Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Programa de Mestrado profissinal em Matemática
Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

Otimização Conceituada com o Auxílio de Games e Aplicada a Problemas de Máximos e Mínimos de Funções: Uma Proposta de Sequência Didática

Fabiola Correia Campos

Feira de Santana - Bahia
Dezembro de 2024

Otimização conceituada com o auxílio de games e aplicada a problemas de máximos e mínimos de funções: Uma proposta de sequência didática

Fabiola Correia Campos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edward Landi Tonucci.

Feira de Santana - Bahia
Dezembro de 2024

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Campos, Fabiola Correia
C212o Otimização conceituada com o auxílio de games e aplicada a problemas de máximos e mínimos de funções: uma proposta de sequência didática/ Fabiola Correia Campos. - 2024.
70f. : il.

Orientador: Edward Landi Tanucci
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.

1. Otimização matemática. 2. Funções. 3. Máximo e mínimo. 4. Games. 5. Jogos didáticos. I. Tonucci, Edward Landi, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede. III. Título.

CDU: 517.5

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Fabiola Correia Campos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos seis dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 9 horas e 30 minutos, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com/ffz-ahev-ptc, da dissertação apresentada sob o título **"OTIMIZAÇÃO CONCEITUADA COM O AUXÍLIO DE GAMES E APLICADA A PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA",** da discente **Fabiola Correia Campos,** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Edward Landi Tonucci (Orientador, UEFS), Jacqueline Costa Cintra (UEFS) e Diego Daltro Conceição (UFRB) . A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito ______aprovada______. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 06 de dezembro de 2024.

Edward Landi Tonucci
Prof. Dr. Edward Landi Tonucci (Orientador, UEFS)

Jacqueline Costa Cintra
Profª Drª Jacqueline Costa Cintra (UEFS)

Diego Daltro Conceição
Prof. Dr.. Diego Daltro Conceição (UFRB)

Visto do Coordenador: Jean Fz. R

Universiddade Estadual de Feira de Santana - UEFS
Departamento de Ciências Exatas - DCE
Programa de Mestrado profissionalizante em Matemática - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Otimização conceituada com o auxílio de games e aplicada a problemas de máximos e mínimos de funções: Uma proposta de sequência didática

Fabiola Correia Campos

Feira de Santana - Bahia
Dezembro de 2024

Aos meus filhos Letícia e Gustavo, meu esposo Eduardo, minha mãe Elizabeth e aos colegas companheiros dessa jornada.

Agradecimentos

Primeiro, agradeço a Deus por ter me amparado até aqui e imensamente à minha família por todo o apoio e compreensão durante minha ausência. Em especial, agradeço muito ao meu esposo, Eduardo, pelo incentivo em não me deixar fraquejar diante das dificuldades, e aos meus filhos, Letícia e Gustavo, por todo amor, carinho e incentivo, pois foi o impulso que me ajudou a concluir essa etapa. Agradeço também aos meus amigos e colegas dessa jornada; a presença de cada um tornou os dias de aula e estudo mais leves e os almoços das Sextas mais divertidos. Por fim aos professores do curso: Professor Dr. Jean Fernandes Barros, Professor Dr. Darlan Ferreira de Oliveira, Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, Professora Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira, professora Dra. Jany Santos Souza Goulart por todo comprometimento e conhecimentos transmitidos e em especial ao meu orientador, Professor Dr. Edward Landi Tonucci, pelos conhecimentos, empenho e pela paciência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

.

"O que dá o verdadeiro sentido ao encontro é a busca, e é preciso andar muito para se alcançar o que está perto."

–José Saramago

Resumo

Este trabalho tem como objetivo integrar o conceito de otimização ao ensino de funções polinomiais, utilizando jogos como uma ferramenta pedagógica para tornar a aprendizagem mais atrativa e significativa. A proposta apresenta uma sequência didática que se baseia no uso do jogo "Bridge Constructor", que simula a construção de pontes, para introduzir o conceito de otimização de maneira prática e intuitiva. Através do jogo, os alunos têm a oportunidade de explorar a maximização e minimização de recursos, conceitos fundamentais na otimização de funções, aplicados tanto às situações do dia a dia quanto a desafios matemáticos. Além disso, a dissertação ressalta a importância de incluir a otimização atrelada à resolução de problemas de máximos e mínimos de funções no currículo de matemática do ensino médio, destacando como esse conteúdo pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico, a tomada de decisões informadas e o maior engajamento dos estudantes. A proposta da sequência didática é detalhada com algumas atividades que buscam fixar e aprofundar o aprendizado dos alunos, conectando a teoria à prática de maneira lúdica e interativa.
Palavras-chave: Otimização; Funções; Máximo e Minimo; Games

Abstract

This work aims to integrate the concept of optimization into the teaching of polynomial functions, using games as a pedagogical tool to make learning more attractive and meaningful. The proposal presents a didactic sequence based on the use of the game “Bridge Constructor”, which simulates bridge construction, to introduce the concept of optimization in a practical and intuitive way. Through the game, students have the opportunity to explore the maximization and minimization of resources, fundamental concepts in the optimization of functions, applied to both everyday situations and mathematical challenges. Moreover, the dissertation emphasizes the importance of including optimization tied to solving maximum and minimum function problems in the high school mathematics curriculum, highlighting how this content can contribute to the development of critical thinking, informed decision-making, and greater student engagement. The proposed didactic sequence is detailed with some activities that aim to consolidate student learning by connecting theory to practice in a playful and interactive manner.
Keywords: Optimization; Functions; Maximum and Minimum; Games

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio BRASIL (2020) e as orientações curriculares implementadas a partir de 2018 para o ensino médio, descritas no documento Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o aluno deve seguir um caminho pedagógico que permita alcançar competências e habilidades nos componentes curriculares, de forma a garantir uma aprendizagem satisfatória nessa etapa escolar. Uma das competências estabelecidas pela BNCC BRASIL (2018) para a área de Matemática e suas Tecnologias é utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Isso inclui analisar a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, com o objetivo de construir argumentação consistente. Ainda segundo a BNCC BRASIL (2018), dentro dessa competência, uma das habilidades esperadas é resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações e funções, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Partindo dessas recomendações, o ensino da Matemática tem, mais do que nunca, adotado a resolução de problemas contextualizados e modelados com situações de fácil aplicabilidade, como forma de aproximar a Matemática da sala de aula com sua utilidade no mundo prático e, assim, aguçar a curiosidade e a atenção dos alunos para o objeto de estudo. Segundo POLYA (1978),"... se o professor desafia a curiosidade do aluno apresentando problemas compatíveis com o seu conhecimento, poderá incutir-lhe o gosto pelo raciocínio independente".

Um dos conteúdos de Matemática a ser trabalhado no 1º ano do ensino médio são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, onde a análise de todos os seus elementos é feita de forma sistêmica, incluindo o estudo de gráficos e seus pontos importantes. Dentro desse conteúdo, uma parte de grande importância, principalmente em relação às funções quadráticas, é a resolução de problemas de máximos e mínimos. A partir dessas definições, podemos introduzir o conceito de otimização, que ainda é pouco explorado no ensino médio, podendo estender-se às funções do 3º grau como um aprofundamento, embora esse conteúdo não esteja previsto no currículo da educação básica.

Otimização refere-se ao processo de tornar algo o mais eficiente, eficaz ou satisfatório possível, geralmente através da maximização de recursos ou minimização de custos. Esse processo pode ser aplicado em diversos campos, como otimização de processos industriais, algoritmos e recursos energéticos. A abordagem desse tema ocorre nos cursos de Cálculo, aplicados ao conteúdo de Derivadas. Como descrito em STEWART (2006), a otimização de funções é definida como a área da matemática que se dedica a encontrar o máximo e o mínimo de uma função de forma ótima. Em outras palavras, busca-se o valor de entrada (variável independente) que resulta no maior ou menor valor possível da função (variável dependente).

Apesar de o conteúdo de otimização em matemática ser mais utilizado em cálculos avançados e específicos de algumas áreas do conhecimento, pode-se introduzi-lo na educação básica ao aplicar ao estudo da função quadrática. Isso proporciona uma visão mais aprofundada de problemas de máximos e mínimos, possibilitando modelar problemas com aplicação prática em diversas áreas profissionais. A título de aprofundamento, pode-se introduzir, ainda que de forma rudimentar, as regras de derivação de funções polinômiais e aplicá-las nas funções de 2º e 3º grau, estendendo os problemas de otimização matemática. A primeira derivada de uma função do 3º grau se torna uma função quadrática e pode ser trabalhada nas séries finais do ensino médio.

Em relação às funções polinomiais, a otimização geralmente envolve encontrar os valores de entrada que maximizam ou minimizam a função. Isso pode ser feito utilizando técnicas como encontrar os pontos críticos da função (onde a derivada é zero), verificar os intervalos de aumento e diminuição da função e determinar os valores extremos. Dependendo do contexto e das restrições, podem ser utilizados métodos como o da primeira e segunda derivada, além de técnicas específicas para polinômios. No ensino médio, a derivada não faz parte do currículo da educação básica, portanto, a abordagem dos máximos e mínimos para funções do 2º grau é trabalhada analisando as coordenadas do vértice (x_v, y_v) e, ao demonstrar como a fórmula do x_v é encontrada, o conceito de derivada pode ser abordado de forma primitiva, mencionando apenas a regra para derivar uma função polinomial de grau 2. Em seguida, esse conceito pode ser aplicado no cálculo de otimização de funções de 3º grau, a título de aprofundamento. A otimização de problemas é uma área fundamental da matemática aplicada que busca encontrar os valores extremos de uma função em um determinado intervalo. Esses problemas são frequentemente modelados por funções matemáticas, e a determinação dos extremos dessas funções desempenha um papel crucial em diversas áreas, como engenharia, economia, física e biologia.

A otimização de funções de 2º grau pode ser ilustrada com problemas comuns, como a determinação do ponto de máximo ou mínimo de uma função de custo em relação a um determinado parâmetro. Por exemplo, se uma empresa deseja determinar a quantidade ideal de um produto a ser produzida para maximizar seu lucro e essa situação puder ser modelada por uma função quadrática, o vértice da parábola representará o ponto de produção ideal para otimizar o lucro da empresa.

Além das funções de 2º grau, as funções de 3º grau, ou funções cúbicas, também aparecem na modelagem de problemas de otimização. Essas funções são expressas na forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d são constantes e $a \neq 0$. As funções cúbicas possuem curvas mais complexas do que as funções quadráticas e podem ter até dois pontos de mínimo ou máximo.

A otimização de funções de 3º grau é essencial para resolver problemas mais intricados, onde a relação entre as variáveis é mais complexa. Por exemplo, na modelagem de fenômenos físicos ou biológicos, é comum encontrar funções de 3º grau que representam o comportamento de sistemas dinâmicos. A identificação dos extremos dessas funções é crucial para compreender e controlar tais sistemas de forma eficaz.

Portanto, a otimização de problemas com ênfase em funções de 2º e 3º graus desempenha um papel fundamental na resolução de uma ampla gama de situações-problema em diversas áreas do conhecimento. A capacidade de identificar e maximizar ou minimizar os pontos críticos dessas funções é essencial para encontrar as soluções mais eficazes para situações complexas. Compreender os princípios por trás da otimização de funções de 2º e 3º graus permite abordar problemas do mundo real com maior precisão e eficiência, contribuindo para avanços significativos.

O estudo das funções em matemática proporciona uma ampla gama de conhecimentos e habilidades para a resolução de problemas, abrangendo conceitos de matemática discreta que antes não eram amplamente explorados, como relações lineares e a interpretação de gráficos. Abordar problemas de otimização matemática no ensino médio traz diversos benefícios educacionais e contribui para o desenvolvimento de habilidades cruciais nos estudantes. Dentre elas, destacam-se algumas de grande relevância:

- Desenvolvimento do Pensamento Crítico: Problemas de otimização exigem que os alunos analisem situações, identifiquem variáveis relevantes e desenvolvam estratégias para encontrar soluções ótimas. Isso estimula o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas complexos.

- Aplicações Práticas: Os problemas de otimização têm muitas aplicações práticas em diversas áreas, como economia, engenharia, logística e ciências sociais. Isso ajuda os alunos a perceberem a relevância da matemática no mundo real e a entenderem como podem aplicar o conhecimento matemático em diferentes contextos.

- Habilidades Analíticas: O estudo de otimização envolve o uso de ferramentas matemáticas avançadas, como álgebra, cálculo e geometria. Isso melhora as habilidades analíticas dos alunos e os prepara melhor para estudos futuros em disciplinas como: ciência, tecnologia, engenharia e matemática.

- Tomada de Decisão: A otimização está frequentemente relacionada à tomada de decisões eficientes. Aprender sobre otimização ajuda os alunos a desenvolver habilidades de tomada de decisão informada, pesando diferentes opções e considerando restrições.

- Interdisciplinaridade: Os problemas de otimização podem ser usados para conectar a matemática a outras disciplinas, como física e biologia, promovendo uma abordagem interdisciplinar ao ensino e aprendizagem.

- Engajamento e Motivação: Problemas desafiadores e baseados em situações reais podem ser mais interessantes e motivadores para os alunos. Trabalhar com esses problemas pode aumentar o engajamento dos alunos e seu interesse pela matemática.

Capítulo 1

Gamificação na introdução ao conceito de otimização

1.1 Jogos e o conceito de otimização

A educação atual está permeada por uma ampla discussão sobre novas metodologias de ensino e aprendizagem. De acordo com (MORÁN et al. (2015)), uma das mais discutidas e que vem ganhando espaço é a das metodologias ativas, que consistem em dar maior protagonismo ao estudante na construção do conhecimento, diferente dos métodos tradicionais, nos quais o professor é a peça central desse processo. Apesar de a BNCC não citar explicitamente as metodologias ativas, ela preconiza várias práticas pedagógicas que estão de acordo com os objetivos destas. Entre elas, podemos citar:

- Protagonismo do estudante;
- Desenvolvimento de habilidades e competências;
- Contextualização;
- Interdisciplinaridade e transversalidade;
- Uso de tecnologias de informação e comunicação.

Assim, quando a tecnologia é inserida no fazer pedagógico, seja na forma de comunicação e informação ou de games, de acordo com (MORÁN et al. (2015)), “a tecnologia traz a integração de todos os espaços e tempos, o ensinar e aprender acontece de forma simbiótica, profunda e constante.” A sala de aula se estende além das suas paredes físicas e alcança o mundo digital. A proposta do uso das tecnologias na educação é mesclar a aula tradicional e expositiva com um mundo ainda pouco explorado, o digital, que pode trazer ganhos consideráveis na construção do conhecimento.

A gamificação é uma dessas vertentes tecnológicas que, no ensino, se tornou uma tendência de forte apelo no ambiente de aprendizagem, uma vez que traz o conteúdo para dentro de uma realidade que os estudantes muitas vezes dominam, e oferece uma nova perspectiva sobre o jogo. Segundo (SIGNORI; GUIMARÃES 2016), “a gamificação tem demonstrado seu potencial e se destacado cada vez mais em diversas áreas, sendo um fenômeno emergente com muitas potencialidades de aplicação em vários campos da atividade humana.”

Como explicado por (SURENDELEG et al. 2014), ao apreciar o fato de que as novas tecnologias têm uma poderosa influência sobre todos os aspectos da sociedade, como marketing, entretenimento, comércio e saúde, percebe-se que, neste contexto, a educação também sofre a influência dos avanços tecnológicos. Dessa forma, a gamificação se destaca pelo grande impacto na forma como se ensina e se aprende, sendo considerada uma tendência emergente na educação.

O fomento do uso de jogos na Matemática, além de resgatar o lúdico, também promove a aprendizagem colaborativa, seja individual ou em equipe. Incentiva os alunos a trabalharem juntos, compartilharem estratégias e socializarem o que entenderam uns com os outros, proporcionando uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Além disso, desenvolve habilidades sociais e de comunicação. Para (BORGES et al. 2014), quando a gamificação é utilizada com o objetivo de motivar o aprendizado do estudante, diversos aspectos estão implicitamente envolvidos nesse conceito de motivação, como:

- Domínio de competências: melhorar determinadas capacidades dos alunos;
- Desafiador: propor desafios que deem um sentido extra ao processo de aprendizagem;
- Envolvimento: envolver os alunos em atividades de aprendizagem mais interessantes e fáceis de acompanhar, maximizando a aquisição de conhecimento.

1.1.1 Otimização e o Jogo Bridge Constructor

A introdução do conceito de otimização de forma intuitiva, construído a partir do ponto de observação do estudante e baseada na dinâmica aplicada a um jogo online de fácil acessibilidade e com gráficos coloridos e intuitivos, tende a ser mais eficaz do que a abordagem tradicional, na qual os conceitos são trabalhados e aplicados de forma mecânica. Com a introdução do jogo, serão estimulados estratégias, competitividade e raciocínio lógico, entre outros aspectos.

O jogo escolhido para a construção do conceito de otimização, dentre muitos que poderiam servir para esse fim, é o (BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)). Este é um jogo online que pode ser instalado gratuitamente em smartphones ou tablets, disponível nas lojas de aplicativos para as plataformas Android e iOS. O ícone do jogo está representado na Figura 1.1.

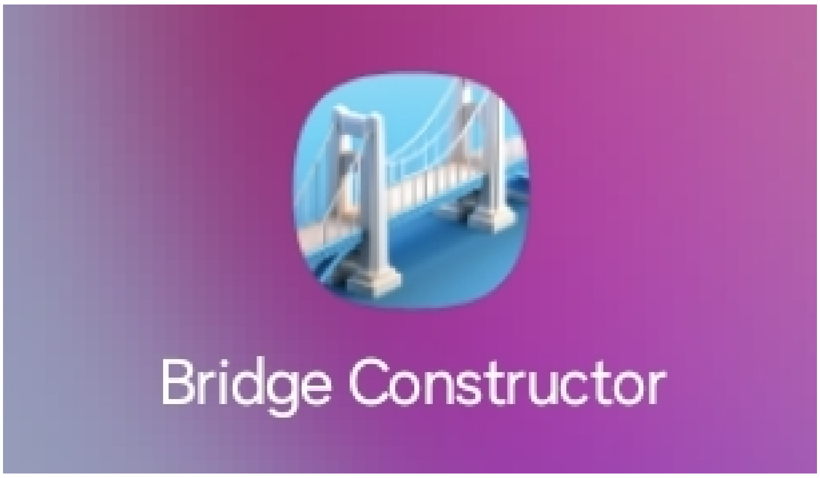
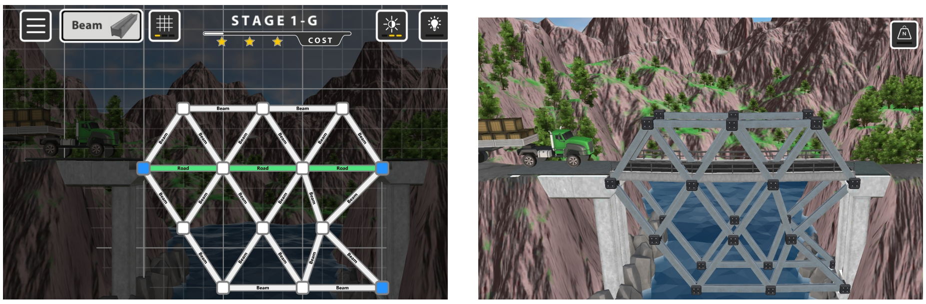


Figura 1.1: Bridge Constructor

A escolha de aplicar esse game no desenvolvimento do tema otimização baseou-se, sobretudo, na facilidade de compreensão das regras de funcionamento e das etapas de execução, que são dinâmicas e apresentam gráficos intuitivos. O jogo é composto por várias fases, nas quais a dificuldade e os desafios aumentam a cada conquista. As fases estão divididas em mapas, como mostra a Figura 1.2, e subdivididas em desafios que vão da letra A à H. A etapa estará completa quando o jogador concluir com sucesso todos os desafios, desbloqueando assim a próxima fase.

Figura 1.2: Mapa de fases do Bridge Constructor

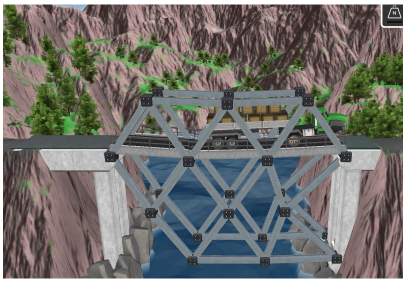
A dinâmica do (BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)) consiste na utilização dos recursos disponibilizados, que variam de acordo com cada fase do jogo. No jogo em questão, os recursos são representados pela quantidade de estrelas disponíveis na partida, e devem ser utilizados para a construção de pontes de forma eficiente e funcional. O desafio será otimizado se o jogador usar o mínimo de material possível, gerando como resultado uma ponte eficiente que, ao ser testada, deve permitir que o veículo a atravesse sem derrubá-la. Como mostra a Figura 1.3(a), o jogador projetará a ponte, colocando os materiais disponíveis de acordo com a estratégia traçada por ele. Será possível conferir o resultado do projeto, como mostra a Figura 1.3(b), antes do teste de eficiência da ponte.



(a) Projeto 1 (b) Resultado 1

Figura 1.3: Disposição dos materiais para Desafio 1

Após a verificação da construção, o jogador testará a eficiência da ponte ao colocar o veículo, indicado no desafio, para atravessar a ponte, como mostra a Figura 1.4(a). Se, ao final do trajeto, a ponte permanecer intacta, o desafio será concluído com sucesso e a pontuação será exibida. Se o desafio for cumprido com a otimização dos recursos, a pontuação será máxima, como mostrado em 1.4(b).

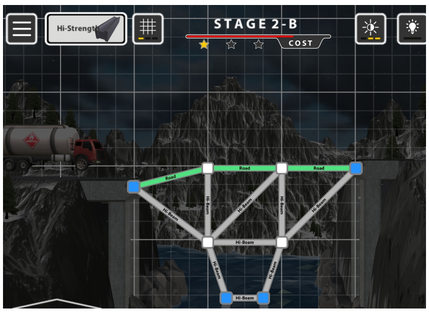


(a) Eficiência da ponte 1

(b) Resultado final

Figura 1.4: Resultado da contrução Desafio 1

Dependendo do desafio, a quantidade de recursos disponíveis para a construção da ponte é reduzida e o projeto deve contar com uma estratégia mais eficiente para contenção de gastos. Como mostra a Figura 1.5(a), o projeto dessa ponte foi feito com quase a totalidade dos materiais disponíveis, conforme indicado pelo andamento da barra de custo na parte superior da Figura 1.5(a). Assim, a quantidade de estrelas também diminui, indicando que os gastos foram excedidos. Na Figura 1.5(b), pode-se observar o resultado do projeto com uma ponte bem reforçada em estrutura, porém com custos não otimizados.



(a) projeto 2

(b) Resultado 2

Figura 1.5: Disposição dos materiais para Desafio 2

No teste de eficiência da ponte do desafio 2, observa-se na Figura 1.6(a) que o projeto resultou em uma ponte eficiente, pois o veículo indicado na fase a atravessa sem derrubá-la. No entanto, o resultado final não foi satisfatório, como se vê na Figura 1.6(b), pois a estratégia de execução não levou a otimização de recursos em consideração.

(a) eficiencia da ponte 2

(b) Resultado Final 2

Figura 1.6: Resultado da construção Desafio 2

A efetiva execução das etapas do jogo (BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)) deve observar alguns pontos para que haja uma otimização dos resultados desejados. Ao aplicar o jogo em sala de aula com o objetivo de construir o conceito de otimização, esses pontos e restrições devem ser elencados para que o jogador se atente a alcançar um melhor resultado. Os pontos a seguir são relevantes:

- Distribuição do peso
- Uso de materiais
- Custos
- Estrutura
- Pontos de fixação
- Análise de tensão
- Comprimento dos vãos
- Flexibilidade
- Criatividade e inovação

O objetivo é levar o jogador a perceber que levando em conta essas variáveis destacadas ele atingirá um resultado ótimo em cada fase do jogo.

1.1.2 Quiz Sobre Otimização Baseada no Jogo Bridge Constructor

A aplicação do jogo (BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)) para construção do conceito de otimização atuará como a parte prática. Após a execução das fases do Bridge Constructor, a fixação e discussão do que é otimização se darão por meio da aplicação de um questionário em formato de jogo digital. Esse questionário será desenvolvido na plataforma online (WORDWALL (2024)), que permite a criação de atividades interativas como jogos, quizzes, questionários e exercícios variados. Também é possível escolher o formato da atividade online, como caça-palavras, roleta, enigma de palavras, entre outros.

Nesta atividade, serão abordada e avaliada a compreensão dos conceitos aplicados na construção das pontes no Bridge Constructor, conectando a teoria com a prática a fim de consolidar o aprendizado e estimular uma reflexão crítica sobre o conceito que se pretende construir. O questionário digital será em formato de jogo ranqueado (WORDWALL (2024) registra o desempenho dos jogadores, permitindo a comparação dos melhores resultados). Como mostrado em (SOUZA et al. (2023)), essa prática aumenta o engajamento e a participação nas etapas do aprendizado, tornando-o mais prazeroso e atraente, além de incentivar a competitividade e, consequentemente, um maior empenho na construção do conceito proposto, fornecendo também um feedback sobre o que foi compreendido pelo aluno.

(a) Questinário Wordwall

(b) Qrcode de acesso ao questionário

Figura 1.7: Jogo Wordwall

As atividades descritas em (WORDWALL (2024)) podem ser compartilhadas com grupos ou individualmente através de links, QR codes ou incorporadas às plataformas como por exemplo "Google Sala de Aula (Classroom)". O questionário sobre otimização, baseado no jogo BRIDGE CONSTRUCTOR, está disponível no QR code da Figura 1.7(b)

Capítulo 2

Valores de Máximo e Mínimo de uma Função Aplicados à Otimização de Problemas.

2.1 O Cálculo no Conceito de Otimização

2.1.1 Introdução ao Conceito de Otimização com Análise de Situação-Problema

Para oferecer uma visão mais abrangente sobre o conceito de otimização matemática, especialmente relacionado às funções quadráticas, apresentaremos uma situação-problema onde será analisado, ponto a ponto, o comportamento do mercado. Nesse caso, a quantidade de produtos vendidos depende diretamente do preço ou da variação de preço do produto.

Exemplo Adaptado (ZATTONI; CARVALHO, 2022)

Considerando um site que negocia e vende eletrônicos, a empresa vende mensalmente 800 tablets a um preço de $R\$900$ cada. Através de um programa de computador e de pesquisa com consumidores, foi verificado que, se o preço do tablet reduzisse para $R\$870$, teriamos 850 pessoas dispostas a comprar um ao longo do mês. Além disso, se o preço atingisse $R\$840$, a quantidade de pessoas dispostas a comprar passaria a ser 900.

Com base nessa pesquisa e assumindo que a tendência de compra se mantenha para qualquer quantidade de tablets menor ou igual a 2300 (estoque máximo mensal da empresa) e considerando que toda intenção de compra se concretize, foi possível identificar a variação das vendas em função do preço. Observou-se que, a cada redução de $R\$30$ no preço do tablet, vendem-se 50 unidades a mais. Para uma análise mais detalhada dos dados, apresentaremos as informações em tabelas e verificaremos o comportamento resultante.

PREÇO UNIDADE	QUANTIDADE VENDIDA	ARRECADAÇÃO TOTAL
900	800	720000
870	850	739500
840	900	756000
810	950	769500
780	1000	780000
750	1050	787500
690	1150	793500
660	1200	792000
630	1250	787500
600	1300	780000
570	1350	769500
540	1400	756000

Tabela 2.1: Variação da venda de tablets em função do preço

A análise da tabela mostra que a arrecadação cresce até um determinado momento e, a partir daí, começa a decair. Como o objetivo da análise é identificar o ponto de arrecadação máxima, conclui-se que isso ocorre quando o tablet é vendido a $R\$1.150,00$ e são vendidas 690 unidades, resultando no valor otimizado da arrecadação. Para ilustrar a variação ponto a ponto, ela será apresentada em forma de gráfico, conforme as variações descritas nas tabelas

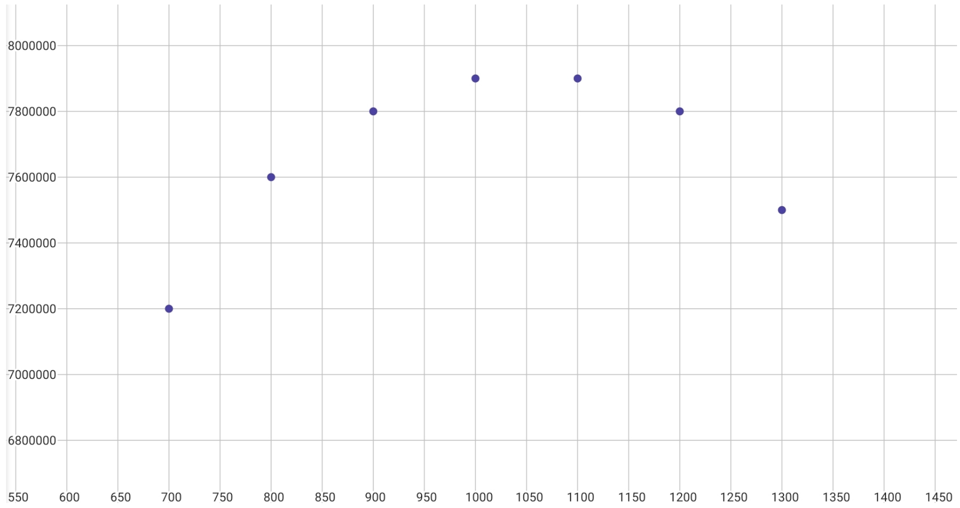


Figura 2.1: Comportamento das vendas dos tablets em função do preço

Diante dos dados, podemos representar a situação usando funções. A função que descreve o preço do tablet a cada x vezes que se reduz o valor em $R\$30$ é:

$$p(x) = 900 - 30x.$$

E a função que descreve a quantidade de tablets vendidos em função de x é:

$$Q(x) = 800 + 50x.$$

Portanto, a função que descreve a arrecadação A em função de x é:

$$\begin{aligned} A(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (900 - 30x)(800 + 50x) \\ &= -1500x^2 + 21000x + 720000. \end{aligned}$$

Uma vez definida a função que representa a arrecadação em função de x, pode-se otimizar o resultado da arrecadação calculando o seu valor máximo e quantas unidades devem ser vendidas para que isso ocorra. Para isso, utilizamos as coordenadas do vértice da parábola, que indicam esses resultados.

O valor de x no vértice é dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-21000}{2 \cdot (-1500)} = 7$$

E o valor máximo da arrecadação A_v é:

$$A_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-1500) \cdot 720000 - 21000^2}{4 \cdot (-1500)} = 793500$$

Assim, temos o seguinte cenário para essa situação:

- Quando $x = 7$, o preço que o tablet deve ser vendido para atingir a arrecadação máxima é $P(7) = 900 - 30 \cdot 7 = 690$ reais.
- A quantidade de tablets que devem ser vendidos para atingir a arrecadação máxima é dada por $Q(7) = 800 + 50 \cdot 7 = 1150$.
- A arrecadação máxima é dada por $A_v = 793500,00$ reais.

Ressaltamos que a arrecadação máxima não é o mesmo que lucro máximo. O lucro, nesse caso, vai depender do custo do produto. Considerando, hipoteticamente, que a loja pagou R$ 330,00 por unidade, a função custo pela compra de n tablets onde n corresponde a função $Q(x)$ é:

$$C(n) = 330n$$

substituindo n pela função $Q(x)$

$$C\left(Q(x)\right) = 330Q(x).$$

A função lucro é dada por:

$$L(x) = A(x) - C(x),$$

logo

$$L(x) = (-150x^2 + 21000x + 720000) - (800 + 50x) \cdot 330$$

Desenvolvendo a função lucro tem-se que:

$$L(x) = -1500x^2 + 4500x + 456000$$

Para encontrar o ponto de máximo da função lucro acharemos o x_v da função

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-4500}{2 \cdot (-1500)} \\ &= 1,5. \end{aligned}$$

Substituindo $x = 1,5$ na função $L(x)$ tem-se

$$\begin{aligned} L(1,5) &= -1500 \cdot (1,5)^2 + 4500 \cdot (1,5) + 456000 \\ &= 459375 \end{aligned}$$

Portanto o lucro máximo possível é $R\$459375,00$.

2.1.2 Definição de Máximos e Mínimos de uma Função

Segundo (MUNIZ (2018)), no livro "Fundamentos de Cálculo", a definição de máximos e mínimos absolutos e locais de uma função é a seguinte:

Definição 2.1. *Uma função $f : D \mapsto \mathbb{R}$ tem um máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor de $f(c)$ é chamado de valor máximo de f em D.*

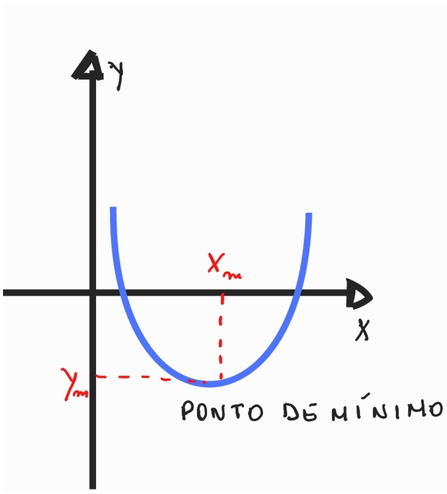
Definição 2.2. *Uma função $f : D \mapsto \mathbb{R}$ tem um mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor de $f(c)$ é chamado de valor mínimo de f em D.*

Definição 2.3. *Uma função tem um máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio se existe um intervalo aberto I tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é o valor máximo local de f.*

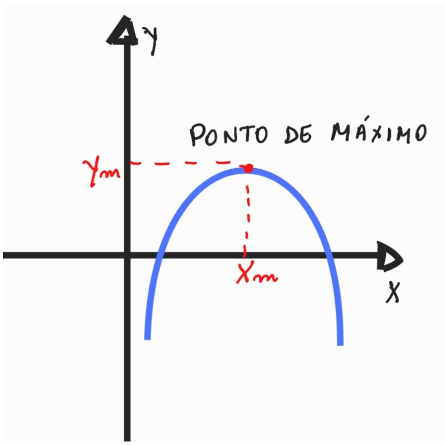
Definição 2.4. *Uma função tem um mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio se existe um intervalo aberto I tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é o valor mínimo local de f.*

Ainda colocando as definições de máximos e mínimos da função quadrática numa linguagem mais acessível para aplicação no ensino médio, com base no módulo de matemática da (ZATTONI e CARVALHO (2022)), temos que (x_v, y_v) representa o vértice da parábola da função quadrática. Se a função quadrática tem concavidade para baixo, então y_v é o máximo da função e x_v é a abscissa do ponto máximo. Por outro lado, se a função tem concavidade para cima, então y_v é o mínimo da função e x_v é a abscissa do ponto mínimo. Isso é ilustrado nas Figuras 2.3(a) e 2.3(b)

Figura 2.2: Posição da parábola de acordo com o sinal da função.



(a) Função crescente.



(b) Função decrescente.

Teorema 2.5. *Considerando a função quadrática* $f(x) = ax^2+bx+c$ *e* $\Delta = b^2-4ac$ *temos que*

I) Se $a < 0$*, a função admite o valor máximo absoluto* $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ *para* $x_v = \frac{-b}{2a}$.

II) Se $a > 0$*, a função admite o valor mínimo absoluto* $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ *para* $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Demonstração. Dada a função quadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Fatoramos o coeficiente a dos termos quadrático e linear:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

2. Completamos o quadrado dentro dos parênteses: tomamos o coeficiente de x, que é $\dfrac{b}{a}$, dividimos por 2 e depois elevamos ao quadrado:

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Agora, adicionamos e subtraímos $\dfrac{b^2}{4a^2}$ dentro dos parênteses para completar o quadrado:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

3. Reescrevemos a expressão quadrática como um quadrado perfeito:

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

4. Simplificar: Agora, distribuimos o a e combinamos os termos constantes:

$$\begin{aligned}
y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)
\end{aligned}$$

Essa é a forma canônica da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, onde: o vértice da parábola está no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Assim, separando em dois casos temos:

I) Se $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{-\Delta}{4a^2}$. Nessa diferença, $\frac{-\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x; só depende de a, b e c) e $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$.
II) Para $a > 0$, a prova é feita de modo análogo.

Calculando y_v, temos

$$
\begin{aligned}
y_v &= f\left(\frac{-b}{2a}\right) \\
&= a\left[\left(\frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[0^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \\
&= \frac{-\Delta}{4a}.
\end{aligned}
$$

Em ambos os casos temos que $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$. □

Como a otimização de função está estreitamente ligada à maximização ou minimização da função, na função quadrática, para obter o cálculo otimizado utilizam-se as fórmulas de y_v e x_v já demonstradas.

Exemplo 2.6. *Um projétil é lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de* $50\,m/s$ *a partir do solo. Sua altura* (h) *em metros após* t *segundos é dada por* $h(t) = -5t^2 + 50t$. *Qual a altura máxima que esse projétil pode atingir?*

SOLUÇÃO:

Para determinar a altura máxima, é necessário calcular h_v. Como a função que descreve o movimento do lançamento é uma função quadrática, a parábola que a representa está ilustrada na Figura 2.3. Podemos, então, aplicar a fórmula já demonstrada:

$$
\begin{aligned}
h_v &= \frac{-\Delta}{4a} \\
&= \frac{-(50^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0)}{4 \cdot (-5)} \\
&= \frac{-2500}{-20} \\
&= 125,
\end{aligned}
$$

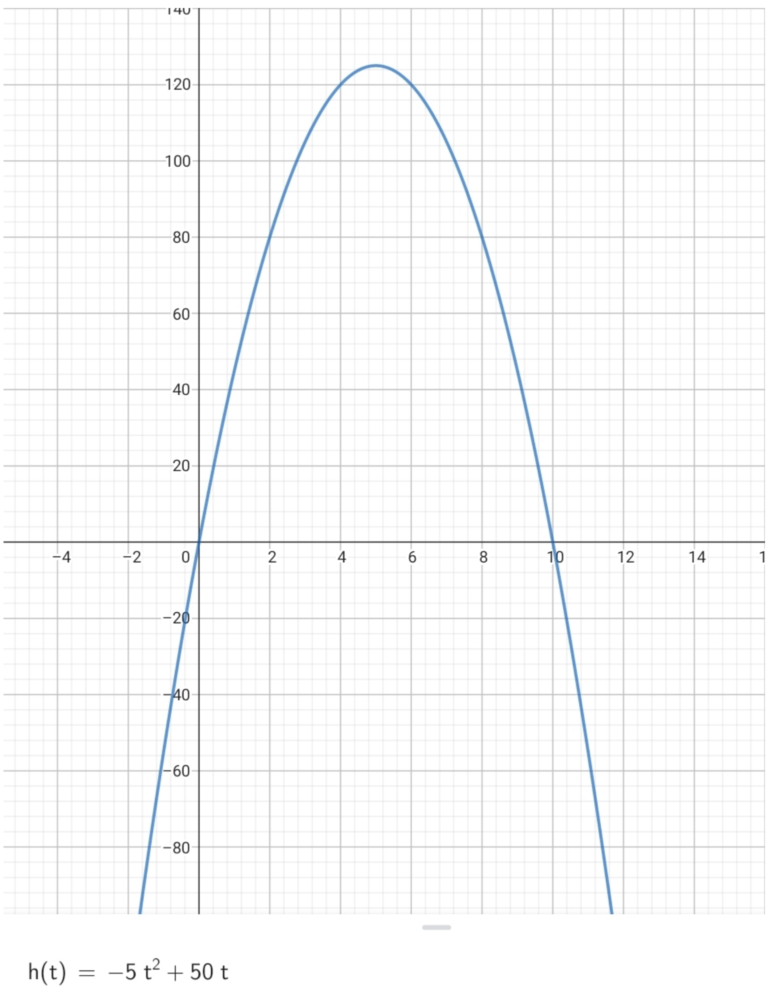


Figura 2.3: Parábola do lançamento

logo o projétil atinge a altura máxima de 125m.

2.1.3 Taxa de Variação

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente das diferenças de f nos pontos x_1 e x_2 é chamado de taxa de variação média no intervalo $[x_1, x_2]$, dado por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A taxa instantânea de variação da função y no tempo $x = x_1$ é:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Agora definiremos a derivada de uma função,

Definição 2.7. *A derivada de uma função f em um número $a \in D_f$, denotada por $f'(a)$, é*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observe que para $x = a + h$, temos que $x \to a$ se, e somente se $h \to 0$, assim

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Mudando o ponto de vista e deixando a variar e substituindo a por x temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

a função derivada de f.

Definição 2.8. *Uma função f é derivável ou diferenciável em a, se $f'(a)$ existir. A função f é derivável ou diferenciável em um intervalo aberto I se for diferenciável em cada número do intervalo I.*

Proposição 2.9 (Derivada de uma Função Constante)**.** *Se* $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, *então* $f'(x) = 0$.

Demonstração. temos que

$$\begin{aligned}
7f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.10 (A Regra da Potência)**.** *Se* n *for um inteiro positivo e* $f(x) = x^n$, *então*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demonstração. A derivada de $f(x) = x^n$ é dada por:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}
\end{aligned}$$

onde a expansão binomial de $(x+h)^n$ é

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k &= \binom{n}{0} x^n h^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.
\end{aligned}$$

Agora, calculando f', obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\
&= \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} h^0 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}.
\end{aligned}$$

Quando aplicamos o limite $h \to 0$, todos os termos que contêm h desaparecem, exceto o primeiro termo nx^{n-1}. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} h^0 \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.11 (A Regra da Multiplicação por Constante)**.** *Se c for uma constante e f uma função derivável, então*

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Demonstração. Se $g(x) = cf(x)$, então

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= cf'(x).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.12. *Aplicando a regra da potência temos que a derivada da função* $f(x) = 3x^4$ *é*

$$f'(x) = 3(x^4)' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3.$$

Proposição 2.13 (A Regra da Soma)**.** *Se* f *e* g *forem ambas deriváveis, então*

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Ou seja a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.

Demonstração. Se $F(x) = f(x) + g(x)$, então

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Portanto a darivada da soma se dá pela cálculo da derivada de cada termo desta soma.

Exemplo 2.14. *Seja* $f(x) = 4x^3 + x^2$ *calculando* $f'(x)$, *temos:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[4x^3 + x^2\right]' \\ &= (4x^3)' + (x^2)' \\ &= 12x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Por indução, a regra da soma pode ser estendida para qualquer número finito de parcelas.

Agora escrevendo $f - g$ como $f + (-g)$ e aplicando a regra da soma e a regra da multiplicação por uma constante, obtemos a regra da subtração.

Proposição 2.15 (A Regra da Subtração)**.** *Se* f *e* g *forem ambos deriváveis, então*

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Demonstração. Seja $F(x) = f(x) + (-g(x))$. Então pela regra da soma,

$$F'(x) = f'(x) + (-g(x))'.$$

Aplicando a regra da constante

$$F'(x) = f'(x) - g'(x).$$

$\square$

Exemplo 2.16. *A derivada da função* $f(x) = x^2 - 5x$ *é*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 5x)' \\ &= (x^2)' + (-5x)' \\ &= 2x + (-5) \\ &= 2x - 5. \end{aligned}$$

Observando o comportamento de uma função f contínua num intervalo aberto I temos

Teorema 2.17. *(Fermat) Seja* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *uma função contínua definida em um intervalo aberto* I*. Se* f *tem máximo ou mínimo local em* $x = c$*,* $c \in I$ *e* f *é derivável em* c*, então* $f\,'(c) = 0$

Observação 2.18. *A demonstração do Teorema de Fermat pode ser encontrada no livro GUIDORIZZI (2001)*

Definição 2.19. *Um ponto* c *no domínio de uma função* f *é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:*

a) f *não é derivável em* $x = c$*.*

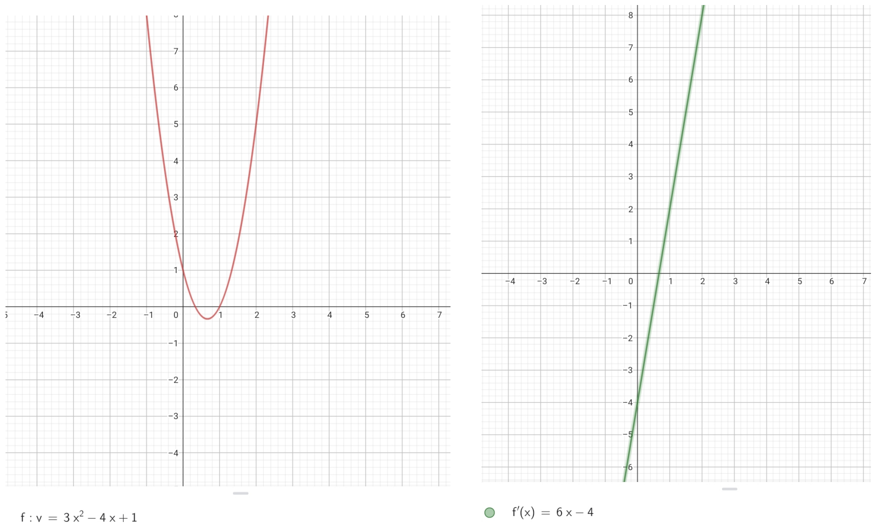
b) f *é derivável em* c *e* $f'(c) = 0$*.*

Proposição 2.20 (Teste da Derivada Primeira)**.** *Seja a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *e seja* c *um ponto crítico de* f*.*

(i) Se f' *passa de positiva para negativa em* c *então* f *tem máximo local em* c*.*

(ii) Se f' *passa de negativa para positiva em* c *então* f *tem mínimo local em* c*.*

(iii) Se f' *não muda de sinal em* c *então não tem nem máximo nem mínimo local em* c*.*



(a) Gráfico de f(x) (b) Gráfico de f'(x)

Figura 2.4: Comportamento de f(x) e f'(x)

Exemplo 2.21. *Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função* $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Vamos encontrar os pontos críticos de f. *Calculando a primeira derivada, temos*

$$f'(x) = 6x - 4.$$

Igualando $f'(x) = 0$ *para determinar os pontos críticos de* f *obtemos*

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \\ 0 &= 6x - 4 \\ &\Downarrow \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Como $f(x)$ *é derivável em* $\frac{2}{3}$ *e* $f'(x)$ *passa de negativa para positiva em* $\frac{2}{3}$, *como mostra o gráfico da Figura 2.4(b), então* $\frac{2}{3}$ *é o mínimo local de* $f(x)$.

Definição 2.22 (Derivada de Segunda Ordem)**.** *Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **Derivada Segunda** ou derivada de ordem dois de f.*

Proposição 2.23 (Teste da Derivada Segunda)**.** *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então:*

(i) Se $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local em c.

Observação 2.24. *O teste é inconclusivo caso $f''(x) = 0$.*

Exemplo 2.25. *Encontre os pontos de máximo e minimo local da função dada por $f(x) = x^3 - x^2$.*

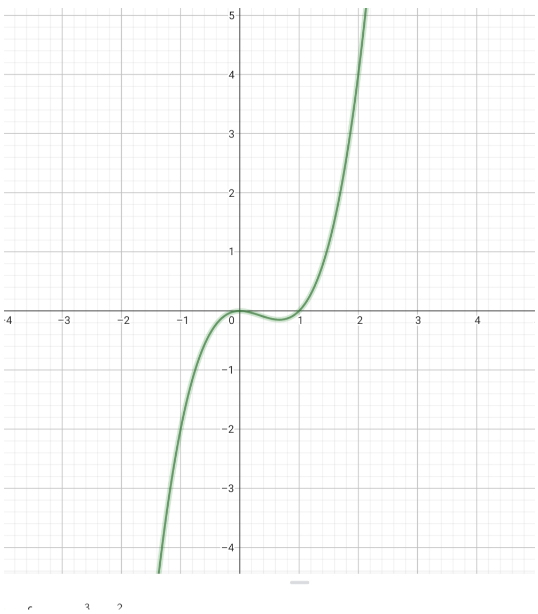


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2$

Derivando f obtemos $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Igualando $f'(x)$ a zero temos que os pontos críticos de f são:

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x)\\
&\Downarrow\\
0 &= 3x^2 - 2x\\
&\Downarrow\\
x_1 = 0 \ \ ou \ \ x_2 &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Derivando novamente, obtemos $f''(x) = 6x - 2$. Usando o teste de derivada segunda no ponto crítico 0, obtemos

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 6 \cdot 0 - 2\\
&= -2
\end{aligned}$$

como $-2 < 0$ então $x = 0$ é ponto máximo local.
Aplicando agora no ponto crítico $\frac{2}{3}$, temos

$$\begin{aligned}
f''\left(\frac{2}{3}\right) &= 6\left(\frac{2}{3}\right) - 2\\
&= 2.
\end{aligned}$$

como $2 > 0$ então $x = \frac{2}{3}$ é ponto mínimo local.

O resultado a seguir conhecido como Teorema 2.26 nos fornece que nem sempre o máximo e mínimo local é também o máximo e mínimo global.

Teorema 2.26 (O Teorema do Valor Extremo)**.** *Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$. Neste caso, c e d são pontos* *críticos ou extremos do intervalo.*

Observação 2.27. *A demonstração do Teorema do Valor Médio pode ser encontrada no livro STEWART (2006)*

Exemplo 2.28. *Agora encontraremos os pontos de máximo e mínimo global da função $f(x) = x^3 - x^2$ no intervalo $[-1; 0,9]$.*
Para encontrar os pontos de máximo e mínimo global da função no intervalo $[-1; 0,9]$, utilizamos o Teorema do Valor Extremo, que garante que uma função contínua em um intervalo fechado atinge seus valores máximo e mínimo nesse intervalo. Os pontos críticos encontrados anteriormente são 2/3 e 0, fazendo o teste dos extremos e pontos críticos temos

- $$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - (-1)^2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 0^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{-4}{27} \\ &= -0,148. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(0,9) &= (0,9)^3 - (0,9)^2 \\ &= -0,081. \end{aligned}$$

Portanto 0 *é o máximo global e* -2 *é o mínimo global da função* $f(x) = x^3 - x^2$ *no intervalo* $[-1; 0,9]$.

Podemos obter o vértice da parábola utilizando as regras do cálculo diferencial vistas. Dada uma função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

calculando sua derivada, obtemos

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Para encontrar o vértice, igualamos a derivada a zero e resolvemos para x:

$$f'(x) = 0 \implies 2ax + b = 0$$

ou seja,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

A coordenada y será calculada conforme demonstrada no Teorema 2.5

Portanto, o vértice da parábola tem coordenadas:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

2.1.4 Problemas de Otimização

Os problemas de otimização envolvem a modelagem de uma função com o objetivo de maximizar ou minimizar seus resultados, utilizando os máximos e mínimos dessa função. Para resolver esses problemas, geralmente seguimos o seguinte roteiro MUNIZ (2018):

(i) Identificar as variáveis do problema, isto é, as grandezas que representam as situações descritas. Gráficos e desenhos podem ser utilizados para auxiliar nesse processo.

(ii) Determinar os intervalos de valores possíveis para as variáveis. É importante estabelecer os limites dentro dos quais as variáveis podem variar.

(iii) Descrever as relações entre as variáveis por meio de uma ou mais equações. Normalmente, uma dessas equações fornecerá o máximo ou mínimo procurado.

(iv) Utilizar a primeira e a segunda derivada para determinar os pontos críticos e identificar aqueles que resolvem o problema.

Exemplo 2.29. *(Adaptada ZATTONI; CARVALHO) Um drone terrestre de pesquisa realiza incursões tanto no interior do solo quanto na superfície, utilizando sistemas de escavação, locomoção terrestre e locomoção aérea. Durante uma de suas incursões, foi registrado que, após atingir a profundidade máxima no solo, o drone subiu até uma altura de 6 metros acima do nível do solo. O trajeto percorrido pelo drone pode ser descrito pela função quadrática* $y = x^2 - 16x + 55$, *onde* y *representa a altura em metros e* x *representa a posição horizontal em metros. Analisando o trajeto do drone descrito na Figura 2.6 e identificar a profundidade máxima que ele atingiu no solo, o valor mínimo da função* y *corresponderá à profundidade máxima que o drone alcançou abaixo do nível do solo.*

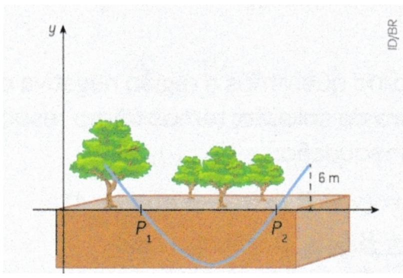


Figura 2.6: Esquema do trajeto do drone

Fazendo o teste da primeira derivada:

$$y'(x) = 2x - 16$$

Para calcular os pontos críticos faremos $y'(x) = 0$

$$2x - 16 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$2x = 16$$
$$\Downarrow$$
$$x = 8$$

Fazendo o teste da segunda derivada, temos

$$y'' = 2$$

para $x = 8$ *temos*

$$y''(8) = 2 > 0,$$

logo 8 é ponto de mínimo. Substituindo $x = 8$ *em* $y(x) = x^2 - 16x + 55$ *obtemos*

$$y(8) = 8^2 - 16(8) + 55 = -9$$

Portanto, o drone atinge $9m$ *de profundidade.*

Neste exemplo pode-se utilizar a fórmula, já vistas, do (x_v, y_v) *para calcular a profundidade atingida pelo drone.*

Exemplo 2.30. *(MUNIZ) Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada a partir de uma folha de papelão de* $12cm \times 32cm$*, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha ao longo das linhas determinadas pelos cortes. Qual é a medida do corte que produz uma caixa de volume máximo?*

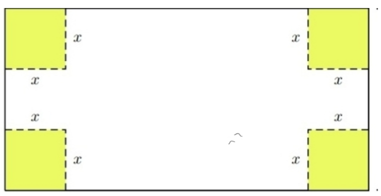


Figura 2.7: Base para construção da caixa

Para encontrar a medida do corte que produz uma caixa de volume máximo, *sigamos estes passos:*

Seja x a medida do lado do quadrado que é cortado de cada canto da folha de papel. Após cortar os quadrados e dobrar as bordas, a caixa terá uma base retangular com dimensões $(12-2x)$ e $(32-2x)$ e altura x.

O volume V da caixa pode ser expresso como:

$$V = x \cdot (12-2x) \cdot (32-2x),$$

com $x \in [0,6]$.

Expandindo a função volume, temos

$$\begin{aligned} V &= x \cdot (12-2x) \cdot (32-2x) \\ &= x \cdot (384 - 64x - 24x + 4x^2) \\ &= x \cdot (384 - 88x + 4x^2) \\ &= 384x - 88x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Como a função que representa o problema é cúbica, não é possível utilizar as fórmulas do (x_v, y_v) da parábola, portanto utilizaremos as regras diferenciais já vistas.

Para encontrar o máximo, deriva-se a função volume em relação a x e iguala a zero:

$$\begin{aligned} 0 &= v'(x) \\ 0 &= 12x^2 - 176x + 384 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{176 \pm \sqrt{(-176)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 384}}{2 \cdot 12} \\ &= \frac{176 \pm \sqrt{30976 - 18432}}{24} \\ &= \frac{176 \pm \sqrt{12544}}{24} \\ &= \frac{176 \pm 112}{24} \end{aligned}$$

onde as duas soluções da equação são

$$x = \frac{288}{24} = 12$$

$$e$$

$$x = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}.$$

Note que $x = 12$ *não é viável, pois* x *não pode ser maior que 6.*

O valor $x = \frac{8}{3}$ *é viável e deve ser verificado se realmente maximiza o volume, utilizando o teste da segunda derivada.*

Observe que:

$$\begin{aligned} v''(x) &= 24x - 176 \\ &\Downarrow \\ v''\left(\frac{8}{3}\right) &= 24\left(\frac{8}{3}\right) - 176 \\ &= -112. \end{aligned}$$

Como $v''\left(\frac{8}{3}\right) = -112 < 0$ *então* $\frac{8}{3}$ *é ponto de máximo, e assim o corte que produz uma caixa de volume máximo é* $\frac{8}{3}$*cm ou aproximadamente* $2,67cm$. *Observe ainda que se fizermos os cortes nos extremos teríamos uma caixa de volume* 0.

Capítulo 3

Sequência Didática: valores máximos e mínimos aplicados na solução de problemas de forma ótima

3.0.1 Objetivo da Construção de uma Sequência Didática

A sequência didática tem como objetivo detalhar, passo a passo, o caminho pedagógico a ser percorrido para garantir a compreensão do objeto de estudo de forma ótima e sem improvisos. Para isso, este documento deve analisar e detalhar o público-alvo da proposta, os objetivos desejados e os recursos que serão empregados para assegurar que o percurso trilhado leve à construção do conhecimento desejado.

Desenvolver uma sequência didática baseada na Base Nacional Comum Curricular BNCC (BRASIL2018) para problemas de otimização com funções pode ajudar a garantir que as aulas estejam alinhadas com os parâmetros educacionais propostos.

Habilidades e competências desejadas:

- (EM13MAT401) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de máximos e mínimos de funções de uma variável real, utilizando diferentes estratégias e recursos tecnológicos.

- (EM13MAT402) Utilizar conceitos de derivadas e integrais para resolver problemas de otimização.

Os conceitos de máximos e mínimos aplicados na solução de problemas de otimização serão ministrados para as turmas da 1ª série do ensino médio como parte do currículo da educação básica, orientado pela BNCC e pelos PCNs.

3.1 Sequência Didática

3.1.1 Objetivos Específicos

Afim de estabelecer uma visão abrangente sobre o processo de otimização com funções do 2º e 3º grau, desde a formulação de problemas à análise crítica dos resultados, destacaremos os seguintes objetivos específicos:

- Compreender e aplicar fórmulas e conceitos para encontrar máximos e mínimos das funções, além de definir pontos críticos das mesmas, quando possível.
- Identificar e formular problemas de otimização.
- Resolver problemas práticos de otimização utilizando funções.
- Utilizar recursos tecnológicos para entender o conceito de otimização e resolver problemas.
- Interpretar e analisar as soluções encontradas.

3.1.2 Procedimentos Metodológicos

A proposta de ensino de problemas de otimização com funções, focando em valores máximos e mínimos, será desenvolvida em várias etapas. Primeiramente, abordaremos o conceito de otimização de forma intuitiva, com o auxílio de games e jogos online. Em seguida, utilizaremos a modelagem matemática para aplicar o conceito através de problemas representados por casos a serem analisados ponto a ponto, tabulando seus resultados e, posteriormente, analisando o gráfico gerado pela função quadrática que representa o problema.

No terceiro momento, serão apresentados os métodos de cálculo de máximos e mínimos locais e globais de funções quadráticas e, em nível mais aprofundado, de funções cúbicas, incluindo as fórmulas do vértice da parábola e as regras do cálculo diferencial. Para auxiliar na resolução, estudaremos os gráficos dessas funções, analisando seus elementos.

Em sala de aula, os alunos serão solicitados a construir gráficos das diferentes funções quadráticas e cúbicas propostas nos problemas. Utilizando o software GEOGEBRA, os estudantes poderão analisar os gráficos dessas funções, identificando pontos de máximos e mínimos, bem como os pontos críticos e empregar os conceitos estudados na resolução das atividades propostas. Ainda considerando o esboço dos gráficos, se não tiver acesso ao software GEOGEBRA pode-se executar na folha de papel milimetrado o que possibilitaria um melhor domínio da turma nesta etapa.

3.1.3 Metodologia

A metodologia para a aplicação dessa sequência didática será composta pelas seguintes ações:

- Aulas expositivas e dialogadas.
- Uso de recursos tecnológicos, como softwares matemáticos e jogos online.
- Atividades individuais e em grupo.
- Estudo de casos e projetos.

3.1.4 Materiais Utilizados

Para a execução dessa sequência didática, os materiais e recursos utilizados serão:

- Quadro branco e canetas para quadro branco.
- Wi-Fi, tablets ou Chromebooks, softwares matemáticos (GEOGEBRA) e jogos online (Bridge Construction), plataforma digital de jogos online (Wordwall).

- Folhas de papel milimetrado (para construção manual dos gráficos, se necessário), lápis, borracha e régua.

- Caderno e atividades impressas.

3.1.5 Estrutura da Sequência Didática

A Sequencia didática será divida em quatro momentos que serão descritos abaixo nos itens, Aula 1, Aula 2, Aula 3 e Aula 4.

AULA 1

Tema	Introdução ao jogo **BRIDGE CONSTRUCTOR, 2024**
Tempo total	2 h/aula
Sugestão de colaboração entre disciplinas	Inclusão Digital, Iniciação Científica, Para além dos Números (PAN)

Tempo por atividade	**Atividade**
80 min	**Atividade** (20 min) Seguir o roteiro disponibilizado na Atividade 1 em anexo, dos itens 1 a 3. (60 min) Seguir o roteiro disponibilizado na Atividade 1 em anexo, item 4.
20 min	**Quiz** Seguir o roteiro disponibilizado na Atividade 2 em anexo.

3.1.6 Atividade 1

Roteiro de aplicação do jogo BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)
direcionado ao conceito de otimizaçao

1. Explicação breve sobre o conceito a ser trabalhado e sua importância em diversas áreas do conhecimento, especialmente na engenharia, que é o foco do jogo.

2. Demonstração do jogo: utilizando o tablet do professor projetado em uma SMART TV ou com o auxílio de um projetor, abrir o jogo **Bridge Constructor** para demonstrar os objetivos básicos. Explicar claramente o desenvolvimento do jogo; mostrando como construir a ponte, onde encontrar os materiais, como os recursos são mensurados e como verificar o resultado do projeto e sua eficácia.

3. Apresentar os conceitos teóricos contidos no jogo, abordando tópicos como:

   a) A estrutura de cada ponte a ser construída, os pontos de tensão a serem observados em cada fase, e a importância da escolha dos materiais disponíveis.

   b) Estratégias para projetar a ponte observando a geometria da construção.

4. Execução da tarefa:

   a) Dividir a sala em grupos de 3 a 4 integrantes.

   b) Cada grupo deve criar uma ponte capaz de suportar a maior carga possível, levando em conta o orçamento limitado para otimizar o resultado.

   c) Conceder tempo para a execução da etapa de construção e, após a conclusão de todos os grupos, socializar as estratégias de design e os materiais escolhidos.

   d) Concluir com uma discussão sobre o conceito de otimização e como ele impactou no resultado do jogo.

e) Solicitar feedback sobre a atividade e o que os alunos aprenderam com a aplicação dos jogos.

3.1.7 Atividade 2

Questionário WORDWALL (2024) para fixação do conceito de otimização relacionado ao jogo BRIDGE-CONSTRUCTOR (2024)

1. Aplicar o Questionário 1.7(a) confeccionado no WORDWALL (2024) e disponibilizado para o aluno através do QRCODE 1.7(b), projetado na SMARTTV ou com auxílio de um projetor.

2. Apresentar o ranking de resultado com os 10 primeiros colocados.

O questionário disponibilizado em forma de quiz com multiplas opções é composto das seguintes questões apresentadas em sequência aleatória:

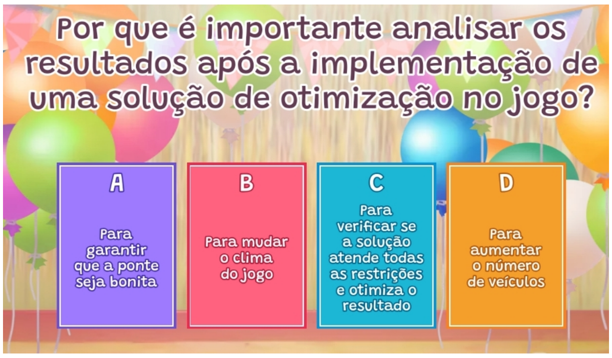


Figura 3.1: Questão 1

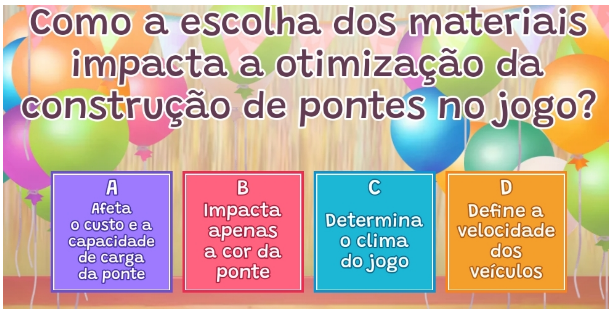


Figura 3.2: Questão 2

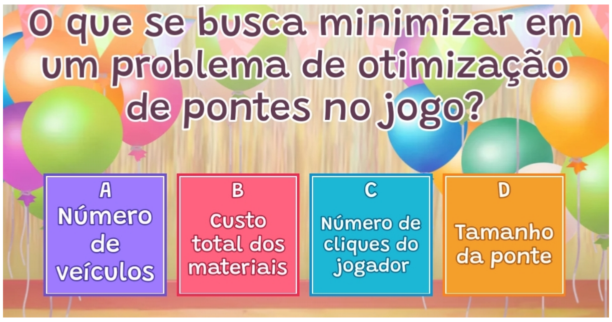


Figura 3.3: Questão 3

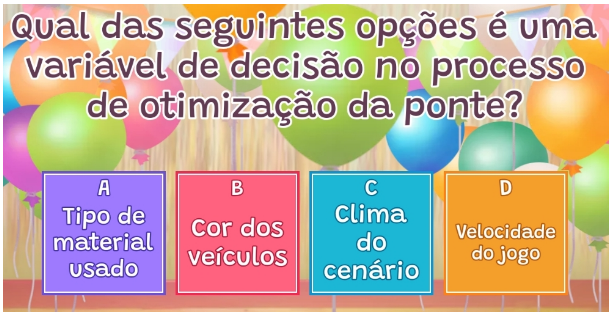


Figura 3.4: Questão 4

Figura 3.5: Questão 5

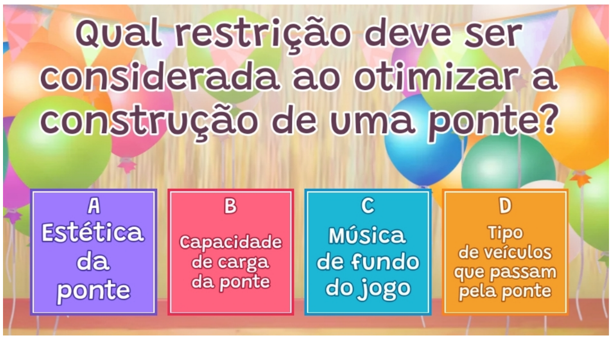


Figura 3.6: Questão 6

AULA 2

Tema	Aplicações práticas da otimização
Tempo total	2 h/aula
Sugestão de colaboração entre disciplinas	Empreendedorismo, Iniciação Científica, Para além dos Números (PAN)

Tempo por atividade	**Atividade**
50 min	**Estudo de caso** Roteiro e casos a serem estudados disponibilizados na Atividade 3 em anexo.
30 min	**Projeto em grupo** Dividir a turma em grupos e propor que cada grupo formule e resolva um problema de otimização baseado em situações possíveis.
20 min	**Estudo orientado** Socialização dos resultados entre os grupos. Cada grupo apresenta seu problema de otimização, a estratégia escolhida e as soluções encontradas. Reflexão sobre as impressões da otimização e as habilidades desenvolvidas durante o projeto em grupo.

3.1.8 Atividade 3

Roteiro de aplicação de estudo de caso com problemas de otimização com funções

1. Exposição sobre o que é um estudo de caso. (Simplificado e voltado para problemas com funções quadráticas e cúbicas)

2. Dividir a turma em dois grupos e destacar um caso para cada.

3. Elencar, de forma breve, quais aspectos devem ser abordados no estudo dos casos propostos:

   - Identificação do problema, compreendendo suas variáveis.
   - Definição clara da função que precisa ser otimizada (maximizada ou minimizada).
   - Verificação de restrições que devem ser atendidas.
   - Elaboração da resolução, tabulando os pontos da função e encontrando as raízes da mesma para delimitar, no caso da função quadrática.
   - Estudo do gráfico da função utilizando o software GEOGEBRA. Determinação, a partir da observação dos resultados obtidos, do ponto de máximo ou mínimo e como isso impacta a solução do caso proposto.

Os casos a serem analisados estão divididos em Caso 1 e Caso 2, conforme apresentados a seguir:

Colégio:	
Disciplina:	Série/turma:
Professor(a):	Data:
Aluno(a):	

CASO 1

(UEG-GO): Um lava-jato tem 50 clientes fixos por semana e cada lavagem custa $R\$20,00$. Sabe-se que, para cada real que o dono aumenta no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. Qual o valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal desse lava-jato? Qual será essa arrecadação?

onde x representa o valor do aumento

1. PREÇO $= (20 + x)$
2. NÚMERO DE CLIENTES $= (50 - 2x)$
3. ARRECADAÇÃO $f(x) = (20 + x)(50 - 2x)$

Valor de x	$(20 + x)$	$(50 - 2x)$	$f(x) = (20 + x)(50 - 2x)$
25			
20			
15			
10			
5			
0			
-5			
-10			
-15			
-20			

Tabela 3.1: Relação de preço × número de clientes × arrecadação

CASO 2

(UFPR) Para atrair novos clientes, um supermercado decidiu fazer uma promoção reduzindo o preço do leite. O gerente desse estabelecimento estima que, para cada

$R\$0,01$ de desconto no preço do litro, será possível vender 25 litros de leite a mais que em um dia sem promoção. Sabendo que, em um dia sem promoção, esse supermercado vende 2600 litros de leite ao preço de $R\$1,60$ por litro. Qual é o preço do litro de leite que fornece a esse supermercado o maior valor arrecadado possível? De quanto é esse valor

onde x representa o valor do litro de leite

1. PREÇO = $(1,60 - x)$

2. LITROS DE LEITE VENDIDO = $(2600+2500x)$ ONDE $\frac{25}{0,01}$ é a razão entre os litros de leite vendidos ao mês em função do desconto.

3. ARRECADAÇÃO $f(x) = (1,60 - x)(2600 + 2500x)$

Valor de x	$(1,60 - x)$	$(2600 + 2500x)$	$f(x) = (1,60 - x)(2600 + 2500x)$
$1,60$			
$1,50$			
$1,40$			
$1,30$			
$1,20$			
$1,10$			
1			
0			
-1			
$-1,04$			

Tabela 3.2: Relação de preço $\times$ litros de leite vendido $\times$ arrecadação

AULA 3

Tema	As derivadas e a otimização
Tempo total	2 h/aula

Tempo por atividade	**Atividade**
20 min	**Apresentação dos conceitos que estão descritos no texto:** Taxa de variação (Seção 2.1.3) O que é derivada, como é representada na Matemática, e suas aplicações. (Proposição 2.9)
20 min	**Regras básicas de derivação:** Regra da Potência. (Proposição 2.10) Regra da Constante. (Proposição 2.11) Aplicação no (Exemplo 2.12) Regra da Soma. (Proposição 2.13) Aplicação no (Exemplo 2.14) Regra da Subtração. (Proposição 2.15) Aplicação no (Exemplo 2.16)
30 min	**Máximos e mínimos com derivadas:** Teorema de Fermat. (Teorema 2.17) Teorema do Valor Extremo. (Teorema 2.26) Aplicação nos Exemplos (2.25 e 2.28) Teste da Primeira e Segunda derivadas. (Proposição 2.20 e Proposição 2.23) Aplicação nos Exemplos (2.21 e 2.23)
30min	**Aplicação dos Conceitos de derivadas na resolução de problemas de Otimização** Lista de Exercícios. (Atividade 4 em anexo)

3.1.9 Atividade 4

Colégio:	
Disciplina:	Série/turma:
Professor(a):	Data:
Aluno(a):	

Lista de exercicios

Questão 1
Considere a função $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Determine a derivada $f'(x)$.

Questão 2
Encontre a derivada da função $g(x) = -4x^3 + 7x^2 - x + 6$ no ponto $x = 5$.

Questão 3
Calcule a derivada de $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x - 1$ e determine o valor da derivada em $x = 2$.

Questão 4
Dada a função $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$, encontre a primeira e segunda derivadas da função.

Questão 5
Seja a função $q(x) = 5x^2 - 8x + 3$. Encontre a segunda derivada $q''(x)$.

Questão 6
Determine a derivada da função $r(x) = -2x^3 + 4x^2 - 6x + 1$ e encontre o ponto em que a derivada é zero.

Questão 7
Considere a função cúbica $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, definida no intervalo fechado $[0, 3]$. Determine os valores extremos (máximos e mínimos) de $f(x)$ no intervalo $[0, 3]$ utilizando o Teorema do Valor Extremo.

AULA 4

Tema	Problemas de otimização e as áreas de conhecimento
Tempo total	2 h/aula

Tempo por atividade	**Atividade**
20 min	**Separação em duplas** A turma será dividida em duplas e receberá uma lista de problemas, disponível na Atividade 5 em anexo, para construção dos gráficos das funções de cada problema com o auxílio do software GEOGEBRA, analisando-os e identificando possíveis pontos críticos.
60 min	**Análise de estratégias** Cada dupla discutirá e aplicará a melhor estratégia para solucionar os problemas propostos na Atividade 5.
20 min	**Discussão final** A turma discutirá em conjunto as diferentes abordagens e soluções apresentadas pelas duplas.

3.1.10 Atividade 5

Colégio:	
Disciplina:	Série/turma:
Professor(a):	Data:
Aluno(a):	

Proposta de lista de problemas relacionados às diferentes áreas do conhecimento

Questão 1 (Economia)

Uma empresa deseja minimizar os custos totais C em milhares de reais associados à produção de q unidades de um produto. Os custos totais são expressos pela função $C(q) = 0,25q^2 - 30q + 50$. De quanto deve ser a produção de unidades desse produto nessa empresa para minimizar os custos totais?

Questão 2 (Biologia)

Suponha que a população de formigas Tucandeiras da Amazônia seja modelada por uma função cúbica no tempo t. A função $P(t)$ descreve o tamanho da população P em centenas em função do tempo t em dias, onde $P(t) = -t^3+6t^2-9t+4$. Qual a população máxima obtida no intervalo $0 \leq t \leq 4$.

Questão 3 (Física)

Um objeto em movimento retilíneo uniformemente variado tem seu deslocamento (S) em metros em função do tempo (t) em segundos. A função que representa o deslocamento em função do tempo é:

$$S(T) = 2t^2 - 8t + 5$$

Qual o tempo mínimo para que o deslocamento do objeto seja maximizado?

Questão 4 (Química)

A produção P em gramas de um produto químico em um reator depende de concentração c em mol/L do reagente de acordo com a seguinte função quadrática

$$P(c) = -0,1c^2 + 3c + 20$$

Determine a concentração c que maximiza a produção P do produto químico.

Questão 5 (Engenharia Civil)

Um tanque cilíndrico deve ter a capacidade de $50\pi m^3$. O material da tampa e base do tanque custa $R\$25,00$ por m^2, enquanto que o material com o qual os lados são feitos custa $R\$20,00$ por m^2. Encontre o raio da base e a altura do tanque para minimizar o custo do tanque.

Figura 3.7: Esboço do tanque

Questão 6 (Administração)

Um empresário deseja abrir uma pequena fábrica. Segundo um estudo feito por ele, se x funcionários forem contratados, seu lucro $L(x)$ anual em reais será de $L(x) = 90x^2 - x^3$, $0 \leq x \leq 80$. O estudo considera a possibilidade de contratar até 80 funcionários. Quantos funcionários devem ser contratados para que o lucro anual seja o maior possível? E qual o valor desse lucro?

Questão 7 (Urbanismo)

Durante várias semanas o departamento de trânsito de uma cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passaram por certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média nesse cruzamento é dada aproximadamente por $V(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 5$ em Km/h, onde t é o número de horas após o meio dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido?

3.1.11 Avaliação

A avaliação será feita de forma processual e contínua levando-se em conta os seguintes aspectos:

- Participação nas atividades propostas.
- Qualidade das soluções apresentadas nos exercícios e no projeto em grupo.
- Capacidade de formular e resolver problemas de otimização.

Capítulo 4

Considerações finais

O trabalho apresentado teve como objetivo introduzir o conceito de otimização no ensino médio, utilizando jogos como ferramenta pedagógica, em particular o jogo **BRIDGE CONSTRUCTOR, 2024.** A intenção foi demonstrar como a gamificação pode ser uma abordagem eficaz para ensinar conceitos matemáticos desafiadores de forma lúdica e acessível. Além disso, o estudo evidenciou que os jogos podem ser uma poderosa ferramenta para aumentar o engajamento e a motivação dos alunos.

A sequência didática desenvolvida, junto com a organização do trabalho ao longo das aulas, destacou a importância de um estudo prático e interativo para a compreensão dos conceitos de máximos e mínimos em funções polinomiais, bem como a resolução de problemas aplicando o conceito de otimização e métodos do cálculo para identificá-los. Essa abordagem assegurou uma conexão sólida entre a teoria aprendida e sua aplicação prática.

A metodologia sugerida indica que, ao incorporar tecnologias e metodologias ativas no ensino da matemática, os professores podem criar um ambiente de aprendizagem mais envolvente, facilitando a introdução dos métodos necessários para a resolução de situações-problema, isso não só proporciona um entendimento teórico do tema, mas também desenvolve habilidades de pensamento crítico essenciais para a formação dos alunos.

Este trabalho tem como objetivo contribuir para as práticas docentes, propondo novas abordagens na educação matemática e integrando tecnologias e metodologias inovadoras para enfrentar os desafios do ensino dessa disciplina.

Bibliografia

BORGES, d. S.; SIMONE; HS, D. V.; MACEDO, R. H.; SEIJI, I. A systematic mapping on gamification applied to education. In: **Proceedings of the 29th annual ACM symposium on applied computing**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 216–222.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum BNCC**. 1. ed. Brasilia, 2018.

_____. **Parâmetros curriculares Nacionais Ensino Médio PCNSEM**. 3 ed. ed. Brasilia, 2020.

BRIDGE-CONSTRUCTOR. **Jogo eletrônico**. 1.2.8. ed. Indonésia, MANTAPP, 2024.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo volume 1. **Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição**, 2001.

MORÁN, J. et al. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção mídias contemporâneas. Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens**, v. 2, n. 1, p. 15–33, 2015.

MUNIZ, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. São Paulo: SBM, 2018.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. **Rio de Janeiro: interciênciaência**, n. 2, p. 12, 1978.

SIGNORI, G. G.; GUIMARÃES, J. d. Gamificação como método de ensino inovador. **Int. J. Activ. Learn**, v. 1, n. 1, p. 66–77, 2016.

SOUZA, R. T. D.; AZEVEDO, I. F. D.; ALVES, F. R. V. et al. A gamificação com a plataforma wordwall como estratégia de aprendizagem para o ensino de matemática. **Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias**, v. 18, n. 1, p. 53–66, 2023.

STEWART, J. **Cálculo**. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SURENDELEG, G.; MURWA, V.; HAN-KYUNG, Y.; KIM, Y. S. The role of gamification in education–a literature review. **Contemporary Engineering Sciences**, Hikari, Ltd., v. 7, n. 29, p. 1609–1616, 2014.

WORDWALL. **plataforma digital de recursos didáticos on-line**. https://wordwall.net/pt/, 2024.

ZATTONI, R.; CARVALHO, T. D. **Educamos Matemática**. 1 ed. ed. São Paulo: SM Educação, 2022.

Apêndice

4.1 Gabarito da Atividade 2

1. C
2. A
3. B
4. A
5. B
6. B

4.2 Resolução da Atividade 4

Questão 1

Aplicando a regra de derivação para funções polinomiais, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2)' - (5x)' + (2)' \\ &= 3 \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1x^{1-1} + 0 \\ &= 6x - 5. \end{aligned}$$

Questão 2

Fazendo a derivada $g'(x)$ temos

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-4x^3 + 7x^2 - x + 6)' \\ &= -4 \cdot 3x^{3-1} + 7 \cdot 2x^{2-1} - 1 \\ &= -12x^2 + 14x - 1. \end{aligned}$$

Agora, substitua $x = 5$ na derivada:

$$\begin{aligned} g'(5) &= -12(5)^2 + 14(5) - 1 \\ &= -12 \cdot 25 + 70 - 1 \\ &= -300 + 70 - 1 \\ &= -231. \end{aligned}$$

Questão 3

Calculando a derivada $h'(x)$ temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 9x^2 + 4x - 1)' \\ &= 2 \cdot 3x^{3-1} - 9 \cdot 2x^{2-1} + 4 \\ &= 6x^2 - 18x + 4. \end{aligned}$$

Agora, substitua $x = 2$ na derivada:

$$\begin{aligned} h'(2) &= 6(2)^2 - 18(2) + 4 \\ &= 6 \cdot 4 - 36 + 4 \\ &= 24 - 36 + 4 \\ &= -8. \end{aligned}$$

Questão 4

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x^3 - 3x^2 + 2x - 7)' \\ &= 3x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} p''(x) &= (3x^2 - 6x + 2)' \\ &= 3 \cdot 2x - 6 \\ &= 6x - 6. \end{aligned}$$

Questão 5

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} q'(x) &= (5x^2 - 8x + 3)' \\ &= 5 \cdot 2x - 8 \\ &= 10x - 8. \end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} q''(x) &= (10x - 8)' \\ &= 10. \end{aligned}$$

Questão 6

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} r'(x) &= (-2x^3 + 4x^2 - 6x + 1)' \\ &= -2 \cdot 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 6 \\ &= -6x^2 + 8x - 6. \end{aligned}$$

Para encontrar o ponto onde a derivada é zero, resolva:

$$-6x^2 + 8x - 6 = 0$$

Dividindo por -2:

$$3x^2 - 4x + 3 = 0$$

temos que

$$x_1 = \frac{4 \pm 2i\sqrt{5}}{6}$$
$$x_2 = \frac{2 \pm i\sqrt{5}}{3}$$

Portanto, a derivada é zero em números complexos $\frac{2 \pm i\sqrt{5}}{3}$.

Questão 7

Calcularemos a derivada da função e determinaremos seus pontos críticos:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12.$$

Igualando a derivada a zero para encontrar os pontos críticos:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Temos que

$$x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

O valor $x = -1$ está fora do intervalo $[0, 3]$, então descartamos esse ponto. O único ponto crítico relevante é $x = 2$.

Agora, avaliamos a função nos extremos do intervalo e no ponto crítico:

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 - 12(0) + 5 = 5$$
$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 5 = -11$$
$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 5 = 2$$

Portanto, os valores extremos da função no intervalo $[0, 3]$ são:

Valor mínimo: $f(2) = -11$, Valor máximo: $f(0) = 5$.

Resposta: O valor mínimo de $f(x)$ no intervalo $[0, 3]$ é -11 e o valor máximo é 5.

4.3 Resolução da Atividade 5

Questão 1

Para minimizar os custos totais $C(q) = 0{,}25q^2 - 30q + 50$, precisamos encontrar o valor de q que minimiza essa função. usando a fórmula do q_v

onde $a = 0{,}25$, $b = -30$, e $c = 50$.

$$\begin{aligned} q_v &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-30}{2 \cdot 0{,}25} \\ &= -\frac{-30}{0{,}5} \\ &= 120. \end{aligned}$$

Então, a produção que minimiza os custos totais é $q = 120$ unidades.

Questão 2

Solução com a Derivada

Fazendo o teste da derivada primeira e segunda da função $P(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4$. obtemos

$$P'(t) = -3t^2 + 12t - 9.$$

Para achar os pontos críticos da função faremos $P'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= P'(t) \\ 0 &= -3t^2 + 12t - 9. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por 3

$$-t^2 + 4t - 3 = 0$$

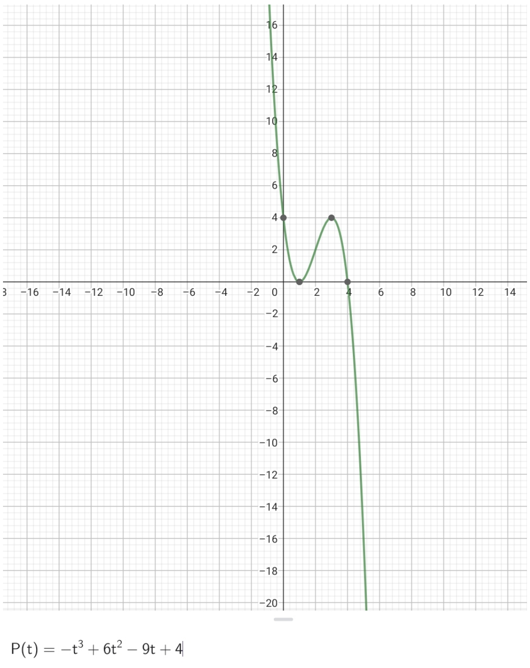


Figura 4.1: Gráfico da função $P(t) = -t^3 + 6t - 9t + 4$

cujas raízes são

$$t_1 = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$t_2 = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Fazendo a segunda derivada temos

$$P''(t) = -6t + 12,$$

donde

$$P''(t_1) = -6.1 + 12 = 6$$

$$P''(t_2) = -6.3 + 12 = -6$$

Como $-6 < 0$ então $t = 3$ dias é o tempo para obter a população máxima de formigas Tucandeiras no intervalo $0 \leq t \leq 4$. Para calcular a população máxima consideraremos $t = 3$ na função $P(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4$

$$\begin{aligned} P(0) &= -(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3) &= -(3)^3 + 6(3)^2 - 9(3) + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4) &= -(4)^3 + 6(4)^2 - 9(4) + 4 \\ &= -48 \end{aligned}$$

A população máxima no intervalo $0 \leq t \leq 4$ é de 4 centenas de formigas Tucandeiras como pode ser analisado na Figura 4.1

Questão 3

Para encontrar o tempo que minimiza o deslocamento, observamos que a função representada por $S(t)$ é uma função quadrática então podemos utilizar a fórmula t_v

onde $a = 2$, $b = -8$, e $c = 5$.

$$\begin{aligned} t_v &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-8}{2 \cdot 2} \\ &= -\frac{-8}{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, o tempo que minimiza o deslocamento é $t = 2$ segundos.

Questão 4

Para determinar a concentração c que maximiza a produção P do produto químico, dado que a produção P é descrita pela função quadrática podemos utilizar a fórmula c_v, onde $a = -0{,}1$, $b = 3$, e $c = 20$.

Substituindo $a = -0{,}1$ e $b = 3$:

$$\begin{aligned} c_v &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{3}{2(-0{,}1)} \\ &= -\frac{3}{-0{,}2} \\ &= 15. \end{aligned}$$

Portanto, a concentração c que maximiza a produção P é $c = 15$ mol/L.

Questão 5

- Volume do tanque: $V = 50\pi\,\mathrm{m}^3$
- Custo do material do topo e da base: $R\$25$ por m^2
- Custo do material das laterais: $R\$20$ por m^2

Achando volume V do cilindro

$$V = \pi r^2 h$$

Como $V = 50\pi$, temos

$$\pi r^2 h = 50\pi$$

segue que

$$r^2h = 50 \Rightarrow h = \frac{50}{r^2}$$

A área da base e do topo é πr^2 segue que as duas

$$A_{\text{topo e base}} = 2\pi r^2$$

então o custo é

$$C_{\text{topo e base}} = 2\pi r^2 \times 25 = 50\pi r^2$$

A área lateral é $2\pi rh$. Substituindo $h = \frac{50}{r^2}$ temos que

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r\left(\frac{50}{r^2}\right) = \frac{100\pi}{r}$$

O custo para a área lateral é:

$$C_{\text{lateral}} = \frac{100\pi}{r} \times 20 = \frac{2000\pi}{r}$$

O custo total C é a soma dos custos das áreas da base, do topo e das laterais:

$$C = 50\pi r^2 + \frac{2000\pi}{r}$$

Para minimizar o custo, vamos derivar C.

$$C' = 100\pi r - \frac{2000\pi}{r^2}$$

Fazendo $C' = 0$ temos

$$\begin{aligned}
100\pi r - \frac{2000\pi}{r^2} &= 0\\
100r - \frac{2000}{r^2} &= 0\\
100r^3 &= 2000\\
r^3 &= 20
\end{aligned}$$

Portanto:

$$r = \sqrt[3]{20} \approx 2.71\,\mathrm{m}$$

Para achar h substituindo $r \approx 2.71$ na expressão de h:

$$h = \frac{50}{(2.71)^2} \approx 6.83\,\mathrm{m}$$

- **Raio** $r \approx 2.71\,\mathrm{m}$
- **Altura** $h \approx 6.83\,\mathrm{m}$

Essas são as dimensões que minimizam o custo do tanque.

Questão 6

Para maximizar o lucro anual $L(x)$ da fábrica, onde $L(x)$ é dado por:

$$L(x) = 90x^2 - x^3$$

Primeiro, calculamos a derivada da função lucro $L(x)$ para encontrar os pontos críticos. A derivada é

$$L'(x) = [90x^2 - x^3]' = 180x - 3x^2.$$

Para encontrar os pontos críticos, igualamos a derivada a zero

$$180x - 3x^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$x = 0$$

$$x = 60.$$

Além dos pontos críticos, devemos também verificar os valores de $L(x)$ nas extremidades do intervalo dado, que são $x = 0$ e $x = 80$.

Agora, calculamos $L(x)$ em cada um desses pontos:
Para $x = 0$:

$$\begin{aligned} L(0) &= 90(0)^2 - (0)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para $x = 60$:

$$\begin{aligned} L(60) &= 90(60)^2 - (60)^3 \\ &= 90 \cdot 3600 - 216000 \\ &= 324000 - 216000 \\ &= 108000. \end{aligned}$$

Para $x = 80$:

$$\begin{aligned} L(80) &= 90(80)^2 - (80)^3 \\ &= 90 \cdot 6400 - 512000 \\ &= 576000 - 512000 \\ &= 64000. \end{aligned}$$

O maior valor de lucro é 108000, e ocorre quando $x = 60$.

Portanto, para maximizar o lucro anual, o empresário deve contratar 60 funcionários. O valor máximo do lucro anual é R$ 108000.

Questão 7

Para determinar o instante em que o trânsito é mais rápido, precisamos encontrar o valor máximo da função que representa a velocidade média, $V(t)$. A função dada é

$$V(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 5$$

Fazendo o teste da primeira derivada

$$V'(t) = 3t^2 - 21t + 30$$

Para encontrar os pontos críticos faremos $V'(t) = 0$:

$$3t^2 - 21t + 30 = 0$$

cujas soluções são

$$t = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$t = \frac{7-3}{2} = 2$$

Assim, os pontos críticos são $t = 2$ e $t = 5$.

Achar a velocidade em $t = 2$ e $t = 5$, bem como nas extremidades do intervalo $t = 1$ e $t = 6$:

- Para $t = 1$:

$$\begin{aligned} V(1) &= 1^3 - 10.5 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 + 5 \\ &= 25.5. \end{aligned}$$

- Para $t = 2$:

$$\begin{aligned} V(2) &= 2^3 - 10.5 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 + 5 \\ &= 31. \end{aligned}$$

- Para $t = 5$:

$$\begin{aligned} V(5) &= 5^3 - 10.5 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 5 \\ &= 17.5. \end{aligned}$$

- Para $t = 6$:

$$\begin{aligned} V(6) &= 6^3 - 10.5 \cdot 6^2 + 30 \cdot 6 + 5 \\ &= 23. \end{aligned}$$

O valor máximo é $V(2) = 31$.
Portanto, o trânsito é mais rápido no instante de $t = 2$, que corresponde a 14h.