Uma recorrência de ordem  $k$  é chamada de linear se

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n, n)$$

for da forma:

$$x_{n+k} = f_{k-1}(n)x_{n+k-1} + f_{k-2}(n)x_{n+k-2} + \dots + f_0(n)x_n + g(n). \quad (9)$$

Onde  $f_{k-1}(n), f_{k-2}(n), \dots, f_0(n), g(n)$  são funções  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_0(n) \neq 0$  (caso  $f_0(n) = 0$ ,  $x_{n+k}$  seria definido em relação a apenas  $k-1$  elementos anteriores, se tratando então de uma recorrência de ordem  $k-1$ ). Se  $g(n) = 0$ , a recorrência linear é então chamada de *homogênea*.

**Exemplo 5.3.** A recorrência  $x_{n+4} = nx_{n+2} - x_n$  é uma recorrência linear de 4ª ordem homogênea em que  $f_3(n) = 0$ ,  $f_2(n) = n$ ,  $f_1(n) = 0$  e  $f_0(n) = -1$ .

Dentre as recorrências lineares de ordem  $k$ , analisaremos a seguir as autônomas, ou seja, as recorrências lineares que possuem coeficientes constantes.

**Definição 5.4.** Se  $f_{k-1}(n), f_{k-2}(n), \dots, f_0(n)$  forem constantes e  $g(n) = 0$ , a recorrência (9) é então chamada de recorrência linear de ordem  $k$  homogênea com coeficientes constantes, podendo ser escrita na forma:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n = 0, \quad (10)$$

onde  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$  são os coeficientes da recorrência linear.

**Exemplo 5.4.** A recorrência  $x_{n+3} + 3x_{n+1} - 2x_n = 0$  é uma recorrência linear de 3ª ordem homogênea com coeficientes  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_0 = -2$ .

As Proposições 5.1 e 5.2 a seguir nos mostram que o conjunto das soluções das recorrências lineares de ordem  $k$  homogêneas de coeficientes constantes formam um espaço vetorial de dimensão  $k$ , o que será extremamente útil para determinarmos todos os termos deste conjunto solução, ao encontrarmos uma base deste espaço vetorial.

**Proposição 5.1** (Princípio da Superposição). Sejam as sequências  $(y_n)$  e  $(z_n)$  soluções complexas da recorrência (10), então a sequência  $(t_n) = C_1(y_n) + C_2(z_n)$  em que  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$  também é uma solução complexa.

*Demonstração.* Como  $(t_n) = C_1(y_n) + C_2(z_n)$ , temos que:

$$\begin{aligned} & t_{n+k} + a_{k-1}t_{n+k-1} + \dots + a_0t_n \\ &= (C_1y_{n+k} + C_2z_{n+k}) + a_{k-1}(C_1y_{n+k-1} + C_2z_{n+k-1}) + \dots + a_0(C_1y_n + C_2z_n) \\ &= C_1(y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n) + C_2(z_{n+k} + a_{k-1}z_{n+k-1} + \dots + a_0z_n) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $(t_n)$  também é solução complexa da recorrência (10). □



**Exemplo 5.5.** Sabendo que as sequências  $(y_n) = (3) = (3,3,3,\dots)$  e  $(z_n) = (2^n) = (2,4,8,\dots)$  são soluções da recorrência linear de 2ª ordem  $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ , determine uma 3ª solução.

Solução: Pela Proposição 5.1, temos que  $(t_n) = C_1(y_n) + C_2(z_n)$  é solução da recorrência. Fazendo, por exemplo,  $C_1 = C_2 = 2$ , segue que  $(t_n) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2^n) = (6 + 2^{n+1}) = (10,14,22,\dots)$  é também uma solução da recorrência  $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ .

**Proposição 5.2.** Seja  $S$  o conjunto de todas sequências reais  $(x_n)$  que são soluções da equação (10), temos que  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^\infty$  e  $\dim(S) = k$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que o conjunto de soluções  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^\infty$  isomorfo<sup>1</sup> a  $\mathbb{R}^k$ .

Note que o vetor nulo  $(x_n) = (0,0,0,\dots)$  está em  $S$ , pois:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n = 0 + a_{k-1}0 + a_{k-2}0 + \dots + a_00 = 0.$$

Ademais, temos que a operação de adição de vetores é fechada em  $S$  pois, dados  $(y_n), (z_n) \in S$ , temos que:

$$\begin{aligned} (y_{n+k} + z_{n+k}) + a_{k-1}(y_{n+k-1} + z_{n+k-1}) + a_{k-2}(y_{n+k-2} + z_{n+k-2}) + \dots + a_0(y_n + z_n) = \\ y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \dots + a_0y_n + z_{n+k} + a_{k-1}z_{n+k-1} + a_{k-2}z_{n+k-2} + \dots + a_0z_n = 0, \end{aligned}$$

e, portanto,  $(y_n + z_n) \in S$ . Por último, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_n) \in S$ , temos que:

$$\begin{aligned} \alpha x_{n+k} + a_{k-1}(\alpha x_{n+k-1}) + a_{k-2}(\alpha x_{n+k-2}) + \dots + a_0(\alpha x_n) = \\ \alpha(x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n) = \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $(\alpha x_n) \in S$  e, sendo assim, a multiplicação por escalar também é fechada em  $S$ . Concluímos então que  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^\infty$ .

Seja a transformação  $T : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que:

$$T(x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Vamos mostrar que  $T$  é linear, injetora e sobrejetora. Com efeito, sejam  $(y_n), (z_n) \in S$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} T(y_n) + \alpha T(z_n) &= (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) + \alpha(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}) \\ &= (y_0 + \alpha z_0, y_1 + \alpha z_1, \dots, y_{k-1} + \alpha z_{k-1}) \\ &= T(y_n + \alpha z_n). \end{aligned}$$

Portanto,  $T$  é linear. Ademais, como para cada  $k$ -upla de valores iniciais  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  existe uma única solução  $(x_n) \in S$ , temos que o vetor nulo  $(0,0,\dots)$  é o único elemento de  $S$  que possui os termos iniciais  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (0,0,\dots,0)$ . Sendo assim

$$T(x_n) = (0,0,\dots,0) \Rightarrow (x_n) = (0,0,\dots) \Rightarrow \text{Ker}(T) = \{0\},$$

<sup>1</sup>Dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$  são isomorfos se existe uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$  bijetora.

e, portanto,  $T$  é injetora. Por fim, como  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  são os  $k$  primeiros elementos de  $(x_n) \in S$ , para todo  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ , temos que existe  $(x_n) \in S$  tal que  $T(x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  e, sendo assim,  $T$  é sobrejetora.

Temos então que existe uma transformação linear bijetora entre  $S$  e  $\mathbb{R}^k$ .

Portanto, pelo Teorema da Dimensão de Isomorfos<sup>2</sup>, concluímos que  $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^k) = k$ .  $\square$

## 5.1 SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE 2ª ORDEM

As recorrências de segunda ordem são equações que relacionam um termo de uma sequência com os dois termos anteriores. Elas são uma extensão natural das recorrências de primeira ordem, permitindo modelar fenômenos mais complexos e dinâmicos, onde a evolução de uma variável depende não apenas do valor imediato anterior, mas também de valores passados.

**Definição 5.5.** Tomando  $k = 2$ ,  $a_1 = a$  e  $a_0 = b$  na recorrência (10), temos que as recorrências lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes são as recorrências da forma

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad b \neq 0, \quad (11)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são os coeficientes da recorrência linear.

**Exemplo 5.6.** A recorrência  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$  é uma recorrência linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes  $a = -5$  e  $b = 6$ .

Vamos, agora, determinar as soluções reais da recorrência (11). Como vimos no Capítulo 3,  $x_n = \lambda^n$  é uma solução da recorrência linear de 1ª ordem homogênea  $x_{n+1} = \lambda x_n$ . Com esta motivação, testaremos se a sequência da forma  $\lambda^n$  também pode ser solução da recorrência linear homogênea de 2ª ordem (11), para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Substituindo o termo geral  $\lambda^n$  na recorrência, segue que:

$$\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^n(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Portanto,  $\lambda^n$  é solução da recorrência (11), se

$$\lambda^n = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Se  $\lambda^n = 0$ , temos a solução trivial  $(0, 0, \dots)$ . Nos interessa então  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Vemos então que o polinômio de 2º grau  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , cujos coeficientes são dados pelos coeficientes da recorrência linear de 2ª ordem  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ , está ligado às soluções desta recorrência.

<sup>2</sup>Dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$  são isomorfos se, e somente se,  $\dim(U) = \dim(V)$ , ver Lima (2014a).

**Definição 5.6.** O polinômio de 2º grau  $\lambda^2 + a\lambda + b$  associado à recorrência linear de 2ª ordem  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$  é chamado de polinômio característico da recorrência.

**Exemplo 5.7.** A recorrência  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$  possui o polinômio característico  $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ .

A Proposição 5.3 apresenta soluções da recorrência (11) que poderão formar a base do seu conjunto solução.

**Proposição 5.3.** Se  $\lambda_1$  é uma raiz complexa do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , então a sequência  $(\lambda_1^n)$  é uma solução complexa da recorrência (11).

*Demonstração.* Sendo  $\lambda_1$  uma raiz de  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , temos que:

$$\lambda_1^{n+2} + a\lambda_1^{n+1} + b\lambda_1^n = \lambda_1^n(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = \lambda_1^n \cdot 0 = 0.$$

Portanto,  $\lambda_1^n$  é uma solução particular complexa da recorrência (11).  $\square$

**Exemplo 5.8.** Como a recorrência  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$  possui o polinômio característico  $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ , de raízes  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ , temos que as sequências  $(2^n) = (1, 2, 4, \dots)$  e  $(3^n) = (1, 3, 9, \dots)$  são duas de suas soluções complexas (e também reais), sendo que o 1º caso se dá quando  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  e o 2º caso se dá quando  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 3$ .

**Exemplo 5.9.** O polinômio característico da recorrência  $x_{n+2} + x_n = 0$  é dado por  $\lambda^2 + 1$ , sendo que  $\lambda_1 = i$  é uma de suas raízes. Temos, então, que uma de suas soluções complexas é dada por  $(i^n) = (1, i, -1, \dots)$ .

A seguir são determinadas as soluções da recorrência (11) para quando seu polinômio característico possuir duas raízes reais e distintas.

**Proposição 5.4.** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  raízes do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , com  $b \neq 0$ . Se  $a^2 - 4b > 0$ , então todas as soluções reais da recorrência (11) são dadas por

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 5.2, temos que o conjunto de soluções reais  $S$  da recorrência (11) forma um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Portanto, será suficiente que  $\{(u_n)(v_n)\}$  seja um subconjunto linearmente independente<sup>3</sup> de  $S$ , para que todo elemento de  $S$  seja dado pela forma:

$$(x_n) = C_1(u_n) + C_2(v_n), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pela Proposição 5.3, temos que  $\lambda_1^n, \lambda_2^n \in S$ . Vamos, então, mostrar que  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , suponha que

$$\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n = (0).$$

<sup>3</sup>Em um espaço vetorial de dimensão 2, qualquer subconjunto  $\{(u_n)(v_n)\}$  linearmente independente formará uma base, ver Lima (2014a).

Considerando os dois primeiros termos da sequência  $\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$ , temos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Como  $a^2 - 4b > 0$  e  $b \neq 0$ , temos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , são reais, distintas e não nulas temos  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e, sendo assim,  $\{(\lambda_1^n), (\lambda_2^n)\}$  é um conjunto linearmente independente. Portanto, toda solução  $(x_n)$  real da recorrência (11) quando  $a^2 - 4b > 0$  e  $b \neq 0^4$  se escreve como  $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ , onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Exemplo 5.10.** Como visto no Exemplo 5.8, as sequências  $2^n$  e  $3^n$  são soluções da recorrência  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ . Sendo assim, as soluções desta recorrência são todas dadas por

$$x_n = C_1 2^n + C_2 3^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Conhecendo os valores iniciais  $x_0$  e  $x_1$ , podemos determinar os valores de  $C_1$  e  $C_2$  e encontrar sua solução particular. Por exemplo, se  $x_0 = 4$  e  $x_1 = 10$ , temos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que  $C_1 = C_2 = 2$  e, portanto, a solução particular é dada por  $x_n = 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n = (4, 10, 26, \dots)$ .

A Proposição 5.4 só é válida se o polinômio  $\lambda^2 + a\lambda + b$  admitir duas raízes reais e distintas. Vamos então analisar a solução da recorrência (11) para quando  $\lambda^2 + a\lambda + b$  admitir apenas uma raiz real.

**Proposição 5.5.** Seja  $\lambda_1$  raiz do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Se  $a^2 - 4b = 0$  e  $b \neq 0$ , então  $(n\lambda_1^n)$  é uma solução particular real da recorrência (11).

*Demonstração.* Como  $a^2 - 4b = 0$  e  $\lambda_1$  é raiz do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , segue que

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{0}}{2} = -\frac{a}{2}.$$

Ademais, note que:

$$\begin{aligned} (n+2)\lambda_1^{n+2} + a(n+1)\lambda_1^{n+1} + bn\lambda_1^n &= n\lambda_1^{n+2} + 2\lambda_1^{n+2} + an\lambda_1^{n+1} + a\lambda_1^{n+1} + bn\lambda_1^n \\ &= n\lambda_1^n(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + \lambda_1^n(2\lambda_1^2 + a\lambda_1) \\ &= n\lambda_1^n \cdot 0 + \lambda_1^n(2\lambda_1^2 + a\lambda_1) \\ &= \lambda_1^n(2\lambda_1^2 + a\lambda_1). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Se  $b = 0$ , a recorrência pode ser reduzida de ordem e remete aos casos já estudados.

Como  $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ , segue que

$$\lambda_1^n(2\lambda_1^2 + a\lambda_1) = \lambda_1^n \left[ 2 \left( -\frac{a}{2} \right)^2 + a \left( -\frac{a}{2} \right) \right] = \lambda_1^n \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = 0.$$

Concluimos então que  $(n\lambda_1^n)$  é solução da recorrência (11).  $\square$

**Proposição 5.6.** Seja  $\lambda_1$  raiz do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Se  $a^2 - 4b = 0$  e  $b \neq 0$ , então todas as soluções reais da recorrência (11) são dadas por

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Análogo à Proposição 5.4, temos que se  $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$  é um subconjunto linearmente independente do conjunto de soluções reais  $S$ , então todo elemento de  $S$  é da forma  $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n$ , em que  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vamos, então, provar que  $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Com efeito, sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , suponhamos que:

$$\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2n\lambda_1^n = (0).$$

Considerando os dois primeiros termos da sequência  $\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2n\lambda_1^n$ , temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1 = 0 \end{cases}.$$

Como  $b \neq 0$ , temos que  $\lambda_1 \neq 0$  e portanto, resolvendo o sistema, temos que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Sendo assim,  $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Sendo assim, toda solução  $(x_n)$  real da recorrência (11) quando  $a^2 - 4b = 0$  se escreve como

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Exemplo 5.11.** Encontrar a solução particular da recorrência  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ , para  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 6$ .

Solução: O polinômio característico de  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$  é dado por  $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ , de raiz  $\lambda_1 = 2$ . Portanto, a solução geral desta recorrência é dada por

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 n \cdot 2^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 6$ , temos que

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 2C_1 + 2C_2 = 6 \end{cases}$$

e, portanto,  $C_1 = 2$  e  $C_2 = 1$ . Sendo assim, a solução particular de  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ , para  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 6$  é dada por  $x_n = (2 + n) \cdot 2^n = (2, 6, 16, \dots)$ .

Com as Proposições 5.4 e 5.6, podemos determinar todas as soluções da recorrência (11) para quando o polinômio  $\lambda^2 + a\lambda + b$  admitir raízes reais. Falta, porém, analisarmos as soluções para quando este polinômio não admitir raízes reais.

**Proposição 5.7.** Sejam  $\lambda_1 = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  e  $\lambda_2 = \rho(\cos(\theta) - i \sin(\theta))$  raízes complexas do polinômio  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Temos que  $\rho^n \cos(n\theta)$  e  $\rho^n \sin(n\theta)$  são soluções reais da recorrência (11).

*Demonstração.* Pela Proposição 5.3, temos que  $(\lambda_1^n), (\lambda_2^n)$  são soluções complexas da recorrência (11). Pela Fórmula de Moivre<sup>5</sup>, segue que

$$\lambda_1^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \text{ e } \lambda_2^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)).$$

Portanto, pela Proposição 5.1, a sequência da forma

$$x_n = C_1 \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + C_2 \rho^n(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

também é uma solução complexa da recorrência (11). Fazendo  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ , temos que

$$\frac{1}{2} \cdot (\rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))) + \frac{1}{2} \cdot (\rho^n(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))) = (\rho^n \cos(n\theta)).$$

Portanto,  $\rho^n \cos(n\theta)$  é uma solução real da recorrência (11). Ademais, fazendo  $C_1 = -\frac{i}{2}$  e  $C_2 = \frac{i}{2}$ , temos que:

$$-\frac{i}{2} \cdot (\rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))) + \frac{i}{2} \cdot (\rho^n(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))) = (\rho^n \sin(n\theta)).$$

Sendo assim,  $\rho^n \sin(n\theta)$  também é uma solução real da recorrência (11).  $\square$

**Exemplo 5.12.** O polinômio característico de  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ , dado por  $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ , possui as raízes complexas  $\lambda_1 = 1 + i$  e  $\lambda_2 = 1 - i$ , cujas formas trigonométricas são dadas por  $\lambda_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$  e  $\lambda_2 = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4}))$ . Portanto, temos que as sequências  $(\sqrt{2}^n \sin(\frac{n\pi}{4})) = (0, 1, 2, \dots)$  e  $(\sqrt{2}^n \cos(\frac{n\pi}{4})) = (1, 1, 0, \dots)$  são duas de suas soluções reais.

**Proposição 5.8.** Sejam  $\lambda_1 = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  e  $\lambda_2 = \rho(\cos(\theta) - i \sin(\theta))$  as raízes complexas do polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Se  $a^2 - 4b < 0$  e  $b \neq 0$ , então todas as soluções reais da recorrência (11) são da forma

$$x_n = C_1 \rho^n \cos(n\theta) + C_2 \rho^n \sin(n\theta), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Análogo à Proposição 5.4, temos que se  $\{(\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))\}$  é um subconjunto linearmente independente do conjunto de soluções reais  $S$ , então todo elemento de  $S$  pode ser escrito por  $x_n = C_1 \rho^n \cos(n\theta) + C_2 \rho^n \sin(n\theta)$ , com  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>A Fórmula de Moivre diz que se  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C}$ , então  $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Para mais propriedades de números complexos, ver Soares (2009).

Vamos então provar que o conjunto  $\{(\rho^n(\cos(n\theta)), (\rho^n(\sin(n\theta)))\}$  é linearmente independente. Com efeito, sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , suponhamos que

$$\alpha_1 \rho^n \sin(n\theta) + \alpha_2 \rho^n \cos(n\theta) = (0).$$

Como  $b \neq 0$ , temos que  $\rho \neq 0$ , portanto

$$\alpha_1 \sin(n\theta) + \alpha_2 \cos(n\theta) = (0).$$

Considerando os dois primeiros termos da sequência  $\alpha_1 \sin(n\theta) + \alpha_2 \cos(n\theta)$ , temos

$$\begin{cases} 0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 \sin(\theta) + \alpha_2 \cos(\theta) = 0 \end{cases}.$$

Da primeira igualdade do sistema, segue que  $\alpha_2 = 0$ . Substituindo na segunda igualdade, temos que  $\alpha_1 \sin(\theta) + 0 \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \sin(\theta) = 0$ .

Como  $a^2 - 4b < 0$ , temos que  $\sin \theta$  não pode ser nulo<sup>6</sup> e, portanto,  $\alpha_1 = 0$ . Concluimos então que o conjunto  $\{\rho \sin(n\theta), \rho \cos(n\theta)\}$  é linearmente independente. Segue que toda solução  $(x_n)$  real da recorrência (11) quando  $a^2 - 4b < 0$  é escrita como

$$x_n = C_1 \rho^n \cos(n\theta) + C_2 \rho^n \sin(n\theta), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

**Exemplo 5.13.** Determinar a solução particular da recorrência  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$  para  $x_0 = x_1 = \sqrt{2}$ .

Solução: Pelo exemplo (5.12), temos que as sequências  $\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$  e  $\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$  são duas soluções reais de  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ . Portanto, segue que a solução geral desta recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + C_2 \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para  $x_0 = x_1 = \sqrt{2}$  temos que

$$\begin{cases} C_2 = \sqrt{2} \\ C_1 + C_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

e, portanto,  $C_1 = 0$  e  $C_2 = \sqrt{2}$ . Concluimos assim que a solução particular da recorrência  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$  para  $x_0 = x_1 = \sqrt{2}$  é dada por

$$x_n = \sqrt{2}^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

A Tabela 1 apresenta o resumo das Proposições 5.4, 5.6 e 5.8.

<sup>6</sup>Pois  $\sin \theta = 0$  implica que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e usamos as proposições anteriores

Tabela 1 – Soluções reais de  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ 

Discriminante	Solução
$a^2 - 4b > 0$	$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$
$a^2 - 4b = 0$	$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n$
$a^2 - 4b < 0$	$x_n = C_1\rho^n \cos(n\theta) + C_2\rho^n \sin(n\theta)$

Fonte: O autor.

Uma interessante recorrência linear de 2ª ordem é a recorrência cuja solução é dada pela Sequência de Fibonacci. No século 13 o matemático italiano Leonardo Fibonacci enunciou diversos problemas matemáticos em seu livro Liber Abaci. Dentre eles, o mais famoso é hoje conhecido como problema dos coelhos de Fibonacci, apresentado no exemplo a seguir.

**Exemplo 5.14** (Problema dos Coelhos de Fibonacci).<sup>7</sup> Considere que um homem adquiriu um casal de coelhos recém nascidos em um determinado mês  $n = 0$  e serão adotadas as seguintes hipóteses:

- i) Os coelhos começam a se reproduzir ao completarem seu segundo mês de vida;
- ii) Após o início da vida reprodutiva, cada casal de coelhos gera, a cada mês, exatamente um novo casal de coelhos;
- iii) No intervalo de tempo estudado, os coelhos nunca morrem.

Seguindo o que foi descrito no enunciado, em  $n = 0$  há 1 casal de coelhos. Em  $n = 1$  o casal de coelhos amadureceu mas ainda não gerou um novo casal, pois ainda não completou 2 meses. Em  $n = 2$  o casal inicia a sua vida reprodutiva, gerando um novo casal. Portanto, em  $n = 2$  há 2 casais de coelhos, sendo 1 de adultos e 1 de filhotes. Em  $n = 3$  o casal adulto gera seu 2º casal de coelhos e o casal filhote ainda não iniciou sua vida reprodutiva, temos então 3 casais de coelhos. Em  $n = 4$  o casal inicial gera seu terceiro casal de filhotes e, além disso, o casal que foi gerado em  $n = 2$  gera seu 1º casal de filhotes. Temos então 5 casais de coelhos em  $n = 4$ . Em  $n = 5$  todos os 3 casais que existiam em  $n = 3$  passam a ser adultos reprodutivos, gerando 3 casais a mais do que em  $n = 4$ , totalizando 8 casais.

Portanto o número de casais de coelhos em um instante  $n$  é dado pela soma dos casais presentes em  $n - 1$  com os novos casais gerados que, por sua vez, é dado pelo número de casais de coelhos em  $n - 2$ . Sendo assim, o problema dos coelhos de Fibonacci se resume à seguinte recorrência:

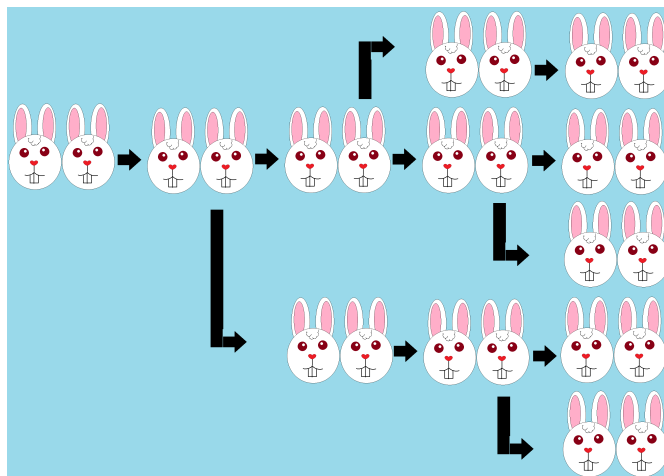
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

cuja solução para  $F_0 = F_1 = 1$  é conhecida como Sequência de Fibonacci. Podemos então resolver o problema dos coelhos utilizando a recorrência para calcular o número

<sup>7</sup>Os Exemplos 5.14 e 5.15 se encontram em Leopoldino (2016).



Figura 7 – Problema dos coelhos de Fibonacci



Fonte: O autor.

de casais de coelhos em cada um dos próximos meses  $n$  até obtermos a resposta do número de casais em um ano:

$$F_7 = F_6 + F_5 = 21,$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 34,$$

$$F_9 = F_8 + F_7 = 55,$$

$$F_{10} = F_9 + F_8 = 89,$$

$$F_{11} = F_{10} + F_9 = 144,$$

$$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 233.$$

Portanto, em um ano haverá 233 casais de coelhos.

Vamos agora estender este problema e determinar o número de casais de coelhos em um tempo  $n$  qualquer, ou seja, vamos encontrar o termo geral da Sequência de Fibonacci. Note que rearranjando os termos, podemos reescrever a recorrência de Fibonacci na forma

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

Temos então uma recorrência linear de 2ª ordem homogênea, cujo polinômio característico é dado por  $\lambda^2 - \lambda - 1$ , que possui as raízes  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Portanto, a solução geral da recorrência  $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$  é dada por

$$F_n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Vamos usar esta solução geral para encontrar o termo geral da sequência de Fibonacci, ou seja, determinar os valores de  $C_1$  e  $C_2$  para  $F_0 = F_1 = 1$ . Temos então o

seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} .$$

Resolvendo este sistema, temos que  $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$  e  $C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$ , portanto o termo geral da Sequência de Fibonacci<sup>8</sup> é dado por:

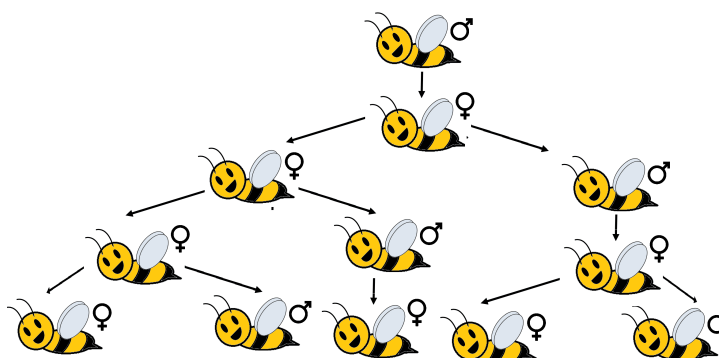
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} .$$

Além do problema dos coelhos de Fibonacci, podemos encontrar a Sequência de Fibonacci em outros fenômenos da natureza. O exemplo a seguir apresenta a Sequência de Fibonacci na árvore genealógica de um zangão.

**Exemplo 5.15** (Antepassados de um zangão). As abelhas rainhas podem depositar ovos fecundados ou não fecundados. Ovos fecundados geram abelhas fêmeas e ovos não fecundados, geram abelhas macho (zangões). Sendo assim, abelhas fêmeas possuem pai e mãe, enquanto que zangões possuem apenas mãe.

Portanto, um zangão possui um antepassado de 1º grau (a sua abelha rainha mãe), 2 antepassados de 2º grau (avô e avó maternos) e 3 antepassados de 3º grau (pai e mãe da abelha avó e a mãe do zangão avô). Seguindo este raciocínio, podemos verificar que o zangão irá possuir 5 antepassados de 4º grau, sendo o pai e a mãe de cada abelha bisavó e a mãe do zangão bisavô. Sendo  $A_n$  o número de antepassados

Figura 8 – Antepassados de um zangão



Fonte: O autor.

de  $n$ -ésimo grau do zangão, temos que  $A_n = Z_n + R_n$ , onde  $Z_n$  e  $R_n$  são, respectivamente, o número de seus antepassados machos (zangões) e fêmeas (abelhas rainhas)

<sup>8</sup>Uma das curiosidades interessantes da Sequência de Fibonacci é a sua relação com o Número de Ouro  $\varphi$ , que pode ser vista em Leopoldino (2016).

de  $n$ -ésimo grau. Note que,  $Z_{n+1} = R_n$  e  $R_{n+1} = R_n + Z_n$ , portanto, temos que

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= Z_{n+2} + R_{n+2} = (R_{n+1}) + (R_{n+1} + Z_{n+1}) = \\ &= (R_n + Z_n) + (R_{n+1} + Z_{n+1}) = A_{n+1} + A_n. \end{aligned}$$

Como  $A_0 = 1$  (o próprio zangão),  $A_1 = 1$  e  $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$ , concluímos que o número de antepassados de grau  $n$  de um zangão segue a sequência de Fibonacci.

**Exemplo 5.16** (Propagação anual de plantas). Plantas anuais são aquelas que completam seu ciclo de vida no período de um ano, passando pelos processos de germinação, crescimento, produção de sementes e morte, onde as sementes que sobreviverem ao inverno e forem germinadas darão vida a novas plantas que repetirão este ciclo no ano seguinte. Vamos descrever a seguir um modelo que realize a estimativa da população de plantas  $P_n$  após um certo ano  $n$ , dadas as seguintes condições<sup>9</sup>:

- i) Cada planta produz uma quantidade  $\gamma \geq 1$  de sementes;
- ii) Antes de germinar, as sementes primeiramente devem passar por um inverno, sendo que apenas uma fração  $0 < \sigma \leq 1$  sobrevive a um determinado inverno;
- iii) Apenas uma fração  $0 < \alpha \leq 1$  das sementes germinam ao conseguirem sobreviver ao primeiro inverno;
- iv) Caso uma semente não germine em seu primeiro ano e consiga sobreviver a um segundo inverno, sua taxa de germinação cai para um valor  $0 \leq \beta \leq 1$ ;
- v) É considerado nulo o número de sementes que germinam após passar por um terceiro inverno.

Para simplificar a modelagem, consideraremos que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\sigma$  são todos parâmetros constantes. Sendo  $S_n^1$  o número de sementes de 1 ano, antes da germinação e sendo  $S_n^2$  o número de sementes de 2 anos, também antes da germinação, a população de plantas  $P_n$  em um certo ano  $n$  é dada por

$$P_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2.$$

Vamos determinar os valores de  $S_n^1$  e  $S_n^2$ . Denotando por  $S_n^0$  o número de sementes produzidas no ano  $n$ , temos que

$$S_{n+1}^1 = \sigma S_n^0. \quad (12)$$

Ou seja, o número de sementes de 1 ano em um determinado tempo  $(n+1)$  é igual ao número de sementes produzidas no ano anterior  $n$  que sobreviveram a um inverno.

Agora, considerando que uma fração  $\alpha$  das sementes de um ano tenham germinado no primeiro ano, temos que uma fração  $(1-\alpha)$  de sementes que não germinaram irão enfrentar um segundo inverno, sendo assim, temos que

$$S_{n+1}^2 = \sigma(1-\alpha)S_n^1, \quad (13)$$

<sup>9</sup>Esta modelagem encontra-se em Diniz (2011).

ou seja, o número de sementes de 2 anos é dado pela quantidade de sementes de 1 ano que não germinaram e que sobreviveram a mais um inverno. Substituindo (12) em (13), temos que:

$$S_{n+2}^2 = \sigma(1 - \alpha)S_{n+1}^1 = \sigma(1 - \alpha)\sigma S_n^0 = \sigma^2(1 - \alpha)S_n^0, \quad (14)$$

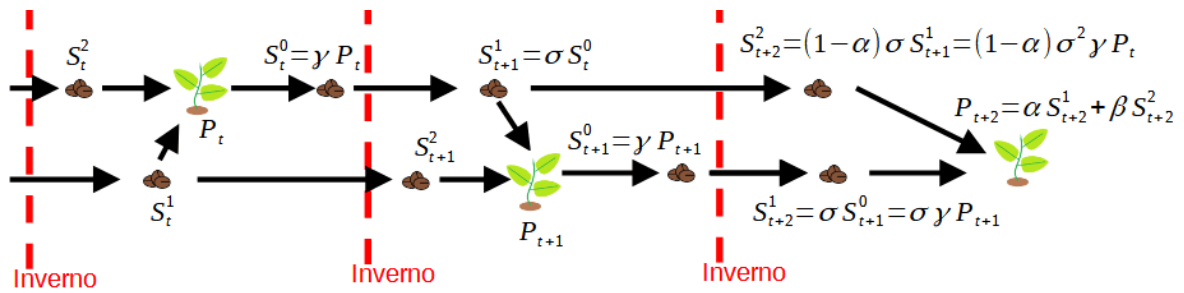
e, portanto,

$$P_{n+2} = \alpha\sigma S_{n+1}^0 + \beta\sigma^2(1 - \alpha)S_n^0.$$

Para finalizar, devemos lembrar que cada planta em um tempo  $n$  gera  $\gamma$  sementes, sendo assim  $S_n^0 = \gamma P_n$ , concluindo que

$$P_{n+2} = \alpha\sigma\gamma P_{n+1} + \beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma P_n.$$

Figura 9 – Propagação anual de plantas



Fonte: O autor.

Vamos agora procurar a solução para este modelo, ou seja, vamos determinar o termo geral do número de plantas  $P_n$  em função do ano  $n$ . Sendo  $a = -\alpha\sigma\gamma$  e  $b = -\beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma$ , temos que o modelo é determinado pela recorrência linear de 2ª ordem:

$$P_{n+2} + aP_{n+1} + bP_n = 0.$$

Calculando as raízes do polinômio característico da recorrência, temos que:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\alpha\sigma\gamma \pm \sqrt{\alpha^2\sigma^2\gamma^2 + 4\beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma}}{2} \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\alpha\sigma\gamma \pm \sqrt{\alpha^2\sigma^2\gamma^2 + \alpha^2\sigma^2\gamma^2 \left(\frac{4\beta(1 - \alpha)}{\gamma\alpha^2}\right)}}{2} \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\alpha\sigma\gamma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \delta}\right), \end{aligned}$$

em que

$$\delta = \frac{4\beta(1 - \alpha)}{\gamma\alpha^2} = \left(\frac{4\beta}{\gamma\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Vamos analisar o sinal de  $\delta$ . Note que  $\left(\frac{4\beta}{\gamma\alpha}\right) \geq 0$ , pois os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são todos não negativos. Ademais, foi imposto inicialmente que  $0 < \alpha \leq 1$  e, portanto,  $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \geq 0$ . Como o produto de dois números não negativos é também não negativo, temos que  $\delta \geq 0$ . Sendo assim, concluímos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são duas raízes reais e distintas e, portanto, a solução da recorrência é dada por

$$P_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são obtidos tendo conhecimento dos dados iniciais  $P_0$  e  $P_1$ .

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor com base na modelagem feita no Exemplo 5.16.

**Exemplo 5.17.** Considere uma espécie de planta anual onde cada indivíduo produz 20 sementes. Suponha que a taxa de sobrevivência ao inverno dessa espécie é de 87,5% e suponha que a fração de plantas de um ano e de dois anos que germinam sejam, respectivamente,  $\frac{1}{5}$  e  $\frac{8}{49}$ .

Considere agora a estimativa de uma população de 20 plantas no ano  $n = 0$  e de 35 plantas no ano  $n = 1$ . Vamos determinar o número de plantas desta plantação após  $n$  anos, seguindo o modelo do exemplo 5.16. Pelas hipóteses, temos os parâmetros  $\gamma = 20$ ,  $\sigma = 0,875$ ,  $\alpha = \frac{1}{5}$  e  $\beta = \frac{8}{49}$ . Portanto, o modelo é dado por

$$P_{n+2} = \frac{1}{5} \cdot 0,875 \cdot 20P_{n+1} + \frac{8}{49} \cdot 0,875^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot 20P_n = 3,5P_{n+1} + 2P_n,$$

cujos polinômio característico é dado por  $\lambda^2 - 3,5\lambda - 2$ , de raízes  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = -0,5$ . Temos então a seguinte solução geral:

$$P_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot (-0,5)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Como  $P_0 = 20$  e  $P_1 = 35$ , podemos determinar os valores de  $C_1$  e  $C_2$  por:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 20 \\ 4C_1 - 0,5C_2 & = 35 \end{cases},$$

cujas soluções são dadas por  $C_1 = C_2 = 10$ . Concluímos então que o número de plantas após  $n$  anos presentes nesta plantação é de

$$P_n = 10 \cdot 4^n + 10 \cdot (-0,5)^n.$$

## 5.2 SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM $k$ HOMOGÊNEAS

Vamos agora discutir algumas soluções reais das recorrências lineares de ordem  $k$  homogêneas e de coeficientes constantes.

**Definição 5.7.** O polinômio  $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0$ , associado à recorrência linear de ordem  $k$  homogênea (10), é chamado de polinômio característico da recorrência.

Esta definição é uma generalização do polinômio característico apresentado na Definição 5.6, para recorrências lineares de ordem  $k$ .

**Exemplo 5.18.** A recorrência de 5ª ordem  $x_{n+5} + x_{n+4} - 2x_{n+3} - x_{n+1} + 5x_n = 0$  possui o polinômio característico  $\lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda + 5$ .

Como visto na seção anterior, se  $\lambda_1$  é raiz do polinômio característico da recorrência linear de 2ª ordem  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ , então a Progressão Geométrica  $\lambda_1^n$  é uma de suas soluções particulares. Veremos agora que esta propriedade se estende para as recorrências lineares de ordem  $k$ .

**Proposição 5.9.** Seja  $\lambda_1$  uma raiz complexa do polinômio característico da recorrência (10), temos que a sequência

$$x_n = \lambda_1^n$$

é uma solução complexa da recorrência (10).

*Demonstração.* Note que

$$\lambda_1^{n+k} + a_{k-1}\lambda_1^{n+k-1} + a_{k-2}\lambda_1^{n+k-2} + \dots + a_0\lambda_1^n = \lambda_1^n(\lambda_1^k + a_{k-1}\lambda_1^{k-1} + a_{k-2}\lambda_1^{k-2} + \dots + a_0).$$

Como  $\lambda_1$  é raiz do polinômio característico  $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0$ , segue que:

$$\lambda_1^n(\lambda_1^k + a_{k-1}\lambda_1^{k-1} + a_{k-2}\lambda_1^{k-2} + \dots + a_0) = \lambda_1^n \cdot 0 = 0.$$

Portanto,  $x_n = \lambda_1^n$  é uma solução complexa da recorrência (10). □

**Exemplo 5.19.** A recorrência  $x_{n+4} - x_n = 0$  possui como polinômio característico o polinômio  $\lambda^4 - 1$ , que possui as raízes  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = i$  e  $\lambda_4 = -i$ . Portanto, as sequências  $(1^n) = (1, 1, 1, \dots)$ ,  $((-1)^n) = (1, -1, 1, \dots)$ ,  $(i^n) = (1, i, -1, \dots)$  e  $((-i)^n) = (1, -i, 1, \dots)$  são soluções complexas particulares da recorrência  $x_{n+4} - x_n = 0$ .

Vamos agora determinar a solução geral de um grupo de recorrências lineares de ordem  $k$  homogêneas, as que possuem o polinômio característico com  $k$  raízes reais distintas.

**Proposição 5.10.** Se o polinômio característico da recorrência (10) possui  $k$  raízes reais distintas, então todas as suas soluções reais possuem a forma

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n,$$

onde  $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são raízes reais distintas do polinômio característico da recorrência (10).

*Demonstração.* Pela Proposição 5.2, temos que o conjunto de soluções reais  $S$  da recorrência (10) forma um espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre o corpo dos reais. Ademais, pela Proposição 5.9,  $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n \in S$ , vamos, então, provar que o conjunto  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é linearmente independente.

Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ , suponhamos que

$$a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \dots + a_k\lambda_k^n = (0).$$

Considerando os  $k$  primeiros termos da sequência  $a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \dots + a_k\lambda_k^n$ , temos

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_k\lambda_k = 0 \\ \vdots \\ a_1\lambda_1^{k-1} + a_2\lambda_2^{k-1} + \dots + a_k\lambda_k^{k-1} = 0 \end{cases},$$

que formam um sistema de equações lineares  $VA = 0$ , onde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

é a matriz de Vandermonde<sup>10</sup> e  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$ . Pelo determinante de Vandermonde, temos

que

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Como  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são duas a duas distintas, cada termo do produto é diferente de zero, logo  $\det(V) \neq 0$  e, sendo assim, a única solução do sistema de equações lineares  $V \cdot A = 0$  é dada por  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ . Concluimos, então, que o conjunto  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é linearmente independente e, sendo assim, se o polinômio característico da recorrência (10) possui  $k$  raízes reais distintas, toda solução  $(x_n)$  real de (10) se escreve como

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n, \quad C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}.$$

□

<sup>10</sup>A matriz de Vandermonde é uma matriz real não singular importante nas aplicações de álgebra linear, ver mais sobre a matriz de Vandermonde e seu determinante em Martins (2015).

**Exemplo 5.20.** Determinar a solução geral da recorrência  $x_{n+4} - 5x_{n+2} + 4x_n = 0$ .  
 Solução: Esta recorrência possui o polinômio característico  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$ . Fazendo a substituição  $\lambda^2 = \gamma$ , temos que  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = \gamma^2 - 5\gamma + 4$ . Note que,  $\gamma^2 - 5\gamma + 4 = 0 \Rightarrow \gamma = 1$  ou  $\gamma = 4$ , concluindo que  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 2$  e  $\lambda_4 = -2$  são as raízes do polinômio  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$ . Sendo assim, pela Proposição 5.10, temos que a solução geral da recorrência  $x_{n+4} - 5x_{n+2} + 4x_n = 0$  é dada por

$$x_n = C_1 1^n + C_2 (-1)^n + C_3 2^n + C_4 (-2)^n, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Usaremos agora os conceitos vistos para determinar algumas soluções das recorrências lineares homogêneas de 3ª ordem com coeficientes constantes.

**Definição 5.8.** Se tomarmos  $k = 3$ ,  $a_2 = a$ ,  $a_1 = b$  e  $a_0 = c$  na recorrência (10), temos que as recorrências lineares homogêneas de 3ª ordem com coeficientes constantes são dadas por

$$x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad c \neq 0. \quad (15)$$

As proposições a seguir determinam as soluções gerais da recorrência (15) para quando seu polinômio admitir apenas raízes reais.

**Proposição 5.11.** Se  $r$  é uma raiz de multiplicidade  $m$  do polinômio  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$  e  $c \neq 0$ , então são soluções da recorrência (15)

- i)  $(r^n)$ , se  $m \in \{1, 2, 3\}$ ;
- ii)  $(nr^n)$ , se  $m \in \{2, 3\}$ ;
- iii)  $(n^2 r^n)$ , se  $m = 3$ .

*Demonstração.* i) Consequência direta da Proposição 5.9.

ii) Como  $r$  é raiz de  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ , temos que  $r^3 + ar^2 + br + c = 0$ . Ademais, como  $r$  tem multiplicidade  $m \in \{2, 3\}$ , então  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - r)^2(\lambda - s)$ . Temos:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - r)^2(\lambda - s) = \lambda^3 - (2r + s)\lambda^2 + (r^2 + 2sr)\lambda - sr^2.$$

Pela igualdade de polinômios, segue que

$$\begin{cases} a = -(2r + s) \\ b = r^2 + 2sr \end{cases} \quad (16)$$

e, portanto,

$$b = r^2 + 2(-a - 2r)r \Rightarrow 3r^2 + 2ar + b = 0.$$

Substituindo  $nr^n$  na recorrência (15), temos:

$$\begin{aligned} & (n+3)r^{n+3} + a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n \\ & = nr^n(r^3 + ar^2 + br + c) + r^{n+1}(3r^2 + 2ar + b) \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Observe que  $c = 0$  acarreta em uma redução da ordem, onde podemos usar os resultados anteriores.



$$= nr^n 0 + r^{n+1} 0 = 0,$$

concluindo que  $nr^n$  é solução da recorrência (15).

iii) Neste caso temos  $r = s$ . Portanto, de (16), segue que

$$\begin{cases} a = -3r \\ b = 3r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4ar = -12r^2 \\ b = 3r^2 \end{cases} \Rightarrow 9r^2 + 4ar + b = 0.$$

Ademais, pelos itens  $i$ ) e  $ii$ ), temos que  $r^3 + ar^2 + br + c = 0$  e  $3r^2 + 2ar + b = 0$ . Sendo assim, substituindo  $n^2 r^n$  na recorrência (15), temos:

$$\begin{aligned} & (n+3)^2 r^{n+3} + a(n+2)^2 r^{n+2} + b(n+1)^2 r^{n+1} + cn^2 r^n \\ &= n^2 r^n (r^3 + ar^2 + br + c) + 2nr^{n+1} (3r^2 + 2ar + b) + r^{n+1} (9r^2 + 4ar + b) \\ &= n^2 r^n 0 + 2nr^{n+1} 0 + r^{n+1} 0 = 0, \end{aligned}$$

concluindo que  $(n^2 r^n)$  é solução da recorrência (15).  $\square$

**Exemplo 5.21.** A recorrência  $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$  possui o polinômio característico  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ , que possui a raiz  $\lambda_1 = -1$ , de multiplicidade 3. Sendo assim, as sequências  $((-1)^n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ ,  $(n(-1)^n) = (0, -1, 2, -3, \dots)$  e  $(n^2(-1)^n) = (0, -1, 4, -9, \dots)$  são soluções de  $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$ .

**Proposição 5.12.** Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  e seja  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$  o polinômio característico da recorrência (15), então a solução geral da recorrência (15) é dada por

- $i)$   $x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n$ , se  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ ;
- $ii)$   $x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 n \lambda_2^n$ , se  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ ;
- $iii)$   $x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^n + C_3 n^2 \lambda_1^n$ , se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ .

*Demonstração.* Por ser de 3ª ordem, pela Proposição 5.2 temos que o conjunto de soluções reais  $S$  da recorrência (15) forma um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão 3. Portanto, sejam  $(u_n), (v_n)$  e  $(w_n)$  soluções reais de (15) linearmente independentes e sejam  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ , todo elemento de  $S$  se escreve como

$$(x_n) = C_1(u_n) + C_2(v_n) + C_3(w_n).$$

Portanto, temos os seguintes casos:

$i)$  Pelo fato de  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  serem raízes distintas não nulas, pela Proposição 5.10, temos que a solução da recorrência (15) é dada por

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n.$$

$ii)$  Como  $\lambda_1$  é raiz de multiplicidade 1 e  $\lambda_2$  é raiz de multiplicidade 2, pela Proposição 5.11, temos que  $\lambda_1^n, \lambda_2^n$  e  $n\lambda_2^n$  são soluções da recorrência (15).

Vamos então provar que  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Com efeito, sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , suponhamos que

$$\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \alpha_3 n \lambda_2^n = (0).$$

Considerando os 3 primeiros termos da sequência  $\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3n\lambda_2^n$ , temos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_2 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_2^2 + 2\alpha_3\lambda_2^2 = 0 \end{cases} .$$

Pela 1ª igualdade, temos que  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , sendo assim

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1 + \lambda_2\alpha_3 = 0 \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\alpha_1 + 2\lambda_2^2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1 + 2\lambda_2^2\alpha_3 = 0 \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\alpha_1 + 2\lambda_2^2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - 2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)]\alpha_1 = 0 \Rightarrow [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - (2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2)]\alpha_1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)^2\alpha_1 = 0.$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , temos que  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0$  e, portanto,  $\alpha_1 = 0$ . Segue que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , concluindo que  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Temos assim que a solução da recorrência (15) é dada por

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3n\lambda_2^n.$$

iii) Como  $\lambda_1$  é uma raiz não nula de multiplicidade 3, pela Proposição 5.11, temos que  $\lambda_1^n$ ,  $n\lambda_1^n$  e  $n^2\lambda_1^n$  são soluções da recorrência (15). Vamos provar que  $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, n^2\lambda_1^n\}$  é linearmente independente. Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , suponhamos que

$$\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2n\lambda_1^n + \alpha_3n^2\lambda_1^n = (0).$$

Considerando os três primeiros termos da sequência  $\alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2n\lambda_1^n + \alpha_3n^2\lambda_1^n$ , temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1 = 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 + 2\alpha_2\lambda_1^2 + 4\alpha_3\lambda_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1 = 0 \\ 2\alpha_2\lambda_1^2 + 4\alpha_3\lambda_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1 = 0 \\ \alpha_2\lambda_1 + 2\alpha_3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\alpha_3 = 0.$$

Como  $\lambda_1 \neq 0$ , segue que  $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$ , concluindo que  $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, n^2\lambda_1^n\}$  é um conjunto linearmente independente. Portanto, temos que a solução da recorrência (15) é dada por

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n + C_3n^2\lambda_1^n.$$

□

A Tabela 2 apresenta o resumo dos resultados obtidos na Proposição 5.12.

Tabela 2 – Soluções reais de  $x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ , para  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  e  $c \neq 0$

Raízes	Solução
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$	$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3n\lambda_2^n$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n + C_3n^2\lambda_1^n$

Fonte: O autor.

**Exemplo 5.22.** Sabendo que  $\lambda_1 = -1$  é uma raiz de  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ , vamos determinar a solução da recorrência  $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 4x_n = 0$ . Como  $\lambda_1 = -1$  é raiz de  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ , podemos fatorá-lo por  $\lambda + 1$ . Temos então que  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$  e, portanto,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$  são as demais raízes de  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ . Sendo assim, a solução geral de  $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 4x_n = 0$  é dada por

$$x_n = C_1(-1)^n + C_22^n + C_3n2^n, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.23.** Determinar uma recorrência de 3ª ordem na qual a sequência  $(x_n) = (2 - 3n + n^2)$  seja uma solução.

Solução: Note que

$$x_n = 2 - 3n + n^2 = 2 \cdot 1^n - 3n \cdot 1^n + 1n^2 \cdot 1^n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n + C_3n^2\lambda_1^n,$$

em que  $\lambda_1 = 1$ ,  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = -3$  e  $C_3 = 1$ . Portanto,  $(x_n)$  é uma solução da recorrência linear homogênea de 3ª ordem cujo polinômio característico possui a raiz  $\lambda_1 = 1$ , de multiplicidade 3, ou seja, o polinômio característico de  $(x_n)$  é dado por

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1,$$

portanto,  $x_n = 1 - 3n + n^2$  é uma solução da recorrência  $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$ .

**Exemplo 5.24** (Dinâmica populacional com 3 faixas etárias). <sup>12</sup>Algumas espécies de animais, como muitos exemplos de insetos, possuem faixas etárias bem definidas ao longo de sua vida. Suponha que uma certa espécie de inseto possua uma população de fêmeas em 3 faixas etárias diferentes, todas com a mesma duração de tempo.

Vamos denotar por  $(F_n^1)$ ,  $(F_n^2)$  e  $(F_n^3)$ , respectivamente, a população de fêmeas das fases 1, 2 e 3 em um certo instante  $n$ . Supondo que apenas uma quantidade  $\sigma_1$  de fêmeas da fase 1 sobrevivam e cheguem na fase 2, temos que  $F_{n+1}^2 = \sigma_1 F_n^1$ . Além disso, se considerarmos que uma quantidade  $\sigma_2$  de fêmeas da fase 2 sobrevivam e cheguem na fase 3, temos que  $F_{n+1}^3 = \sigma_2 F_n^2$ .

Por fim, se considerarmos que as fêmeas da fase 2 gerem  $\gamma_1$  fêmeas da fase 1 e que as fêmeas da fase 3 gerem  $\gamma_2$  fêmeas da fase 1, temos que  $F_{n+1}^1 = \gamma_1 F_n^2 + \gamma_2 F_n^3$ . Fazendo algumas substituições, segue que:

$$F_{n+3}^3 = \sigma_2 F_{n+2}^2 = \sigma_2 \sigma_1 F_{n+1}^1 = \sigma_2 \sigma_1 (\gamma_1 F_n^2 + \gamma_2 F_n^3) = \gamma_1 \sigma_1 (\sigma_2 F_n^2) + \sigma_2 \sigma_1 \gamma_2 F_n^3$$

<sup>12</sup>Este exemplo se encontra em Diniz (2011).

$$\Rightarrow F_{n+3}^3 = \gamma_1 \sigma_1 F_{n+1}^3 + \gamma_2 \sigma_1 \sigma_2 F_n^3.$$

Desta forma, modelamos a população de fêmeas da última faixa etária em um certo tempo  $n + 3$  através de uma recorrência linear de 3ª ordem

$$F_n^3 - (\gamma_1 \sigma_1) F_{n+1}^3 - (\gamma_2 \sigma_1 \sigma_2) F_n^3 = 0.$$

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor com base na modelagem feita no Exemplo 5.24.

**Exemplo 5.25.** Considere que uma espécie de besouro alemão viva no máximo 3 meses, sendo que as fêmeas se dividem em 3 faixas etárias: ninfas (1º mês), juvenis (2º mês) e adultas (3º mês). Suponha que cada juvenil produza 14 ninfas fêmeas e que cada adulta produza 20 ninfas fêmeas. Suponha ainda que a taxa de sobrevivência das ninfas é de 50% e que das juvenis é de 60%. Sendo  $F_n$  a população de fêmeas adultas em um determinado tempo  $n$ , pelo modelo do Exemplo 5.24, temos a recorrência

$$\begin{aligned} F_{n+3} - (14 \cdot 0,5) F_{n+1} - (20 \cdot 0,5 \cdot 0,6) F_n &= 0 \\ \Rightarrow F_{n+3} - 7 F_{n+1} - 6 F_n &= 0. \end{aligned}$$

Como a recorrência possui o polinômio característico  $\lambda^3 - 7\lambda - 6$ , de raízes  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 3$ , temos que o modelo possui a solução:

$$F_n = C_1(-2)^n + C_2(-1)^n + C_3 3^n, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

No Quadro 3 propomos uma atividade com duas questões envolvendo recorrências de 2ª ordem aplicadas a problemas populacionais. No Ensino Médio, é comum que professores de matemática, ao buscar contextualizar conceitos como equações polinomiais de 2º grau, recorram a aplicações na física, como a queda livre. As recorrências de 2ª ordem não são muito exploradas no Ensino Médio, geralmente se fazendo apenas uma rápida menção à Sequência de Fibonacci. Porém, vimos que estas recorrências trabalham uma vasta quantidade de conceitos do Ensino Médio, tais como potenciação, polinômios, equações quadráticas, números complexos, funções trigonométricas e sistema de equações. Portanto, estudar estas recorrências também pode ser uma maneira de desenvolver habilidades da BNCC, tais como a habilidade (EM13MAT302) "Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais" e a habilidade (EM13MAT301) "Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas".

Embora o estudo de recorrências de 2ª ordem exija que os alunos já tenham uma boa compreensão sobre recorrências, suas aplicações em modelos populacionais oferecem uma oportunidade de ilustrar como estes conteúdos estão ligados com

outras áreas do conhecimento, como a biologia. Isto permite aos alunos visualizar a conexão entre diferentes componentes curriculares e a utilidade prática de conceitos matemáticos mais complexos. Esta proposta é indicada para professores que desejam trabalhar os conteúdos de equações quadráticas e sistemas de equações em paralelo com as recorrências de 2ª ordem, apresentando a seus alunos exemplos e exercícios aplicados à biologia.

Quadro 3 – Proposta de atividade sobre recorrências lineares de 2ª ordem homogênea

**Questão 1:** Suponha que o problema dos casais de coelhos de Fibonacci possui a seguinte alteração: cada casal adulto gera, por mês, 2 novos casais de coelhos ao invés de apenas 1. Neste caso, a recorrência será dada por  $F_{n+2} = F_{n+1} + 2F_n$ . Responda:

- Qual o polinômio característico da recorrência e quais são suas raízes?
- Qual a solução geral da recorrência?
- Qual o termo geral da solução da recorrência para  $F_0 = F_1 = 1$ ?
- Determine o número de casais de coelhos após 11 meses.

**Questão 2:** Considere que em um ambiente haja uma espécie de besouro que vive dois meses, um mês na fase de larva e outro na fase adulta, onde cada adulto produz 18 larvas e metade dessas larvas sobrevivem até a fase adulta. Sendo  $A_n$  e  $L_n$ , respectivamente, as populações de besouros adultos e de larvas em uma geração  $n$ , temos que  $A_{n+1} = 0,5L_n$  e  $L_{n+1} = 18A_n$ . Com isso, vemos que  $A_{n+2} = 0,5L_{n+1} = 0,5 \cdot 18A_n = 9A_n$ , ou seja,  $A_{n+2} - 9A_n = 0$ . Responda:

- Solução geral da recorrência  $A_{n+2} - 9A_n = 0$ .
- Supondo que neste ambiente em uma determinada geração  $n = 0$  haviam 70 besouros adultos e 60 larvas, qual a estimativa de adultos após  $n$  gerações?
- Use o termo geral obtido para estimar o número de besouros após 7 gerações.

Fonte: O Autor.

### 5.3 SOLUÇÕES DAS RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM $k$ NÃO HOMOGÊNEAS

As recorrências lineares de ordem  $k$  não homogêneas são uma classe mais geral e complexa de equações que descrevem a evolução de uma sequência em função de seus  $k$  termos anteriores, com a presença de um termo não-homogêneo, que pode ser uma função de  $n$  ou uma constante. Essas equações têm ampla aplicação em áreas como a modelagem de dinâmica populacional

**Definição 5.9.** Se  $f_{k-1}(n), f_{k-2}(n), \dots, f_0(n), g(n)$  forem constantes e  $g(n)$  for não nula, a recorrência (9) é então chamada de recorrência linear de ordem  $k$  não homogênea com coeficientes constantes, podendo ser escrita na forma

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n = r, \quad a_0, r \neq 0, \quad (17)$$

onde  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0, r \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.26.** A recorrência  $x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 5$  é uma recorrência linear de 2ª ordem não homogênea de coeficientes  $a_1 = 3$ ,  $a_0 = -1$  e  $r = 5$ .

A Proposição 5.13 nos mostra que podemos obter a solução geral das recorrências lineares não homogêneas a partir de apenas uma solução particular, em conjunto com a solução da homogênea associada.

**Proposição 5.13.** Seja  $(\hat{x}_n)$  uma solução particular qualquer da recorrência não homogênea (17) e  $(y_n)$  a solução geral da recorrência linear homogênea (10), então a solução geral da recorrência (17) é dada por

$$(x_n) = (y_n + \hat{x}_n).$$

*Demonstração.* Sejam  $(x_n)$  e  $(\hat{x}_n)$  soluções quaisquer da recorrência (17), temos que  $(y_n) = (x_n - \hat{x}_n)$  é solução da recorrência linear homogênea (10). De fato, pois

$$\begin{aligned} y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \dots + a_0y_n &= \\ (x_{n+k} - \hat{x}_{n+k}) + a_{k-1}(x_{n+k-1} - \hat{x}_{n+k-1}) + a_{k-2}(x_{n+k-2} - \hat{x}_{n+k-2}) + \dots + a_0(x_n - \hat{x}_n) &= \\ (x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0x_n) - (\hat{x}_{n+k} + a_{k-1}\hat{x}_{n+k-1} + a_{k-2}\hat{x}_{n+k-2} + \dots + a_0\hat{x}_n) &= \\ = r - r = 0. \end{aligned}$$

Note que  $(y_n) = (x_n - \hat{x}_n) \Rightarrow (x_n) = (y_n + \hat{x}_n)$ . Sendo assim, concluímos que se  $(\hat{x}_n)$  é uma solução qualquer da recorrência (17) e  $(y_n)$  é a solução da recorrência linear homogênea (10). Portanto, a solução da recorrência (17) é dada por  $(x_n) = (y_n + \hat{x}_n)$ .  $\square$

A Proposição 5.14 nos lista soluções particulares para a recorrência linear não homogênea de 2ª ordem que podem ser usadas para obter a sua solução geral, de acordo com a Proposição 5.13.

**Proposição 5.14.** Sendo  $a, b, r \in \mathbb{R}$ , com  $b \neq 0$  e  $r \neq 0$ , as seguintes sequências são soluções particulares da recorrência linear de 2ª ordem  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$

- i)  $\left(\frac{r}{1+a+b}\right)$ , se  $a+b \neq -1$ ;
- ii)  $\left(\frac{rn}{2+a}\right)$ , se  $a+b = -1$  e  $a \neq -2$ ;
- iii)  $\left(\frac{rn^2}{2}\right)$ , se  $a = -2$  e  $b = 1$ .

*Demonstração.* i) Note que se  $a+b \neq -1$ , então

$$\left(\frac{r}{1+a+b}\right) + a\left(\frac{r}{1+a+b}\right) + b\left(\frac{r}{1+a+b}\right) = \frac{r(1+a+b)}{1+a+b} = r,$$

portanto  $\left(\frac{r}{1+a+b}\right)$  é uma solução particular da recorrência  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$ .

ii) Se  $a+b = -1$  e  $a \neq -2$ , temos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r(n+2)}{2+a}\right) + a\left(\frac{r(n+1)}{2+a}\right) + b\left(\frac{rn}{2+a}\right) \\ &= \frac{rn+2r+arn+ar+brn}{2+a} \\ &= \frac{(2+a)r+(1+a+b)rn}{2+a} = \frac{(2+a)r+(1-1)rn}{2+a} = r, \end{aligned}$$

portanto  $\left(\frac{rn}{2+a}\right)$  é uma solução particular de  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$ .

iii) Por último, se  $a+b = -1$  e  $a = -2$ , temos que a recorrência  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$  é dada por  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = r$ . Sendo assim, temos que

$$\left(\frac{r(n+2)^2}{2}\right) - 2\left(\frac{r(n+1)^2}{2}\right) + \left(\frac{rn^2}{2}\right) = \frac{r(n^2+4n+4-2n^2-4n-2+n^2)}{2} = r,$$

concluindo que  $\left(\frac{rn^2}{2}\right)$  é uma solução particular de  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$ .  $\square$

**Exemplo 5.27.** Determinar a solução geral da recorrência linear de 2ª ordem não homogênea  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$  para quando  $a^2 - 4b > 0$  e  $a+b \neq -1$ .

Solução: Como  $a^2 - 4b > 0$ , a solução da recorrência homogênea  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$  é dada por  $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ , onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  são as raízes de  $\lambda^2 + a\lambda + b$ .

Ademais, como  $a+b \neq -1$ , temos que  $\frac{r}{1+a+b}$  é uma solução particular de  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$ . Portanto, pela Proposição 5.13, a solução da recorrência  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = r$  para  $a^2 - 4b > 0$  e  $a+b \neq -1$  é dada por:

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \frac{r}{1+a+b}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

O Quadro 4 apresenta uma proposta de exercício sobre recorrências lineares de 2ª ordem não homogênea. Com ela, professores e alunos poderão contextualizar, além dos conteúdos de equações quadráticas e sistemas de equações já trabalhados na proposta do Quadro 3, outros objetos do conhecimento da matemática, tais como números complexos e funções trigonométricas, além de trabalhar a habilidade da BNCC (EM13MAT306) "Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem

fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria". Ademais, o fato de termos aqui uma forma de integrar conceitos de números complexos com situações problemas é mais um argumento para a valorização do ensino de recorrências e de modelagem no Ensino Médio.

Além de ser uma proposta pensada para que o professor utilize com seus alunos como forma de contextualizar conceitos matemáticos, espera-se que ela sirva de inspiração para que o professor pesquise ou desenvolva suas próprias questões envolvendo modelos discretos.

Quadro 4 – Proposta de atividade sobre recorrência linear de 2ª ordem não homogênea

**Questão 1:** Suponha que um agricultor cultive uma espécie sazonal de planta, onde a colheita é realizada da seguinte maneira: A cada ano  $n$ , em algum momento antes da geração de sementes, ele colhe uma quantidade de plantas proporcional ao número de plantas que existiam na plantação dois anos antes ( $n-2$ ). Além disso, para garantir que a população de plantas não seja completamente eliminada, ele realiza o plantio de 60 mudas anualmente. Assim, se  $P_{n+2} = 0,5P_{n+1} - 0,25P_n + 60$  representa o número de plantas em um determinado ano ( $n + 2$ ), responda:

- a) Encontre uma solução constante para a recorrência.
- b) Determine a solução geral da recorrência.
- c) Determine a solução para  $P_0 = 80$  e  $P_1 = 200$ .
- d) Descreva o que se pode notar sobre o número de plantas colhidas pelo agricultor com o passar dos anos.

Fonte: O Autor.



## 6 SISTEMAS DE RECORRÊNCIAS

Em vários fenômenos da natureza podemos notar a presença de duas ou mais grandezas distintas interagindo entre si, como por exemplo, a interação entre as populações de duas espécies de animais no mesmo habitat. Sendo assim, estudaremos agora sistemas com mais de uma recorrência.

**Definição 6.1.** Um sistema de recorrências é um conjunto com  $k$  recorrências de  $k$  incógnitas  $((x_1)_n), ((x_2)_n), \dots, ((x_k)_n)$ , onde o termo  $(x_k)_{n+1}$  de cada incógnita é determinado em função dos termos anteriores de todas as incógnitas do sistema, ou seja, determinado em função de  $(x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_k)_n$ , podendo ou não ser determinado também por  $n$ , isto é,

$$\begin{cases} (x_1)_{n+1} = f_1((x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_k)_n, n) \\ (x_2)_{n+1} = f_2((x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_k)_n, n) \\ \vdots \\ (x_k)_{n+1} = f_k((x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_k)_n, n) \end{cases}.$$

**Exemplo 6.1.** O sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases},$$

é um sistema de recorrências de 2 incógnitas,  $(x_n)$  e  $(y_n)$ , cujas funções são dadas por  $f_1(x_n, y_n) = x_n y_n$  e  $f_2(x_n, y_n) = x_n + y_n$ . Note que para  $n = 0$ , temos que  $x_1 = x_0 y_0$  e  $y_1 = x_0 + y_0$ . Sendo assim, para determinar os termos das sequências que formam a solução do sistema, é necessário conhecermos os valores iniciais  $x_0$  e  $y_0$ . Se  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 1$ , por exemplo, temos como solução o par ordenado de sequências

$$(x_n, y_n) = ((x_0, x_0 y_0, x_1 y_1, \dots), (y_0, x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots)) = ((1, 1, 2, \dots), (1, 2, 3, \dots)).$$

**Exemplo 6.2.** As populações das 3 faixas etárias de insetos fêmeas do Exemplo 5.24 seguem 3 recorrências interdependentes, podendo ser escritas na forma do seguinte sistema

$$\begin{cases} F_{n+1}^1 = \gamma_1 F_n^2 + \gamma_2 F_n^3 \\ F_{n+1}^2 = \sigma_1 F_n^1 \\ F_{n+1}^3 = \sigma_2 F_n^2 \end{cases}.$$

### 6.1 SISTEMA HOMOGÊNEO DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE 2 INCÓGNITAS

**Definição 6.2.** Um sistema homogêneo de recorrências lineares de 2 incógnitas com coeficientes constantes reais é um sistema da forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases}, \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$X_{n+1} = AX_n,$$

onde

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Nesta forma matricial, chamaremos a matriz  $A$  de matriz dos coeficientes do sistema.

No sistema (18), cada incógnita depende do termo anterior de ambas as incógnitas do sistema. A seguir, mostraremos que este sistema pode ser desacoplado, ou seja, cada equação pode ser reescrita por uma equação de apenas uma incógnita.

**Proposição 6.1.** O Sistema (18) pode ser reescrito de forma desacoplada como:

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \\ y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0 \end{cases}, \quad (19)$$

onde  $a = -(a_{11} + a_{22})$  e  $b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

*Demonstração.* Da igualdade  $x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n$ , segue que  $x_{n+2} = a_{11}x_{n+1} + a_{12}y_{n+1}$ , portanto

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}(a_{21}x_n + a_{22}y_n) \\ &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}a_{12}y_n \\ &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}(x_{n+1} - a_{11}x_n) \\ &= (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_n. \end{aligned}$$

Sendo assim,  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ . De forma análoga

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= a_{21}x_{n+1} + a_{22}y_{n+1} \\ &= a_{21}(a_{11}x_n + a_{12}y_n) + a_{22}y_{n+1} \\ &= a_{11}a_{21}x_n + a_{12}a_{21}y_n + a_{22}y_{n+1} \\ &= a_{11}(y_{n+1} - a_{22}y_n) + a_{12}a_{21}y_n + a_{22}y_{n+1} \\ &= (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{21}a_{21} - a_{11}a_{22})y_n. \end{aligned}$$

Portando,  $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$ , concluindo que:

$$\begin{cases} x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \\ y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0 \end{cases}.$$

□

Note que  $a = -(a_{11} + a_{22})$  e  $b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  são, respectivamente, o oposto do traço  $-\text{tr}(A)$  e o determinante  $\det(A)$  da matriz dos coeficientes  $A$ .

Reescrevendo o sistema na forma desacoplada, o transformamos em duas recorrências lineares de 2ª ordem  $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$  e  $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$  que possuem mesmo polinômio característico  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Portanto, as sequências  $(x_n)$  e

$(y_n)$  possuem a mesma solução geral (estudada no Capítulo 5), sendo diferenciadas apenas pelos seus valores iniciais.

Note que nessa forma desacoplada, para  $n = 0$ , os primeiros termos a serem determinados são  $x_2 = -ax_1 - bx_0$  e  $y_2 = -ay_1 - by_0$ , ou seja, por serem recorrências de 2ª ordem, são necessários os 2 primeiros valores de cada sequência para determinar os próximos termos de forma recursiva. Porém, através dos valores de  $x_0$  e  $y_0$  podemos calcular os valores de  $x_1$  e  $y_1$  pelo sistema original (acoplado), onde  $x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0$  e  $y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0$ .

**Exemplo 6.3.** Determinar, para  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ , a solução do sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}.$$

Solução: Começaremos calculando os coeficientes  $a$  e  $b$  pelo oposto do traço e pelo determinante da matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Temos então que  $a = -tr(A) = -(1 - 3) = 2$  e  $b = det(A) = 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 = 1$ . Sendo assim, o sistema pode ser escrito na forma desacoplada

$$\begin{cases} x_{n+2} + 2x_{n+1} + 1x_n = 0 \\ y_{n+2} + 2y_{n+1} + 1y_n = 0 \end{cases},$$

cujos polinômios característicos são dados por  $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ , de raízes  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Portanto, os termos gerais das sequências são dados por

$$\begin{cases} x_n = C_{11}1^n + C_{12}n1^n \\ y_n = C_{21}1^n + C_{22}n1^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = C_{11} + C_{12}n \\ y_n = C_{21} + C_{22}n \end{cases},$$

em que  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} \in \mathbb{R}$ . Vamos agora determinar os valores dessas constantes. Usando o sistema na forma acoplada, temos:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - 2y_0 \\ y_1 = 2x_0 - 3y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2 \cdot 2 \\ y_1 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -4 \end{cases}.$$

Ademais, pela solução geral obtida, temos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{11} + 0C_{12} & C_{11} + 1C_{12} \\ C_{21} + 0C_{22} & C_{21} + 1C_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} + C_{12} \\ C_{21} & C_{21} + C_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, concluímos que  $C_{11} = 1$ ,  $C_{12} = -4$ ,  $C_{21} = 2$  e  $C_{22} = -6$ , ou seja, a solução do sistema é dada por

$$\begin{cases} (x_n) = (1 - 4n) \\ (y_n) = (2 - 6n) \end{cases} .$$

## 6.2 SISTEMA DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE K INCÓGNITAS HOMOGÊNEO

Generalizaremos agora o desacoplamento do sistema de recorrências lineares vista no tópico anterior para recorrências com  $k$  incógnitas.

**Definição 6.3.** Um sistema de recorrências linear homogêneo com  $k$  incógnitas e de coeficientes constantes é um sistema da forma

$$\begin{cases} (x_1)_{n+1} = a_{11}(x_1)_n + a_{12}(x_2)_n + \dots + a_{1k}(x_k)_n \\ (x_2)_{n+1} = a_{21}(x_1)_n + a_{22}(x_2)_n + \dots + a_{2k}(x_k)_n \\ \vdots \\ (x_k)_{n+1} = a_{k1}(x_1)_n + a_{k2}(x_2)_n + \dots + a_{kk}(x_k)_n \end{cases} ,$$

que possui a forma matricial

$$X_{n+1} = AX_n, \tag{20}$$

onde

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} (x_1)_{n+1} \\ (x_2)_{n+1} \\ \vdots \\ (x_k)_{n+1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \text{ e } X_n = \begin{bmatrix} (x_1)_n \\ (x_2)_n \\ \vdots \\ (x_k)_n \end{bmatrix} .$$

Chamaremos a matriz  $A$  de matriz dos coeficientes do sistema.

**Proposição 6.2.** Se  $X_{n+1} = AX_n$ , então  $X_{n+k} = A^k X_n$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Demonstração.* O caso  $k = 0$  é trivial. Supondo que  $X_{n+\hat{k}} = A^{\hat{k}} X_n$ , para algum  $\hat{k} \in \mathbb{N}$ , segue que

$$X_{n+\hat{k}+1} = AX_{n+\hat{k}} = A(A^{\hat{k}} X_n) = A^{\hat{k}+1} X_n.$$

Pelo princípio de indução finita, temos que  $X_{n+k} = A^k X_n$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . □

Como consequência da Proposição 6.2, podemos determinar um valor  $X_k$  qualquer da solução do sistema a partir de seu valor inicial  $X_0$  através da potenciação da matriz dos coeficientes, onde  $X_k = A^k X_0$ .

**Exemplo 6.4.** Sendo  $(a_0, b_0) = (1, 2)$ , determinar o valor de  $(a_3, b_3)$  do sistema de recorrências

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

A seguir, veremos que, assim como o sistema de 2 incógnitas (18), o sistema de  $k$  incógnitas (20) também pode ser reescrito de forma desacoplada.

**Proposição 6.3.** Seja  $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0$  o polinômio característico da matriz  $A$  do sistema de recorrências lineares de  $k$  incógnitas (20), temos que o sistema (20) pode ser escrito na forma desacoplada

$$X_{n+k} + a_{k-1}X_{n+k-1} + a_{k-2}X_{n+k-2} + \dots + a_0X_n = 0.$$

*Demonstração.* Como  $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0$  é o polinômio característico da matriz  $A$ , pelo Teorema de Cayley-Hamilton<sup>1</sup>, temos

$$A^k + a_{k-1}A^{k-1} + a_{k-2}A^{k-2} + \dots + a_0I = 0.$$

Multiplicando por  $X_n$  ambos os membros da igualdade pela direita, segue que

$$\begin{aligned} (A^k + a_{k-1}A^{k-1} + a_{k-2}A^{k-2} + \dots + a_0I)X_n &= 0 \\ \Rightarrow A^k X_n + a_{k-1}A^{k-1}X_n + a_{k-2}A^{k-2}X_n + \dots + a_0X_n &= 0 \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.2, conclui-se que:

$$X_{n+k} + a_{k-1}X_{n+k-1} + a_{k-2}X_{n+k-2} + \dots + a_0X_n = 0.$$

□

**Exemplo 6.5.** Determinar a solução do sistema de recorrências lineares

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n \\ y_{n+1} = -y_n + z_n \\ z_{n+1} = -z_n \end{cases}$$

Solução: A matriz  $A$  dos coeficientes desse sistema é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

que possui o polinômio característico  $(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ .

Temos então que a recorrência linear de 3ª ordem equivalente a cada recorrência do sistema é a recorrência  $u_{n+1} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0$ , que possui também o

<sup>1</sup>O Teorema de Cayley-Hamilton diz que se  $p$  é o polinômio característico da matriz  $A$ , então  $p(A) = 0$ , ver mais em Lima (2014a).

polinômio característico  $(\lambda + 1)^3$  que, por sua vez, possui a raiz  $\lambda_1 = -1$ , de multiplicidade 3. Sendo assim, a solução geral da recorrência  $u_{n+1} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0$  é da forma

$$u_n = C_1(-1)^n + C_2n(-1)^n + C_3n^2(-1)^n, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Concluimos, assim, que a solução geral do sistema pode ser escrita por:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \end{bmatrix},$$

onde  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33} \in \mathbb{R}$ .

### 6.3 EQUILÍBRIO DE SISTEMAS DE RECORRÊNCIAS

Assim como nas recorrências de 1ª ordem, podemos encontrar também pontos de equilíbrio em sistemas com  $k$  recorrências, conforme abordaremos a seguir.

**Definição 6.4.** Um ponto  $(x_1^*, \dots, x_k^*) \in \mathbb{R}^k$  é chamado de ponto fixo (ou ponto de equilíbrio) de um sistema de recorrências com  $k$  incógnitas se  $((x_1)_{n+1}, \dots, (x_k)_{n+1}) = ((x_1)_n, \dots, (x_k)_n) = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Exemplo 6.6.** Determinar o ponto de equilíbrio do sistema de recorrências lineares de 2 incógnitas (18).

Solução: Sendo  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$ , temos que:

$$\begin{cases} x^* = a_{11}x^* + a_{12}y^* \\ y^* = a_{21}x^* + a_{22}y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - 1)x^* + a_{12}y^* = 0 \\ a_{21}x^* + (a_{22} - 1)y^* = 0 \end{cases},$$

cuja única solução, se  $(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21} \neq 0$ , é dada por  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

**Exemplo 6.7.** Determinar os pontos de equilíbrio do sistema de recorrência não linear de 2 incógnitas

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n y_n \end{cases}.$$

Solução: Sendo  $(x^*, y^*) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n)$ , temos que

$$\begin{cases} x^* = 2x^* - y^* \\ y^* = x^* y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* - y^* = 0 \\ x^* y^* = y^* \end{cases}.$$

Caso  $y^* = 0$ , temos que a solução do sistema é dada por  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  e, caso  $y^* \neq 0$ , temos que:

$$\begin{cases} x^* - y^* = 0 \\ x^* y^* = y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* - y^* = 0 \\ x^* = 1 \end{cases}.$$

Portanto, a solução é dada por  $(x^*, y^*) = (1, 1)$ . Concluímos que os pontos de equilíbrio do sistema são dados por  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$  e  $(x_2^*, y_2^*) = (1, 1)$ .

Assim como os pontos de equilíbrio das recorrências de 1ª ordem, os pontos de equilíbrios dos sistemas de recorrências também são classificados em estáveis, caso os pontos do sistema se mantenham próximos ao ponto de equilíbrio, instáveis, caso os pontos se afastem e assintoticamente estáveis, no caso dos pontos serem atraídos pelo ponto de equilíbrio. Para conhecer mais sobre a estabilidade de sistemas de recorrências, ver Elaydi (2000).

Veremos mais exemplos de pontos de equilíbrio dos sistemas de recorrências nos modelos que serão apresentados no capítulo a seguir.

## 7 MODELOS DE RELAÇÕES ECOLÓGICAS

Relações ecológicas são classificações das interações entre as espécies de um ecossistema. As principais relações são:

- a) *Competição interespecífica*: Acontece quando indivíduos de espécies diferentes competem por recursos parecidos dentro do ecossistema, afetando negativamente uns aos outros. Temos como exemplo os leões e as hienas, que competem pelas mesmas presas.
- b) *Mutualismo*: Acontece quando espécies diferentes se beneficiam quando colocadas juntas no mesmo ecossistema. Por exemplo, as flores e as abelhas.
- c) *Comensalismo*: Esta relação ocorre quando uma das espécies envolvidas se beneficia da interação enquanto a outra não é afetada significativamente. Temos como o exemplo mais clássico as rêmoras e o tubarão, em que as rêmoras comem os restos de alimentos que o tubarão deixa para trás ao mesmo tempo que não fazem parte da dieta do tubarão.
- d) *Amensalismo*: Ocorre quando uma das espécies é prejudicada enquanto a outra não é afetada significativamente. Por exemplo, o eucalipto libera substâncias químicas que acabam prejudicando outras plantas ao seu redor.
- e) *Predação*: Nesta relação uma espécie é beneficiada às custas do prejuízo da outra, sendo um exemplo, a predação que ocorre entre os leões e as zebras.

### 7.1 MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA VOLTERRA

O modelo presa-predador de Lotka-Volterra foi desenvolvido em 1925 de forma independente por dois estudiosos, o matemático e físico italiano Vito Volterra e o biomatemático e físico-químico americano Alfred Lotka. Volterra propôs seu modelo que descreve a interação entre presas e predadores após analisar um estudo estatístico sobre as populações de tubarões e peixes em uma porção do Mar Adriático, na Itália que foi desenvolvido pelo Zoologista Umberto D'Ancona. Já Alfred Lotka apresentou um estudo sobre interações entre espécies em seu livro *Elements of Physical Biology*, onde descreve o mesmo modelo de presa e predador que Volterra, de forma paralela.

De acordo com Souza (2017), o modelo de Lotka-Volterra assume hipóteses que serão descritas a seguir. A população  $N$  de presas, na ausência de predadores, cresce seguindo o modelo Malthusiano. Usando recorrências, temos a seguinte modelagem:

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \alpha,$$

onde  $\alpha$  é a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores. Porém, este crescimento é afetado negativamente pela população de predadores  $P$ .



Sendo assim

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \alpha - \beta P_n,$$

em que  $\beta$  é a taxa de predação sofrida pelas presas na presença dos predadores.

Reorganizando os termos do modelo, temos que

$$N_{n+1} = (1 + \alpha)N_n - \beta P_n N_n.$$

Já a população de predadores  $P$  decresce de forma exponencial na ausência de presas, pois sem presas não há alimento para sua sobrevivência. Portanto, temos o modelo discreto

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = -\gamma,$$

onde  $\gamma$  é a taxa de mortalidade dos predadores na ausência de presas. Porém, a população de predadores é afetada positivamente com a presença de presas. Sendo assim, o modelo de predadores é dado por

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = -\gamma + \delta N_n,$$

em que  $\delta$  é a taxa de crescimento da população de predadores na presença das presas.

Reorganizando o modelo, temos

$$P_{n+1} = (1 - \gamma)P_n + \delta P_n N_n.$$

Portanto, o modelo presa-predador de Lotka-Volterra em sua forma discreta<sup>1</sup> é dado pelo seguinte sistema de recorrências não linear

$$\begin{cases} N_{n+1} = (1 + \alpha)N_n - \beta P_n N_n \\ P_{n+1} = (1 - \gamma)P_n + \delta P_n N_n \end{cases} \quad (21)$$

Essas taxas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são parâmetros obtidos, por exemplo, através de ensaios experimentais realizados por biólogos ao estudarem as espécies e suas interações.

Neste modelo, o produto  $P_n N_n$  pode ser interpretado como o encontro entre os predadores e as presas em determinado tempo  $n$ , em que, quanto maior o número de predadores  $P_n$  ou o número de presas  $N_n$ , maiores são as chances do encontro entre predadores e presas  $P_n N_n$ , o que afetará negativamente as presas a uma taxa  $\beta$  e positivamente os predadores a uma taxa  $\delta$ .

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor contendo uma simulação de predação com base no modelo (21).

**Exemplo 7.1** (Joaninhas e pulgões). Pulgões são pequenos insetos sugadores de seiva que, em grandes quantidades, são considerados pragas para plantações. Um

<sup>1</sup>Este modelo pode ser obtido também através da discretização do modelo de Lotka-Volterra contínuo mostrado em Silva (2022).

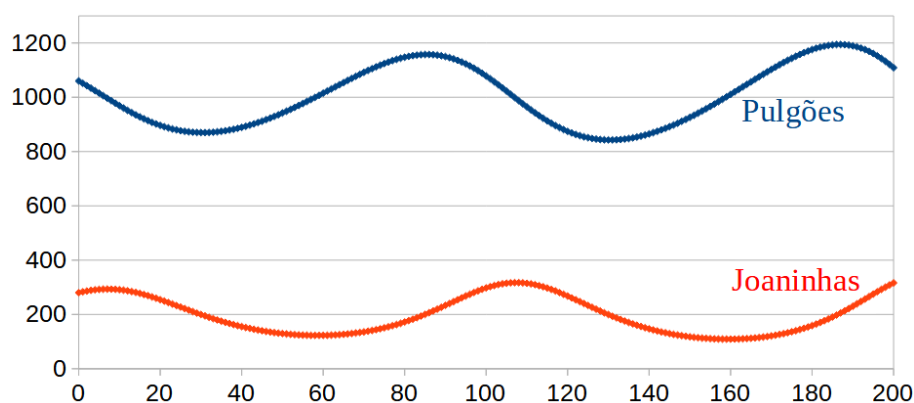
dos predadores naturais dos pulgões é a joaninha, muito usada para fazer o controle dos pulgões nas plantações.

Considere uma árvore com uma população de pulgões (presas)  $P$  e uma população de joaninhas (predadores)  $J$ , onde a população de pulgões, na ausência das joaninhas, aumenta 2% a cada mês e a população de joaninha, na ausência dos pulgões, diminui 20% por mês. Assumindo que no modelo (21), a predação afete os pulgões a uma taxa  $\beta = 0,0001$  e afete as joaninhas a uma taxa  $\delta = 0,0002$ , temos então o seguinte sistema que modela as populações de pulgões  $P_n$  e joaninhas  $J_n$  ao longo de  $n$  semanas

$$\begin{cases} P_{n+1} = 1,02P_n - 0,0001P_nJ_n \\ J_{n+1} = 0,8J_n + 0,0002J_nP_n \end{cases}$$

A Figura 10 apresenta uma simulação das populações de pulgões e joaninhas em função do tempo para as próximas 200 semanas conforme o modelo, considerando as populações iniciais de 1060 pulgões e 280 joaninhas.

Figura 10 – Simulação de Pulgões e Joaninhas ao longo do tempo



Fonte: O autor.

Através da simulação feita no Exemplo 7.1, pode-se observar uma interessante característica: os termos da sequência são imagens de funções oscilatórias. Uma interpretação biológica para essa oscilação é que, à medida que a população de predadores aumenta, o número de presas diminui devido à maior mortalidade por predação. Com a escassez de presas, o crescimento da população de predadores começa a ser inibido, pois há menos alimento disponível no ambiente. Eventualmente, a falta de presas se torna tão severa que os predadores começam a morrer de fome, resultando na redução de sua população. Com menos predadores, a população de presas começa a se recuperar, já que a pressão da predação é menor. Conforme as

presas voltam a crescer, a disponibilidade de alimento para os predadores melhora, favorecendo o aumento da sua população, fazendo com que o ciclo se reinicie.

Vamos determinar os pontos de equilíbrio deste modelo, ou seja, para quais valores populacionais de presas e predadores as duas espécies se mantêm sem alterações em seu número de indivíduos.

Para fins práticos, consideraremos que os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são não nulos pois, de toda forma, do ponto de vista biológico é incomum as taxas de crescimento das presas e de mortalidade de predadores serem nulas. Além disso, se os coeficientes de predação  $\beta$  e  $\delta$  fossem nulos, não haveria de fato a predação. Sendo  $(N^*, P^*) = (N_n, P_n) = (N_{n+1}, P_{n+1})$ , temos

$$\begin{cases} N^* = (1 + \alpha)N^* - \beta P^* N^* \\ P^* = (1 - \gamma)P^* + \delta P^* N^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^*(\alpha - \beta P^*) = 0 \\ P^*(\gamma - \delta N^*) = 0 \end{cases} .$$

Temos então os seguintes casos possíveis:

i) Se  $N^* = P^* = 0$ , temos que  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio;

Na prática, se  $N^* = 0$ , os predadores ficarão sem presas e, portanto, teremos que a população de predadores decrescerá de acordo com o Modelo de Malthus, cujo único ponto de equilíbrio (se  $\gamma \neq 0$ ), é dado por  $P^* = 0$ . Já se  $P^* = 0$ , então as presas não possuirão predadores e sua população crescerá de acordo também com o Modelo de Malthus, cujo ponto de equilíbrio (se  $\alpha \neq 0$ ), é dado por  $N^* = 0$ .

ii) Se  $N^* \neq 0$  e  $P^* \neq 0$ , temos, então, que

$$\begin{cases} \alpha - \beta P^* = 0 \\ \gamma - \delta N^* = 0 \end{cases} ,$$

cuja solução é dada por  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ .

Portanto,  $(N_1^*, P_1^*) = (0,0)$  e  $(N_2^*, P_2^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  são os pontos de equilíbrio do Modelo de Lotka-Volterra (21).

**Exemplo 7.2.** Determinar os pontos de equilíbrio do modelo do Exemplo 7.1 de forma que os pulgões e as joaninhas coexistam.

Solução: Para que os pulgões e as joaninhas coexistam, descartaremos o ponto  $(0,0)$ , temos então o ponto de equilíbrio:

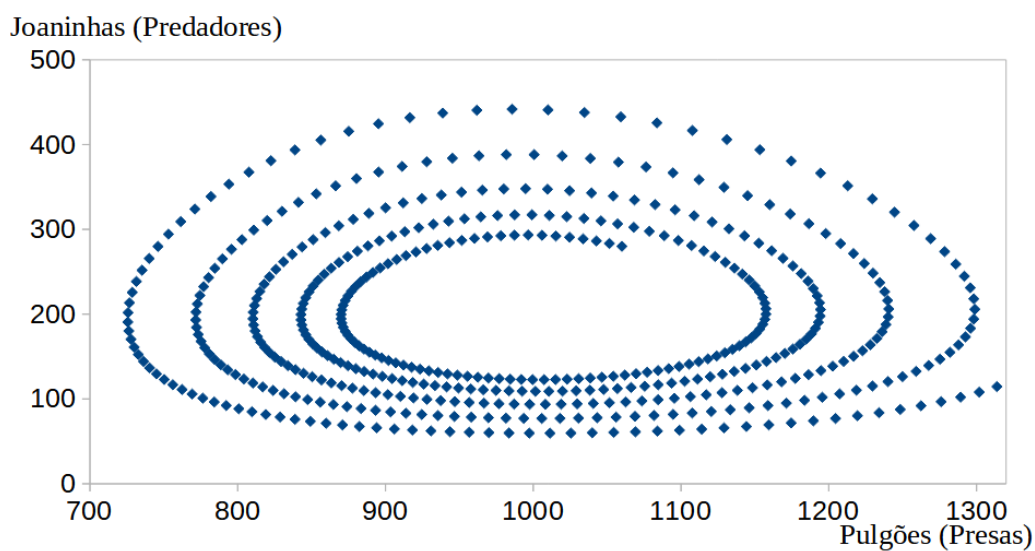
$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{0,2}{0,0002}, \frac{0,02}{0,0001}\right) = (1000, 200).$$

Sendo assim, o sistema se mantém em equilíbrio com 1000 pulgões e 200 joaninhas.

Além do gráfico apresentado na Figura 10, que mostra a evolução das populações de presas e predadores ao longo do tempo  $n$ , podemos analisar o modelo de

Lotka-Volterra por meio de outras representações gráficas. Uma das mais comuns é o gráfico de fase, que relaciona diretamente a população de predadores com a correspondente população de presas. Gráficos de fase são úteis para identificar comportamentos cíclicos e padrões de equilíbrio de um sistema. A Figura 11 apresenta o gráfico de fase do modelo do Exemplo (7.1):

Figura 11 – Gráfico de fase Lotka-Volterra



Fonte: O autor.

Pelo gráfico da Figura 11 podemos notar que as populações de presas e predadores formam uma espiral crescente em torno do ponto de equilíbrio (1000,200), mostrando que este é um ponto de equilíbrio instável, ou seja, os pontos  $(N_n, P_n)$  se distanciam do ponto fixo, indicando um aumento da oscilação das populações de presas e predadores vista na Figura 10, com o passar do tempo. Para mais análises da estabilidade dos pontos fixos do modelo discreto de Lotka-Volterra, recomendamos Silva (2022).

## 7.2 MODELOS DAS DEMAIS INTERAÇÕES INTERESPECÍFICAS

O Modelo de Lotka-Volterra descreva a relação ecológica de presa-predador, vamos agora analisar alguns modelos que descrevem as demais interações entre espécies (competição, mutualismo, comensalismo e amensalismo). Para isto, vamos assumir as seguintes hipóteses para adaptar o Modelo de Lotka-Volterra para estas outras relações ecológicas: Se cada espécie analisada cresce de acordo com o Modelo de Malthus na ausência da outra espécie e considerarmos que ao serem inseridas no mesmo ambiente, as populações de duas espécies,  $A$  e  $B$ , se afetam de acordo com as taxas  $\beta$  e  $\delta$ , o Modelo de Lotka-Volterra para as demais relações interespecíficas

possuirá a generalização:

$$\begin{cases} A_{n+1} = (1 + \alpha)A_n + \beta A_n B_n \\ B_{n+1} = (1 + \gamma)B_n + \delta A_n B_n \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n(1 + \alpha + \beta B_n) \\ B_{n+1} = B_n(1 + \gamma + \delta A_n) \end{cases}. \quad (22)$$

No caso da competição interespecífica, como ambas as espécies são afetadas negativamente pela presença uma da outra, temos que  $\beta < 0$  e  $\gamma < 0$ . Já no mutualismo, como as duas espécies se beneficiam na relação, temos que  $\beta > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Já para os casos de comensalismo e amensalismo, se considerarmos que  $A$  é a espécie não afetada pela relação, temos que  $\beta = 0$ . Neste caso, o comensalismo ocorre quando  $\delta > 0$  e o amensalismo ocorre quando  $\delta < 0$ . Por último, podemos notar que o Modelo Presa-predador de Lotka-Volterra (21) é um caso particular deste modelo, em que  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$  e  $\delta > 0$ .

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor contendo uma simulação de competição com base no modelo (22).

**Exemplo 7.3.** Considere um ambiente cujos recursos são competidos por duas colônias diferentes de formigas, de populações iniciais  $A_0 = 3000$  formigas e  $B_0 = 2000$  formigas. Para  $\alpha = 0,02$ ,  $\beta = -0,00002$ ,  $\gamma = 0,021$  e  $\delta = -0,00002$ , temos que as populações  $A_n$  e  $B_n$  evoluem ao longo de  $n$  semanas de acordo com o modelo

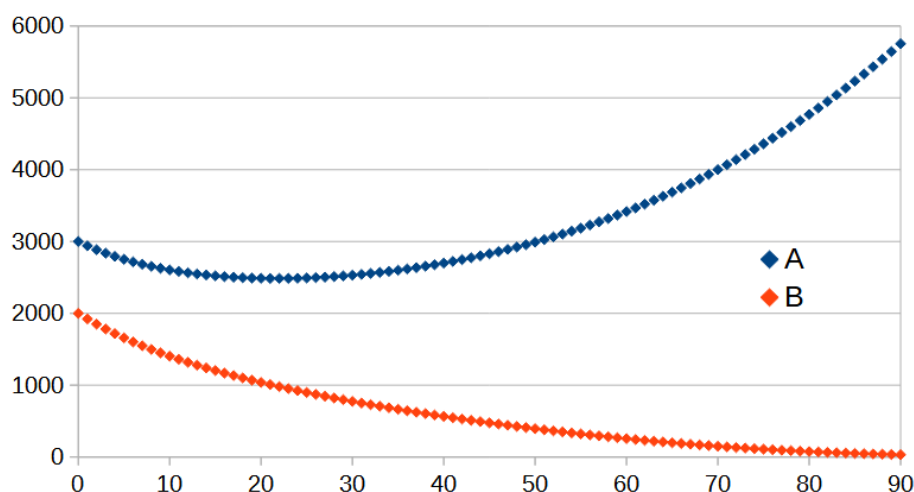
$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n(1,02 - 0,00002B_n) \\ B_{n+1} = B_n(1,021 - 0,00002A_n) \end{cases}.$$

Cujo gráfico para das populações para as 100 primeiras semanas é mostrado na Figura 12.

Apesar das duas populações possuírem potenciais bióticos positivos e seguirem um crescimento Malthusiano, pela simulação feita na Figura 12, vemos que a população  $B$  foi levada à extinção com o passar das semanas. Um questionamento que pode surgir é se existe algum par de valores iniciais  $(A_0, B_0)$  de forma que as duas populações coexistam. Caso existam pontos fixos do sistema em que os valores das duas populações sejam positivos, uma resposta desse questionamento pode estar nesse ponto de equilíbrio do modelo.

Vamos determinar os pontos de equilíbrios do modelo (22). Se considerarmos os casos de competição e mutualismo, temos que  $\beta \neq 0$  e  $\delta \neq 0$ . Se assumirmos ainda que  $\alpha \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ , temos que os pontos de equilíbrios  $(A^*, B^*)$  são dados por

Figura 12 – Simulação de duas populações de formigas ao longo do tempo



Fonte: O autor.

$$\begin{cases} A^* = (1 + \alpha)A^* + \beta B^* A^* \\ B^* = (1 + \gamma)B^* + \delta B^* A^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^*(\alpha + \beta B^*) = 0 \\ B^*(\gamma + \delta A^*) = 0 \end{cases}$$

Seguem então os seguintes casos:

- i) Se  $A^* = B^* = 0$ , então  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio;
- ii) Se  $A^* \neq 0$  e  $B^* \neq 0$ , temos que  $(-\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta})$  é um ponto de equilíbrio.

No caso do mutualismo, temos que  $(-\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta})$  só é um ponto de equilíbrio se a população de ambas espécies decresce ao longo do tempo pois, caso contrário, teremos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  todos positivos e, portanto,  $-\frac{\gamma}{\delta} < 0$  e  $-\frac{\alpha}{\beta} < 0$ , que não faz sentido para valores de populações.

Para os casos de amensalismo e comensalismo (sendo  $A$  a espécie não afetada pela relação), temos que  $\beta = 0$  e  $\delta \neq 0$ . Considerando ainda que  $\alpha \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ , temos que os pontos de equilíbrios são dados por

$$\begin{cases} A^* = (1 + \alpha)A^* \\ B^* = (1 + \gamma)B^* + \delta B^* A^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha A^* = 0 \\ B^*(\gamma + \delta A^*) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^* = 0 \\ B^* = 0 \end{cases}$$

Portanto, para os casos de amensalismo e comensalismo, o modelo (22) possui apenas o ponto de equilíbrio  $(A^*, B^*) = (0,0)$ .

Concluimos então que  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio do modelo (22) para todos os casos (competição, mutualismo, amensalismo e comensalismo) e  $(-\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta})$  é um ponto de equilíbrio para o caso de competição e para o caso de mutualismo em que  $\alpha < 0$  e  $\gamma < 0$ .

**Exemplo 7.4.** Determinar o ponto de equilíbrio do Exemplo 7.3 de forma que as duas populações de formigas coexistam.

$$\text{Solução: } \left(-\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(-\frac{0,021}{-0,00002}, -\frac{0,02}{-0,00002}\right) = (1050, 1000).$$

### 7.2.1 Modelo de interações interespecíficas com resistência do meio

O modelo (21) considera que as populações  $A_n$  e  $B_n$ , quando isoladas, crescem de acordo com o Modelo de Malthus. Se assumirmos como hipótese que as populações das espécies analisadas nas interações interespecíficas, quando isoladas, crescem de acordo com o Modelo de Verhulst, teremos:

$$\begin{cases} A_{n+1} = (1 + \alpha)A_n - \frac{\alpha A_n^2}{k_1} + \beta A_n B_n \\ B_{n+1} = (1 + \gamma)B_n - \frac{\gamma B_n^2}{k_2} + \delta A_n B_n \end{cases},$$

ou, então,

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \left(1 + \alpha - \frac{\alpha A_n}{k_1} + \beta B_n\right) \\ B_{n+1} = B_n \left(1 + \gamma - \frac{\gamma B_n}{k_2} + \delta A_n\right) \end{cases}, \quad (23)$$

em que  $k_1$  e  $k_2$  são, respectivamente, as populações suporte das espécies de populações  $A$  e  $B$ , quando isoladas.

**Exemplo 7.5.** [Mirmecofilia entre formigas e besouros] Uma categoria interessante de relação ecológica é a mirmecofilia, que acontece quando uma espécie se beneficia da presença de formigas, podendo esta relação ser mutualista, quando a formiga também é beneficiada, comensalista, quando a formiga não é afetada na interação ou então parasitista, em que a formiga é prejudicada. Um exemplo de mirmecofilia acontece com algumas espécies de besouros. Besouros mirmecófilos possuem tamanhos e formatos parecidos com os das formigas, além de liberam substâncias químicas que as confundem, achando que os besouros são parte da colônia. Dessa forma, os besouros mirmecófilos conseguem abrigo e comida dentro do formigueiro, formando com as formigas uma relação de parasitismo (a formiga é prejudicada) ou de comensalismo (a formiga não é afetada), dependendo da espécie do besouro. Para maiores detalhes de mirmecofilia, sugerimos Diehl (2017).

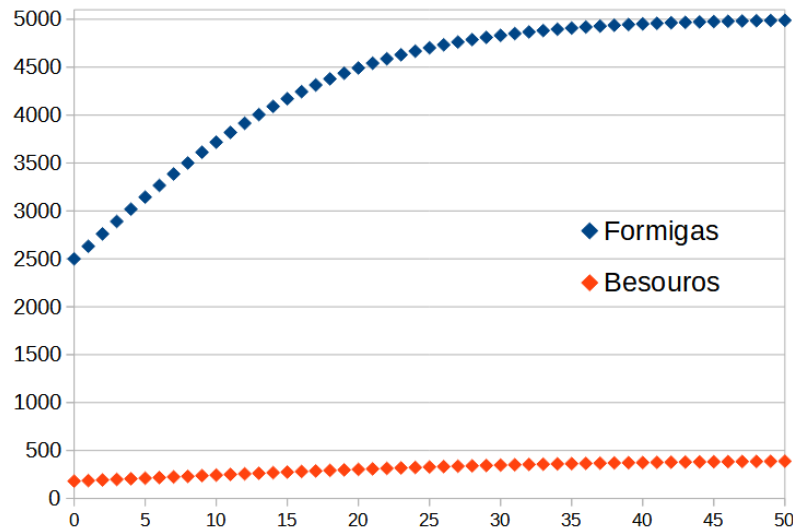
Considere um ambiente com uma espécie de formiga e uma espécie de besouro onde os besouros vivem dentro do formigueiro parasitando os recursos das formigas. Suponha uma população inicial de 2500 formigas e 80 besouros e que as populações de formigas  $F_n$  e besouros  $B_n$ , evoluem ao longo de  $n$  quinzenas de acordo com o modelo

$$\begin{cases} F_{n+1} = \left(1,104 - \frac{0,104}{5200} F_n - 0,00001 B_n\right) F_n \\ B_{n+1} = \left(1,06 - \frac{0,06}{300} B_n + 0,000004 F_n\right) B_n \end{cases}.$$

A Figura 13 apresenta as populações de formigas e besouros nas 50 primeiras quinzenas. Pela, vemos que as populações de formigas e besouros tendem a se

estabilizar em 5000 formigas e 400 besouros, o que nos leva a desconfiar de que estes são pontos de equilíbrio do modelo.

Figura 13 – Simulação de Formigas e Besouros ao longo do tempo



Fonte: O autor.

Vamos determinar os pontos de equilíbrio do modelo (23), considerando novamente que os coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são todos não nulos. Sendo  $(N^*, P^*) = (N_n, P_n) = (N_{n+1}, P_{n+1})$ , temos:

$$\begin{cases} A^* = A^*(1 + \alpha - \frac{\alpha A^*}{k_1} + \beta B^*) \\ B^* = B^*(1 + \gamma - \frac{\gamma B^*}{k_2} + \delta A^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^*(\alpha - \frac{\alpha A^*}{k_1} + \beta B^*) = 0 \\ B^*(\gamma - \frac{\gamma B^*}{k_2} + \delta A^*) = 0 \end{cases}$$

Seguem então os seguintes casos:

- i) Se  $A^* = B^* = 0$ , então  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio;
- ii) Se  $A^* = 0$  e  $B^* \neq 0$ , temos que  $(0, k_2)$  é um ponto de equilíbrio;
- iii) Se  $A^* \neq 0$  e  $B^* = 0$ , temos que  $(k_1, 0)$  é um ponto de equilíbrio;
- iv) Se  $A^* \neq 0$  e  $B^* \neq 0$ , temos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \alpha - \frac{\alpha A^*}{k_1} + \beta B^* = 0 \\ \gamma - \frac{\gamma B^*}{k_2} + \delta A^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{k_1} A^* - \beta B^* = \alpha \\ -\delta A^* + \frac{\gamma}{k_2} B^* = \gamma \end{cases}$$

Da 1ª igualdade desse sistema, segue que

$$A^* = \frac{k_1(\alpha + \beta B^*)}{\alpha}$$

como consequência, pela 2ª igualdade, temos que

$$\frac{-\delta k_1(\alpha + \beta B^*)}{\alpha} + \frac{\gamma B^*}{k_2} = \gamma$$



ou seja,

$$B^* = \frac{k_2\alpha(\gamma + \delta k_1)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2}.$$

Como  $A^* = \frac{k_1(\alpha + \beta B^*)}{\alpha}$ , segue que

$$A^* = \frac{k_1 \left[ \alpha + \frac{\beta k_2 \alpha (\gamma + \delta k_1)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2} \right]}{\alpha}$$

e, portanto,

$$A^* = \frac{k_1\gamma(\alpha + \beta k_2)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2},$$

concluindo assim que

$$(A^*, B^*) = \left( \frac{k_1\gamma(\alpha + \beta k_2)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2}, \frac{k_2\alpha(\gamma + \delta k_1)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2} \right),$$

é um ponto de equilíbrio do modelo (23) para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  não nulos e  $\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2 \neq 0$ .

**Exemplo 7.6.** Calcular o ponto de equilíbrio do modelo do Exemplo 7.5, de forma que as formigas e os besouros coexistam.

Solução:

$$F^* = \frac{K_1\gamma(\alpha + \beta K_2)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2} = \frac{5200(0,06)(0,104 - 0,00001(300))}{0,104(0,06) - 0,00001(0,000004)(5200)(300)} = 5000,$$

$$B^* = \frac{K_2\alpha(\gamma + \delta K_1)}{\alpha\gamma - \beta\delta k_1 k_2} = \frac{300(0,104)(0,06 + 0,000004(5200))}{0,104(0,06) - 0,00001(0,000004)(5200)(300)} = 400.$$

Portanto, as populações de formigas e besouros do Exemplo 7.5 coexistem em equilíbrio com 5000 formigas e 400 besouros.

Por serem sistemas não lineares, os modelos (22) e (23) não possuem um método analítico geral para encontrar suas soluções, sendo estudados de maneira qualitativa. Para fins didáticos, vamos fazer uma simplificação do modelo (22), supondo que os encontros  $A_n B_n$  não afetam diretamente na competição das duas espécies, mas sim apenas a densidade da população rival. Temos então o seguinte modelo linear como adaptação do modelo (22)

$$\begin{cases} A_{n+1} = (1 + \alpha)A_n + \beta B_n \\ B_{n+1} = (1 + \gamma)B_n + \delta A_n \end{cases}, \quad (24)$$

que se trata de um sistema de recorrências lineares de duas incógnitas homogêneo.

**Exemplo 7.7** (Mirmecofilia entre formigas e pulgões). Um outro exemplo de mirmecofilia, desta vez mutualista, é a interação entre formigas e pulgões. Ao sugar a seiva de plantas, os pulgões liberam um líquido açucarado que chama a atenção de formigas que veem nesse líquido uma importante fonte de nutrientes, fazendo com que elas

cuidem dos pulgões e afugentem seus predadores. Sendo assim, formigas e pulgões formam uma relação mutualista. Considere o modelo

$$\begin{cases} P_{n+1} = 1,3P_n + 0,5F_n \\ F_{n+1} = 1,2F_n + 0,12P_n \end{cases},$$

em que  $P_n$  e  $F_n$  são as populações de pulgões e formigas no decorrer dos próximos  $n$  meses. Determine a solução deste sistema para  $(P_0, F_0) = (500, 500)$ .

Solução: Temos aqui um sistema de recorrências linear cuja forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,5 \\ 0,12 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ F_n \end{bmatrix},$$

que possui o polinômio característico  $\lambda^2 - 2,5\lambda + 1,5$ , de raízes  $\lambda_1 = 1,5$  e  $\lambda_2 = 1$ . Sendo assim, o sistema possui a solução geral

$$\begin{bmatrix} P_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} 1,5^n + \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix}, \quad C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} \in \mathbb{R}.$$

Como  $(P_0, F_0) = (500, 500)$ , temos que  $P_1 = 1,3(500) + 0,5(500) = 900$  e  $F_1 = 0,12(500) + 1,2(500) = 660$ , sendo assim

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} & 1,5C_{11} + C_{12} \\ C_{21} + C_{22} & 1,5C_{21} + C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 900 \\ 500 & 660 \end{bmatrix},$$

e, portanto,  $C_{11} = 800$ ,  $C_{12} = -300$ ,  $C_{21} = 320$  e  $C_{22} = 180$ , concluindo que

$$\begin{bmatrix} P_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 320 \end{bmatrix} 1,5^n + \begin{bmatrix} -300 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

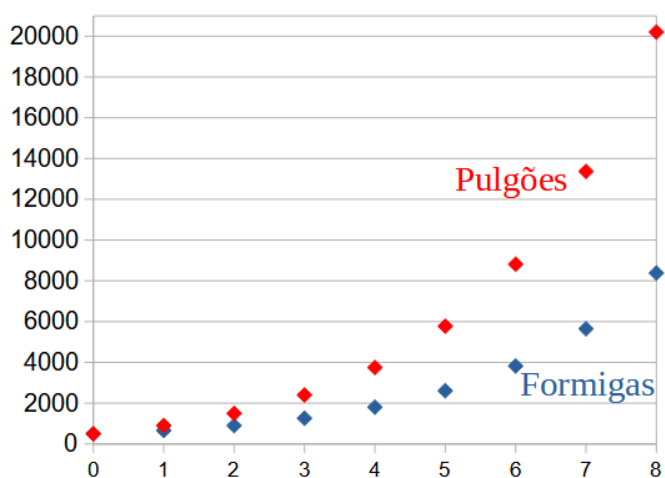
A Figura 14 apresenta o gráfico de pulgões e formigas para os próximos 8 meses.

Os alunos do Ensino Médio frequentemente desejam entender a aplicabilidade de certos conteúdos da matemática que não possuem uma utilização tão trivial de ser observada, como é o caso das matrizes, mais especificamente quando se trata do produto e da potenciação de matrizes, ou então dos determinantes.

O Quadro 5 apresenta propostas de questões sobre dinâmica populacional com interações entre espécies, indicadas para o professor que já trabalhou com seus alunos as recorrências lineares de 1ª e 2ª ordens e deseje explorar com eles diversos objetos do conhecimento da matemática do Ensino Médio de forma contextualizada se utilizando agora de sistemas de recorrências lineares homogêneos.

Essa proposta foi elaborada para ser utilizada por professores do Ensino Médio, ou de outros níveis, como exemplos ou exercícios que promovam no aluno o desenvolvimento de importantes conceitos matemáticos e aprimoramento das habilidades da BNCC mencionadas nos capítulos anteriores. Entre os tópicos abordados estão progressões geométricas, operações com matrizes, determinantes, sistemas lineares e equações quadráticas.

Figura 14 – Simulação de Formigas e Pulgões ao longo do tempo



Fonte: O autor.

## Quadro 5 – Proposta de atividade sobre sistemas lineares homogêneos

**Questão 1:** Além do néctar de flores, abelhas fabricam mel a partir do líquido açucarado que saem das colchonilhas, pequenos insetos que sugam seiva de árvores. Em troca do líquido, as abelhas oferecem proteção a esses insetos, gerando uma relação mutualista. Suponha que as populações  $A_n$  e  $C_n$  de abelhas e colchonilhas em um ambiente sejam estimadas, ao longo de  $n$  meses de acordo com o modelo

$$\begin{cases} A_{n+1} = 1,3A_n + 0,14C_n \\ C_{n+1} = 0,1A_n + 1,34C_n \end{cases} .$$

Sendo  $A_0 = 440$  e  $C_0 = 1400$  as populações iniciais, responda:

- Reescreva o sistema na forma matricial e calcule o determinante e o traço da matriz dos coeficientes desse sistema.
- Anote o polinômio característico associado ao sistema e determine suas raízes.
- Resolva o sistema, determinando as populações após  $n$  meses.
- Usando uma calculadora científica, faça a estimativa de abelhas após 10 meses.
- Se as colchonilhas não estivessem no ambiente, qual seria a população de abelhas após 10 meses?

**Questão 2:** Na presença de insetos sugadores de seiva, as formigas e as abelhas podem entrar em competição pelo líquido açucarado que eles liberam. Supondo que as populações de abelhas e formigas  $A_n$  e  $F_n$  em um ambiente são descritas ao longo de  $n$  meses pelo modelo

$$\begin{cases} A_{n+1} = 1,23A_n - 0,03F_n \\ F_{n+1} = 1,22F_n - 0,02A_n \end{cases} .$$

Determine a solução deste sistema para  $A_0 = 4000$  e  $F_0 = 3200$ .

**Questão 3:** Considere que em um formigueiro haja uma população de formigas  $F_n$  e uma população de besouros mirmecófilos  $B_n$  cuja interação no decorrer de  $n$  quinzenas é dada pelo modelo

$$\begin{cases} F_{n+1} = 1,1F_n \\ B_{n+1} = 0,01F_n + 1,02B_n \end{cases} .$$

Sendo  $(F_0, B_0) = (2000, 50)$ , Responda:

- Classifique esta relação em mutualismo, comensalismo, competição ou amensalismo. Justifique.
- Use potenciação de matrizes para estimar as populações de formigas e besouros em cada uma das próximas 3 quinzenas.
- Determine a solução este sistema de recorrências.
- Use solução obtida no item b) e uma calculadora para estimar a população de besouros dentro do formigueiro após 8 quinzenas.

### 7.3 MODELAGEM DE RELAÇÕES ECOLÓGICAS COM MAIS DE DUAS ESPÉCIES

Em uma comunidade nem sempre encontraremos apenas duas espécies interagindo. Vamos modelar as relações entre mais de duas espécies acrescentando mais recorrências e incógnitas aos modelos. Por exemplo, no modelo de interações interespecífica (23) para  $k$  espécies, temos que:

$$\begin{cases} (x_1)_{n+1} = [1 + \alpha_1 + a_{11}(x_1)_n + a_{12}(x_2)_n + \cdots + a_{1k}(x_k)_n](x_1)_n \\ (x_2)_{n+1} = [1 + \alpha_2 + a_{21}(x_1)_n + a_{22}(x_2)_n + \cdots + a_{2k}(x_k)_n](x_2)_n \\ \vdots \\ (x_k)_{n+1} = [1 + \alpha_k + a_{k1}(x_1)_n + a_{k2}(x_2)_n + \cdots + a_{kk}(x_k)_n](x_k)_n \end{cases} \quad (25)$$

Note que cada população  $x_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ) em um instante  $t + 1$  pode ser obtida, então, pela recorrência

$$(x_i)_{n+1} = \left[ 1 + \alpha_i + \sum_{j=1}^k a_{ij}(x_j)_n \right] (x_i)_n.$$

Neste modelo,  $\alpha_i$  representa o potencial biótico da espécie  $x_i$ . Temos que  $\alpha_i > 0$  indica que a população da espécie  $x_i$  aumenta na ausência das outras espécies e  $\alpha_i < 0$  indica que a população de tal espécie diminui na ausência das outras espécies.

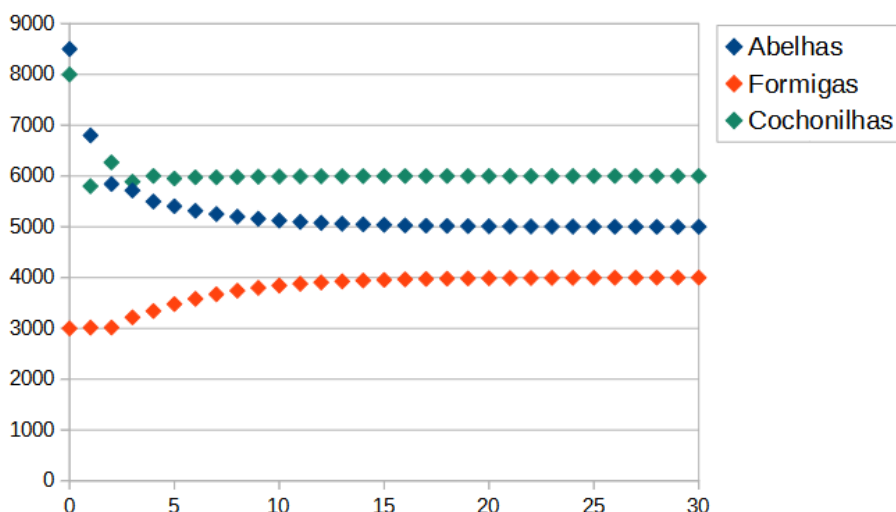
Já o coeficiente  $a_{ij}$ , para  $i \neq j$ , representa a taxa em que a população da espécie  $x_i$  é afetada pela interação com a espécie  $x_j$ , sendo que  $a_{ij} > 0$  indica que a espécie  $x_i$  se beneficia com a relação com a espécie  $x_j$ , como é o caso do mutualismo e do comensalismo e dos predadores na predação. Por outro lado, se  $a_{ij} < 0$ , temos que a espécie  $x_i$  é prejudicada por tal relação, como é o caso da competição, do amensalismo e das presas na predação. Além disso, se  $a_{ij} = 0$ , temos que a espécie  $x_i$  não é afetada diretamente com a relação com a espécie  $x_j$ . Por último, se  $i = j$ , então  $a_{ij} = a_{ii}$  representa a taxa de competição intraespecífica da espécie  $x_i$ , que de acordo com o modelo de Verhulst é dada por  $a_{ii} = -\frac{\alpha_i}{k_i}$ , onde  $k_i$  é a população suporte da espécie  $x_i$  fornecida pelo meio (sendo assim,  $a_{ii} \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ).

A seguir é apresentado um exemplo elaborado pelo autor contendo uma simulação de interação entre 3 espécies, com base no modelo (25).

**Exemplo 7.8** (Abelha, cochonilha e formiga). Como visto nos exemplos anteriores e na Questão 1 proposta no Quadro 5, tanto abelhas como formigas possuem interesse no líquido produzido por insetos sugadores de seiva. A Figura 15 apresenta, para  $(A_0, F_0, C_0) = (8500, 3000, 8000)$ , o gráfico das populações  $A_n$  de abelhas,  $F_n$  de formigas e  $C_n$  de cochonilhas descritas ao longo de  $n$  meses pelo modelo:

$$\begin{cases} A_{n+1} = (1,4 - 0,0001A_n - 0,00005F_n + 0,00005C_n)A_n \\ F_{n+1} = (1,41 - 0,00005A_n - 0,0001F_n + 0,00004C_n)F_n \\ C_{n+1} = (1,75 + 0,00005A_n + 0,00005F_n - 0,0002C_n)C_n \end{cases} ,$$

Figura 15 – Simulação de Abelhas, Formigas e Cochonilhas ao longo do tempo



Fonte: O autor.

Pela simulação, vemos que as populações estão se estabilizando em 5000 abelhas, 4000 formigas e 6000 cochonilhas, conjecturando que  $(5000, 4000, 6000)$  é um ponto de equilíbrio deste modelo.

Vamos analisar os pontos fixos do modelo (25). Note que a  $k$ -upla ordenada nula  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  é um ponto de equilíbrio deste modelo. Porém, não se trata de um ponto de equilíbrio interessante, já que indica que não há indivíduos de nenhuma espécie na comunidade estudada. Vamos analisar os pontos de equilíbrio para quando há indivíduos em todas as espécies da comunidade, ou seja, os pontos de equilíbrio  $((x_1)^*, (x_2)^*, (x_3)^*, \dots, (x_k)^*)$ , em que  $(x_1)^*, (x_2)^*, (x_3)^*, \dots, (x_k)^*$  são todos não nulos. Temos então que

$$\begin{cases} (x_1)^* = [1 + \alpha_1 + a_{11}(x_1)^* + \dots + a_{1k}(x_k)^*](x_1)^* \\ (x_2)^* = [1 + \alpha_2 + a_{21}(x_1)^* + \dots + a_{2k}(x_k)^*](x_2)^* \\ \vdots \\ (x_k)^* = [1 + \alpha_k + a_{k1}(x_1)^* + \dots + a_{kk}(x_k)^*](x_k)^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}(x_1)^* + \dots + a_{1k}(x_k)^* = -\alpha_1 \\ a_{21}(x_1)^* + \dots + a_{2k}(x_k)^* = -\alpha_2 \\ \vdots \\ a_{k1}(x_1)^* + \dots + a_{kk}(x_k)^* = -\alpha_k \end{cases}$$

e, portanto, o ponto de equilíbrio do modelo (25) para  $(x_1)^*, (x_2)^*, (x_3)^*, \dots, (x_k)^*$  não nulos, caso exista, é dado pela solução do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)^* \\ (x_2)^* \\ \vdots \\ (x_k)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_k \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 7.9.** Determine o ponto de equilíbrio do modelo do Exemplo 7.8, de forma que as 3 populações coexistam.

Solução: O ponto de equilíbrio  $(A^*, F^*, C^*)$  para  $A^*$ ,  $F^*$  e  $C^*$  não nulos é dado pela solução do sistema de equações lineares

$$\frac{1}{100000} \begin{bmatrix} -10 & -5 & 5 \\ -5 & 10 & 4 \\ 5 & 5 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* \\ F^* \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ -0,41 \\ -0,75 \end{bmatrix},$$

e, portanto,  $(A^*, F^*, C^*) = (5000, 4000, 6000)$ .

Como vimos, para determinar o ponto de equilíbrio do modelo (25), onde as populações são todas não nulas, devemos resolver um sistema de equações lineares. Portanto, questões que exigem a obtenção deste ponto de equilíbrio se tornam mais uma aplicação que o professor pode usar com seus alunos para exercitar conceitos de álgebra linear e a habilidade da BNCC (EM13MAT301) "Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais". O Quadro 6 apresenta um exemplo desse tipo de questão, que o professor pode utilizar como referência em suas aulas, seja como um exemplo de aplicação, exercício ou como questão de avaliação.

#### Quadro 6 – Proposta de atividade sobre Ponto de equilíbrio

**Questão 1:** Pulgões, pequenos insetos sugadores de seiva, são presas das joaninhas, porém, na presença de formigas, eles recebem proteção em troca de um líquido açucarado que eles exalam. Observamos assim uma curiosa relação entre formigas e joaninhas, pois apesar de não competirem diretamente pelos mesmos recursos, as formigas buscam defender produtores de açúcar contra as joaninhas, as deixando sem alimento. Considerando um ambiente com a presença das populações de pulgões  $P_n$ , de formigas  $F_n$  e de joaninhas  $J_n$  se interagindo de acordo com o modelo:

$$\begin{cases} P_{n+1} = (1,41 - 0,00002P_n + 0,00002F_n - 0,00001J_n)P_n \\ F_{n+1} = (1,402 + 0,00001P_n - 0,00003F_n - 0,000002J_n)F_n \\ J_{n+1} = (0,61 + 0,00002P_n - 0,00002F_n - 0,00001J_n)J_n \end{cases} .$$

Determine as populações de pulgões, formigas e joaninhas para que as três espécies coexistam em equilíbrio.

## 8 CONCLUSÃO

A partir deste estudo, verificamos que, embora a teoria por trás das recorrências possua certo grau de complexidade, suas aplicações em modelos biológicos permitem a exploração de uma ampla gama de conteúdos do componente curricular de Matemática do Ensino Médio. Esses conteúdos incluem sequências, progressões aritméticas e geométricas, potenciação, equações exponenciais, logaritmos, polinômios, equações quadráticas, operações com matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares, números complexos e funções trigonométricas.

Além de abordar diversos conteúdos matemáticos, percebemos que esses modelos promovem a interdisciplinaridade com a Biologia, ampliando o leque de aplicações da matemática para além das áreas tradicionais, como a Física. Dessa forma, conseguimos responder à recorrente pergunta dos estudantes do Ensino Médio: "Para que serve este conteúdo de matemática?"

Nesta dissertação, nosso objetivo foi analisar a aplicabilidade dos modelos biológicos, como o Modelo de Malthus, o Modelo de Verhulst e o Modelo de Lotka-Volterra, como ferramentas didáticas para o ensino de conceitos matemáticos do Ensino Médio. Para alcançar este objetivo, realizamos um estudo aprofundado sobre recorrências e sistemas de recorrências que formam esses modelos, com destaque para as soluções de recorrências lineares com coeficientes constantes e para a análise de pontos de equilíbrio.

Com base nesse estudo, elaboramos diversas questões sobre modelos populacionais e de interações entre espécies, com o intuito de fornecer aos professores do Ensino Médio materiais que auxiliem no ensino de diferentes conceitos matemáticos. Essas questões podem ser utilizadas de diversas formas: como exemplos resolvidos em sala, atividades práticas, exercícios avaliativos ou até como introduções a novos conteúdos. Também incentivamos que esses problemas sirvam como inspiração para que os professores desenvolvam suas próprias questões, em colaboração com colegas da área de Biologia, explorando interações ecológicas interessantes e curiosas observadas nos ecossistemas.

Por fim, esperamos que este trabalho e as questões propostas contribuam para a formação continuada dos professores, ajudando-os a despertar o interesse dos alunos pela matemática, facilitando o entendimento dos conceitos através de suas aplicações práticas e interdisciplinares.



## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; OLIVEIRA, Camila Fogaça de. Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia. **Revista Iberoamericana de educación matemática**, São Paulo, 2015.
- BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.
- DIEHL, Elena. **Interações das formigas com outros organismos: diversidade ecológica e evolutiva**. São Leopoldo: Oikos, 2017.
- DINIZ, Geraldo Lucio. **Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas**. São Carlos: SBMAC, 2011.
- ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equations**. San Antonio (Texas): Springer, 2000.
- LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea**. 2016. Diss. (Mestrado) – UFRN, Natal.
- LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- LIMA, Elon Lages. **Análise Real Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- MARTINS, Jamerson Fernando Confort. **Determinantes, propriedades e métodos de condensação**. 2015. Diss. (Mestrado) – UFRN, Natal.
- SILVA, Márcia Lemos da. **O Sistema Dinâmico de Lotka–Volterra e sua Discretização**. 2022. Diss. (Mestrado) – Universidade de Aveiro, Aveiro (Portugal).
- SOARES, Marcio Gomes. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- SOUZA, Fernanda Cruz Sayd de. **Estudo do padrão de interação predador-presa em dinâmica de populações aplicado ao controle biológico de pragas**. 2017. Diss. (Mestrado) – UFRB, Cruz das Almas.

## APÊNDICE A – RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### Quadro 1, Questão 1:

a)  $F_1 = 1,25 \cdot 20 = 25$ ;  $F_2 = 1,25 \cdot 25 \approx 31$ ;  $F_3 = 1,31 \cdot 25 \approx 39$ .

b)  $F_{t+1} = 1,25F_t$ .

c)  $F_t = 20 \cdot 1,25^t$ .

d)  $20 \cdot 1,25^t = 2500 \Rightarrow 1,25^t = 125 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^t = 5^3 \Rightarrow t = \log_{\frac{5}{4}}(5^3)$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_{10}(5^3)}{\log_{10}\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{3 \log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)}{\log_{10}\left(\frac{10}{8}\right)} = \frac{3 [\log_{10}(10) - \log_{10}(2)]}{\log_{10}(10) - \log_{10}(2^3)} \approx \frac{3(1 - 0,301)}{1 - 3 \cdot 0,301} \approx 21,6.$$

O formigueiro ultrapassará a população de 2500 formigas na 22ª quinzena.

### Quadro 1, Questão 2:

a) Recorrência:  $C_{t+1} = 1,5 \cdot C_t$ .

Termo geral:  $C_t = 48 \cdot 1,5^t$

b)  $C_8 = 48 \cdot 1,5^8 = 48 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = 2^4 \cdot 3 \cdot \frac{3^8}{2^8} = \frac{3^9}{2^4} = \frac{19683}{16} \approx 1230$  cupins.

### Quadro 2:

a)  $A_t = 2000 \cdot 0,8^t + 2000 \cdot \frac{0,8^t - 1}{0,8 - 1} = 2000 \cdot 0,8^t + \frac{2000 \cdot 0,8^t}{-0,2} - \frac{2000}{-0,2}$

$\Rightarrow A_t = -8000 \cdot 0,8^t + 10000$ .

b)  $A_8 = -8000 \cdot 0,8^8 + 10000 = -8 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^8 + 10000 = -\frac{8^9}{10^5} + 10000$

$\Rightarrow A_8 \approx -\frac{1342 \cdot 10^5}{10^5} + 10000 \approx 8658$  abelhas.

c) Conforme  $t$  aumenta, podemos perceber que  $A_t = -8000 \cdot 0,8^t + 10000$  se aproxima cada vez mais de 10000, portanto 10000 abelhas é a população suporte fornecida pelo meio.

d) Pelo 2º modelo de Verhuslt, temos que  $A_{t+1} = (1 + \alpha)A_t - \beta(A_t - b)$ , onde  $(1 + \alpha)$  é o potencial biótico,  $b$  é a população normal e  $\beta$  é o coeficiente de inibição do meio sobre a população que excede a população normal.

Como  $A_{t+1} = 0,8A_t + 2000$ , temos  $\beta b = 2000$  e  $1 + \alpha - \beta = 0,8$ . Se  $b = 2000$  é a população normal, então segue que  $\beta = 1$  e, portanto,  $(1 + \alpha) = 1,8$  é o potencial biótico dessa colmeia.

### Quadro 3, Questão 1:

a) Polinômio:  $\lambda^2 - \lambda - 2$ ;

Raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 2.$$

c)  $F_t = C_1(-1)^t + C_2(2)^t$ , em que  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

d) 
$$\begin{cases} C_1(-1)^0 + C_2(2)^0 = F_0 \\ C_1(-1)^1 + C_2(2)^1 = F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (C_1, C_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

portanto, o termo geral é dado por  $F_t = \frac{1}{3}(-1)^t + \frac{2}{3}(2)^t$ .

e)  $F_{11} = \frac{1}{3}(-1)^{11} + \frac{2}{3}(2)^{11} = \frac{-1}{3} + \frac{4096}{3} = 1365$  casais de coelhos.

**Quadro 3, Questão 2:**

a) O polinômio característico  $\lambda^2 - 9$  possui as raízes  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = 3$ , portanto a solução é dada por  $A_t = C_1(-3)^t + C_2(3)^t$ , em que  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

b)  $A_1 = 0,5L_0 = 0,5 \cdot 60 = 30$ , sendo assim:

$$\begin{cases} C_1(-3)^0 + C_2(3)^0 = A_0 \\ C_1(-3)^1 + C_2(3)^1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 70 \\ -3C_1 + 3C_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow (C_1, C_2) = (30, 40).$$

Portanto,  $A_t = 40(-3)^t + 30(3)^t$ .

c)  $A_7 = 40(-3)^7 + 40(3)^7 = 40 \cdot (-2187) + 30 \cdot 2187 = (40 - 30) \cdot (2187) = 21870$  besouros.

**Quadro 4:**

a)  $K = \frac{60}{1 - 0,5 + 0,25} = 80$ .

b) O polinômio característico  $\lambda^2 - 0,5\lambda + 0,25$  possui as raízes:  $\lambda_{1,2} = 0,5 \left( \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ .

Portanto, a solução é dada por  $P_n = (0,5)^n \left[ C_1 \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) + C_2 \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right] + 80$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) 
$$\begin{cases} (0,5)^0 \left[ C_1 \cos \left( \frac{0\pi}{3} \right) + C_2 \sin \left( \frac{0\pi}{3} \right) \right] + 80 = 80 \\ (0,5)^1 \left[ C_1 \cos \left( \frac{1\pi}{3} \right) + C_2 \sin \left( \frac{1\pi}{3} \right) \right] + 80 = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 160 \end{cases}$$
  
 $\Rightarrow (C_1, C_2) = (0, 160)$ .

Temos que a solução é dada por:  $P_n = (0,5)^n 160\sqrt{3} \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) + 80$ .

d) Conforme  $n$  aumenta,  $(0,5)^n$  diminui, fazendo com que  $(0,5)^n 160\sqrt{3} \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right)$  fique cada vez mais perto de zero, restando a parcela 80. Portanto, com o passar dos anos, o número de plantas colhidas pelo agricultor será cada vez mais próximo de 80.

**Quadro 5, Questão 1:**

a) O sistema possui a forma matricial  $\begin{bmatrix} A_{t+1} \\ C_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,14 \\ 0,1 & 1,34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_t \\ C_t \end{bmatrix}$ , cujo determinante e

traço da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,14 \\ 0,1 & 1,34 \end{bmatrix}$  são dados por:

$\det(A) = 1,3 \cdot 1,34 - 0,14 \cdot 0,1 = 1,728$ ;

$\text{tr}(A) = 1,3 + 1,34 = 2,64$ .

b) O polinômio dese sistema é dado por  $\lambda^2 - 2,64\lambda + 1,728$ , cujas raízes são  $\lambda_1 = 1,2$  e  $\lambda_2 = 1,44$ .

c) A solução geral é dada por  $\begin{bmatrix} A_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} 1,2^t + \begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{bmatrix} 1,44^t$ , em que  $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} \in \mathbb{R}$ .

Como  $A_0 = 440$  e  $C_0 = 1400$ , pelo modelo temos que

$A_1 = 1,3 \cdot 440 + 0,14 \cdot 1400 = 768$  e  $C_1 = 0,1 \cdot 440 + 1,34 \cdot 1400 = 1920$ . Portanto

$$\begin{cases} K_{11} + K_{12} = 440 \\ 1,2K_{11} + 1,44K_{12} = 768 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} K_{21} + K_{22} = 1400 \\ 1,2K_{21} + 1,44K_{22} = 1920 \end{cases}$$

Cujas soluções são dadas por  $K_{11} = 1000$ ,  $K_{12} = -560$ ,  $K_{21} = 1000$  e  $K_{22} = 400$ ,

concluindo que o número de abelhas e colchonilha em um determinado tempo  $t$  é dado por

$$\begin{bmatrix} A_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1000 \cdot 1,2^t + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix} 80 \cdot 1,44^t$$

d)  $A_{10} = 1000 \cdot 1,2^{10} - 560 \cdot 1,44^{10} \approx 34870$  abelhas.

e) Teríamos então a recorrência  $A_t = 1,3A_t$ , cuja solução para  $A_0 = 440$  é dada por  $A_t = 440 \cdot 1,3^t$ . Em 10 meses haveria uma população de  $A_{10} = 440 \cdot 1,3^{10} \approx 6065$  abelhas.

**Quadro 5, Questão 2:**

Calculando o determinante e o traço da matriz dos coeficientes associada a este modelo linear, temos que o determinante é dado por  $1,23 \cdot 1,22 - (-0,03) \cdot (-0,02) = 1,5$  e o traço é dado por  $1,23 + 1,22 = 2,45$ . Sendo assim, o polinômio característico deste sistema é dado por  $\lambda^2 - 2,45\lambda + 1,5$ , de raízes  $\lambda_1 = 1,2$  e  $\lambda_2 = 1,25$ . Temos então um sistema cuja solução geral é dada por

$$\begin{bmatrix} A_t \\ F_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} 1,2^t + \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} 1,25^t, \text{ em que } C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} \in \mathbb{R}.$$

Para  $(A_0, F_0) = (4000, 3200)$ , temos que  $(A_1, F_1) = (1,23 \cdot 4000 - 0,03 \cdot 3200, 1,22 \cdot 3200 - 0,02 \cdot 4000) = (4824, 3824)$ . Sendo assim, podemos calcular as constantes pelos sistemas

$$\begin{cases} C_{11} + C_{12} = 4000 \\ 1,2C_{11} + 1,44C_{12} = 4824 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} C_{21} + C_{22} = 3200 \\ 1,2C_{21} + 1,44C_{22} = 3824 \end{cases},$$

Cujas solução são dadas por  $C_{11} = 3520$ ,  $C_{12} = 480$ ,  $C_{21} = 3520$  e  $C_{22} = -320$ , concluindo que a solução do sistema é dado por

$$\begin{bmatrix} A_t \\ F_t \end{bmatrix} = 3520 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1,2^t + 160 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} 1,25^t.$$

**Quadro 5, Questão 3:**

a) Comensalismo, pois de acordo com o modelo a interação entre as formigas e os besouros não afeta a população de formigas e afeta a população de besouros de forma positiva.

b)  $\begin{bmatrix} F_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0,01 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2200 \\ 71 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} F_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0,01 & 1,02 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2000 \\ 50 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2420 \\ 94 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0,01 & 1,02 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 2000 \\ 50 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2662 \\ 121 \end{bmatrix}.$$

c) O polinômio característico associado a este sistema é dado por  $\lambda^2 - 2,12\lambda + 1,122$ , de raízes  $\lambda_1 = 1,1$  e  $\lambda_2 = 1,02$ . Para  $(F_0, B_0) = (2000, 50)$ , temos que  $(F_1, B_1) = (1,1 \cdot 2000, 0,01 \cdot 2000 + 1,02 \cdot 50) = (2200, 71)$ . Portanto, temos os sistemas

$$\begin{cases} C_{11} + C_{12} = 2000 \\ 1,2C_{11} + 1,44C_{12} = 2200 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} C_{21} + C_{22} = 50 \\ 1,2C_{21} + 1,44C_{22} = 71 \end{cases}.$$

Verificando que  $C_{11} = 2000$ ,  $C_{12} = 0$ ,  $C_{21} = 250$  e  $C_{22} = -200$ , concluindo assim que

a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} F_t \\ B_t \end{bmatrix} = 250 \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} 1,1^n - 200 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1,02^n.$$

d)  $B_8 = 250 \cdot 1,1^8 - 200 \cdot 1,02^8 \approx 301$  besouros.

**Quadro 6:**

Temos o sistema:

$$\frac{1}{100000} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0,2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^* \\ F^* \\ J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,41 \\ -0,402 \\ 0,39 \end{bmatrix}.$$

De solução:  $(P^*, F^*, J^*) = (5000, 4000, 6000)$ .