UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional

Gráficos de funções do 2º grau: proposta de abordagem com o auxílio do simulador PhET

Matheus Fenti Soares

PROFMAT

Rio Claro/SP
2024

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Matheus Fenti Soares

Gráficos de funções do 2º grau: proposta de abordagem com o auxílio do simulador PhET

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Co-orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

Rio Claro/SP
2024

S676g

Soares, Matheus Fenti
Gráficos de funções do 2º grau: proposta de abordagem com o auxílio do simulador PhET / Matheus Fenti Soares. -- Rio Claro, 2024
67 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira
Coorientadora: Thiago de Melo

1. Função quadrática. 2. Parábola. 3. Simulador PhET. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

Impacto potencial desta pesquisa

Pretende-se com este trabalho contribuir para o ensino de funções do segundo grau utilizando tecnologia. O objetivo principal é proporcionar uma melhoria na compreensão conceitual do conteúdo por meio da visualização gráfica e da manipulação de parâmetros de forma interativa, gerando maior engajamento e motivação dos alunos. A integração da tecnologia ao ensino de funções quadráticas, além de enriquecer e inovar a didática utilizada para transmitir o conteúdo, também desenvolve habilidades digitais que são de fundamental importância no mercado de trabalho atual.

Potential impact of this research

The aim of this work is to contribute to the teaching of quadratic functions using technology. The main objective is to improve conceptual understanding of the content through graphical visualization and interactive parameter manipulation, thereby increasing student engagement and motivation. Integrating technology into the teaching of quadratic functions not only enriches and innovates the didactics used to convey the content but also develops digital skills that are crucial in today's job market.

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Matheus Fenti Soares

Gráficos de funções do 2º grau: proposta de abordagem com o auxílio do simulador PhET

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
IGCE/Unesp

Profa. Dra. Simone Daniela Sartorio de Medeiros
INE/UFSC

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
IGCE/Unesp

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 06 de novembro de 2024

Quero dedicar esta dissertação à minha mãe, por sempre estar do meu lado, desde o início do curso, fazendo com que eu acreditasse que apesar das dificuldades rotineiras, seria possível concluir com êxito este mestrado.

"Deus nunca disse que a jornada seria fácil, mas disse que a chegada valeria a pena."

Lucado, Max

Grato por tudo!

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por me capacitar e prover forças para eu chegar até aqui, mesmo diante de vários obstáculos.

Um imenso agradecimento à minha orientadora, Prof. Dra. Renata Z. G. de Oliveira, por ter me guiado em todos os detalhes desta dissertação e me motivado diversas vezes durante o curso.

Agradeço ao coordenador do PROFMAT e meu co-orientador, Prof. Dr. Thiago de Melo, por todo o suporte e auxílio na definição do tema, além das sugestões e dicas no decorrer da dissertação.

Gostaria de agradecer também à minha Prof. Dra. Marta C. Gadotti, que foi simplesmente a peça chave para que eu acreditasse que iria dar tudo certo para conclusão do mestrado. Várias conversas, conselhos e dicas, principalmente, na reta final do curso.

Por fim, agradeço também à minha família que esteve ao meu lado e sempre acreditaram no meu potencial. Uma ênfase especial para minha esposa, Ana Cristina, que me incentivou durante todo o período do mestrado e fez com que eu acreditasse, ainda mais, que seria possível alcançar esse objetivo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A vida é como andar de bicicleta.
Para manter o equilíbrio, você deve continuar se movendo.
Albert Einstein

Resumo

Este trabalho tem como eixo principal o desenvolvimento de uma nova metodologia para o ensino da análise gráfica de funções quadráticas, destacando como ferramentas digitais podem melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos. Através do uso do software PhET *(Interactive Simulations)*, os alunos conseguem visualizar gráficos, manipular parâmetros e observar em tempo real as mudanças nas funções, o que facilita a compreensão de conceitos como raízes, vértice e concavidade. Além disso, o desenvolvimento de habilidades digitais é um benefício adicional, preparando os alunos para o ambiente de trabalho moderno. No discorrer da dissertação, temos o contraste entre como as funções quadráticas são ensinadas no ensino médio e as formas alternativas que foram desenvolvidas. Como produto, tem-se a proposta didática seguindo um tutorial com a expectativa do professor para cada ação realizada pelo aluno. Uma nova forma de ensinar funções quadráticas, utilizando o simulador aliado a conceitos básicos previamente definidos.

Palavras-chave: Função quadrática. Parábola. Simulador PHET.

Abstract

This work focuses on developing a new methodology for teaching the graphical analysis of quadratic functions, highlighting how digital tools can enhance the understanding of mathematical concepts. Through the use of the PhET (Interactive Simulations) software, students can visualize graphs, manipulate parameters, and observe real-time changes in the functions, which facilitates the comprehension of concepts such as roots, vertice and concavity. Additionally, the development of digital skills is an added benefit, preparing students for the modern workplace. The dissertation contrasts the traditional methods of teaching quadratic functions in high school with the alternative approaches that have been developed. As a result, a didactic proposal is presented, following a tutorial with the teacher's expectations for each student action. This represents a new way of teaching quadratic functions, using the simulator alongside previously defined basic concepts.

Keywords: Quadratic Function. Parabola. PHET Simulator.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O livro didático de Matemática, por ser um material impresso, enfrenta limitações inerentes à sua natureza. Estas limitações podem surgir devido às diversas formas de linguagem que o livro apresenta, incluindo a linguagem comum, as terminologias matemáticas, as simbologias específicas da matemática, a linguagem gráfica e as representações espaciais. Essa variedade de linguagens pode complicar a compreensão dos alunos e dificultar a assimilação dos conceitos matemáticos.

A carência de aplicações práticas para serem abordadas e exploradas com os alunos no que diz respeito ao conteúdo ensinado é destacada como um desafio significativo. Essa falta de aplicabilidade pode dificultar a compreensão e o engajamento dos alunos com o material. Existe uma lacuna significativa em relação à falta de aplicações práticas a serem apresentadas e exploradas com os alunos no ensino do conteúdo sobre parábolas, por exemplo. Isso é particularmente preocupante quando se trata de parábolas, pois este conceito possui uma vasta gama de aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Considera-se que a maioria dos problemas na disciplina de matemática esteja relacionada à forma como ela é ensinada. São cálculos, desenhos e gráficos dispersos em folhas de exercícios nos cadernos dos estudantes, sem qualquer significado real para eles ([1]). Assim, segundo Neves ([2], 2008, p. 22), existe uma relação direta entre a matemática e as tecnologias, enfatizando a necessidade de tornar o aprendizado mais relevante e conectado à realidade dos alunos. "A matemática sempre teve uma relação muito especial com as tecnologias, desde as calculadoras, o computador, os sistemas multimídia e a internet".

Segundo (Moran, 2016, p. 06 apud Marinho, 2021, p. 11) em [3] temos que: "A internet é uma tecnologia que facilita a motivação dos alunos pela novidade e pelas possibilidades inesgotáveis de pesquisa que oferece. Essa motivação aumenta se o professor proporcionar um clima de confiança, abertura, cordialidade com os alunos. Mais que a tecnologia, o que facilita o processo de ensino aprendizagem é a capacidade de comunicação autentica do professor ao estabelecer relações de confiança com seus alunos por meio do equilíbrio, competência e simpatia que atua. O aluno desenvolve a aprendizagem cooperativa, a pesquisa em grupo, a troca de resultados".

A motivação para este trabalho surgiu da observação de que algumas escolas e/ou professores de Matemática com os quais tive contato ao longo da minha experiência profissional, apenas transmitem informações seguindo, em geral, a sequência de livros didáticos. Isso dificulta aos alunos relacionar a matemática com situações comuns do seu cotidiano ou mesmo visualizar suas possíveis aplicações futuras, de acordo com suas carreiras pretendidas. O tema função quadrática, com o estudo da parábola, foi escolhido, pois oferece ao professor e aos alunos a oportunidade de explorar conceitos e representações de forma mais lúdica e assertiva no processo de ensino aprendizagem.

De acordo com [4], o ensino de Matemática, especialmente no que tange ao ensino de funções, na maioria das vezes, se baseia em problemas abordados em sala de aula tendo como objetivo "fixar" os conteúdos. Esse método tende a ser repetitivo e mecânico, fazendo com que os alunos identifiquem padrões recorrentes nos processos de resolução e criem procedimentos padronizados a partir de fórmulas preestabelecidas. Como resultado, os alunos acabam perdendo o interesse em aprender aquilo que não lhes parece significativo. A partir deste cenário, Sousa (2021, p. 32) infere que: "[...] ensino tradicional dos conteúdos de matemática deve ser substituído por um ensino motivador, aproximando o aluno de sua realidade, propiciando um conhecimento significativo e real" ([4]). Evidenciando ainda mais essa ideia, em [5] a ideia de que o uso de tecnologias pode aprimorar o ensino de funções no Ensino Médio é reforçada.

Neste cenário, os estudantes enfrentam desafios ao analisar o comportamento gráfico e a aplicabilidade de cada um dos coeficientes de uma função quadrática, por exemplo. Com este projeto, busca-se examinar como os recursos tecnológicos podem aprimorar a capacidade dos alunos de interpretar, comparar e investigar, contribuindo assim para uma formação mais completa.

Algumas habilidades que são contempladas pela BNCC (Ensino Médio) sobre funções quadráticas, são:

- Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (EM13MAT503).

- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2^o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (EM13MAT402).

- Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ (EM13MAT502).

- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1^o ou 2^o grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (EM13MAT302).

- Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2^o grau do tipo $ax^2 = b$ (EF08MA09).

- Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano (EF08MA12).

- Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2^o grau (EF09MA09).

"A matemática que é ensinada e aprendida em sala de aula tem que fazer parte da vida dos alunos, e esse processo tem que possuir caminhos que façam com que o aluno se encontre dentro dos conteúdos e realmente participe do processo de ensino e aprendizagem.

Inserir novos recursos tecnológicos que tornam a visualização e a contextualização de um referido conteúdo, como é o caso das funções e sua representação gráfica, tornarão as aulas mais produtivas e mais interessantes para nossos alunos ” ([6]). Ressalta-se, ainda, que as funções de 1^o e 2^o graus, que fazem parte do currículo escolar do Ensino Médio, estão presentes em várias situações do nosso dia a dia, como: “O simples fato de observar uma fatura de energia elétrica, de água ou até mesmo de abastecer um carro em um posto de combustível, jogar um objeto para cima e observar sua trajetória até chegar ao chão, funcionamento de antenas parabólicas e faróis de carros, fenômenos esses que podem ser expressos por modelos matemáticos conhecidos como Funções. A generalização de fatos dessa importância que podem ser convertidos em uma linguagem muito mais atraente que são os gráficos ” ([6]).

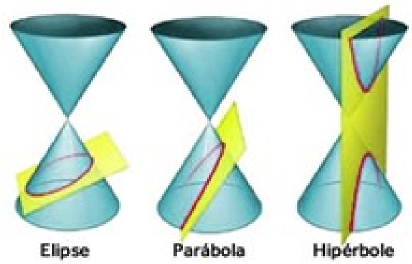
Este trabalho está organizado sequencialmente, partindo de um estudo geral de cônicas, apresentando as teorias sobre seções cônicas, com o posterior estabelecimento da geometria analítica, e consequentemente a definição algébrica das cônicas. Após essa explanação introdutória sobre cônicas, temos o estudo detalhado da parábola (componente principal da dissertação), apresentando sua forma reduzida, caso geral, uma breve análise da forma como este conteúdo é abordado no Ensino Médio e a apresentação de alguns conceitos gerais sobre funções quadráticas, que serão de suma importância para o desenvolvimento da proposta didática. Em um segundo momento, temos a apresentação do simulador PhET, que será a ferramenta tecnológica para o desenvolvimento da proposta. Esta sequência didática, está segmentada em duas atividades que já foram aplicadas com êxito e duas atividades propostas para aplicações posteriores.

2 Cônicas

2.1 Aspectos históricos

Embora as seções cônicas já fossem abordadas em “Os Elementos”, de Euclides, Apolônio emerge como uma figura de destaque na história dessas curvas. Nascido aproximadamente em 262 a.C. na cidade de Perga, na Panfília, Apolônio é amplamente reconhecido como o autor do tratado geométrico intitulado “As Cônicas”. Conforme os autores [8] e [9], Apolônio destacou-se como o matemático que explorou minuciosamente as seções cônicas, originando todas as curvas provenientes de um único cone de duas folhas, mediante a simples variação da inclinação do plano de interseção. Além de sua investigação sobre retas tangentes e normais a uma cônica, ele também cunhou os termos “parábola”, “elipse” e “hipérbole”. Antes de Apolônio, o estudo das cônicas envolvia a obtenção da elipse, da parábola e da hipérbole ao seccionar um cone circular reto com um plano perpendicular a uma geratriz do cone. Essa abordagem resultava em três curvas distintas, dependendo se a seção meridiana do cone formasse um ângulo agudo, reto ou obtuso (Figura 2.1).

Figura 2.1: Cone duplo: seções cônicas.



Fonte: [7].

A descrição algébrica das cônicas surgiu apenas com Pierre de Fermat (1601-1665), que introduziu uma transformação equivalente à moderna rotação de eixos para simplificar uma equação do segundo grau à sua forma mais básica. Essa inovação representou um marco significativo na compreensão das cônicas, permitindo uma análise mais abstrata e algébrica dessas curvas geométricas.

É verdade que Apolônio não foi o inventor das seções cônicas. Antes dele, por volta de 350 a.C., Menaecmus, discípulo e sucessor do matemático Eudoxo na direção da Escola de Cizico, na Ásia Menor, já havia estudado as cônicas obtidas através de cones retos, agudos e obtusos. Atribui-se a Menaecmus a invenção mecânica das curvas elipse, parábola e hipérbole, as quais ele utilizou na resolução do clássico problema da duplicação do cubo, também conhecido como o problema de Delos.

Enquanto Menaecmus construiu essas curvas de forma mecânica, foi Apolônio, no século III a.C., quem as extraiu de uma superfície cônica por meio de seções planas. Essa abordagem de Apolônio levou à denominação comum dessas curvas como "seções cônicas". Além dos estudos realizados por Menaecmus, há registros do uso das cônicas, como evidenciado no século V a.C., quando a elipse já era empregada em pinturas em vasos. Adicionalmente, no início do século III a.C., já existiam tratados relacionados ao tema, como o "Tesouro de Análise" de Pappus de Alexandria, os "Lugares Sólidos" de Aristeu e outro de Euclides, mencionado por Arquimedes. A compreensão e aplicação das seções cônicas, portanto, têm uma rica história que precede o trabalho de Apolônio.

Apolônio não apenas recapitulou os conhecimentos de seus predecessores, mas também contribuiu significativamente ao campo ao introduzir uma infinidade de novos teoremas por meio de um estudo detalhado e exaustivo das seções cônicas, todos deduzidos com base na geometria. Seu trabalho não apenas transcendeu os esforços anteriores, mas também se tornou uma referência fundamental sobre o tema.

De acordo com [8], Apolônio foi responsável por atribuir os nomes "elipse" e "hipérbole" a essas curvas, possivelmente influenciado por sugestões de Arquimedes. É crucial observar que as palavras "elipse", "parábola" e "hipérbole" não foram meramente inventadas; em vez disso, elas foram herdadas de estudos anteriores, provavelmente associados aos pitagóricos. Os pitagóricos, ao resolverem equações quadráticas por meio da aplicação de áreas, baseavam-se na disposição de um retângulo sobre um segmento retilíneo. Eles afirmavam ter um caso de elipse, parábola ou hipérbole, dependendo se a base coincidisse, fosse menor ou excedesse o segmento. A designação desses termos está intrinsecamente ligada à própria significação das palavras, onde "elipse" denota falta, "parábola" corresponde a igual e "hipérbole" expressa excesso. O conceito de "falta", no caso da elipse, também pode ser interpretado matematicamente como uma "falta" em relação à circunferência perfeita ([9]).

Para alcançar esse feito, Menaecmus realizou cortes em três tipos de cones - um com "ângulo reto", outro com "ângulo agudo" e um terceiro com "ângulo obtuso" - por planos que formavam ângulos retos com os lados desses cones. Essa abordagem resultou nas três seções que hoje chamamos de parábola, elipse e hipérbole. Segundo [8], Apolônio foi o primeiro a demonstrar de forma sistemática que não era necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone. Ele mostrou que a variação do ângulo de inclinação do plano de seção em um único cone poderia produzir todas as três espécies de seções cônicas, representando assim um passo significativo para relacionar esses três tipos de curvas.

Uma segunda generalização de grande importância ocorreu quando Apolônio demonstrou que o cone não precisava ser reto, ou seja, com o eixo perpendicular à base circular. Ele estabeleceu que o cone poderia ser oblíquo ou escaleno, ampliando assim as possibilidades e a compreensão das seções cônicas. Esse avanço representou uma contribuição substancial para a teoria das seções cônicas e sua aplicação em geometria.

Muito tempo depois, no século XVII, René Descartes, criador da Geometria Analítica, estabeleceu uma conexão entre a Álgebra e a Geometria, desenvolvendo princípios matemáticos que permitiram a análise geométrica das propriedades dos pontos, retas e circunferências. Com seus métodos, tornou-se possível determinar distâncias, localizar pontos e identificar coordenadas.

Segundo Descartes, em seu livro *"La Géométrie"* [10]:

> *"Qualquer problema em geometria pode ser facilmente reduzido a termos em que um conhecimento dos comprimentos de certos segmentos de reta é suficiente para sua construção."*

Assim, com a criação da Geometria Analítica, as cônicas passaram a ser reconhecidas por suas equações (veja Figura 2.2).

Figura 2.2: Linha do tempo Geometria Analítica (cônicas).

	LINHA DO TEMPO GEOMETRIA ANALÍTICA (CÔNICAS)
350 a.C.	**Menaecmus (380 - 320 a.C.):** Cônicas obtidas através de cones retos, agudos e obtusos.
300 a.C	"Os Elementos" – **Euclides (323-283 a.C.)**
Séc III a.C.	Já existiam tratados relacionados ao tema "cônicas". **Apolônio (262 - 194 a.C.):** Extraiu de uma superfície cônica por meio de seções planas. Responsável por atribuir os nomes "elipse" e "hipérbole" a essas curvas.
Séc XVII	**Pierre de Fermat (1601-1665):** Descrição algébrica das cônicas Transformação equivalente à moderna rotação de eixos para simplificar uma equação do segundo grau à sua forma mais básica **René Descartes (1596-1650):** Criador da Geometria Analítica Estabeleceu conexão entre a Álgebra e a Geometria Cônicas passaram a ser reconhecidas por suas equações

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A seguir apresentamos a equação geral de uma cônica e suas possibilidades, tendo por base a referência [11].

2.2 Definição geral de cônica

De maneira geral, uma cônica é o conjunto de pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.1}$$

onde A, B, C, D, E, F são reais com A, B e C não simultaneamente nulos. Os termos da equação (2.1) recebem alguns nomes:

- Ax^2 e Cy^2 são denominados de termos quadráticos;
- Bxy é denominado de termo quadrático misto;
- Dx e Ey são os termos lineares;
- F é o termo independente.

Variando o valor dos coeficientes A, B, C, D, E e F é possível obter retas, ponto, elipse, parábola, hipérbole e o conjunto vazio.

Vale destacar que:

- Se $B^2 - 4AC < 0$, tem-se uma elipse;
- Se $B^2 - 4AC = 0$, tem-se uma parábola;
- Se $B^2 - 4AC > 0$, tem-se uma hipérbole.

E, ainda,

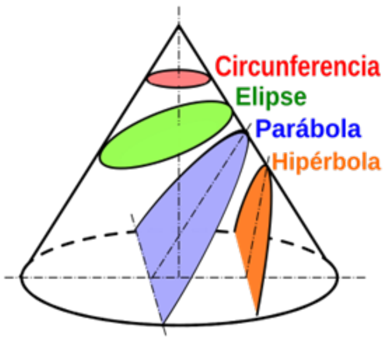
- Se $C = 0$, a diretriz d da cônica (veja seção 2.3) é paralela a um dos eixos x ou y.
- Se $F = 0$, temos que a cônica passa pela origem uma vez que o ponto $P(0, 0)$ satisfaz a equação (2.1).

Assim, é possível mostrar ([11]), com maior detalhamento, que podem ocorrer diversas possibilidades para a equação (2.1). Vejamos alguns exemplos:

- **Conjunto vazio:** a equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$ não é satisfeita por nenhum (x, y).
- **Conjunto formado por um ponto:** a equação $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$, isto é, $(x - 1)^2 + y^2 = 0$ admite apenas a solução $(1, 0)$.
- **Reta:** a equação $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, isto é, $(x + y)^2 = 0$ descreve a reta $r : x + y = 0$.
- **Reunião de duas retas paralelas:** a equação $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$, isto é, $(x + y)(x + y + 1) = 0$ descreve a reunião das retas $r : x + y = 0$ e $s : x + y + 1 = 0$.
- **Reunião de duas retas concorrentes:** a equação $x^2 - y^2 = 0$, isto é, $(x - y)(x + y) = 0$, descreve a reunião das retas $r : x - y = 0$ e $s : x + y = 0$.
- **Circunferência:** a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, isto é, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, descreve a circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 2.
- **Parábola:** $x - y^2 = 0$.
- **Elipse:** $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.
- **Hipérbole:** $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Embora os tipos mais comuns de cônicas sejam as circunferências, elipses, parábolas e hipérboles (Figura 2.3), apresentaremos a seguir, com mais detalhes, a definição de parábola por estar associada ao gráfico de uma função quadrática, objeto de estudo desse trabalho.

Figura 2.3: Tipos de cônicas mais comuns: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.



Fonte: [12].

2.3 Parábola

Antes de apresentarmos a definição matemática de parábola, faremos uma revisão de conceitos envolvendo distâncias e funções crescentes/decrescentes que serão utilizados nesta seção.

2.3.1 Algumas definições

Os conceitos de distância entre pontos e distância de ponto à reta são necessários para a dedução da equação da parábola, que será realizado posteriormente. A **distância entre dois pontos** no plano corresponde ao comprimento do menor segmento de reta que os conectam, sendo calculado com base no Teorema de Pitágoras. Assim, a fórmula que nos permite calcular a distância entre os dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ademais, tem-se a **distância entre um ponto e uma reta**, indicada como a medida perpendicular da reta ao ponto mais próximo da mesma. Seja a reta "r" de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto $P = (x_0, y_0)$, o qual não pertence a esta reta "r". Assim, a fórmula da distância do ponto P à reta r é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Para que haja uma melhor compreensão da definição de vértice, que será detalhado na seção 2.4 vejamos as definições de função crescente e decrescente.

Definição 2.1. Dizemos que uma função f é crescente em $I \subset D_f$ se para quaisquer x_1 e x_2 em I, $x_1 \leq x_2$, tem -se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Isso significa que, à medida que x aumenta, os valores de $f(x)$ também aumentam.

Definição 2.2. Dizemos que uma função f é decrescente em $I \subset D_f$ se para quaisquer x_1 e x_2 em I, $x_1 \leq x_2$, tem -se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Nesse caso, conforme x aumenta, os valores de $f(x)$ diminuem.

Por exemplo, a função $f(x) = 2x + 1$ é sempre crescente, enquanto a função $f(x) = -x + 2$ é sempre decrescente. Na análise de funções crescentes e decrescentes, também depara-se com a definição de valores máximos e mínimos de uma função, que por sua vez, podem ser determinados observando o momento em que a função muda seu comportamento de crescente para decrescente, e vice-versa.

2.3.2 Definição de parábola

Definição 2.3. Consideremos num plano π um ponto F (foco) e uma reta r (diretriz) fixos, com $F \notin r$. Ao conjunto dos pontos de π equidistantes de F e r se dá o nome de *parábola.*

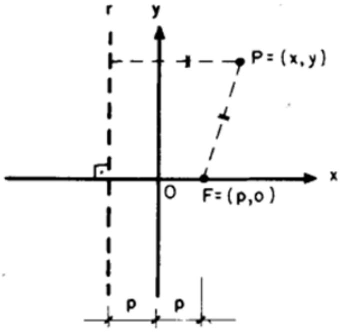
Tomemos um sistema ortogonal, conforme Figura 2.4, onde $F = (p, 0)$ e $r\colon x = -p$, ou seja, $x + p = 0$. Observe que $d(F, r) = 2p$, onde p é um parâmetro positivo.

Assim, $P = (x, y)$ está na parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{|x + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}.$$

Após algumas simplificações podemos mostrar que a expressão anterior é equivalente a $y^2 = 4px$.

Figura 2.4: Sistema ortogonal de coordenadas.



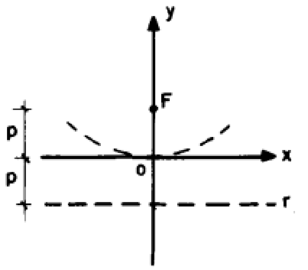
Fonte: [11].

De forma análoga, temos que, se $F = (0, p)$ e $r\colon y = -p$, ou seja, $y + p = 0$, um ponto $P = (x, y)$ está na parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\sqrt{(y-p)^2 + x^2} = \frac{|y+p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}.$$

Após algumas simplificações podemos mostrar que a expressão anterior é equivalente a $x^2 = 4py$, ou seja, $y = \dfrac{1}{4p}x^2$ (Figura 2.5).

Figura 2.5: Parábola com diretriz paralela ao eixo x: $y = \frac{1}{4p}x^2$.



Fonte: [11].

Como é possível observar, se o foco está sobre um dos eixos coordenados, a equação da parábola envolve somente os termos y^2 e x ou x^2 e y. A seguir, caso o foco não esteja nos eixos coordenados, a equação geral da parábola será obtida utilizando-se a fórmula da distância de ponto à reta. Para isso, sejam $P = (x, y)$ e $F = (p_1, p_2)$, com a diretriz $r\colon ax + by + c = 0$, sendo a e b não simultaneamente nulos (e portanto, $a^2 + b^2 \neq 0$).

Como vimos, $P = (x, y)$ está na parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, r)$. Então,

$$\sqrt{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 = \frac{|ax+by+c|^2}{a^2+b^2},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} x^2 - 2xp_1 + p_1^2 + y^2 - 2yp_2 + p_2^2 &= \frac{|(ax+by)^2 + 2(ax+by)c + c^2|}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 + 2acx + 2bcy + c^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $a^2 + b^2$, escrevemos:

$$a^2x^2 + b^2x^2 - 2xp_1(a^2+b^2) + p_1^2(a^2+b^2) + a^2y^2 + b^2y^2 - 2yp_2(a^2+b^2) + p_2^2(a^2+b^2) = \\ a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 2acx + 2bcy + c^2,$$

que pode ser reduzida a

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy - 2(p_1(a^2+b^2)+ac)x - 2(p_2(a^2+b^2)+bc)y + p_1^2(a^2+b^2) + p_2^2(a^2+b^2) - c^2 = 0, \tag{2.2}$$

uma equação geral como em (2.1).

Observe que, se $F = (0, p)$ e $r\colon y = -p$, ou seja, $y + p = 0$, temos $p_1 = 0$, $p_2 = p$, $a = 0$, $b = 1$ e $c = p$. Assim, executando as substituições em (2.2), teremos $x^2 - 4py = 0$, ou seja, $y = \frac{1}{4p}x^2$, que é a mesma equação obtida anteriormente.

Analisando o caso geral, mesmo se o foco não estiver sobre o eixo x, com $F = (p_1, p_2)$ e $r\colon y = p$, ou seja, a diretriz continua sendo paralela ao eixo x, com $p_2 \neq p$, teremos como equação da parábola

$$x^2 - 2xp_1 + p_1^2 - 2yp_2 + p_2^2 + 2py - p^2 = 0,$$

ou seja,

$$x^2 - 2xp_1 + p_1^2 - 2yp_2 + p_2^2 - 2py - p^2 = 0.$$

Agrupando os termos, a equação anterior pode ser escrita na forma

$$y = \frac{1}{2(p_2 - p)}x^2 - \frac{-2p_1}{2(p_2 - p)}x + \frac{p_1^2 + p_2^2 - p^2}{2(p_2 - p)}, \tag{2.3}$$

que pode ser vista na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Assim, após a definição de parábola e a dedução das equações que a representam, destacamos os elementos fundamentais de uma parábola (Figura 2.6):

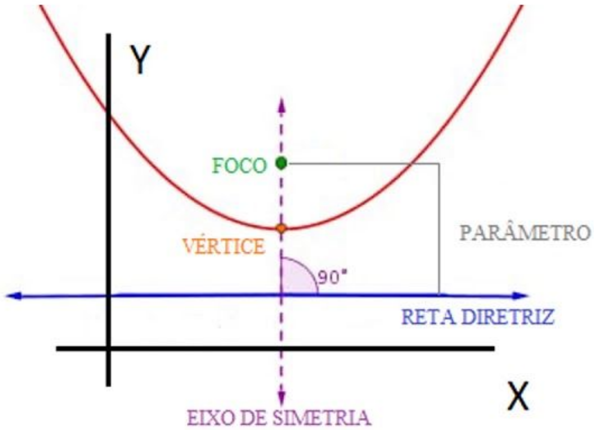
Foco - ponto fixo que, junto com a diretriz, determina a parábola. Em termos geométricos, todos os pontos da parábola são equidistantes do foco e da diretriz.

Diretriz - reta fixa que, em conjunto com o foco, define uma parábola. Cada ponto da parábola mantém a mesma distância do foco e da diretriz.

A esta distância entre o foco e a diretriz da parábola citada acima, dar-se o nome de **parâmetro**.

Outro termo utilizado na análise de uma parábola é **"eixo de simetria"**. Este eixo é uma linha que divide uma figura em duas partes iguais, ou seja, simétricas. É um conceito fundamental na geometria e na arte, pois ajuda a identificar padrões e formas simétricas. Esta linha imaginária, por sua vez, atravessa o vértice da parábola. Ressaltando ainda que, cada ponto de um lado do eixo de simetria tem um ponto correspondente no outro lado, com a mesma distância em relação ao eixo.

Figura 2.6: Elementos principais de uma parábola.



Fonte: [13].

2.4 O conceito de parábola no Ensino Médio

A grande maioria dos livros didáticos apresenta a função do segundo grau em x, $y = ax^2 + bx + c$, e infere que seu gráfico é uma curva, denominada parábola, não caracterizada como lugar geométrico. A parábola possui diversas aplicações que podem ser exploradas no Ensino Médio, [14]. Assim, é importante o professor enfatizar que o conceito de parábola é mais geral, conforme apresentamos na seção anterior. Assim, dada uma equação na forma $y = ax^2 + bx + c$, comparando com a equação (2.3), podemos identificar as coordenadas do centro e foco da parábola.

Para o desenvolvimento dessa proposta sugere-se que o professor tenha definido (ou revisado) função do 2^o grau como $f(x) = ax^2+bx+c$, com $a \neq 0$, para $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e abordado alguns tópicos envolvendo essa função, como por exemplo:

- Identificação dos coeficientes nas funções quadráticas. Como exemplo, para a função $f(x) = -x^2 + 2x - 5$, temos: $a = -1$, $b = 2$ e $c = -5$.

- Cálculo da imagem de um valor no domínio da função. Como exemplo, para a função $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, temos que $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = 13$.

- Cálculo das raízes (ou zeros) de uma função quadrática, ou seja, para quais valores de x obtemos um valor nulo para sua imagem, isto é, $f(x) = 0$.

  Como sugestão, pode-se abordar primeiramente as equações incompletas (quando um dos coeficientes é nulo) e posteriormente apresentar a fórmula para identificar as raízes da função quadrática

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

  onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

  Geometricamente, esses valores indicam os pontos onde o gráfico da parábola intercepta o eixo x.

Após essas etapas, recomenda-se explicar brevemente sobre o gráfico da função quadrática, que é dado por uma parábola, podendo ter concavidade para cima ou para baixo.

O ponto mais alto, ou mais baixo, que o gráfico atinge é chamado de vértice. O **vértice de uma parábola**, é o ponto em que o gráfico de uma função do 2º grau muda de sentido. Considerando que, uma parábola pode apresentar uma concavidade para cima, o que resulta em um ponto de mínimo, ou uma concavidade para baixo, resultando em um ponto de máximo. Esse ponto extremo, seja ele de mínimo ou de máximo é chamado de vértice. Geometricamente, o vértice é o ponto central da parábola, que divide a curva em duas partes simétricas em relação ao eixo de simetria.

A fórmula para identificarmos o vértice de uma função quadrática é:

$$V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Ainda sobre a parábola, o comportamento de crescimento e decrescimento depende do coeficiente a e da posição do vértice.

Caso $a > 0$:

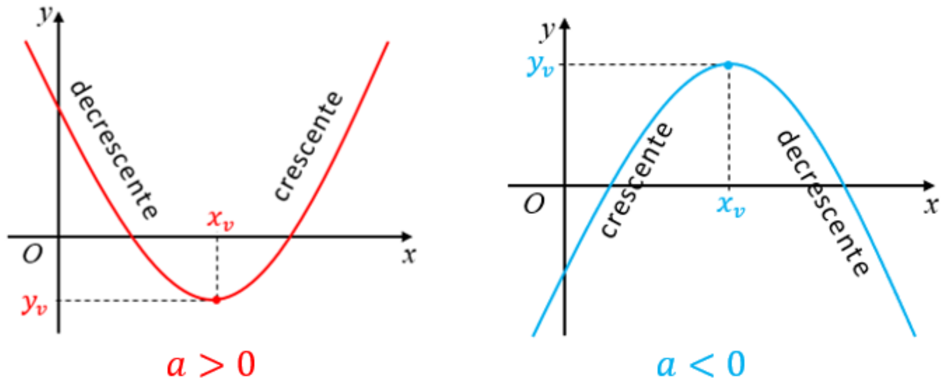
- Antes do vértice ($x < x_v$): a função é decrescente.
- Depois do vértice ($x > x_v$): a função é crescente.

Caso $a < 0$:

- Antes do vértice ($x < x_v$): a função é crescente.
- Depois do vértice ($x > x_v$): a função é decrescente.

Essa análise é válida pois, conforme detalhado nas definições, o vértice da parábola marca o ponto de transição entre os intervalos de crescimento e decrescimento (Figura 2.7).

Figura 2.7: Crescimento e decrescimento de uma parábola.



Fonte: [15].

Como complemento ao estudo de funções quadráticas, podemos relacionar o número de raízes da função com o estudo do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Se $\Delta < 0$, nenhuma solução real;
- Se $\Delta = 0$, uma solução real (ou duas soluções iguais);
- Se $\Delta > 0$, duas soluções reais distintas.

No capítulo seguinte apresentamos uma proposta didática considerando que o assunto já foi previamente introduzido. No entanto, a proposta pode ser adaptada se o professor realizar o desenvolvimento de alguns conceitos após o uso da tecnologia.

3 Uma proposta didática

A utilização da tecnologia como parte integrante da metodologia de ensino, através de ferramentas digitais, têm auxiliado na forma de ensinar e promover a absorção dos conhecimentos de conceitos matemáticos de uma forma mais atrativa. Com aplicativos interativos e outras tecnologias educacionais, os alunos conseguem desenvolver raciocínios de maneira mais intuitiva e dinâmica.

Para desenvolver a proposta de ensino, buscou-se um software que fosse de fácil manipulação de parâmetros em tempo real e intuitivo, para que tanto professores quanto alunos pudessem utilizá-lo sem dificuldades técnicas. Atendendo a este objetivo, o simulador PhET *Interactive Simulations* (Physics Education Technology) foi identificado com um grande potencial para auxiliar diretamente no desenvolvimento do ensino e aprendizado de funções quadráticas.

3.1 O simulador PhET

O projeto **PhET** Interactive Simulations (Physics Education Technology) é um laboratório virtual e foi desenvolvido na Universidade do Colorado Boulder com o objetivo de criar uma maneira divertida e atraente de aprender Ciências e Matemática. As simulações do PhET envolvem as áreas de Ciências Exatas e da Terra, Biologia, Matemática, Física e Químicas e podem ser acessadas gratuitamente através do link `phet.colorado.edu/pt_BR`. Elas permitem que os alunos manipulem variáveis e observem os efeitos em tempo real, auxiliando na compreensão dos conteúdos de forma prática de modo que os alunos tenham uma visão mais profunda do conteúdo ou fenômeno estudado.

Este simulador destaca-se frente a outros simuladores visto que: possui interatividade intuitiva, com interfaces simples e fáceis de usar, mesmo para aqueles com pouca familiaridade com tecnologia; permite visualização instantânea das mudanças no gráfico, com design pedagógico baseado em pesquisa; integra-se com diferentes currículos, desde o fundamental até o ensino superior; permite experimentar de forma independente, promovendo o aprendizado ativo; contempla uma conexão clara entre teoria e prática; oferece acessibilidade universal e gratuidade.

Referente à gratuidade, nota-se que, quando o usuário navega pelo site oficial (navegador), o simulador PhET pode ser usado de forma gratuita. Entretanto, caso o usuário queira baixar o aplicativo para dispositivo móveis, terá um custo simbólico de $0,99 a $1,99 dólares por ano, ou seja, variando de R$6,00 a R$12,00, aproximadamente.

Conforme descrito, o site de acesso é bem intuitivo contemplando o ícone "Simulações" com várias opções de áreas para acessar diversos simuladores: Física , Matemática, Química, Terra e Espaço e Biologia. Ademais, este site contempla também o ícone "Ensino”, o qual apresenta planos de aulas prontos para uso do professor em sala de aula, opção para que o usuário possa contribuir também com suas atividades, além de possuir uma opção com “dicas de uso do PhET”, de modo a direcionar o usuário no uso da plataforma. Apenas ressaltando que, para acessar todas as facilidades adicionais do site, o usuário deve apenas fazer um cadastro simples, com login e senha. Por fim, o site também contempla os ícones “Pesquisa” relatando um pouco sobre a proposta do PhET e “Iniciativas” detalhando os objetivos do PhET, inclusive no que diz respeito às aprendizagens inclusivas. O último ícone é o “Doar”, que oferece a possibilidade dos usuários contribuírem financeiramente com o projeto PhET.

Dentre alguns exemplos de simulações, podemos citar: “Óptica Geométrica”, “Laboratório de Colisões”, “Razão e Proporção”, “Ajuste de Curva”, “Lei de Coulumb”, “Interações Atômicas”, dentre inúmeras opções existentes.

3.2 O simulador “Gráfico de Quadráticas”

Na proposta de ensino que será apresentada será utilizado o simulador “Gráfico de Quadráticas”, que tem por objetivo abordar os tópicos: gráfico, parábola, função quadrática e vértice.

Os objetivos de aprendizagem são (ver [16]):

> *Descrever como mudar os coeficientes de uma função quadrática muda o gráfico da função. Prever como o gráfico de uma parábola mudará se os coeficientes ou constantes forem variados. Identificar o vértice, o eixo de simetria, as raízes e diretriz para o gráfico de uma equação quadrática. Usar a forma de vértice de uma função quadrática para descrever o gráfico da função. Descrever a relação entre o foco e a diretriz e a parábola resultante. Prever o gráfico de uma parábola com foco e diretriz.*

Ao acessar o site PhET, o usuário deverá clicar na opção “Simulações” e escolher o ícone “Matemática". Esta opção irá abrir diversas opções de simuladores da matemática, mas o objeto de estudo é o simulador “Gráfico de Quadráticas”.

Ao clicar sobre o simulador “Gráfico de Quadráticas”, o usuário perceberá na parte inferior algumas opções que podem melhor direcioná-lo, como por exemplo: Tópicos que serão trabalhados neste simulador, os objetivos de aprendizagem, algumas opções de plano de aula, atividades básicas propostas para utilização do simulador, além de um descritivo específico deste simulador (em inglês).

Caso o usuário queira ir direto para o simulador, de forma bem intuitiva, bastará clicar sobre a imagem com o símbolo “play”. A partir deste momento, o usuário estará logado no simulador interativo que apresentará quatro opções: Explorar, Forma Padrão, Forma Vértice e Foco e Diretriz. Essa última é mais indicada para uma abordagem da definição do conceito de parábola, num curso de Geometria Analítica (ensino superior). A opção “Explorar” é direcionada apenas para conhecer o simulador, podendo inserir quaisquer valores racionais nos campos. Entretanto, nas atividades apresentadas a ênfase está na abordagem das formas “Padrão” e do “Vértice”, as quais utilizam-se nos campos, apenas números inteiros que variam de -6 a 6.

3.3 Sequência didática

A sequência apresentada contempla um tutorial para os professores com comentários denominados *"Expectativa do Professor"*, justificando a proposta de cada atividade. Para facilitar o manuseio por parte do professor, no "Apêndice" está a sequência de atividades pronta para ser aplicada nas turmas em sala de aula.

O objetivo da sequência didática é explorar o traçado do gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, observando seus coeficientes, raízes e vértice.

Conforme citado no descritivo do simulador "Gráfico de Quadráticas", as atividades deste trabalho foram direcionadas para utilização do simulador na forma "Padrão" e "Vértice". Na "Forma Padrão" desenvolveu-se as atividades 1 e 2, pois por possibilitar a inserção de valores apenas pertencentes aos números inteiros, torna-se mais intuitiva e prática para os alunos.

A atividade 3 (proposta), por sua vez, utiliza-se o simulador na "Forma Vértice", para que os alunos observem uma outra possibilidade para escrita de uma função quadrática.

Na atividade 4 (proposta), a recomendação é utilizarmos a "Forma Padrão" e "Forma Vértice" também. Entretanto, caso o professor julgue necessário ou considere relevante utilizar as outras formas para aplicação das atividades, terá total liberdade.

3.3.1 Orientações para as aplicações das atividades 1 e 2

Esta atividade foi aplicada em algumas turmas do 1^o Ensino Médio, em uma escola particular da cidade de Rio Claro - SP. A partir dessa experiência, destacam-se algumas orientações/ sugestões para aplicação das atividades 1 e 2.

As atividades podem ser aplicadas em turmas de 20 a 40 alunos, no máximo, pois turmas reduzidas facilitam o engajamento e o monitoramento por parte do professor.

O tempo para aplicação das atividades estimado é de duas aulas de 50 minutos cada. Se for uma turma participativa, será um tempo suficiente para obter resultados satisfatórios.

Organizar as atividades em duplas pode surtir efeitos positivos, visto que os alunos tornam-se protagonistas no processo de ensino aprendizagem, além de estimular as relações interpessoais, aumentando o engajamento e interesse das turmas.

Lembrar os alunos que os valores, na prática, não serão sempre inteiros, entretanto, para estas atividades I e II, utilizaremos apenas formas "Padrão" e do "Vértice", as quais permitem apenas números inteiros, com intuito de facilitar a compreensão dos alunos.

Outro direcionamento, é orientar os alunos que, quando as questões solicitarem a alteração de valores para determinado coeficiente, eles devem seguir uma sequência para que as questões se tornem mais intuitivas. Assim, sugere-se primeiramente alterar apenas por valores positivos, depois utilizar o zero e por fim, utilizar apenas valores negativos.

A avaliação dos resultados podem ser quantitativas e qualitativas. Conferindo as respostas, questão por questão, se atingir um índice $\geq 70\%$ ou mais dentro do esperado na "Expectativa do Professor", podemos considerar que a atividade teve êxito. Assim, no somatório da atividade completa, analisando todas as questões de todos os alunos, o intuito é superar essa porcentagem. Caso atinja o objetivo, a sugestão é que o professor discuta com a turma apenas as questões que tiveram menores índices de acerto. Se o somatório dos resultados ficar um pouco abaixo, entre 50% e 70% de acertos, recomenda-se que o professor refaça junto com os alunos todas as questões. Em último caso, com um desempenho abaixo de 50%, a sugestão é recapitular com a turma os conceitos básicos de funções quadráticas e posteriormente refazer os testes. Além disso, o êxito na aplicação das atividades, pode ser medido nos resultados de avaliações posteriores sobre o mesmo tema trabalhado.

Uma análise qualitativa passa pela verificação por parte do professor quanto à disposição dos alunos para participação da atividade e o comprometimento em fazer e entregar resultados, mesmo que não estejam corretos.

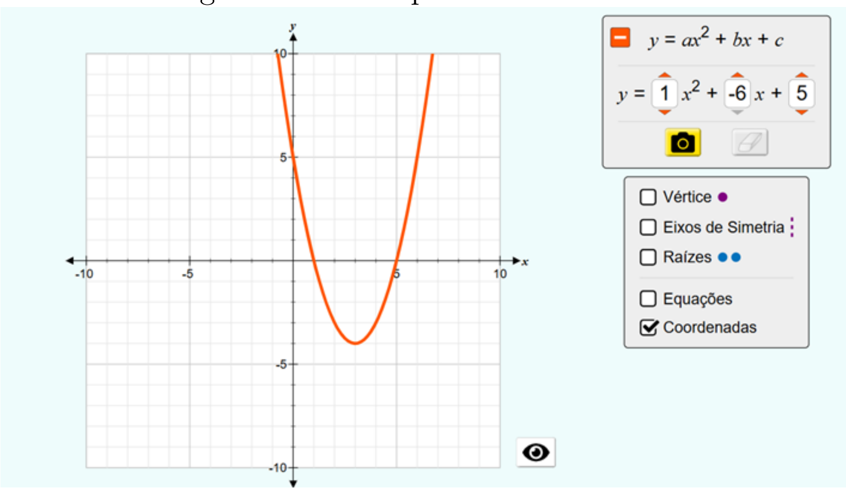
3.3.2 Atividade 1

Na primeira atividade proposta utiliza-se uma função do segundo grau fixada para que o aluno faça algumas experimentações utilizando o simulador "PhET". Sendo assim, consideramos a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ onde, como foi visto, $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$. Insira esses coeficientes no simulador PhET e responda as seguintes questões.

Questão 1. *Qual a concavidade da parábola formada?*

Expectativa do professor: primeiramente, os alunos devem associar que, como o coeficiente $a = 1$ (um número positivo) a concavidade ficará para cima (Figura 3.1).

Figura 3.1: Exemplo de concavidade.

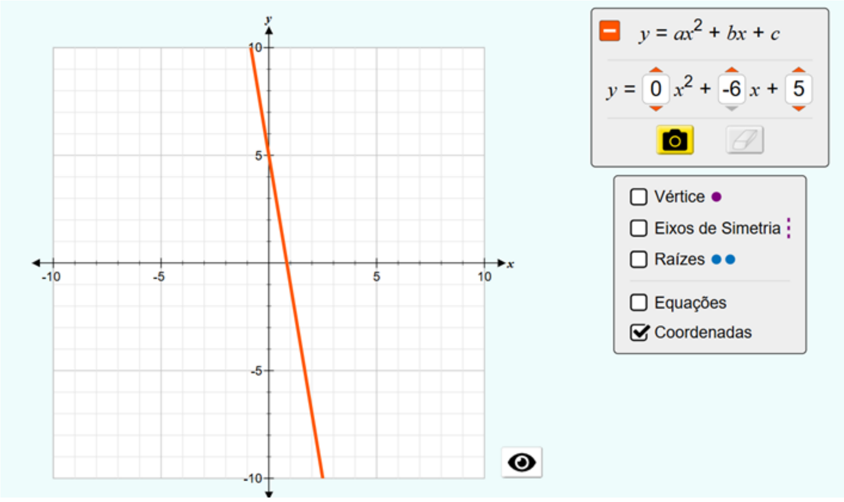


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 2. *Qual ou quais coeficientes devem ser alterados para que a concavidade seja alterada?*

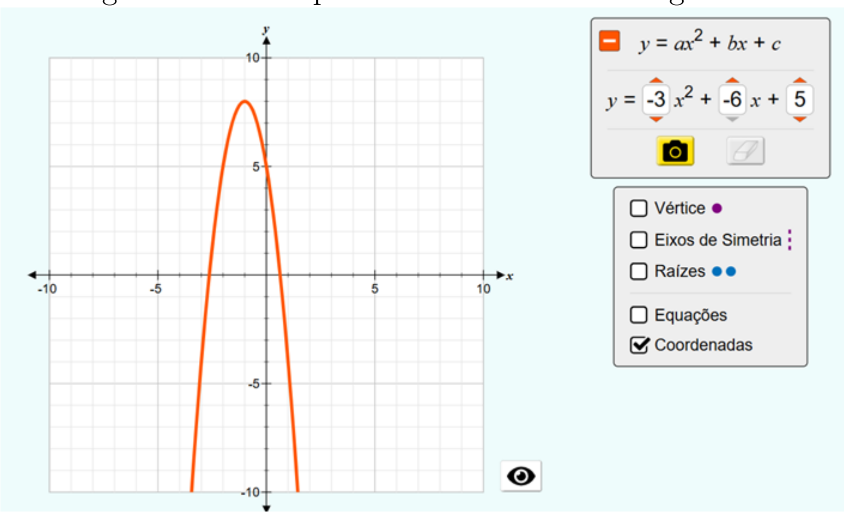
Expectativa do professor: sendo a um número negativo a concavidade ficará para baixo e para $a = 0$, deixa de ser uma função do 2º grau (Figuras 3.2 e 3.3).

Figura 3.2: Exemplo com coeficiente $a = 0$.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.3: Exemplo com coeficiente "a" negativo.

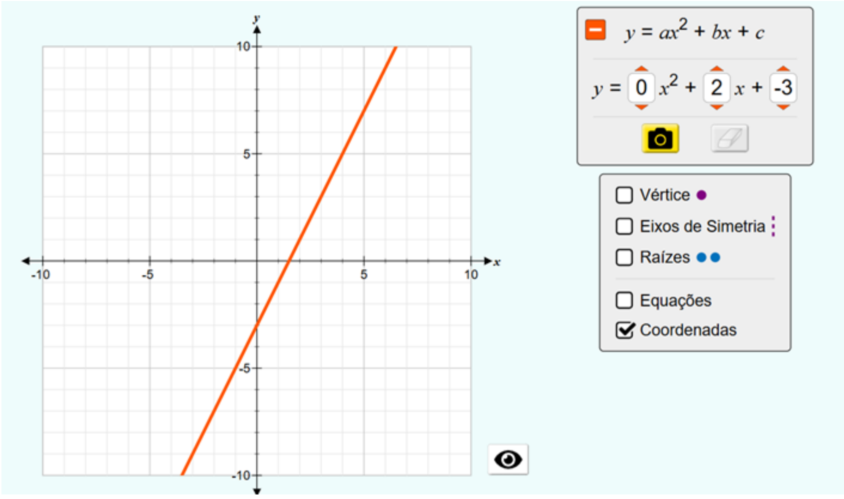


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 3. *Para qual ou quais alterações de coeficientes o gráfico dessa função se torna uma reta?*

Expectativa do professor: o aluno deve associar que se $a = 0$, a função deixa de ser quadrática e passa ser uma função de 1^o grau e essas concepções independem dos valores dos coeficientes b e c (Figura 3.4).

Figura 3.4: Exemplo coeficiente $a = 0$ (reta).

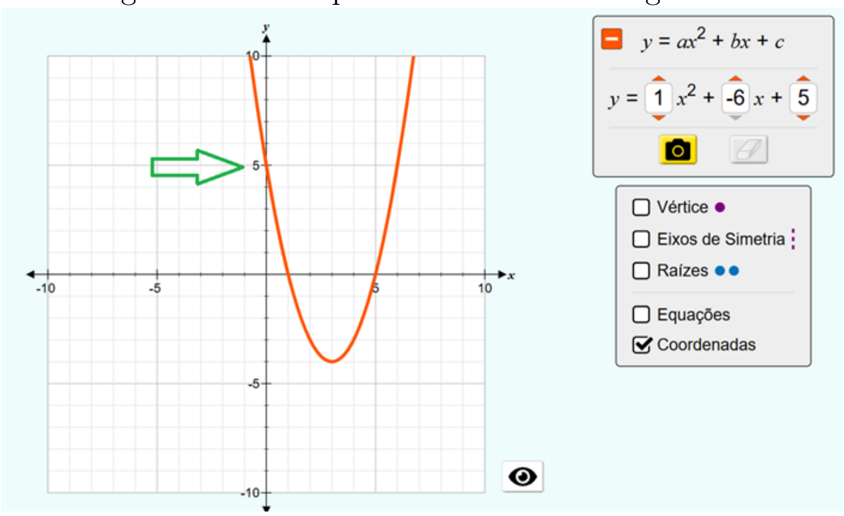


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 4. *O que indica o coeficiente c no gráfico? Como identificar?*

Expectativa do professor: o aluno deve associar que o coeficiente c é o valor independente (no caso $c = 5$) e que intercepta o eixo das ordenadas, ou seja, $f(0) = c$ (Figura 3.5).

Figura 3.5: Exemplo do coeficiente c no gráfico.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

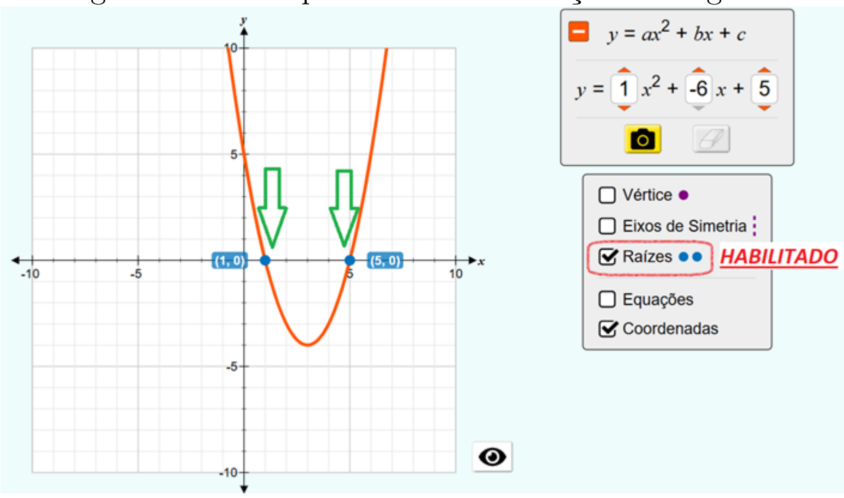
Questão 5. *Quais as raízes ou zeros da função $f(x) = x^2-6x+5$? Calcule manualmente.*

Expectativa do professor: o aluno deve calcular as raízes da equação através de alguma técnica já estudada e encontrar as raízes $x = 1$ e $x = 5$. (Figura 3.6).

Questão 6. *Habilite a função "raízes" no gráfico. Como posso identificar as raízes no gráfico?*

Expectativa do professor: O aluno deve associar que são exatamente os valores que interceptam o eixo das abscissas, sendo os pontos $(1, 0)$ e $(5, 0)$ (Figura 3.6).

Figura 3.6: Exemplo de raízes da função do 2^o grau .



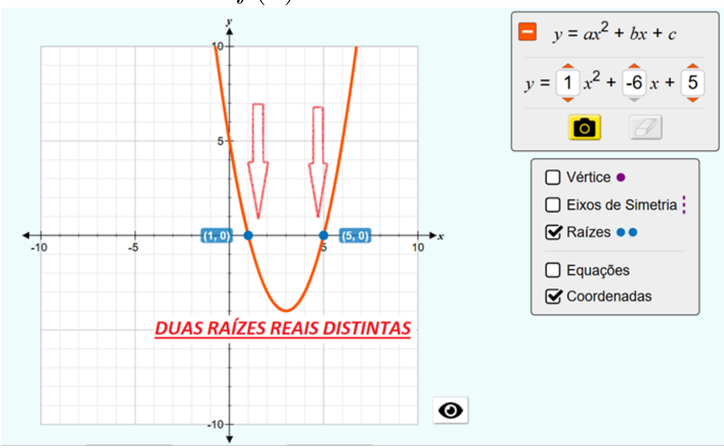
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 7. *Como vimos no item anterior, a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ possui duas raízes reais distintas. Podemos concluir que para todas as funções quadráticas haverá duas raízes reais distintas? Explique (Figura 3.7).*

Sugestão. Teste as seguintes funções quadráticas: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Faça uma relação entre a análise gráfica e o estudo do Delta apresentado nos conceitos básicos (Figuras 3.8 e 3.9).

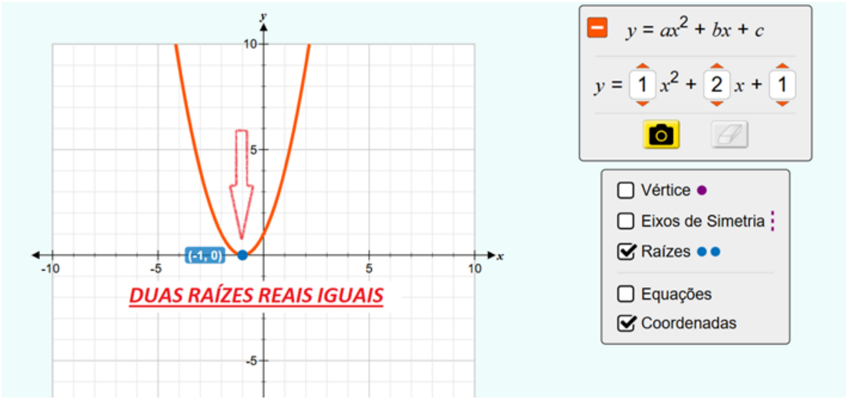
Expectativa do professor: O aluno deve associar que nem sempre haverá duas raízes reais distintas. As funções quadráticas podem ter duas raízes reais iguais, diferentes ou até mesmo não possuir raízes reais.

Figura 3.7: Gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 5$: raízes reais distintas.



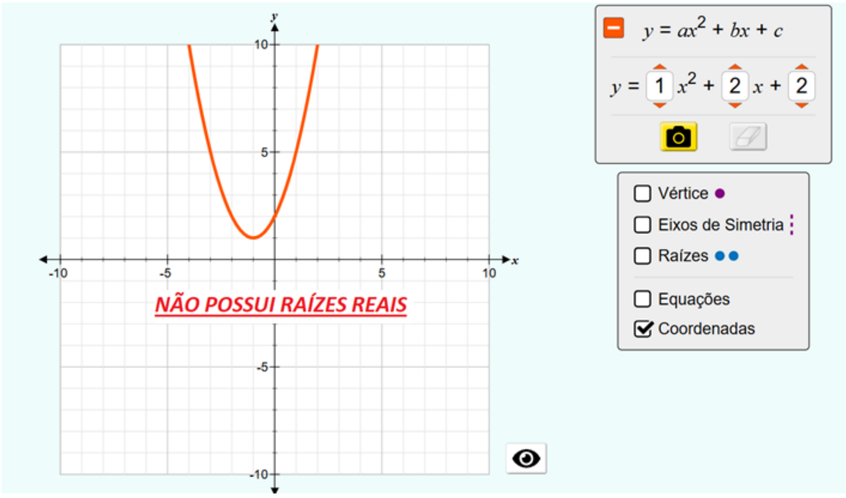
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.8: Gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 1$: raízes iguais.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.9: Gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 2$: sem raízes reais.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 8. *Qual o vértice do gráfico da função? O que representa o vértice? Calcule manualmente e depois habilite a função "vértice" no gráfico.*

Expectativa do professor: O aluno deve calcular o vértice da equação através de alguma técnica revista na introdução e ter a percepção de que o vértice é o ponto onde a função passa de crescente para decrescente e vice-versa, ou seja, ponto de máximo ou mínimo.

Questão 9. *A função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ possui ponto de MÁXIMO ou de MÍNIMO? Por quê?*

Expectativa do professor: o aluno deve ter a percepção de que, como a concavidade está voltada para cima ($a > 0$), a função decresce, atinge um valor MÍNIMO e volta a crescer, ou seja, esta função possui ponto mínimo.

Questão 10. *Qual o eixo de simetria da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$? Existe alguma relação com o vértice?*

Sugestão. Habilite a função "Eixo de Simetria" no gráfico (Figura 3.10).

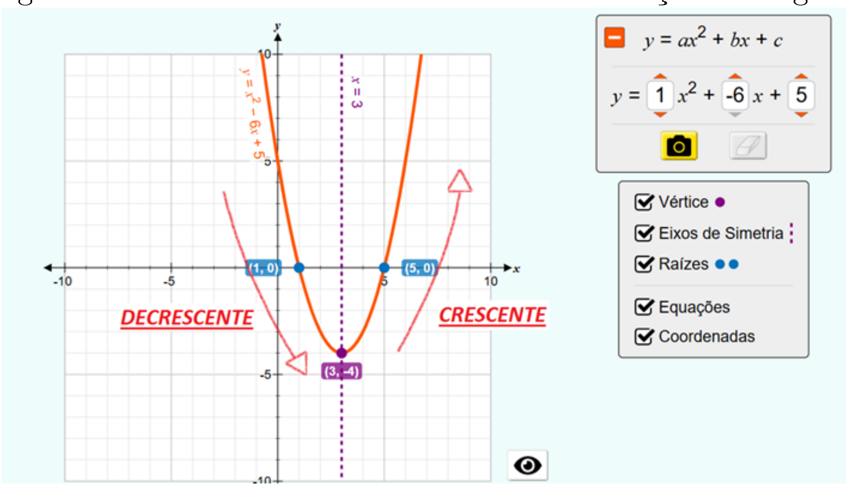
Expectativa do professor: o aluno deve associar que o eixo de simetria é a reta $x = 3$ (perpendicular ao eixo das abscissas), que contêm o ponto do vértice, formando um "espelho" no gráfico da função quadrática.

Questão 11. *O que é possível identificar no gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ com relação ao coeficiente b?*

Sugestão. Atente-se para o crescimento e decrescimento da função no momento em que intercepta o eixo y e analise também o x do vértice.

Expectativa do professor: O aluno pode associar que, como $b < 0$ (no caso $b = -6$) a função é decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas. Além disso, o x_v é positivo.

Figura 3.10: Crescimento e decrescimento de função do 2º grau.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 12. *Se alterarmos APENAS o valor de b, o que podemos observar?*

Sugestão. Utilize $b = 0$ e $b > 0$.

Expectativa do professor: o aluno pode associar que se $b = 0$, a função intersecta o eixo y justamente no vértice. Caso $b > 0$, a função é crescente quando intercepta o eixo das ordenadas. Além disso, o x_v é negativo (Figuras 3.11 e 3.12).

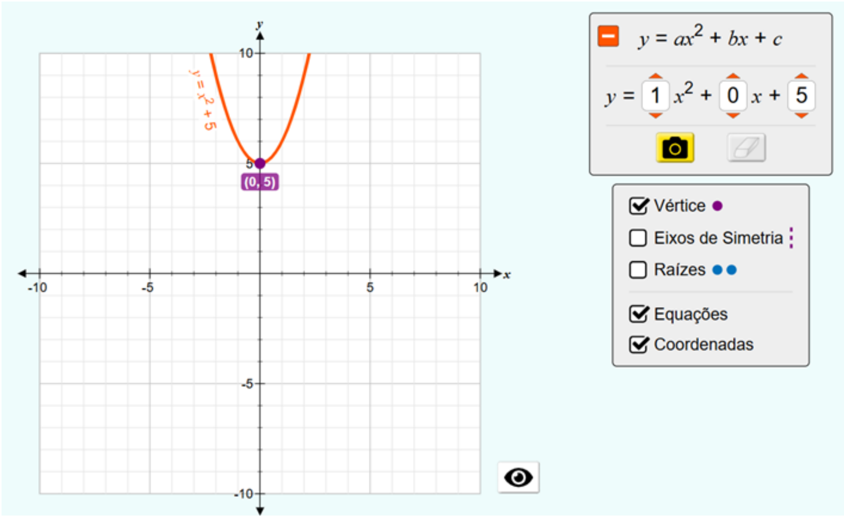
Após essa primeira atividade, o professor deve verificar se todas as expectativas foram alcançadas. Se sim, seguiremos para o estudo guiado. Caso contrário, retornar às questões com divergências ou compreensões parciais e apresentar, sob o seu comando, os testes necessários, mas sem trazer conclusões, pois a próxima etapa terá a função de reforçar e aprimorar os conhecimentos da primeira etapa.

3.3.3 Atividade 2

Após o aluno realizar a Atividade 1, cada aluno escolherá a sua função a fim de responder alguns questionamentos e tirar suas conclusões.

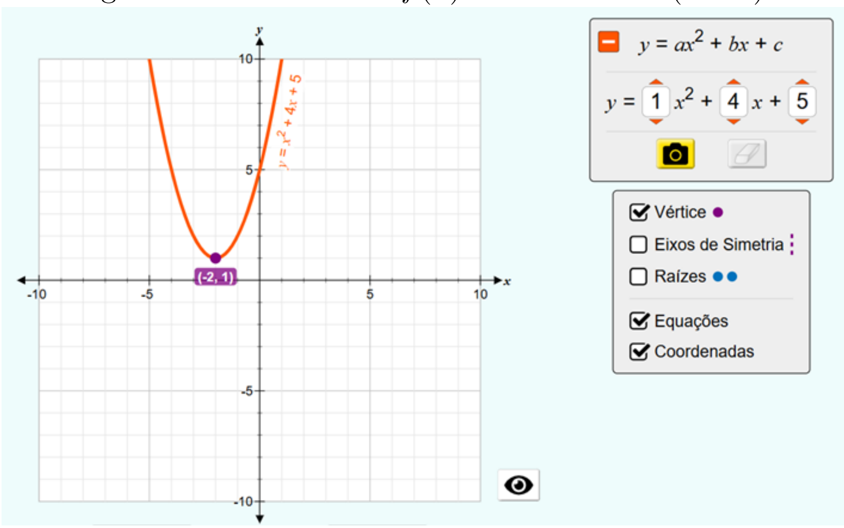
PARTE I: Analisando concavidade. Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$. Responda:

Figura 3.11: Gráfico de $f(x) = x^2 + 5$ $(b = 0)$.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.12: Gráfico de $f(x) = x^2 + 4x + 5$ $(b = 4)$.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

- Qual a concavidade da função escolhida?

  Expectativa do professor: Reforçará a compreensão do aluno sobre a concavidade para cima $(a > 0)$ e para baixo $(a < 0)$.

- Se trocarmos o coeficiente a pelo seu oposto, a concavidade sofre alteração?

  Expectativa do professor: O aluno deve associar que altera a concavidade da parábola.

- Se definirmos o valor do coeficiente $a = 0$, qual a concavidade? Explique.

  Expectativa do professor: O aluno notará que não existe concavidade, e sim uma reta, pois a função deixa de ser do 2^o grau e passa a ser de 1^o grau.

- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c anteriores.

Expectativa do professor: O aluno deverá testar outros valores para fixar os conteúdos de forma mais segura.

PARTE II: Analisando coeficiente b. Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com a e b diferentes de zero. Responda:

- Sendo $b > 0$, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?

  Expectativa do professor: O aluno deve associar que, se $b > 0$ a função intercepta o eixo y com a função crescente.

- Sendo $b < 0$, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?

  Expectativa do professor: O aluno deve associar que $b < 0$ a função intercepta o eixo y com a função decrescente.

- Se definirmos o valor do coeficiente $b = 0$, o que podemos observar? Explique.

  Expectativa do professor: o aluno deve associar que, se $b = 0$ a função intercepta o eixo y justamente no vértice.

- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.

  Expectativa do professor: O aluno deverá testar outros valores para fixar os conteúdos de forma mais segura.

PARTE III: Analisando coeficiente c Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$. Responda:

- Qual a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

  Expectativa do professor: o aluno deve associar que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$, ou seja, o c é o valor que intercepta o eixo y.

- Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que acontece com a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

  Expectativa do professor: o aluno deve associar que a mudança do coeficiente c afeta diretamente o local que a parábola ira interceptar o eixo y.

- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a e b acima.

  Expectativa do professor: o aluno deverá testar outros valores para fixar os conteúdos de forma mais segura.

PARTE IV: Analisando o vértice da função **IV.A** - Escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com $a > 0$.

- Caso $b > 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é negativa, podendo ainda ter a percepção de que a parábola é crescente quando intercepta o eixo das ordenadas.

- Caso $b < 0$, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a).

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é positiva, podendo ainda ter a percepção de que a parábola é decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas.

- Caso $b = 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é zero, tendo a percepção de que o vértice da parábola está sobre o eixo das ordenadas(ponto de mínimo).

IV.B - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com $a < 0$.

- Caso $b > 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é positiva, podendo ainda ter a percepção de que a parábola é decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas.

- Caso $b < 0$, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a).

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é negativa, podendo ainda ter a percepção de que a parábola é crescente quando intercepta o eixo das ordenadas.

- Caso $b = 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que a abscissa do vértice é zero, tendo a percepção de que o vértice da parábola está sobre o eixo das ordenadas (ponto de máximo).

IV.C - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e b, com $a \neq 0$.

- Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que observamos no ponto do vértice no gráfico?

  Expectativa do professor: O aluno deve notar que independentemente do valor do coeficiente c, a abscissa do vértice permanecerá a mesma.

IV.D – Agora, teste diferentes valores para os coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$, e confirme as conclusões que você chegou nos itens anteriores.

Propostas Extras

3.3.4 Atividade 3

Essa atividade tem por objetivo explorar uma forma alternativa de representar uma função do segundo grau, que nem sempre é abordada nos livros didáticos. Após o aluno experimentar e tirar conclusões para o estudo da função dada na forma $f(x) = ax^2+bx+c$, deverá ser introduzida a forma $ax^2+bx+c = a(x-h)^2+k$, onde (h, k) são as coordenadas do vértice do gráfico da função. Apresentaremos a seguir tal abordagem. Considere então,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Colocando a constante a em evidência e realizando manipulações algébricas, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})]^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}] \\ &= a[(x - (\frac{-b}{2a})]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \\ &= a[(x - (\frac{-b}{2a})]^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\ &= a(x - h)^2 + k, \end{aligned}$$

onde $h = x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $k = y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

A função $f(x) = a(x-h)^2+k$ está na forma de vértice, em que h e k são as coordenadas horizontal e vertical do vértice do gráfico, respectivamente.

Questão 13. *Seja o ponto do vértice de uma função quadrática igual a* $(3, -4)$. *Considerando* $a = 1$, *qual é essa função na sua forma padrão? Calcule utilizando a forma do vértice.*

Expectativa do professor: O aluno deve encontrar a equação na forma $f(x) = x^2 - 6x + 5$, compreendendo assim que $x^2 - 6x + 5 = 1(x - 3)^2 + (-4)$.

Questão 14. *Fixando o ponto do vértice* $(3, -4)$ *e alterando **apenas** o valor do coeficiente* a, *o que podemos concluir?*

Expectativa do professor: O aluno deve associar que o coeficiente a é o mesmo da função padrão e sendo assim, caso $a < 0$ a concavidade ficará para baixo, caso $a > 0$ a concavidade ficará para cima e para $a = 0$, deixará de ser uma função do 2^o grau. O aluno pode ter também a percepção de que quanto maior o valor de $|a|$, mais estreita será a curvatura da parábola.

Questão 15. *O que verificamos no gráfico se alterarmos **apenas** o valor do* x_v*?*

Expectativa do professor: O aluno deve notar que, quando aumentamos o valor do x_v o gráfico se desloca para a direita, caso contrário, ele se desloca para a esquerda.

Questão 16. *O que verificamos no gráfico se alterarmos **apenas** o valor do* y_v*?*

Expectativa do professor: O aluno deve notar que, quando aumentamos o valor do y_v o gráfico se desloca para cima, caso contrário, ele se desloca para a baixo.

3.4 Estudo complementar: problemas envolvendo a função quadrática

Questão 17 (Elaborada pelo autor)**.** *Um objeto é lançado do solo verticalmente para cima. Ao fim de* x *segundos, atinge a altura dada por* $f(x)$, *onde* $f(x) = -3x^2 + 6x$. *Desprezando-se a força da resistência do ar, responda:*

a) *Em que instante a pedra atinge a altura máxima?*

b) *Qual é a altura máxima atingida pela pedra?*

c) *Como a função $w(t)$ pode ser escrita na forma canônica?*

Solução: a)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1.$$

Logo, no instante $x = 1$, ou seja, após 1 segundo, o objeto atinge a altura máxima.

b)

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(6^2 - 0)}{4(-3)} = \frac{-36}{-12} = 3.$$

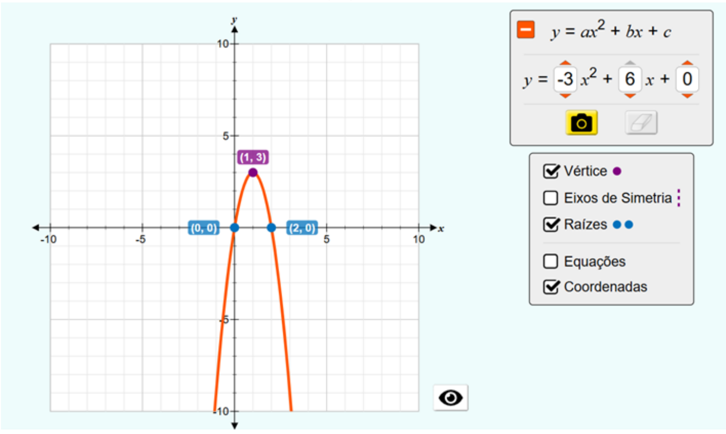
Logo, a altura máxima atingida pela pedra é de 3 metros.

c) Sabendo que o vértice é $V = (1, 3)$ e $a = -3$, então $f(x) = a(x-h)^2+k = -3(x-1)^2+3$.

Exercitando o Simulador: a) Coloque a função $f(x) = -3x^2 + 6x$ no "Forma Padrão" e verifique se as soluções que você obteve nos itens *a* e *b* estão coerentes (Figura 3.13).

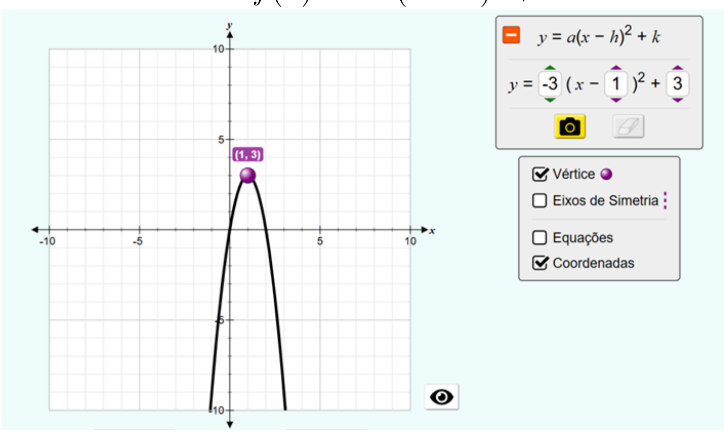
Expectativa do professor: O aluno deve notar que o vértice da função $V = (1, 3)$ identificado nos itens *a* e *b*, estará demonstrado no gráfico quando projetado (Figura 3.14).

Figura 3.13: Gráfico de $f(x) = -3x^2 + 6x$ - forma padrão.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.14: Gráfico de $f(x) = -3(x - 1)^2 + 3$ - forma canônica.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 18 (Elaborado pelo autor)**.** *Sabendo que a função do 2º grau, representada por $f(x) = ax^2+bx+c$, pode ser representada também pela forma canônica $f(x) = a(x-h)^2+k$, relacione as funções a seguir com suas respectivas representações gráficas na Figura 3.15.*

( ) $f(x) = -x^2$

( ) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$

( ) $f(x) = 2^2$

( ) $f(x) = x^2 + 1$

( ) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

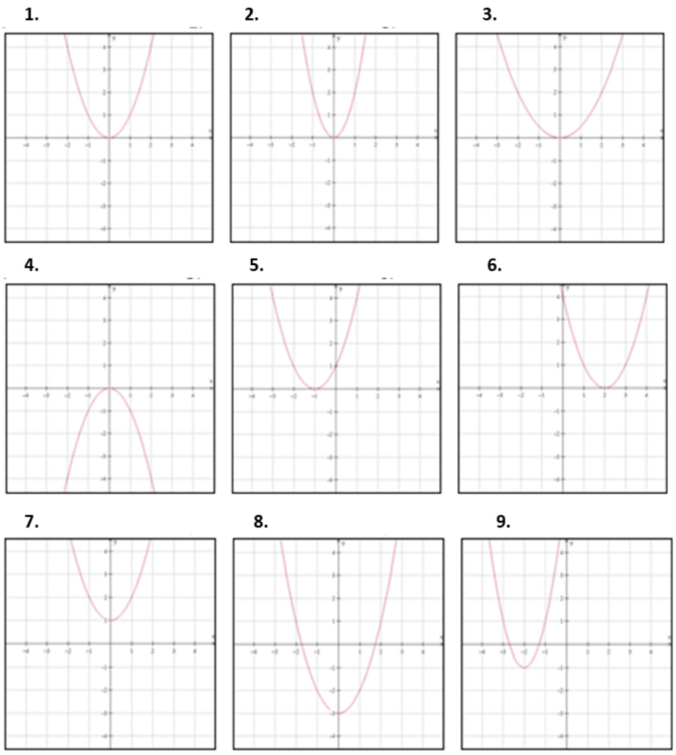
( ) $f(x) = x^2 - 3$

( ) $f(x) = x^2$

( ) $f(x) = (x-2)^2$

( ) $f(x) = (x+1)^2$

Figura 3.15: Gráficos de funções do 2º grau.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Exercitando o Simulador: O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno utilize o simulador da forma que achar mais viável e consiga identificar o gráfico que se relaciona com cada função.

Expectativa do professor: O aluno deve notar que tanto pelo gráfico, como pelas funções explícitas consigo correlacionar gráfico e função, atingindo o gabarito abaixo:

(4) $f(x) = -x^2$	(8) $f(x) = x^2 - 3$
(9) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$	(1) $f(x) = x^2$
(2) $f(x) = 2x^2$	(6) $f(x) = (x-2)^2$
(7) $f(x) = x^2 + 1$	(5) $f(x) = (x+1)^2$
(3) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$	

Questão 19 (Elaborada pelo autor). *Seja a função $f(x) = x^2 + bx + c$, com vértice $V = (2, -3)$. Qual o valor de $b + c$?*

Solução:

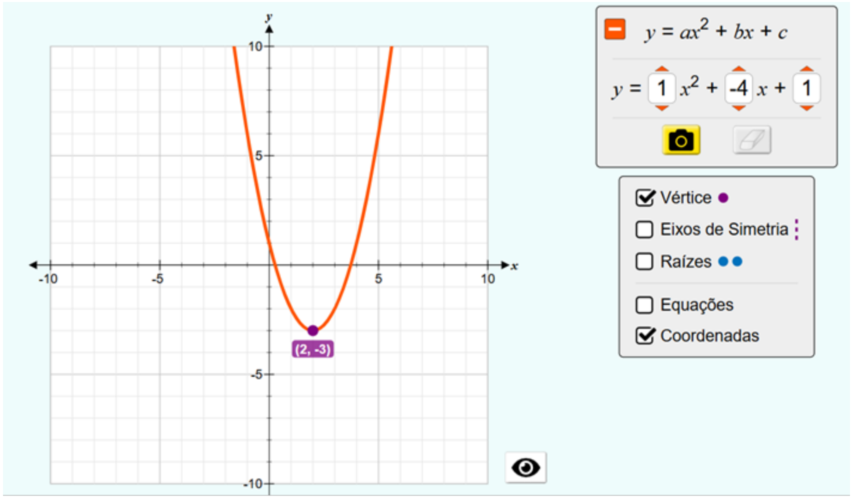
$$f(x) = a(x-h)^2 + k = 1(x-2)^2 + (-3) = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

Assim, $b + c = -4 + 1 = -3$.

Exercitando o Simulador: a) No simulador "Forma Padrão" digite os coeficientes da função que você identificou no exercício 3. Verifique se o vértice deste gráfico encontrado é o ponto $(2, -3)$ que constava no enunciado. Caso não, refaça o exercício 3 novamente. Se sim, vamos para o item *b*, a seguir (Figura 3.16).

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o vértice da função $V = (2, -3)$ identificado no enunciado do exercício 3, estará demonstrado no gráfico quando projetada a função encontrada.

Figura 3.16: Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ - forma padrão.

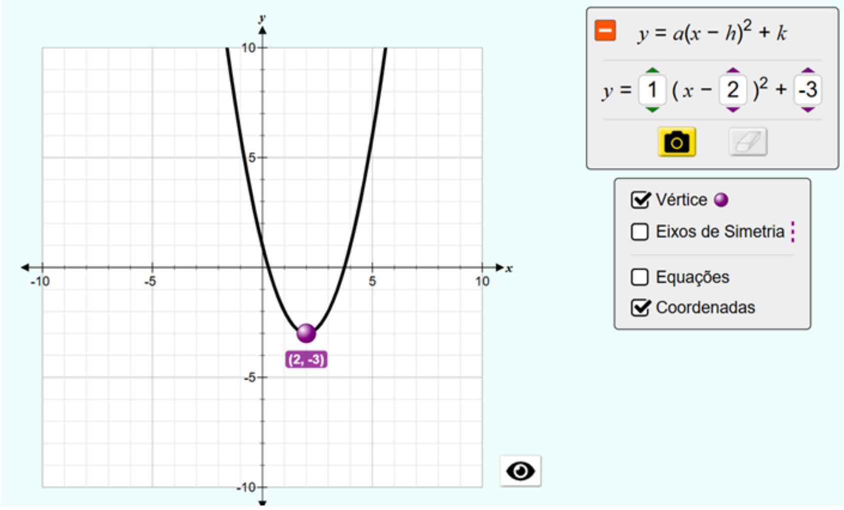


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

b) No simulador "Forma Vértice" insira o valor do coeficiente a e os valores do vértice $V(h, k) = V(2, -3)$. Verifique se o gráfico formado é o mesmo do item *a* (Figura 3.17).

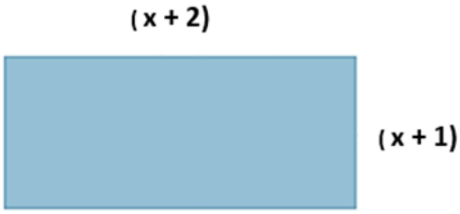
Expectativa do professor: O aluno deve notar que o gráfico é idêntico, pois é a mesma função escrita de forma diferente, ou seja, $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 1(x-2)^2 - 3$.

Figura 3.17: Gráfico de $f(x) = 1(x-2)^2 - 3$ - forma vértice.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Figura 3.18: Região retangular - Questão 20.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 20 (Elaborada pelo autor)**.** *Uma região retangular teve as suas dimensões descritas em metros, conforme a Figura 3.18.*

O valor de x que faz com que a área dessa região seja igual a 6 é:

(A) -4

(B) 2

(C) 1

(D) 4

(E) 6

Solução: A área de um retângulo é calculada pelo produto entre as medidas de seus lados. Então

$$(x+2)(x+1) = 6.$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos $x^2 + 3x + 2 = 6$. Para que seja possível aplicar a fórmula de Bhaskara, vamos reescrever a equação e igualá-la a zero, ou seja $x^2 + 3x + 2 - 6 = 0$, que é equivalente a $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Os coeficientes da equação são: $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$. Calculando o valor de delta, temos que: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-4) = 9 + 16 = 25$. Aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos:

$$x_1 = (-3 + \sqrt{25})/2 = 1, \qquad x_2 = (-3 - \sqrt{25})/2 = -4.$$

Note que o valor $x = -4$ faria com que os lados do retângulo fossem negativos, logo, entre as soluções da equação, a única que faz sentido é $x = 1$, ou seja, a resposta correta é **LETRA C**.

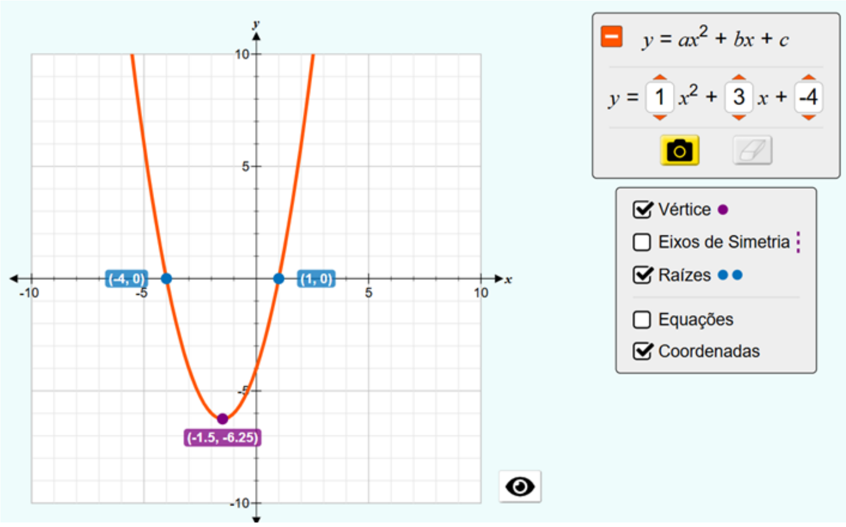
Exercitando o Simulador: Considere uma região retangular de $x + 2$ de comprimento por $x + 1$ de largura (Figura 3.19).

a) Qual o valor de x faz com que a área dessa região seja igual a 6?

(Sugestão: Calcule a área (largura $\times$ comprimento) e iguale a 6. Encontre a função desejada e utilize o simulador "Forma Padrão" para identificar a raiz da equação e consequentemente o valor de x que atende a situação desejada).

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o valor $x = -4$ faria com que os lados do retângulo fossem valores negativos, logo, entre as soluções da equação, a única que faz sentido é $x = 1$.

Figura 3.19: Função do 2^o grau da questão 20.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

b) Se aumentarmos o valor da área, o que notamos? Existe algum limite de valor para que exista solução?

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o valor de x (raiz positiva da equação) aumentará também, sendo simétrica a ampliação da abertura da parábola. Neste caso, não haverá limite de área para que exista solução. Quanto maior a área, maior será o valor de x, sendo para esta função, sempre uma única solução de x positiva, que atende o meu problema.

c) Se diminuirmos o valor da área, o que notamos? Existe algum limite de valor para que exista solução?

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o valor de x (raiz positiva da equação) irá diminuir também, sendo simétrica a redução da abertura da parábola. O limite mínimo é de $2\,\text{m}^2$ de área, sendo neste caso, $x = 0$. Valores de áreas menores que $2\,\text{m}^2$ não resultam em valores de x reais positivos e consequentemente, não existe solução.

Questão 21 (Elaborada pelo autor)**.** *O gráfico da função quadrática representada por $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ é uma parábola. Se $V(a; b)$ é o vértice dessa parábola, o valor de $a + b$ é igual a:*

(A) 1

(B) 3

(C) -1

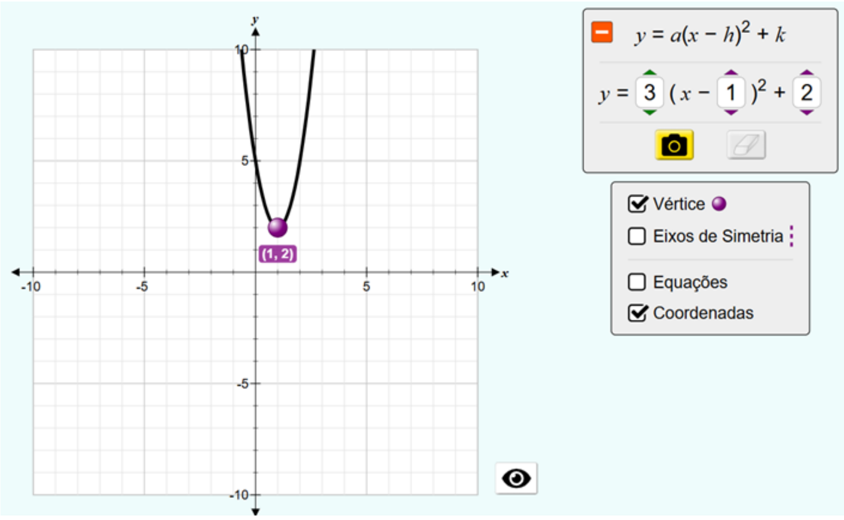
(D) -3

Solução: Pela forma canônica, temos: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sendo o vértice $V = (h, k)$. Então, $x_v = 1$ e $y_v = 2$. Logo, $a + b = 1 + 2 = 3$, ou seja, a resposta correta é **LETRA B**.

Exercitando o Simulador: Insira o gráfico da função $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ no "Forma Vértice" e verifique se o valor do vértice no gráfico condiz com o resultado do exercício 5. Resolva a função $f(x)$, deixando-a na forma padrão $f(x) = ax^2 + bx + c$. Insira esta função no "Forma Padrão". O que pode concluir?

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o gráfico é idêntico, pois é a mesma função escrita de forma diferente, ou seja, $f(x) = 3(x-1)^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 5$ (Figuras 3.20 e 3.21).

Figura 3.20: Gráfico de $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ - forma vértice.

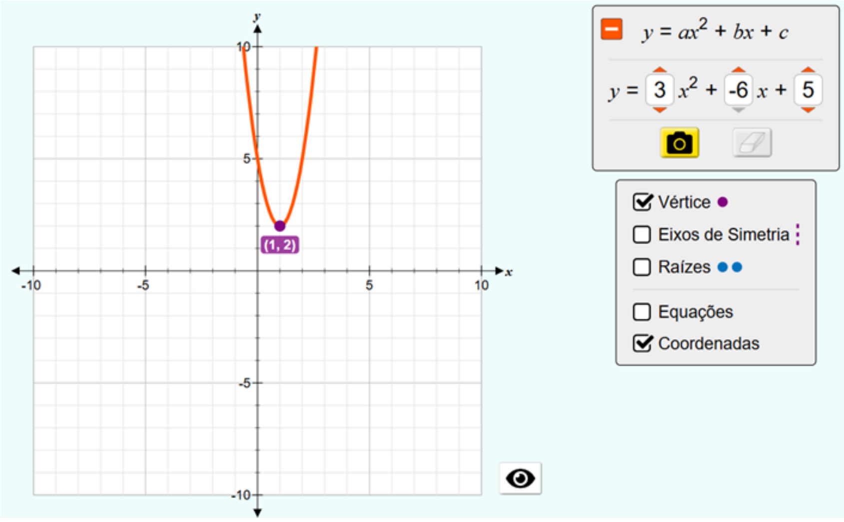


Fonte: elaborado pelo autor.

Questão 22 (CESPE 2022)**.** *Considere que uma função do segundo grau possui vértice no ponto $(2, 5)$ e que passa pelo ponto $(3, 6)$. Nesse caso, o valor da função no ponto de abscissa 5 é:*

(A) 8

Figura 3.21: Gráfico de $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ - forma padrão.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

(B) 11

(C) 14

(D) 5

(E) 2

Solução: Aplique a fórmula canônica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ usando $x_v = 2$ e $y_v = 5$. Assim, temos $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ e, substituindo o ponto $(3, 6)$ temos $6 = a(3-2)^2 + 5$, ou seja, $a = 1$. Então, $f(x) = 1(x-2)^2 + 5$, ou seja, $f(x) = x^2 - 4x + 9$. Sendo a abscissa igual a 5, temos $f(5) = (5)^2 - 4(5) + 9 = 14$, ou seja, a resposta correta é **LETRA C**.

Exercitando o Simulador: No "Forma Vértice", insira o vértice $(2, 5)$ explícito no gráfico. Note que o gráfico dado no exercício contempla os pontos $(3, 6)$. Assim, altere o valor do coeficiente a no simulador, formando um gráfico que contemple esse tempo (Figura 3.22).

Questão 23 (Consulplan 2021)**.** *A função real de variável real que representa o esboço deste gráfico é expressa por:*

(A) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

(B) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

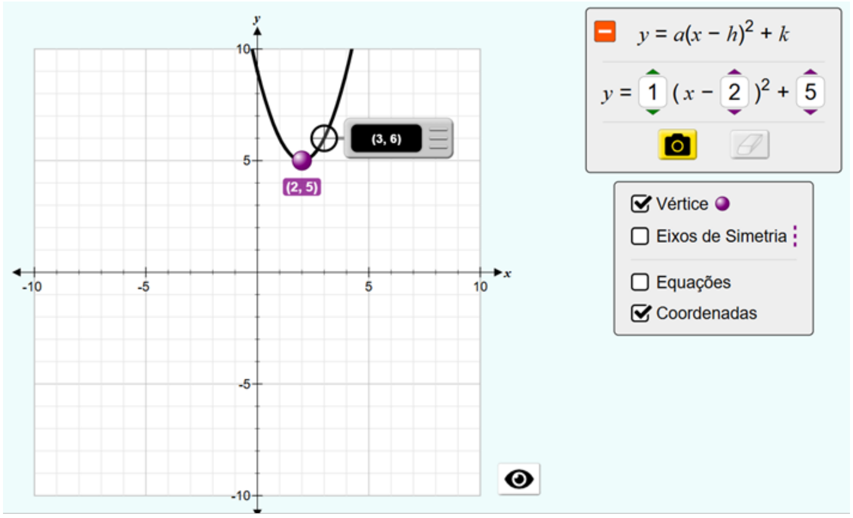
(C) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

(D) $f(x) = x^2 + 6x - 10$

Solução: Aplique a Fórmula canônica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ para $x_v = 3$ e $y_v = 1$. Assim, temos $f(x) = a(x-3)^2 + 1$ e substituindo o ponto $(2, 2)$ temos $2 = a(2-3)^2 + 1$, ou seja, $a = 1$. Então, $f(x) = 1(x-3)^2 + 1$ e portanto, $f(x) = x^2 - 6x + 10$, e assim a resposta correta é **LETRA C**.

Exercitando o Simulador: No "Forma Vértice", insira o vértice $(3, 1)$ explícito no gráfico. Note que o gráfico dado no exercício contempla os pontos $(2, 2)$ e $(4, 2)$. Assim, altere o

Figura 3.22: Gráfico de $f(x) = 1(x-2)^2 + 5$.

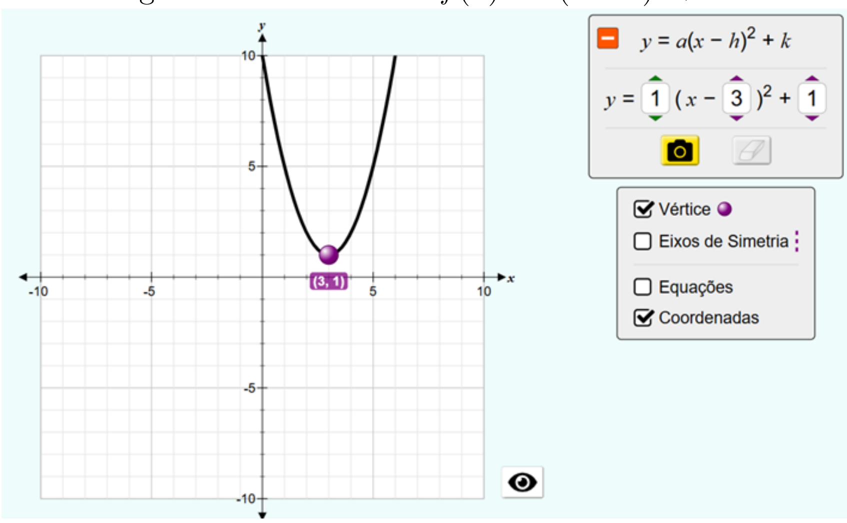


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

valor do coeficiente a no simulador, formando um gráfico que contemple esses dois pontos. O que pode concluir?

Expectativa do professor: O aluno deve notar que os gráficos são os mesmos por se tratar da mesma função. No "Forma Vértice" escrita na forma canônica e no exercício representado na sua forma geral (Figura 3.23).

Figura 3.23: Gráfico de $f(x) = 1(x-3)^2 + 1$.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 24 (Elaborada pelo autor)**.** *Uma fábrica produz um produto químico e o custo total de produção $C(x)$ depende da quantidade produzida (x), em mil litros, de acordo com a fórmula:*

$$C(x) = 0,5x^2 - 1,5x + 5.$$

(A) Determine a quantidade x que minimiza o custo total.

(B) Qual é o custo mínimo?

Solução: A) O gráfico da função $C(x)$ é uma parábola com coeficiente positivo de x^2, o que significa que ela se abre para cima. Assim, o valor mínimo ocorre no vértice, cuja fórmula é:

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Como $a = 0{,}5$ e $b = -1{,}5$, então

$$x_v = -\frac{-1,5}{2 \cdot 0{,}5} = 1{,}5 \text{ ou } \frac{3}{2}.$$

Assim, a quantidade que minimiza o custo é $x = 1{,}5$ litros.

B) Para encontrar o custo mínimo, substituímos $x = 1{,}5$ na função $C(x)$:

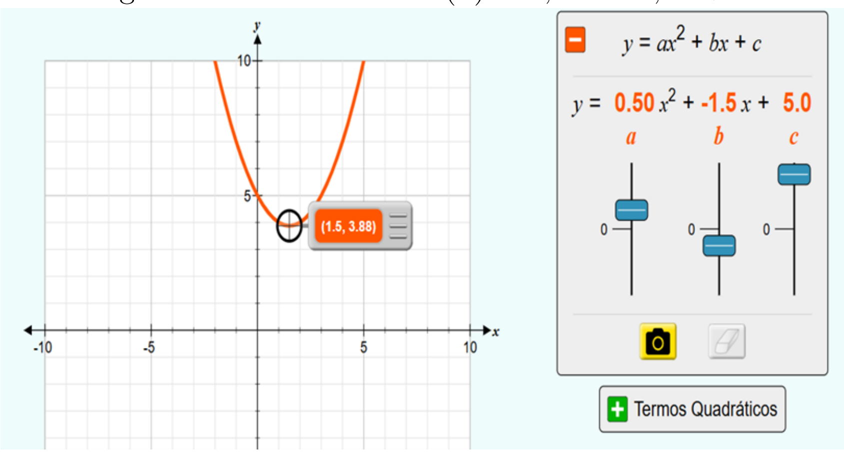
$$\begin{aligned} C(x) &= 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 5 \\ C(x) &= 0{,}5 \cdot 1{,}5^2 - 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 5 \\ C(x) &= 1{,}125 - 2{,}25 + 5 \\ C(x) &= 3{,}875. \end{aligned}$$

Assim, o custo mínimo é 3,875.

Exercitando o Simulador: O aluno deve utilizar o simulador no modo "explorar", pois permite a inserção de valores racionais (decimais). Primeiramente, deverá ser realizada a inserção dos valores dos coeficientes no simulador e partir disso chegar às conclusões necessárias, baseadas no gráfico gerado.

Expectativa do professor: O aluno deve notar que a quantidade que minimiza o custo e o custo mínimo, são exatamente o vértice da função quadrática, com x_v e y_v, respectivamente. Note que, no gráfico, o valor do y_v foi arrendondado para duas casas decimais (Figura 3.24).

Figura 3.24: Gráfico de $C(x) = 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 5$.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Questão 25. *Um experimento inteiramente casualizado com 4 repetições para estudar os feitos de 7 doses de gesso (0, 50, 100, 150, 200, 250 e 300 kh/ha) sobre diversas características do feijoeiro. Para a característica "peso de 1000 sementes" os resultados obtidos, em gramas, são apresentados na Tabela 3.1.*

Tratamentos (kg/ha)	Repetições				Totais
	1	2	3	4	
T1) 0	134,8	139,7	147,6	132,3	554,4
T2) 50	161,7	157,7	150,3	144,7	614,4
T3) 100	160,7	172,7	163,4	161,3	658,1
T4) 150	169,8	168,2	160,7	161,0	659,7
T5) 200	165,7	160,0	158,2	151,0	634,9
T6) 250	171,8	157,3	150,4	160,4	639,9
T7) 300	154,5	160,4	148,8	154,0	617,7
Total					4379,1

Tabela 3.1: Dados de experimentos para estimar o peso de 1000 sementes de acordo com a dose de tratamento com gesso.

Um estudo matemático verificou que a melhor função que se ajustou aos dados para o cálculo do peso de 1000 sementes em função da dose x, é dada por

$$C(x) = -0,000782525x^2 + 0.2736x + 140,7835.$$

Calcule a dose que maximiza o peso de 1000 sementes(g). Sugestão: multiplique a função $C(x)$ por 1000 para para estimar a dose, ou seja, utilize $C(x) = -0,78x^2 + 273,6x + 140783$. Verifique a possibilidade de traçar o gráfico de $C(x)$ utilizando o simulador PhET.

Expectativa do professor: O aluno deve notar que o ponto máximo procurado é justamente o vértice da função quadrática. Assim, para descobrirmos a dose x que maximiza peso de 1000 sementes, basta identificarmos o valor de x_v, que não se altera quando a função original é multiplicada por 1000 (desconsiderando os arredondamentos).

Então,

$$x_v = \frac{-b}{2 \cdot a} \quad \Rightarrow \quad x_v = \frac{-273{,}6}{2 \cdot (-0{,}78)}$$

$$x_v = \frac{-273{,}6}{-1{,}56} \quad \Rightarrow \quad x_v = 175{,}384615.$$

Logo, a dose x que maximiza o peso de 1000 sementes é de aproximandamente $175,38$. Entretanto, esta função não pode ser plotada no simulador PhET, pois só podem ser inseridos valores de coeficientes entre -6 e 6, sendo este um limitante a ser aprimorado na plataforma.

3.5 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi explorar a parábola sob diferentes aspectos que muitas vezes não são apresentados no Ensino Médio. A ideia central foi ampliar o olhar dos alunos no que diz respeito ao gráfico da função quadrática, através de alguns conhecimentos básicos previamente trabalhados em sala de aula e um tutorial para desenvolver o raciocínio na construção da parábola, utilizando o simulador PhET.

Foram feitas algumas aplicações do tutorial nas turmas do Ensino Médio. Durante as execuções com as diferentes turmas e com a devolutiva desses alunos, o tutorial foi sendo pontualmente modificado para que facilitasse o entendimento. Na aplicação das "Atividades I e II" os alunos ficaram interessados e motivados durante todo o desenvolvimento das tarefas. A maior parte das atividades foram aplicadas em duplas de alunos, sendo muito valiosa e notória as atitudes altruístas entre eles.

Estas atividades foram aplicadas em turmas do 1^o ano do Ensino Médio, com aproximadamente 30 alunos por turma, organizados em duplas, utilizando 4 aulas de 50 minutos para aplicar e revisar as questões necessárias. Referente aos resultados quantitativos, os índices do somatório de acertos geral das turmas superou 80%, obtendo em uma das turmas uma média de aproximadamente 90%. Este resultado foi muito positivo e até mesmo surpreendente, tendo em vista o desempenho de outras turmas neste mesmo assunto em anos anteriores. Para além de dados quantitativos, tem-se os qualitativos, que foram notáveis também. Todas as turmas ficaram engajadas nas atividades, participativas e empolgadas, tanto por ser uma atividade lúdica/tecnológica, quanto pelo protagonismo que cada aluno assumia no desenvolvimento das questões.

Esta foi uma forma lúdica assertiva de transmitir os conhecimentos relacionados a análise gráfica de uma função quadrática, para além de um conteúdo limitado presente nos livros didáticos, no geral. A maioria dos alunos conseguiu compreender com grande facilidade a "Atividade I", embasados nos conhecimentos previamente adquiridos e seguindo as instruções do tutorial.

Entretanto, conforme foram sendo executadas as atividades, verificou-se com alguns alunos, respostas genéricas por não compreenderem a exata expectativa do professor. Assim, foram realizadas pequenas alterações no tutorial a fim de deixar mais claro e objetivo os questionamentos. Além disso, alguns poucos alunos tiveram dificuldade no desenvolvimento da "Atividade I" por não terem desenvolvido com êxito as definições básicas, trabalhadas com as turmas previamente, em aulas anteriores. Para estes, alguns conceitos foram revisados individualmente, para que assim pudessem desfrutar com maior proveito a atividade. No mais, tudo ocorreu de acordo com o planejado.

Na "Atividade 2", por sua vez, foi realizado um detalhamento minucioso de cada questionamento, direcionando os alunos e obtendo um resultado dentro do esperado. Esta atividade gerou uma maior fixação dos pensamentos desenvolvidos na "Atividade 1", fazendo com que os alunos compreendessem o conteúdo com uma metodologia diferente da habitual.

Após a aplicação das duas primeiras atividades foi realizado uma leitura dinâmica junto aos alunos, com uma explicação por parte do professor, utilizando o simulador, a fim de fortalecer o conhecimento adquirido e esclarecer alguns erros identificados nas respostas. O resultado foi muito efetivo, sendo notável o envolvimento da turma.

Em decorrência do bom desempenho dos alunos nas duas primeiras atividades do tutorial, desenvolveu-se algumas propostas de atividades para serem trabalhadas posteriormente. Primeiramente, a "Atividade 3", com uma análise da função quadrática, pouco vista nos livros didáticos, na forma $a(x-h)^2+k$, onde (h,k) são as coordenadas do vértice do gráfico da função. O objetivo desta atividade é explorar uma forma alternativa de representar a função quadrática, tornando ainda mais ampla a visão dos alunos referente a funções do 2^o grau. Além disso, desenvolveu-se também um estudo complementar, com situações problema envolvendo função quadrática, com o intuito de tornar o conteúdo mais presente no cotidiano de cada aluno, sendo atrativo e significativo para eles.

Referências

[1] Rocha, L. A. S. - A utilização de softwares no Ensino de funções quadráticas. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (FURG), 2023.

[2] Neves, C. D. dos S. - Uso de tecnologias no estudo de funções reais de uma variável real. 122 f. Dissertação (Monografia) — Universidade Jean Piaget, Cabo Verde, 2008.

[3] Marinho, G. S. - Novas Tecnologias Educacionais no Ensino de Matemática: Desafios e possibilidades. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Patos (PB), 2021.

[4] Sousa, H. C. – Educação matemática e a resolução de problemas no ensino de função no ensino médio - Instituto Federal Goiano, Urutaí - GO, 2021.

[5] Santos, I.C.S. - Uso de tecnologias para ensinar função no Ensino Médio: um estudo bibliográfico. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de São João Del Rey, São João Del Rey (MG), 2022.

[6] Siqueira, D. N.; Caetano, J. J. - O uso do Geogebra no ensino de funções no ensino médio. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR, 2016. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: `www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_dannunesdesiqueira.pdf`. Acesso em: 01 mar. 2024.

[7] Somatemática. Cônicas. Disponível em: `https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php` Acesso em: 17 jun. 2024.

[8] Boyer, C. B; Merzbach, U. C. - História da matemática. Blucher, 2019.

[9] Heath, T. L. - A History of Greek Mathematics, vols 1 e 2, Oxford, Dover Publications.

[10] Descartes, R. - A Geometria. Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

[11] Boulos, P.; Camargo, I. - Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial. Pearson Universidades, 2004.

[12] Ciência Online. Hipérbola-hipérbole, elipse-elipsis, parábola-parábola. 2010. Disponível em: `http://www.cienciaonline.com/2010/01/29/`

hiperbola-hiperbole-elipse-elipsis-parabola-parabola. Acesso em: 25 set. 2024.

[13] Conhecimento Científico. O que é parábola. Disponível em: https://conhecimentocientifico.r7.com/o-que-e-parabola/#google_vignette. Acesso em: 15 nov. 2024.

[14] Santos, J.C.C – Parábola e suas aplicações no ensino médio. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Maceió - AL, 2016.

[15] OBMEP. Sala 2: Alguns tipos de funções. OBMEP - Clube de Matemática. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/sala-2-alguns-tipos-de-funcoes. Acesso em: 19 nov. 2024.

[16] Simulação por PhET Simulações Interactivas, Universidade do Colorado Boulder, licenciada sob CC-BY-4.0. https://phet.colorado.edu/pt_BR/, acessado em 18/06/2024.

A Atividades

O objetivo da sequência didática é explorar o traçado do gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, observando seus coeficientes, raízes e vértice.

A seguir, apresentamos um compilado das atividades apresentadas anteriormente, formatadas de modo que o professor possa imprimi-las e utilizá-las na sala de aula de forma rápida e prática. Assim, iniciaremos as atividades sempre em páginas separadas, para facilitar a impressão.

(em branco)

A.1 Atividade 1

Considere a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$. onde, como foi visto, $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$. Insira esses coeficientes no simulador PhET e responda as seguintes questões:

1. Qual a concavidade da parábola formada?
2. Qual ou quais coeficientes devem ser alterados para que a concavidade seja alterada?
3. Para qual ou quais alterações de coeficientes o gráfico dessa função se torna uma reta?
4. O que indica o coeficiente c no gráfico? Como identificar?
5. Quais as raízes ou zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$? Calcule manualmente.
6. Habilite a função “roots” no gráfico. Como você identifica as raízes no gráfico?
7. Como vimos no item anterior, a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ possui duas raízes reais distintas. Podemos concluir que para todas as funções quadráticas haverá duas raízes reais distintas? Explique.
8. Qual o vértice do gráfico da função? O que representa o vértice? Calcule manualmente e depois habilite a função “vertex” no gráfico.
9. A função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ possui ponto de MÁXIMO ou de MÍNIMO? Por quê?
10. Qual o eixo de simetria da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$? Existe alguma relação com o vértice?
11. O que é possível identificar no gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ com relação ao coeficiente b? Atente-se para o crescimento e decrescimento da função no momento em que intercepta o eixo y e analise também o x do vértice.
12. Se alterarmos APENAS o valor de b, o que podemos observar? Utilize $b = 0$ e $b > 0$.

A.2 Atividade 2

Após realizar a Atividade 1, você deverá escolher a sua função a fim de responder alguns questionamentos e tirar suas conclusões.

PARTE I: Analisando concavidade
Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$. Responda:

- Qual a concavidade da função escolhida?
- Se trocarmos o coeficiente a pelo seu oposto, a concavidade sofre alteração?
- Se definirmos o valor do coeficiente $a = 0$, qual a concavidade? Explique.
- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c anteriores.

PARTE II: Analisando o coeficiente b
Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com a e b diferentes de zero e responda:

- Sendo $b > 0$, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?
- Sendo $b < 0$, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?
- Se definirmos o valor do coeficiente $b = 0$, o que podemos observar? Explique.
- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.

PARTE III: Analisando o coeficiente c
Escolha um valor fixo para os coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$ e responda:

- Qual a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?
- Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que acontece com a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?
- Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a e b acima.

PARTE IV: Analisando o vértice da função

IV.A Escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com $a > 0$.

- Caso $b > 0$, o que notamos na abscissa do vértice?
- Caso $b < 0$, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a).
- Caso $b = 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

IV.B Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com $a < 0$.

- Caso $b > 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

- Caso $b < 0$, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a).

- Caso $b = 0$, o que notamos na abscissa do vértice?

IV.C Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e b, com $a \neq 0$.

Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que observamos no ponto do vértice no gráfico?

IV.D Agora, teste diferentes valores para os coeficientes a, b e c com $a \neq 0$.

Confirme as conclusões às quais você chegou nos itens anteriores.

(em branco)

A.3 Atividade 3

Essa atividade tem por objetivo explorar uma forma alternativa de representar uma função do segundo grau, que nem sempre é abordada nos livros didáticos. Após você experimentar e tirar conclusões para o estudo da função dada na forma $f(x) = ax^2+bx+c$, o objetivo dessa atividade é o estudo da forma

$$ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k, \tag{A.1}$$

onde (h, k) são as coordenadas do vértice do gráfico da função.

Questões

- Seja o ponto do vértice de uma função quadrática igual a $(3, -4)$. Considerando $a = 1$, qual é essa função na sua forma padrão? Calcule utilizando a forma do vértice;
- Fixando o ponto do vértice $(3, -4)$ e alterando **apenas** o valor do coeficiente a, o que podemos concluir?
- O que verificamos no gráfico se alterarmos **apenas** o valor do x_v?
- O que verificamos no gráfico se alterarmos **apenas** o valor do y_v?

(em branco)

A.4 Atividade 4

O objetivo dessa atividade é trazer o conhecimento de várias situações que envolvem o estudo de função quadrática.

Questão 1. Um objeto é lançado do solo verticalmente para cima. Ao fim de x segundos, atinge a altura dada por $f(x)$, onde $f(x) = -3x^2 + 6x$. Desprezando-se a força da resistência do ar, responda:

a) Em que instante a pedra atinge a altura máxima?

b) Qual é a altura máxima atingida pela pedra?

c) Como a função $w(t)$ pode ser escrita na forma canônica?

Questão 2. Sabendo que a função do 2º grau, representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode ser representada também pela forma canônica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, relacione as funções a seguir com suas respectivas representações gráficas na figura.

( ) $f(x) = -x^2$

( ) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$

( ) $f(x) = 2^2$

( ) $f(x) = x^2 + 1$

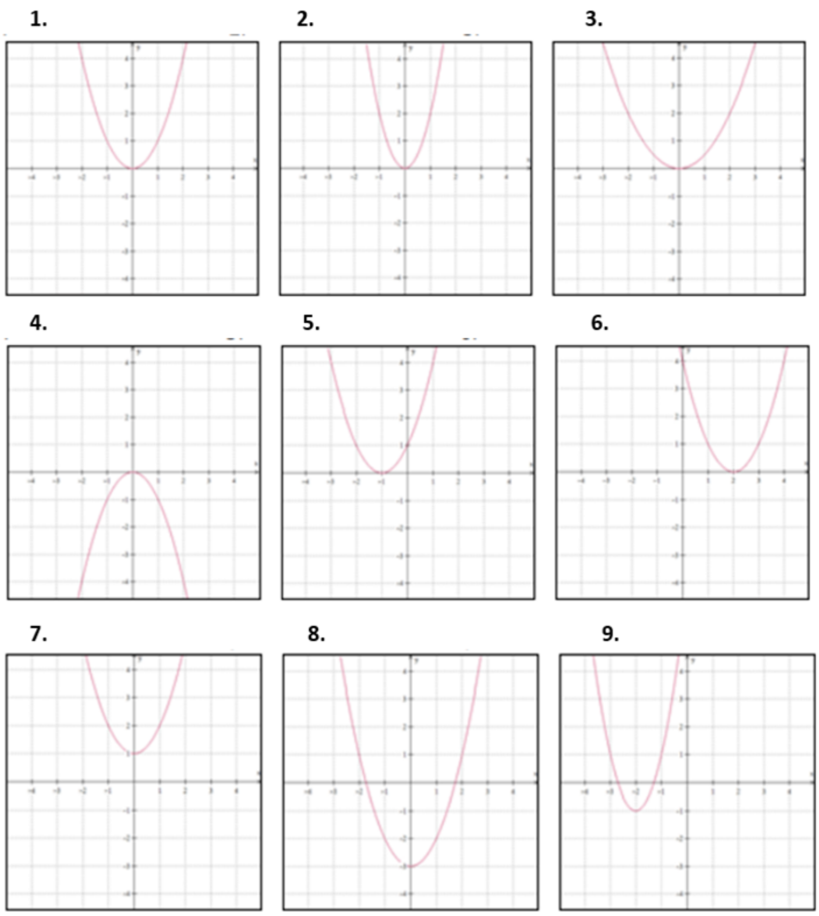
( ) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

( ) $f(x) = x^2 - 3$

( ) $f(x) = x^2$

( ) $f(x) = (x-2)^2$

( ) $f(x) = (x+1)^2$



Questão 3. Seja a função $f(x) = x^2 + bx + c$, com vértice $V = (2, -3)$. Qual o valor de $b + c$?

a) No simulador "Forma Padrão" digite os coeficientes da função que você identificou no exercício 3. Verifique se o vértice deste gráfico encontrado é o ponto $(2, -3)$ que constava no enunciado. Caso não, refaça o exercício 3 novamente. Se sim, vamos para o item (b).

b) No simulador “Forma Vértice” insira o valor do coeficiente a e os valores do vértice $V(h,k) = V(2,-3)$. Verifique se o gráfico formado é o mesmo do item (a).

Questão 4. Uma região retangular teve as suas dimensões descritas em metros, conforme a imagem abaixo. O valor de x que faz com que a área dessa região seja igual a 6 é:

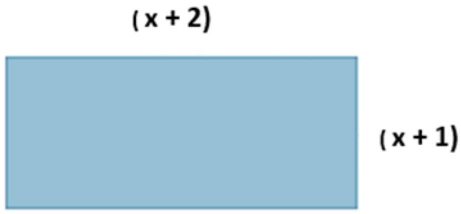
(A) -4

(B) 2

(C) 1

(D) 4

(E) 6



Exercitando o Simulador: Considere uma região retangular de $x+2$ de comprimento por $x+1$ de largura.

a) Qual o valor de x faz com que a área dessa região seja igual a 6?

(Sugestão: Calcule a área (largura $\times$ comprimento) e iguale a 6. Encontre a função desejada e utilize o simulador “Forma Padrão” para identificar a raiz da equação e consequentemente o valor de x que atende a situação desejada).

b) Se aumentarmos o valor da área, o que notamos? Existe algum limite de valor para que exista solução?

c) Se diminuirmos o valor da área, o que notamos? Existe algum limite de valor para que exista solução?

Questão 5. O gráfico da função quadrática representada por $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ é uma parábola. Se $V(a;b)$ é o vértice dessa parábola, o valor de $a+b$ é igual a:

(A) 1

(B) 3

(C) -1

(D) -3

Exercitando o Simulador: Insira o gráfico da função $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ no “Forma Vértice” e verifique se o valor do vértice no gráfico condiz com o resultado do exercício 5. Resolva a função $f(x)$, deixando-a na forma padrão $f(x) = ax^2 + bx + c$. Insira esta função no “Standard Form”. O que pode concluir?

Questão 6 (CESPE 2022)**.** Considere que uma função do segundo grau possui vértice no ponto $(2,5)$ e que passa pelo ponto $(3,6)$. Nesse caso, o valor da função no ponto de abscissa 5 é:

(A) 8

(B) 11

(C) 14

(D) 5

(E) 2

Exercitando o Simulador: No “Forma Vértice”, insira o vértice $(2,5)$ explícito no gráfico. Note que o gráfico dado no exercício contempla os pontos $(3,6)$. Assim, altere o valor do coeficiente a no simulador, formando um gráfico que contemple esse tempo.

Questão 7 (Consulplan 2021)**.** A função real de variável real que representa o esboço deste gráfico é expressa por:

(A) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

(B) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

(C) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

(D) $f(x) = x^2 + 6x - 10$

Exercitando o Simulador: No “Forma Vértice”, insira o vértice $(3,1)$ explícito no gráfico. Note que o gráfico dado no exercício contempla os pontos $(2,2)$ e $(4,2)$. Assim, altere o valor do coeficiente a no simulador, formando um gráfico que contemple esses dois pontos. O que se pode concluir?

Questão 8 (Elaborada pelo autor)**.** Uma fábrica produz um produto químico e o custo total de produção $C(x)$ depende da quantidade produzida (x), em mil litros, de acordo com a fórmula:

$$C(x) = 0,5x^2 - 1,5x + 5.$$

(A) Determine a quantidade x que minimiza o custo total.

(B) Qual é o custo mínimo?

Exercitando o Simulador: O aluno deve utilizar o simulador no modo “explorar”, pois permite a inserção de valores racionais (decimais). Primeiramente, deverá ser realizada a inserção dos valores dos coeficientes no simulador e partir disso chegar às conclusões necessárias, baseadas no gráfico gerado.

Questão 26. *Um experimento inteiramente casualizado com 4 repetições para estudar os feitos de 7 doses de gesso (0, 50, 100, 150, 200, 250 e 300 kh/ha) sobre diversas características do feijoeiro. Para a característica “peso de 100 sementes” os resultados obtidos, em gramas, são apresentados na Tabela A.1.*

(em branco)

Tratamentos (kg/ha)	Repetições				Totais
	1	**2**	**3**	**4**	
T1) 0	134,8	139,7	147,6	132,3	554,4
T2) 50	161,7	157,7	150,3	144,7	614,4
T3) 100	160,7	172,7	163,4	161,3	658,1
T4) 150	169,8	168,2	160,7	161,0	659,7
T5) 200	165,7	160,0	158,2	151,0	634,9
T6) 250	171,8	157,3	150,4	160,4	639,9
T7) 300	154,5	160,4	148,8	154,0	617,7
Total					4379,1

Tabela A.1: Dados de experimentos para estimar o peso de 1000 sementes de acordo com a dose de tratamento com gesso.

Um estudo matemático verificou que a melhor função que se ajustou aos dados para o cálculo do peso de 1000 sementes em função da dose x*, é dada por*

$$C(x) = -0,000782525x^2 + 0,2736x + 140,7835.$$

Calcule a dose que maximiza o peso de 1000 sementes(g). Sugestão: multiplique a função $C(x)$ *por 1000 para para estimar a dose, ou seja, utilize* $C(x) = -0,78x^2 + 273,6x + 140783$. *Verifique a possibilidade de traçar o gráfico de* $C(x)$ *utilizando o simulador PhET.*

B Algumas aplicações em sala de aula

As atividades propostas 1 e 2 foram aplicadas em uma escola particular de Ensino Médio. No geral, o retorno foi positivo. Conforme descrito nas considerações finais, os alunos engajaram-se nas atividades, apresentando interesse em desenvolvê-las. Eles conseguiram ter contato com gráfico de função quadrática através de atividades dinâmicas, envolvendo tecnologia, o que por sua vez, despertou mais atenção dos mesmos, auxiliando diretamente no processo de ensino aprendizagem. Apresentamos a seguir alguns exemplos de atividades resolvidas por alunos da turma.

ATIVIDADE 1
Conhecendo o simulador "STANDARD FORM"

1) Seja a função : **f(x)= x² - 6x + 5**
Conforme já estudamos, a=1, b= -6 e c= 5.
Insira esses coeficientes no simulador e responda as questões:
a1) Qual a concavidade da parábola formada?

Para cima.

a2) Qual ou quais coeficientes devo alterar para que a concavidade mude o sentido?

O coeficiente A.

b) Para qual ou quais alterações de coeficientes o gráfico da função f(x)= x² - 6x + 5 se torna uma reta?

Alterando o coeficiente A para 0 já o torna uma reta.

c) O que indica o coeficiente C no gráfico? Como identificar?

A "altura" no eixo y. Identificamos alterando o número

d1) Quais as raízes ou zeros da função f(x)= x² - 6x + 5 ? Calcule manualmente.

$\Delta = (+6)^2 - 4.1.5$
$\Delta = 36 - 20$
$\Delta = 16$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2.1}$

$x = \frac{6 \pm 4}{2}$

$x1 = \frac{6+4}{2} = 5$

$x2 = \frac{6-4}{2} = 1$

d2) Habilite a função "roots" no gráfico. Como posso identificar as raízes no gráfico?

Onde o gráfico bate no eixo x.

e) Como vimos no item anterior, a função f(x) = x² - 6x + 5 possui duas raízes reais distintas. Podemos concluir que para todas as funções quadráticas haverá duas raízes reais distintas? Explique.
Sugestão: Fazer o estudo do Δ.
Teste as seguintes funções quadráticas:
f(x) = x² + 2.x + 1
f(x) = x² + 2x + 5

Não, pois se Δ>0 irão existir 2 raízes reais e distintas. Já se Δ=0 irão existir 2 raízes reais e iguais. Mas não irão existir raízes reais se Δ<0.

f1) Qual o vértice da função? O que representa o vértice. **Sugestão: Calcule manualmente e depois habilite a função "vertex" no gráfico.**

O vértice desta função é (3,-4), o vértice representa o ponto mínimo da função

f2) A função f(x)= x² - 6x + 5 possui ponto MÁXIMO ou MÍNIMO? Por quê?

Sim, ela possui ponto mínimo pois está curvada para cima, assim possuindo apenas ponto mínimo e não ponto máximo

g) Qual o eixo de simetria da função f(x)= x² - 6x + 5 ? Existe alguma relação com o vértice? **Sugestão: Habilite a função "Axis of Symmetry" no gráfico.**

A reta coincide com o ponto x da reta. O eixo é 3.

h1) O que é possível identificar no gráfico da função f(x)= x² - 6x + 5 com relação ao coeficiente b?

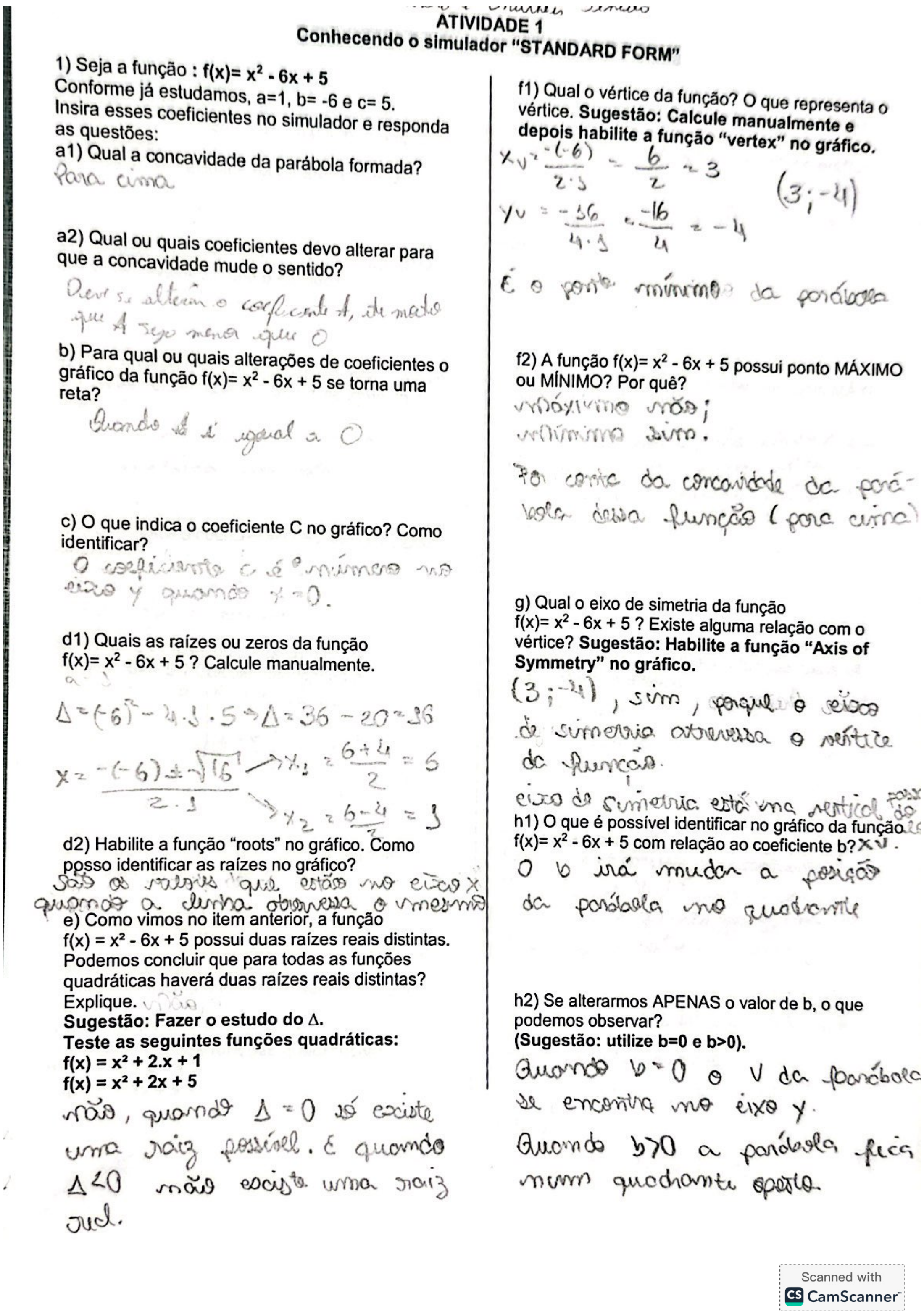
O coeficiente B determina a posição tanto no eixo x quanto no y, mas não altera sua curvatura.

h2) Se alterarmos APENAS o valor de b, o que podemos observar?
(Sugestão: utilize b=0 e b>0).

B=0: O gráfico apresenta seu vértice em (0,5)

B>0: O gráfico, a partir do momento em que B>0, começa a se localizar em pontos com x NEGATIVO.

Figura B.1: ATIVIDADE 1



ATIVIDADE 1

Conhecendo o simulador "STANDARD FORM"

1) Seja a função : **f(x)= x² - 6x + 5**
Conforme já estudamos, a=1, b= -6 e c= 5.
Insira esses coeficientes no simulador e responda as questões:

a1) Qual a concavidade da parábola formada?

Para cima

a2) Qual ou quais coeficientes devo alterar para que a concavidade mude o sentido?

Deve-se alterar o coeficiente A, de modo que A seja menor que 0

b) Para qual ou quais alterações de coeficientes o gráfico da função f(x)= x² - 6x + 5 se torna uma reta?

Quando A é igual a 0

c) O que indica o coeficiente C no gráfico? Como identificar?

O coeficiente c é o número no eixo y quando x = 0.

d1) Quais as raízes ou zeros da função f(x)= x² - 6x + 5 ? Calcule manualmente.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \rightarrow x_1 = \frac{6+4}{2} = 5$, $x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$

d2) Habilite a função "roots" no gráfico. Como posso identificar as raízes no gráfico?

São os valores que estão no eixo x quando a linha atravessa o mesmo

e) Como vimos no item anterior, a função f(x) = x² - 6x + 5 possui duas raízes reais distintas. Podemos concluir que para todas as funções quadráticas haverá duas raízes reais distintas? Explique. Não
Sugestão: Fazer o estudo do Δ.
Teste as seguintes funções quadráticas:
f(x) = x² + 2.x + 1
f(x) = x² + 2x + 5

não, quando Δ = 0 só existe uma raiz possível. E quando Δ<0 não existe uma raiz real.

f1) Qual o vértice da função? O que representa o vértice. **Sugestão: Calcule manualmente e depois habilite a função "vertex" no gráfico.**

$x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

$y_v = \frac{-16}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$

(3; -4)

É o ponto mínimo da parábola

f2) A função f(x)= x² - 6x + 5 possui ponto MÁXIMO ou MÍNIMO? Por quê?

máximo não;
mínimo sim.

Por conta da concavidade da parábola dessa função (para cima)

g) Qual o eixo de simetria da função f(x)= x² - 6x + 5 ? Existe alguma relação com o vértice? **Sugestão: Habilite a função "Axis of Symmetry" no gráfico.**

(3; -4), sim, porque o eixo de simetria atravessa o vértice da função.

eixo de simetria está na vertical passa do xv

h1) O que é possível identificar no gráfico da função f(x)= x² - 6x + 5 com relação ao coeficiente b? xv.

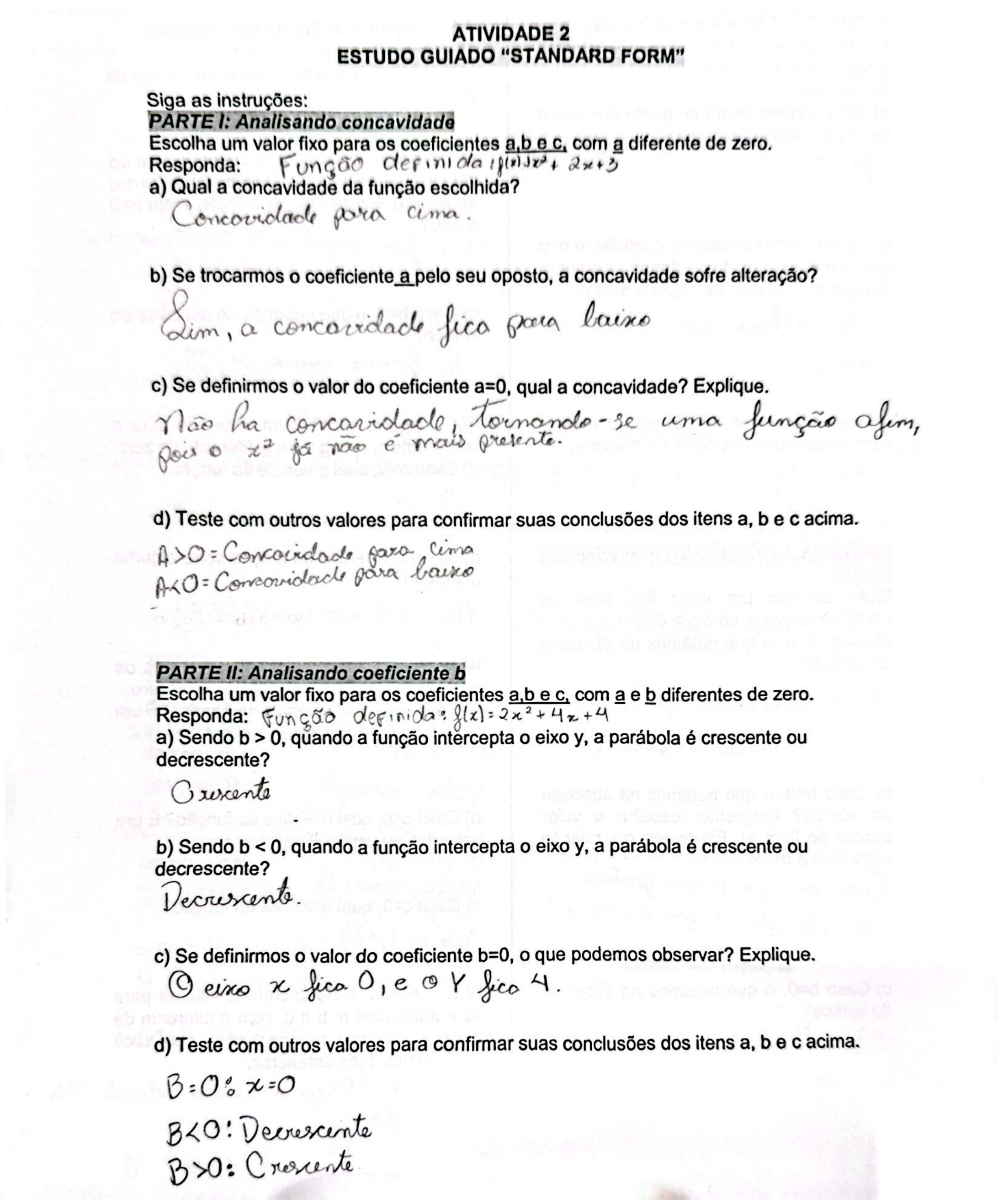
O b irá mudar a posição da parábola no quadrante

h2) Se alterarmos APENAS o valor de b, o que podemos observar?
(Sugestão: utilize b=0 e b>0).

Quando b = 0 o V da parábola se encontra no eixo y.
Quando b>0 a parábola fica num quadrante oposto.

Scanned with CamScanner

Figura B.2: ATIVIDADE 1



ATIVIDADE 2
ESTUDO GUIADO "STANDARD FORM"

Siga as instruções:
PARTE I: Analisando concavidade
Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a diferente de zero.
Responda: Função definida: $f(x)=3x^2+2x+3$
a) Qual a concavidade da função escolhida?
Concavidade para cima.

b) Se trocarmos o coeficiente a pelo seu oposto, a concavidade sofre alteração?
Sim, a concavidade fica para baixo

c) Se definirmos o valor do coeficiente a=0, qual a concavidade? Explique.
Não há concavidade, tornando-se uma função afim, pois o x^2 já não é mais presente.

d) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.
A>0 = Concavidade para cima
A<0 = Concavidade para baixo

PARTE II: Analisando coeficiente b
Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a e b diferentes de zero.
Responda: Função definida: $f(x)=2x^2+4x+4$
a) Sendo b > 0, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?
Crescente

b) Sendo b < 0, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?
Decrescente.

c) Se definirmos o valor do coeficiente b=0, o que podemos observar? Explique.
O eixo x fica 0, e o Y fica 4.

d) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.
B=0: x=0
B<0: Decrescente
B>0: Crescente

Figura B.3: ATIVIDADE 2 - PARTE I

ATIVIDADE 2
ESTUDO GUIADO "STANDARD FORM"

Siga as instruções:

PARTE I: Analisando concavidade

Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a diferente de zero.

Responda: $-x^2 - 6x = 5.$

a) Qual a concavidade da função escolhida?

Para baixo.

b) Se trocarmos o coeficiente a pelo seu oposto, a concavidade sofre alteração?

Sim.

c) Se definirmos o valor do coeficiente a=0, qual a concavidade? Explique.

É uma reta, pois com a=0 não teremos x^2, fazendo com que a função seja do 1º grau.

d) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.

PARTE II: Analisando coeficiente b

Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a e b diferentes de zero.

Responda: $-x^2 - 1x \ldots$

a) Sendo b > 0, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?

Crescente.

b) Sendo b < 0, quando a função intercepta o eixo y, a parábola é crescente ou decrescente?

Decrescente

c) Se definirmos o valor do coeficiente b=0, o que podemos observar? Explique.

O V da função estará no eixo y

d) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a, b e c acima.

Figura B.4: ATIVIDADE 2 - PARTE I

PARTE III: Analisando coeficiente c

Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a diferente de zero.

Responda: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) Qual a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

(0,3)

b) Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que acontece com a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

Ela altera sua "altura" no eixo y.

c) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a e b acima.

$c<2 = y<0$
$c=2 = y=0$
$c>2 = y>0$

PARTE IV: Analisando o vértice da função

IV.A- Escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com a > 0. $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

a) Caso b>0, o que notamos na abscissa do vértice?

Fica com ela negativo

b) Caso b<0, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a). Existe alguma relação entre b>0 e b<0?

Caso b<0, x ficará positivo
Sim, B afeta a posição do x!

c) Caso b=0, o que notamos na abscissa do vértice?

Ela ficará como x=0

IV.B - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com a < 0. $f(x) = -3x^2 + 2x + 2$

a) Caso b>0, o que notamos na abscissa do vértice?

Ela ficará positiva

b) Caso b<0, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a). Existe alguma relação entre b>0 e b<0?

O x fica negativo ① B altera o x

c) Caso b=0, o que notamos na abscissa do vértice?

Ela ficará como x=0

IV.C - Agora, escolha um valor fixo para o coeficiente c, com b = 0 e a diferente de zero.

a) Caso a>0, qual o vértice da função? → $f(x) = -3x^2 + 0x + 2$

(0, 2)

b) se a<0, o vértice da função sofre alguma alteração?

Não, continuo como (0,2)

IV.D - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e b, com a diferente de zero.

a) Caso c>0, qual o vértice da função? É um valor fixo ou variável? $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

V= (-1,-2)

Valor variável

b) Caso c<0, qual o vértice da função? É um valor fixo ou variável?

V= (-1,-4)

Valor variável

c) Caso c=0, qual o vértice da função?

V= (-1,-3)

IV.E – Agora, teste diferentes valores para os coeficientes a, b e c, com a diferente de zero, e confirme as conclusões que você chegou nos itens anteriores.

① a irá alterar a concavidade da parabola

① B ira alterar o x e o y.

① C irá alterar o y.

Figura B.5: ATIVIDADE 2 - PARTE II

PARTE III: Analisando coeficiente c

Escolha um valor fixo para os coeficientes a,b e c, com a diferente de zero.

Responda: a=1 b=2 c=-3

a) Qual a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

(0,-3)

b) Se alterarmos o valor do coeficiente c, o que acontece com a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?

O ponto mantém x=0, porem o valor de y muda de acordo com o valor de c ("c = y").

c) Teste com outros valores para confirmar suas conclusões dos itens a e b acima.

PARTE IV: Analisando o vértice da função

IV.A- Escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com a > 0. a=1 c=3

a) Caso b>0, o que notamos na abscissa do vértice?

xv < 0

b) Caso b<0, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a). Existe alguma relação entre b>0 e b<0?

xv>0.

Sim, mudará o quadrante em que se encontra o vértice.

c) Caso b=0, o que notamos na abscissa do vértice?

x=0

IV.B - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e c, com a < 0. a=-1 c=4

a) Caso b>0, o que notamos na abscissa do vértice?

xv>0

b) Caso b<0, o que notamos na abscissa do vértice? (sugestão: escolha o valor oposto do item a). Existe alguma relação entre b>0 e b<0?

xv<0 O xv e o b terão valores com sinal igual.

c) Caso b=0, o que notamos na abscissa do vértice?

x=0

IV.C - Agora, escolha um valor fixo para o coeficiente c, com b = 0 e a diferente de zero. a=2 c=-2

a) Caso a>0, qual o vértice da função?

(0,-2)

b) se a<0, o vértice da função sofre alguma alteração? a=-2

não sofre alteração.

IV.D - Agora, escolha um valor fixo para os coeficientes a e b, com a diferente de zero. a=1 b=2 c=3

a) Caso c>0, qual o vértice da função? É um valor fixo ou variável?

(-1,2)

variável.

b) Caso c<0, qual o vértice da função? É um valor fixo ou variável? c=-3

(-1,-4)

variável.

c) Caso c=0, qual o vértice da função?

(-1,-1)

IV.E – Agora, teste diferentes valores para os coeficientes a, b e c, com a diferente de zero, e confirme as conclusões que você chegou nos itens anteriores.

Figura B.6: ATIVIDADE 2 - PARTE II