



MAURA ARAUJO DIAS

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:
APLICAÇÕES E POSSIBILIDADES DIDÁTICAS

Santo André, 2013



Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

MAURA ARAUJO DIAS

**REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:
APLICAÇÕES E POSSIBILIDADES DIDÁTICAS**

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Coorientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro
de Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO MAURA ARAUJO DIAS,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

Santo André, 2013

Agradecimentos

Ao meu amado Anderson Torres, sem o qual eu não teria fechado um ciclo para iniciar outro.

À minha família que me ensinou que conhecimento e inteligência não tem preço.

Ao professor Grisi por ter acreditado em mim (mesmo quando não se via motivo para tal) e por ter me acordado na hora certa.

Ao professor Sinuê, que teve a paciência de descer um grau na escala evolutiva do *Homo Sapiens* e me explicar o óbvio (óbvio para ele, é claro).

Ao professor João que nos alertou em boa hora de que somos ‘a elite do professorado brasileiro’.

Aos meus gigantes colegas Leonardo, Samuel, Vitor, Alexandre e Régis por motivos acadêmicos, mas principalmente pelos não acadêmicos.

Ao professor Márcio pela leitura deveras minuciosa e pelos comentários assaz pertinentes.

E finalmente a Deus, que sempre me ajudou após a oração “Querido Deus, juro que depois dessa vou estudar mais.”

Resumo

O presente texto tem por objetivo propor uma reflexão para o Professor de Matemática do Ensino Médio, debatendo o Ensino da Geometria e dos Números Complexos. Uma introdução teórica, sobre Sistemas de Coordenadas, Vetores e Números Complexos, procura mostrar suas similaridades, além das relações com conceitos de Geometria Plana e Trigonometria. Os números complexos então são apresentados como pares ordenados, e é feito um paralelo entre as operações na forma algébrica $(a + bi)$ e de pares ordenados (a, b) .

Discutimos como podemos pensar no número complexo como número, ponto ou vetor, fomentando o uso da representação geométrica como ferramenta de motivação e aprendizagem. Então, propomos uma maneira mais amigável de apresentar a forma trigonométrica do número complexo para o aluno, utilizando elementos conhecidos da trigonometria e do estudo de vetores no plano cartesiano. Introduzimos a notação polar (r, θ) como uma possibilidade de representar, e comparamos as operações nesta notação e na tradicional forma trigonométrica $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Então, trabalhando principalmente com representações geométricas, associamos as operações com complexos a transformações geométricas no plano, com o objetivo de tornar sua aprendizagem mais significativa. Introduzimos também a notação de Euler, uma representação que facilita a compreensão das operações com complexos na forma trigonométrica.

Finalmente, temos uma aplicação dos temas discutidos, instigada pela obra “Circle Limit IV”, de M. C. Escher, trabalhando um primeiro contato com a Geometria Hiperbólica e o modelo de Poincaré, e propondo uma atividade de inversão do círculo, que pode ser aplicada para os alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Números Complexos, Vetores, Representação Geométrica, Escher.

Abstract

The purpose of this paper is proposing a reflection to the High School Mathematics teacher, which discusses the Teaching of Geometry and Complex Numbers. A theoretical introduction on Coordinate Systems, Vectors and Complex Numbers aims to show their similarities, besides its connections with concepts from Plane Geometry and Trigonometry. Then, Complex Numbers are presented as ordered pairs, and we make a parallel between the operations in algebraic form $(a + bi)$ and ordered pairs (a, b) .

We discuss how we can think about a complex number as a point or a vector, encouraging the use of geometric representation as a motivational and learning tool. Then, we propose a more friendly way to present, to the students, the trigonometric form of the complex number, using already known elements of trigonometry and vectors in the Cartesian plane. We introduce the polar notation (r, θ) as a possibility to represent them, and next, we compare operations on this notation and the traditional trigonometric form $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Then, working mainly with geometric representations, we connect operations on complex numbers with geometric transformations on the plane, aiming to make its learning more meaningful. We also introduce the Euler notation, which is a representation that make the operations in trigonometric form easier to learn.

Finally, we have an application of the topics previously discussed, instigated by the MC Escher's art piece "Circle Limit IV", working a first contact with hyperbolic geometry and the Poincaré model, and proposing an circle inversion activity, that can be applied to the high school students.

Keywords: Mathematics Teaching, Complex Numbers, Vectors, Geometric Representation, Escher.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Sistemas de Coordenadas | 3 |
| 2.1 | O Sistema de Coordenadas Retangulares | 3 |
| 2.2 | O Sistema de Coordenadas Polares | 5 |
| 3 | Uma breve introdução aos Vetores | 8 |
| 3.1 | Adição | 9 |
| 3.1.1 | Método do paralelogramo | 9 |
| 3.1.2 | Método da decomposição | 11 |
| 3.1.3 | Propriedades da adição de Vetores | 17 |
| 3.2 | Subtração | 18 |
| 3.3 | Multiplicação por escalar | 18 |
| 3.4 | Representação de vetores em termos de vetores unitários . . . | 19 |
| 4 | Números Complexos | 20 |
| 4.1 | Representação geométrica | 21 |
| 4.2 | Estrutura operacional | 22 |
| 4.3 | Propriedades da adição e multiplicação de Números Complexos | 22 |
| 4.4 | Operações na forma algébrica e de pares ordenados | 23 |
| 4.4.1 | Adição e Subtração | 23 |
| 4.4.2 | Multiplicação e divisão | 24 |
| 4.4.3 | Números reais e imaginários puros | 26 |
| 5 | Trabalhando com as diversas representações | 28 |
| 5.1 | O plano complexo e os vetores no plano | 28 |
| 5.2 | Representação polar do número complexo | 31 |
| 5.2.1 | Multiplicação | 35 |
| 5.2.2 | Divisão | 36 |
| 5.2.3 | Potenciação | 37 |
| 5.2.4 | Radiciação | 38 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3 | Interpretação geométrica/vetorial de algumas operações | 43 |
| 5.3.1 | Reflexões | 43 |
| 5.3.2 | Dilatações e rotações | 44 |
| 5.4 | A notação de Euler | 50 |
| 6 | Escher, Anjos, Demônios e a inversão do Círculo | 55 |
| 6.1 | Retas no Modelo de Poincaré | 57 |
| 6.2 | Inversão de um ponto em relação a um círculo | 59 |
| 6.2.1 | Usando Régua e Compasso | 60 |
| 6.2.2 | Usando Coordenadas retangulares | 62 |
| 6.2.3 | Usando Números Complexos | 63 |
| 6.3 | Inversão do Círculo Ortogonal | 66 |

Capítulo 1

Introdução

O estudo da Geometria no Ensino Médio é feito, atualmente, de forma bastante fragmentada. Quando se apresenta a Geometria Analítica para o aluno, usualmente no terceiro ano do Ensino Médio, essa apresentação é feita de maneira desvinculada dos Números Complexos (que, muitas vezes, são estudados em outra ‘frente’ em materiais apostilados), e para alguns (ou muitos) alunos é difícil visualizar a possibilidade de representar os vetores – apresentados na aula de Física – no Plano Cartesiano, usando a linguagem aprendida na aula de Geometria. O estudo de funções é feito no primeiro ano do Ensino Médio; no terceiro ano, nem sempre os alunos reconhecem as semelhanças da função linear com a equação da reta quando estudam a reta no Plano Cartesiano.

O presente texto tem por objetivo discutir com o Professor do Ensino Médio as representações da Geometria tal como são, ou poderiam ser, apresentadas para o aluno, focando inicialmente nas representações retangular e polar, usando pares ordenados e números complexos, apresentando para o Professor algumas possibilidades de aplicação, bem como a adequação de cada representação a cada situação. Assim, uma nova visão da Geometria e do estudo dos Números Complexos, mais focada nas representações geométricas do que na manipulação algébrica, será proposta como possibilidade didática, uma vez que não é comum, nos materiais didáticos brasileiros, a aplicação de números complexos como representação de pontos.

Nos capítulos 2, 3 e 4, faremos uma introdução ao estudo dos Sistemas de Coordenadas, Vetores e Números Complexos, apresentando conceitos que serão utilizados no restante do texto, e também discutindo algumas semelhanças e diferenças entre eles. No capítulo 3, ainda, apresentamos alguns métodos de adição de vetores a partir dos conteúdos de Geometria e Trigonometria tra-

balhados no Ensino Fundamental. No capítulo 4, também mostramos uma maneira alternativa de representar o Número Complexo, como par ordenado, fazendo um paralelo das operações nas formas algébrica e de pares ordenados.

No capítulo 5, proporemos algumas atividades para trabalhar as diversas representações do Número Complexo: representação geométrica no Plano Complexo; representação trigonométrica e uma equivalente com pares ordenados; e a representação de Euler como uma alternativa para o ensino da Potenciação e Radiciação de Números Complexos.

Serão também apresentadas algumas transformações no Plano (reflexões, rotações e dilatações) como atividade exploratória para anteceder o estudo das operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica.

Finalmente, temos uma aplicação dos temas discutidos, instigada pela obra “Circle Limit IV”, de M. C. Escher, trabalhando um primeiro contato com a Geometria Hiperbólica e o modelo de Poincaré, e propondo uma atividade de inversão do círculo, que pode ser aplicada para os alunos do Ensino Médio.

Assim, esperamos que o leitor reveja sua prática docente e sua própria visão do ensino dos Números Complexos, e contamos que, assim, algumas aulas de Matemática fiquem mais interessantes, divertidas e significativas.

Capítulo 2

Sistemas de Coordenadas

A representação de pontos, vetores, retas e curvas pode ser feita, em geral, de maneira totalmente geométrica. Porém, uma representação algébrica se faz necessária ou, pelo menos, mais eficiente quando se trata de problemas mais complexos. Assim, representar pontos por suas coordenadas pode facilitar a resolução de problemas, bem como aumentar o alcance da Geometria por lançar mão das ferramentas da Álgebra.

Em [8], Sistema de Coordenadas é definido como uma identificação contínua do plano (espaço) euclidiano com uma região de \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3) que nos permita localizar pontos através de pares (triplos) de números reais.

2.1 O Sistema de Coordenadas Retangulares

O Sistema Cartesiano Ortogonal, ou Sistema de Coordenadas Retangulares, é ferramenta fundamental para essa representação e, embora seja melhor definido usando o conceito de base ortonormal, no Ensino Médio pode ser simplesmente definido conforme [7]:

Eixo Cartesiano (figura 2.1) é uma reta orientada e com origem O e um determinado segmento entendido como unitário. Há uma aplicação bijetora entre os pontos de um eixo dado e o conjunto dos números reais, ou seja, a cada ponto A de um eixo cartesiano corresponde um único número real $x_A = d(O, A)$, que é a abscissa de A .

Um Sistema de Coordenadas Cartesianas é a união de dois eixos \vec{Ox} e \vec{Oy} , perpendiculares na origem O e o plano π determinado por eles.

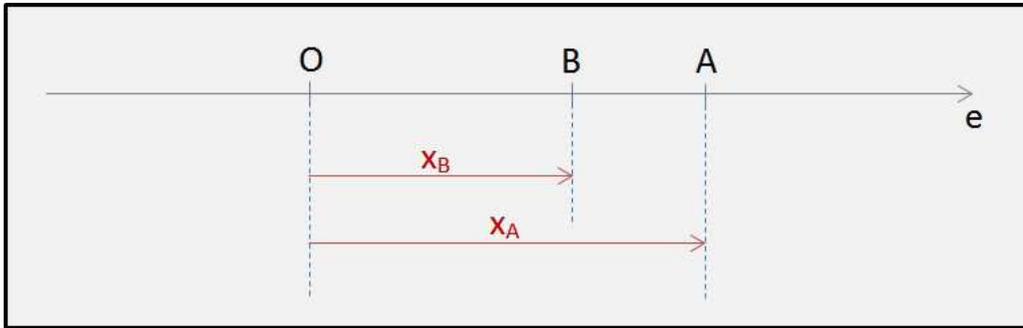


Figura 2.1: Eixo Cartesiano

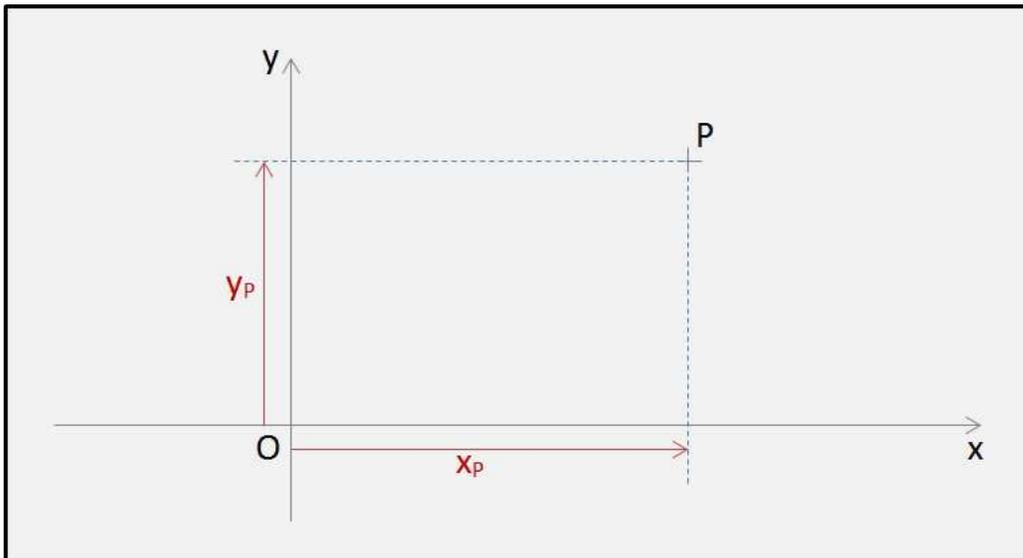


Figura 2.2: Sistema de Coordenadas Cartesianas

Dado um ponto P neste plano, pode-se encontrar a *projeção ortogonal* deste ponto sobre um eixo traçando-se uma reta perpendicular ao eixo que passa sobre o ponto P ; a intersecção desta perpendicular com o eixo é a projeção ortogonal de P sobre o eixo. O ponto P pode ser localizado neste sistema (figura 2.2) através de suas projeções ortogonais sobre os eixos \vec{Ox} e \vec{Oy} . Chamaremos de *abscissa* o número real x_P , que é a distância da origem O à projeção de P sobre o eixo \vec{Ox} e de *ordenada* o número real y_P , que é a distância da origem O à projeção de P sobre o eixo \vec{Oy} .

Assim, podemos associar, a cada ponto no plano, um par ordenado (x_P, y_P) de números reais que o representa.

Quando essa representação é introduzida para os alunos, é importante ressaltar que se trata de algo já conhecido, apenas representado de maneira diferente. Pode-se trabalhar com essa representação a mesma Geometria Euclidiana que já conhecíamos (e outras), apenas usando uma linguagem algébrica, que é mais abrangente do ponto de vista da resolução de problemas.

2.2 O Sistema de Coordenadas Polares

Além das Coordenadas Retangulares, também é possível localizar um ponto em um plano usando um Sistema de Coordenadas Polares, que segundo [7], é definido da seguinte forma:

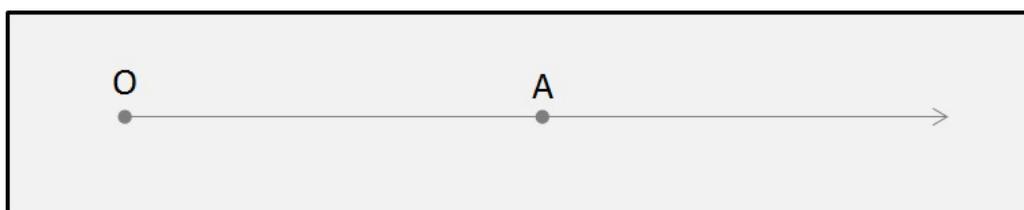


Figura 2.3: Eixo Polar

Polo, ou Origem, é o ponto O , origem da semirreta \overrightarrow{OA} , denominada Eixo Polar (figura 2.3).

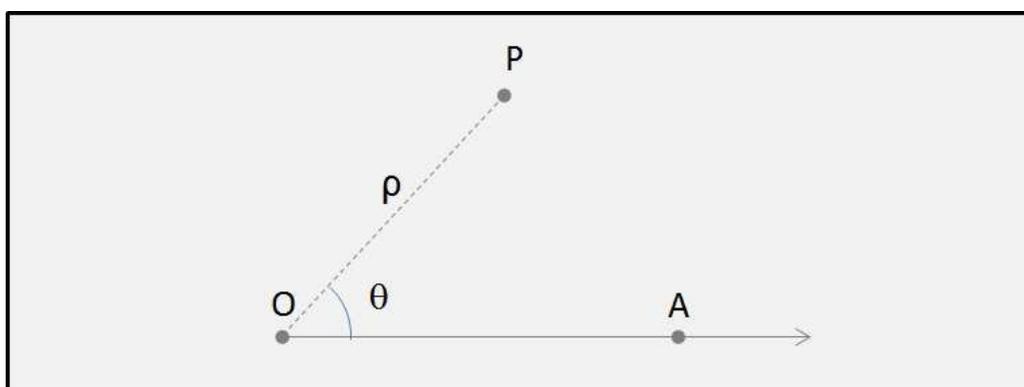


Figura 2.4: Sistema de Coordenadas Polares

Um Sistema de Coordenadas Polares é a união do Eixo Polar (com um segmento unitário como unidade de medida) com um plano que o contém. Dado

um ponto P do plano, pode-se localizar esse ponto com as coordenadas ρ e θ , em que ρ é a distância do ponto P à origem O , e θ é a medida do ângulo orientado $A\hat{O}P$, formado entre o eixo polar e a semirreta \overrightarrow{OA} (figura 2.4). Assim, temos uma outra maneira de representar um ponto no plano, o par ordenado (ρ, θ) .

Observando que:

- Se o ângulo for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, $\theta < 0$.
- Se $\rho < 0$, o ponto P estará localizado no prolongamento do lado terminal do ângulo.
- O par ordenado $(0, \theta)$, representará o pólo para qualquer θ .

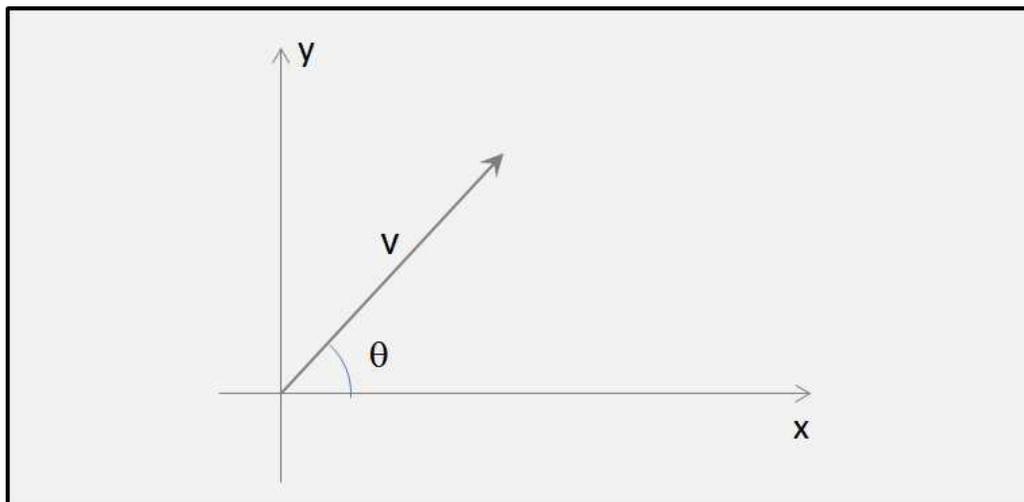


Figura 2.5: Representação de um vetor utilizando módulo e ângulo

Embora seja também uma maneira simples de se representar pontos, o Sistema de Coordenadas Polares – tal como foi apresentado acima – pouco aparece no programa de Matemática do Ensino Médio. Representações similares aparecem em dois momentos: o primeiro, no programa de Física, quando se apresenta um vetor na notação módulo-ângulo (figura 2.5); o segundo momento em que as coordenadas polares (ou algo parecido) são estudadas é na representação geométrica de Números Complexos. Em nenhuma das duas situações, porém, se utiliza a ideia de par ordenado e em geral não se estabelece para o aluno a relação entre as coordenadas retangulares que ele aprende

com a Geometria Analítica, os números complexos, e as componentes de um vetor que usa na Física.

Vamos entender um pouco melhor os vetores e como trabalhar com eles a seguir.

Capítulo 3

Uma breve introdução aos Vetores

No Ensino Médio a ideia de vetor é utilizada principalmente na disciplina Física, focando nos vetores no plano em sua interpretação geométrica, já que nesta disciplina o aluno trabalha com grandezas físicas *escalares* e *vetoriais*. Uma grandeza escalar fica completamente indicada por um número acompanhado da unidade conveniente; exemplos de grandezas escalares são temperatura, massa, tempo. Uma grandeza vetorial deve ser definida não só em módulo (um número com sua unidade), mas também em direção e sentido; como exemplos de grandezas vetoriais temos força, velocidade, deslocamento. Em [2], temos que

“Vetor é o símbolo matemático utilizado para representar o módulo, a direção e o sentido de uma grandeza física vetorial.

O vetor é representado por meio de uma seta com origem O e extremidade P .”

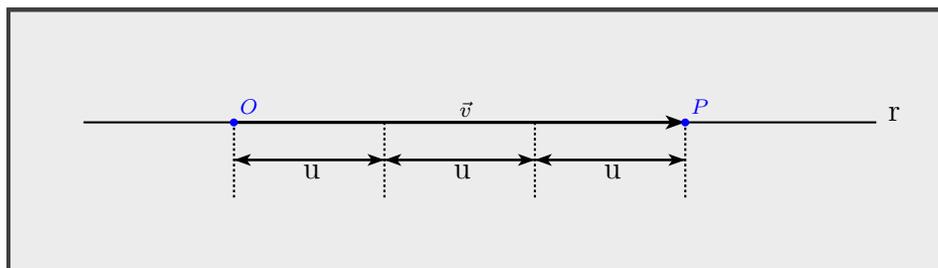


Figura 3.1: O vetor $\vec{v} = \vec{OP}$.

O vetor \vec{OP} (figura 3.1) tem módulo $|\vec{v}| = v = 3u$ (sendo u a unidade de medida adotada), direção da reta r e sentido de O para P .

1. Dois vetores são *iguais* se tiverem o mesmo módulo, direção e sentido (figura 3.2).

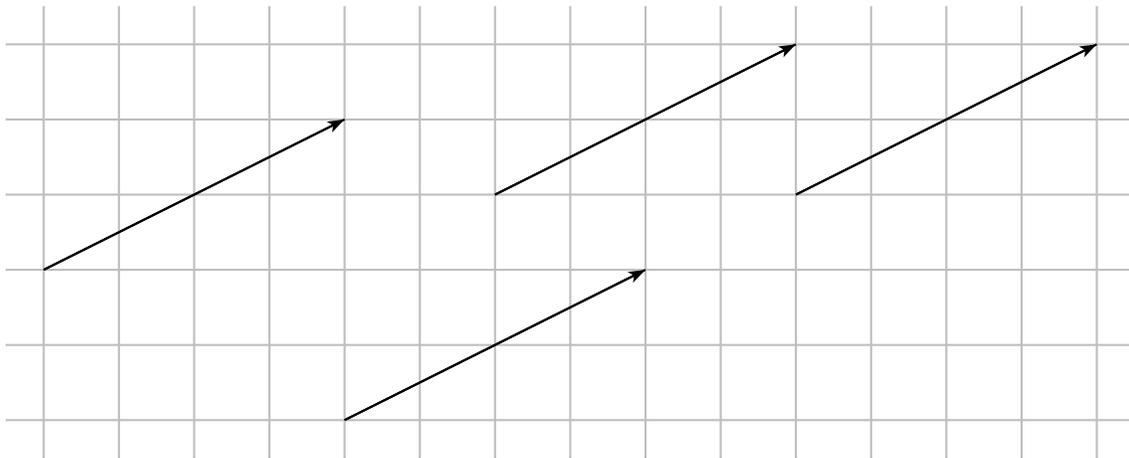


Figura 3.2: Os vetores desta figuras são iguais, embora difiram por seus pontos iniciais e finais.

2. Dois vetores são *opostos* se tiverem o mesmo módulo, direção e sentidos opostos (figura 3.3).

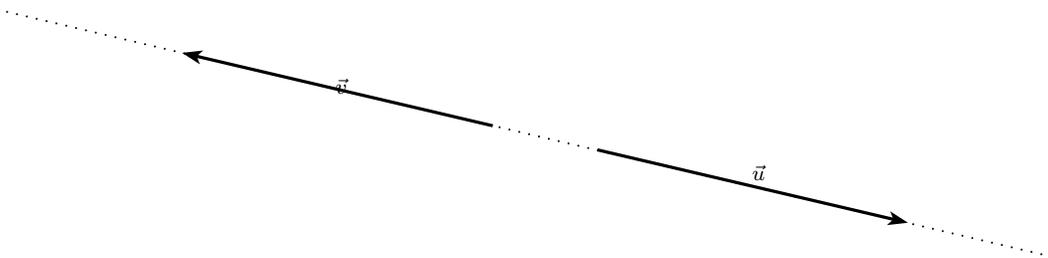


Figura 3.3: Os vetores \vec{u} e \vec{v} são opostos

Tal definição, embora não seja completa e abrangente, é suficiente para os propósitos deste texto, e o que geralmente se usa no Ensino Médio.

3.1 Adição

3.1.1 Método do paralelogramo

Uma maneira de entender a adição de dois vetores \vec{a} e \vec{b} , é obtendo o vetor soma (ou resultante) \vec{R} graficamente, através do *método do paralelogramo*.

Toma-se um representante de cada um dos dois vetores com a mesma origem O e, a partir das extremidades de cada um deles, traça-se uma paralela ao outro vetor, determinando um paralelogramo; o vetor resultante é a diagonal do paralelogramo, com origem em O (figura 3.4).

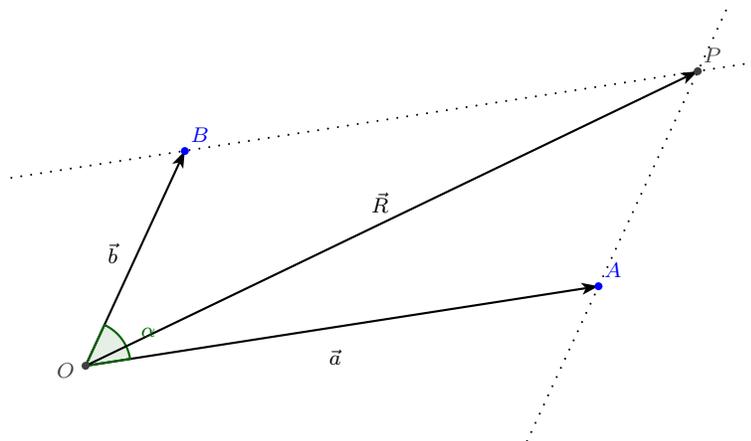


Figura 3.4: O método do paralelogramo

1. Se os vetores \vec{a} e \vec{b} tiverem a mesma direção e sentido, o vetor resultante terá mesma direção e sentido, e módulo igual à soma dos módulos de \vec{a} e \vec{b} , ou seja, $R = a + b$.
2. Se os vetores \vec{a} e \vec{b} tiverem a mesma direção e sentidos opostos, o vetor resultante terá mesma direção, sentido do vetor de maior módulo, e módulo igual à diferença dos módulos de \vec{a} e \vec{b} , ou seja, $R = |a - b|$.
3. Se os vetores não forem paralelos, aplicamos a lei dos cossenos no triângulo OAP da figura 3.4, e o módulo é dado por

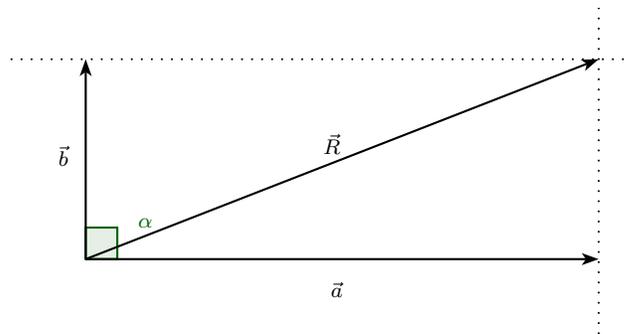
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (3.1)$$

A direção de \vec{R} é a da reta \overline{OP} e o sentido é de O para P .

Observação: Se os dois vetores forem perpendiculares entre si ($\alpha = 90^\circ$), para obter o módulo do vetor resultante basta aplicar o Teorema de Pitágoras, o que é consistente com a equação (3.1).

$$R^2 = a^2 + b^2$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$



3.1.2 Método da decomposição

Outro método comumente trabalhado no Ensino Médio é o *método da decomposição*, ou *método das projeções*, que trabalha com as projeções ortogonais dos vetores nos eixos \vec{Ox} e \vec{Oy} do Sistema Cartesiano. Essas projeções são as *componentes retangulares do vetor*:

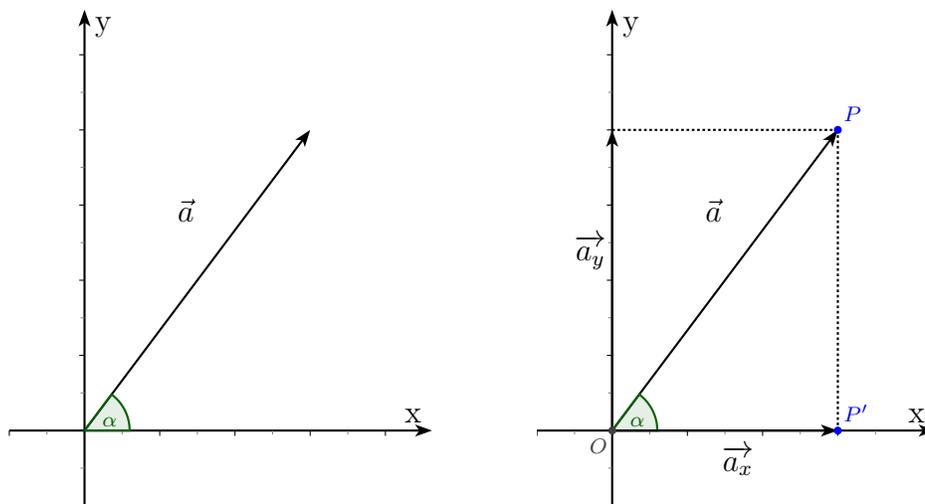


Figura 3.5: Decomposição de um vetor

Dado um vetor \vec{a} , com ponto inicial na origem de um sistema de eixos ortogonais \vec{Ox} e \vec{Oy} , obtemos as componentes retangulares vetoriais \vec{a}_x e \vec{a}_y projetando ortogonalmente as extremidades do vetor \vec{a} nos eixos x e y . O comprimento dessas componentes é calculado a partir das já conhecidas relações trigonométricas no triângulo OPP' , que é retângulo em P' (figura 3.5):

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_x}{a}$$

$$a_x = a \cdot \cos \alpha \quad (3.2)$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_y}{a}$$

$$a_y = a \cdot \sin \alpha \quad (3.3)$$

As componentes retangulares podem ser positivas ou negativas. A componente a_x será positiva se apontar na direção do eixo \vec{Ox} positivo, e negativa se apontar na direção do eixo \vec{Ox} negativo; a componente a_y será positiva se apontar na direção do eixo \vec{Oy} positivo, e negativa se apontar na direção do eixo \vec{Oy} negativo (tabela 3.1).

| | |
|---------------------|---------------------|
| 2º quadrante | 1º quadrante |
| a_x negativa | a_x positiva |
| a_y positiva | a_y positiva |
| a_x negativa | a_x positiva |
| a_y negativa | a_y negativa |
| 3º quadrante | 4º quadrante |

Tabela 3.1: Os sinais das componentes retangulares de um vetor dependem do quadrante onde ele se encontra (supondo seu ponto inicial na origem).

Do mesmo triângulo OPP' podemos encontrar as relações que darão o módulo $|\vec{a}|$ e o ângulo α que o vetor \vec{a} forma com os eixos a partir de suas componentes:

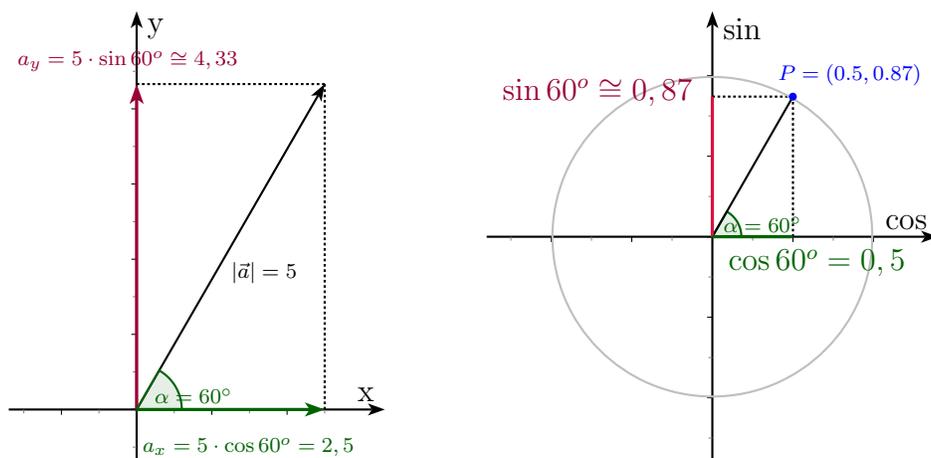
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3.4)$$

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} \quad (3.5)$$

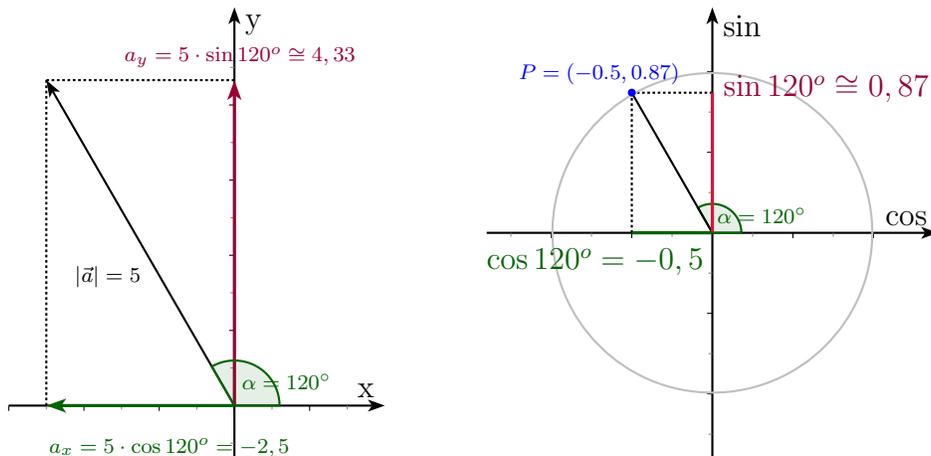
É importante trabalhar com essas decomposições em todos os quadrantes, verificando com os alunos que os sinais são coerentes com os sinais do seno e do cosseno no ciclo trigonométrico.

Vejamos alguns exemplos de decomposição em cada um dos quadrantes, observando os sinais das componentes:

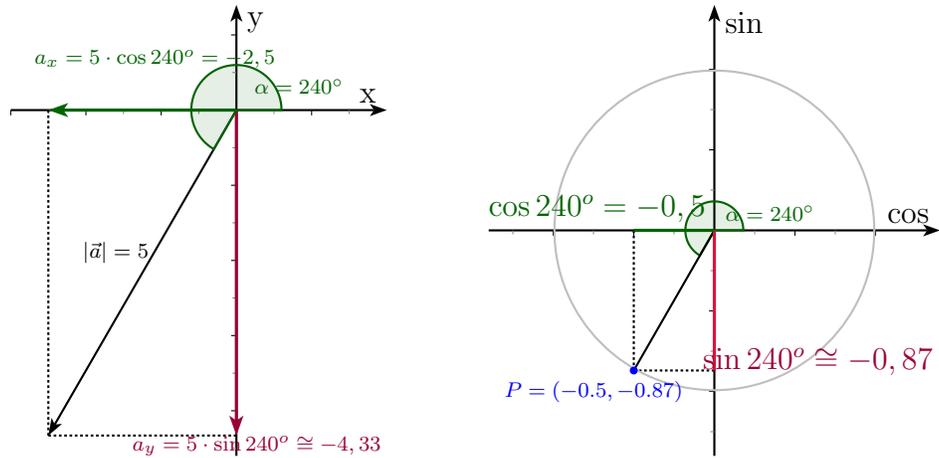
Exemplo 3.1: o vetor \vec{a} tem módulo $|\vec{a}| = 5$ e forma ângulo $\alpha = 60^\circ$ com o eixo \overrightarrow{Ox} positivo:



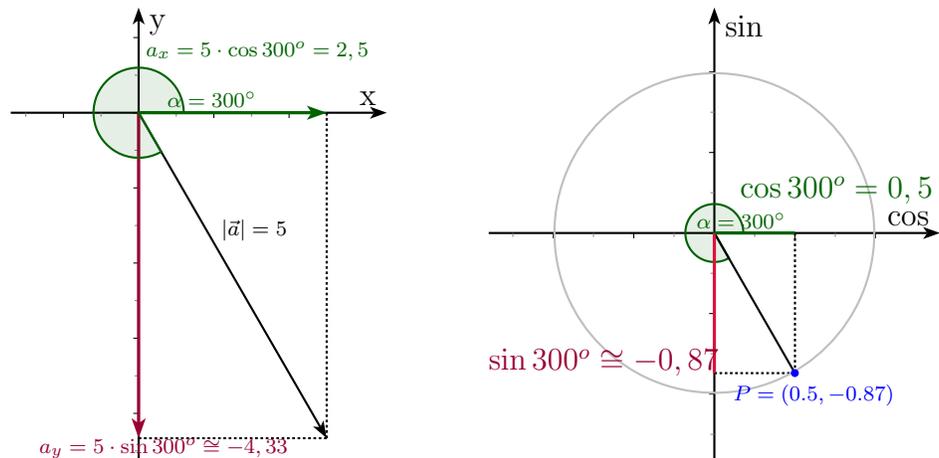
Exemplo 3.2: o vetor \vec{a} tem módulo $|\vec{a}| = 5$ e forma ângulo $\alpha = 120^\circ$ com o eixo \overrightarrow{Ox} positivo:



Exemplo 3.3: o vetor \vec{a} tem módulo $|\vec{a}| = 5$ e forma ângulo $\alpha = 240^\circ$ com o eixo \vec{Ox} positivo:



Exemplo 3.4: o vetor \vec{a} tem módulo $|\vec{a}| = 5$ e forma ângulo $\alpha = 300^\circ$ com o eixo \vec{Ox} positivo:



Os exemplos acima sugerem uma representação do vetor por suas componentes e, de fato, segundo [10], todo vetor pode ser inteiramente descrito por suas componentes. De acordo com o método do paralelogramo, a soma das componentes vetoriais \vec{a}_x e \vec{a}_y é o próprio vetor \vec{a} , então podemos dizer que

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y. \quad (3.6)$$

Essa ideia vai facilitar a adição de dois ou mais vetores, através da seguinte estratégia:

1. Representar, no Plano Cartesiano, um representante de cada um dos vetores a serem somados.
2. Decompor todos os vetores.
3. Somar as componentes em cada um dos eixos, determinando assim as componentes do vetor soma.
4. Para calcular o módulo da resultante, usar (3.4).
5. Para calcular o ângulo da resultante com o eixo \vec{Ox} , usar (3.5).

Além disso, esse método traz uma linguagem que – veremos na seção 3.4 – se aproxima das representações de par ordenado e número complexo no plano.

Exemplo 3.5: Um andarilho inicia uma caminhada dirigindo-se, no primeiro dia, somente para nordeste e caminhando 20km nesse sentido; no segundo dia, ele caminha 25km em um rumo 30° a sudeste. Determine (a) as componentes retangulares do deslocamento do andarilho em cada dia e (b) o módulo e a direção do deslocamento resultante desta caminhada.

Solução (a) Chamaremos os vetores deslocamento do 1º e 2º dias respectivamente de \vec{a} e \vec{b} . Escolheremos como ponto inicial, convenientemente, a origem do sistema; o gráfico da situação se encontra na figura 3.6.

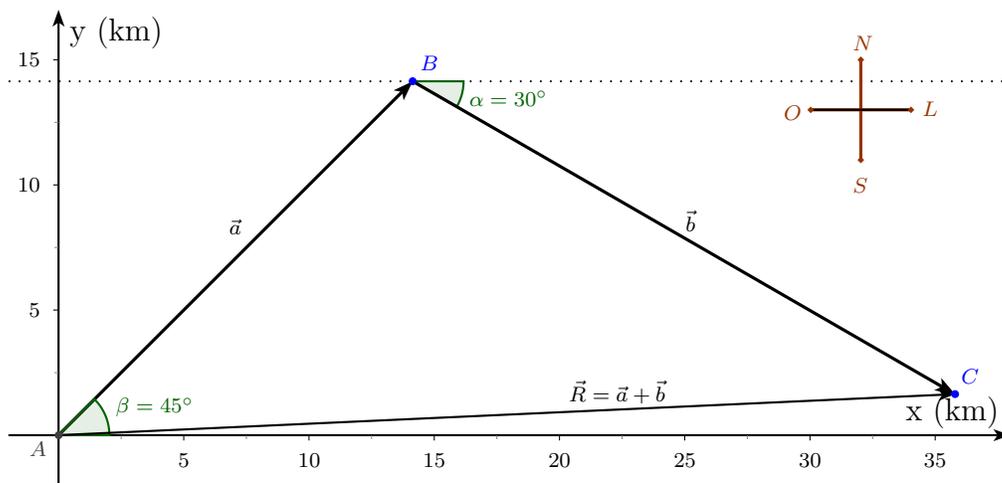
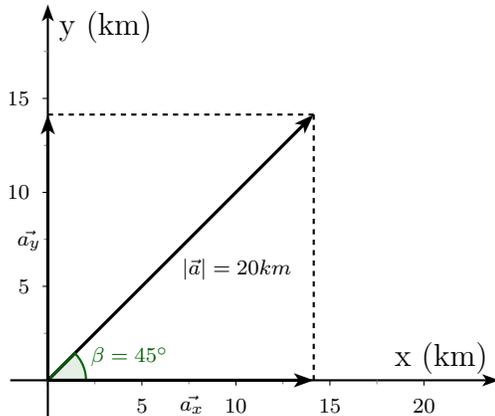


Figura 3.6: (Exemplo 3.5) O vetor \vec{R} é a soma vetorial de \vec{a} e \vec{b} , e representa o deslocamento do andarilho.

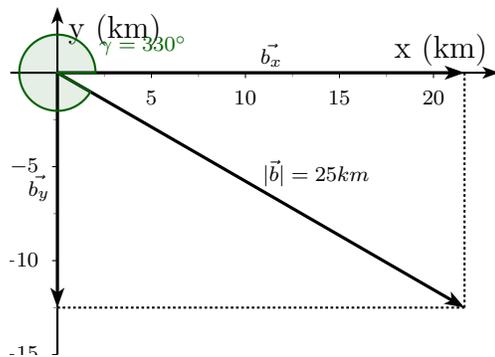
Vamos agora representar os vetores separadamente, ambos com ponto inicial na origem, e calcular suas coordenadas:



O vetor \vec{a} aponta para nordeste, ou seja, está a 45° do leste para o norte. Vamos representá-lo como um vetor de módulo $20km$ e ângulo 45° com o eixo \vec{Ox} positivo. Calculando as componentes de \vec{a} usando (3.2) e (3.3), temos:

$$a_x = 20km \cdot \cos 45^\circ \cong 14,14km$$

$$a_y = 20km \cdot \sin 45^\circ \cong 14,14km$$



O vetor \vec{b} está a 30° do leste para o sul. Vamos representá-lo como um vetor de módulo $25km$ e ângulo $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ com o eixo \vec{Ox} positivo. Calculando as componentes de \vec{b} usando (3.2) e (3.3), temos:

$$b_x = 25km \cdot \cos 330^\circ \cong 21,65km$$

$$b_y = 25km \cdot \sin 330^\circ = -12,50km$$

(b) Somando-se as componentes em cada eixo:

$$R_x = a_x + b_x \cong 14,14km + 21,65km = 35,79km$$

$$R_y = a_y + b_y \cong 14,14km - 12,50km = 1,64km$$

Calculando-se o módulo da resultante usando (3.4):

$$|\vec{R}| \cong \sqrt{(35,79km)^2 + (1,64km)^2} \cong 35,83km$$

Calculando-se o ângulo entre a resultante e o eixo x usando (3.5):

$$\tan \theta \cong \frac{1,64}{35,79} \cong 0,04588$$

$$\theta = \tan^{-1}0,04588 \cong 2,63^\circ$$

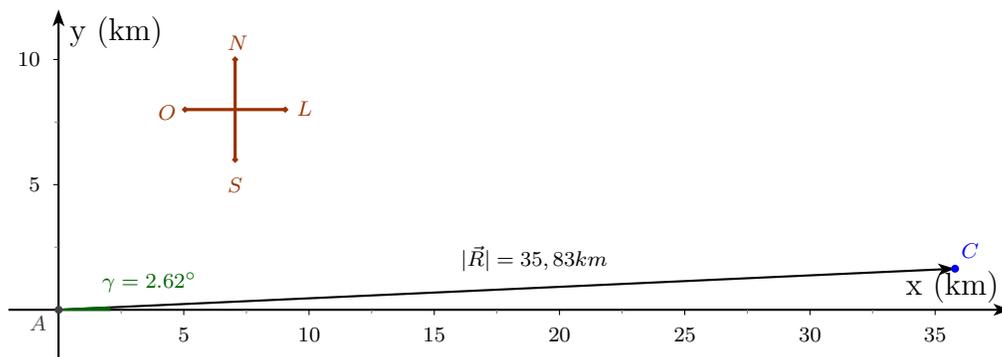


Figura 3.7: O deslocamento resultante do andarilho foi de $35,83km$, em ângulo de $2,63^\circ$ do leste para o norte.

3.1.3 Propriedades da adição de Vetores

A adição de vetores respeita as seguintes propriedades (neste texto estamos interessados nos vetores pertencentes ao \mathbb{R}^2 , porém estas propriedades funcionam em outros conjuntos também):

P_1 . Comutatividade: dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

P_2 . Associatividade: dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

P_3 . Elemento Neutro: dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

Geometricamente, entendemos o vetor nulo $\vec{0}$ como um vetor de módulo igual a zero, para o qual não se define direção nem sentido.

P_4 . Elemento Simétrico: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \exists -\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (chamado simétrico aditivo, ou oposto) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

3.2 Subtração

Usando o *vetor oposto* apresentado no início deste capítulo (figura 3.3), definimos a subtração dos vetores $\vec{a} - \vec{b}$ (figura 3.8) como a adição do vetor \vec{a} com o vetor oposto de \vec{b} , que chamaremos $-\vec{b}$.

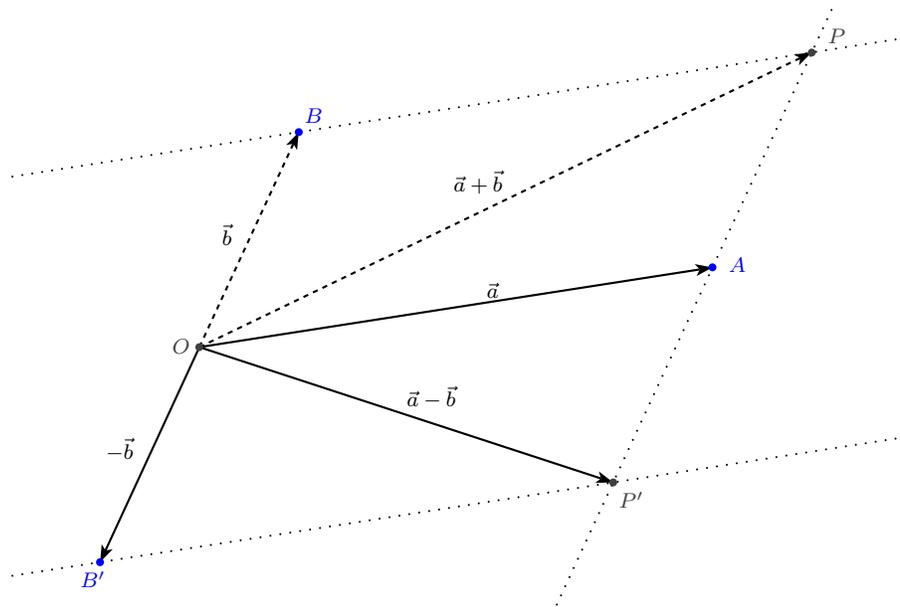


Figura 3.8: Subtração de vetores

3.3 Multiplicação por escalar

Para multiplicar um vetor \vec{v} por uma grandeza escalar m :

- Se m for um número positivo, o produto $m \cdot \vec{v}$ é um vetor de módulo $m \cdot |\vec{v}|$, com a mesma direção e sentido de \vec{v} .
- Se m for um número negativo, o produto $m \cdot \vec{v}$ é um vetor de módulo $|m| \cdot |\vec{v}|$, com a mesma direção e sentido oposto ao de \vec{v} .

3.4 Representação de vetores em termos de vetores unitários

Embora pouco usada no Ensino Médio, a representação de vetores usando *vetores unitários* deve ser investigada como possibilidade didática pois, além de não exigir pré-requisitos extras, pode facilitar a resolução de alguns problemas.

Segundo [10], “um *vetor unitário* é um vetor adimensional com o módulo unitário, que se usa para definir certa *direção*”. Para representar a direção do eixo x , usa-se o vetor \hat{i} e para representar a direção do eixo y , usa-se o vetor \hat{j} ; assim, \hat{i} e \hat{j} são vetores mutuamente ortogonais cujo módulo é igual a 1 (figura 3.9).

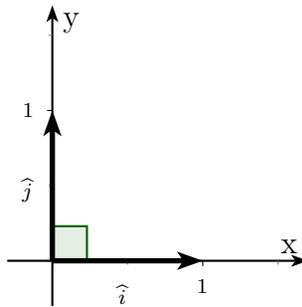


Figura 3.9: Os vetores unitários são usados para representar direções

Com a notação dos vetores unitários, o vetor representado na expressão (3.6) pode ser escrito equivalentemente como

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} \quad (3.7)$$

$a_x \cdot \hat{i}$ e $a_y \cdot \hat{j}$ são as *componentes vetoriais* e não devem ser confundidos com as *componentes* a_x e a_y do vetor.

Usando essa representação, os vetores \vec{a} e \vec{b} do exemplo 3.5 ficariam representados e somados da seguinte forma:

$$\vec{a} = 14, 14\hat{i} + 14, 14\hat{j}$$

$$\vec{b} = 21, 65\hat{i} - 12, 50\hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (14, 14 + 21, 65)\hat{i} + (14, 14 - 12, 50)\hat{j} = 35, 79\hat{i} + 1, 64\hat{j}$$

Capítulo 4

Números Complexos

Quando se introduz o assunto *Números complexos* no Ensino Médio, em geral se apresenta uma equação do segundo grau sem raízes reais, o que funciona como motivação para a investigação do conjunto \mathbb{C} . Segundo [6]: “A necessidade de se obter uma solução para esse tipo de problema [equações sem soluções reais] levou os matemáticos a procurar novos conjuntos em que ‘o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo’.” Tal abordagem é superficial pois, além de a criação desse conjunto não ter sido tão simples assim, as aplicações do conjunto dos Números Complexos extrapolam a simples resolução de equações polinomiais.

Na sequência desta ‘*contextualização*’, é apresentada a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, como solução para conseguir “*tirar raiz quadrada de um número negativo*”. Note-se que a unidade imaginária é mais uma solução de linguagem, com a qual conseguimos *representar* raízes de números negativos. Uma definição comum nos livros didáticos é [5] (tradução livre):

“Números complexos são números na forma $a + i \cdot b$, em que a e b são números reais (...)”. O número a é chamado de *parte real* e o número b de *parte imaginária*.

O *Conjugado do número complexo* $a + i \cdot b$ é o número $a + i \cdot (-b) = a - i \cdot b$.

Neste capítulo, além de apresentar a estrutura operacional do conjunto dos Números Complexos, mostraremos outra maneira de representar o Número Complexo, como par ordenado. Faremos também um paralelo das operações nas duas formas: algébrica ($a + bi$) e de pares ordenados.

4.1 Representação geométrica

Um número complexo pode ser representado geometricamente no *Plano Complexo*. Este plano é nada mais que o já conhecido – e apresentado na seção 2.1 – Plano Cartesiano, mas agora com um novo nome. O eixo \vec{Ox} passa a se chamar *eixo real* e o eixo \vec{Oy} , *eixo imaginário*. A cada número complexo é associado um ponto (chamado *afixo*) neste plano. A parte real é a abscissa e a parte imaginária, a ordenada.

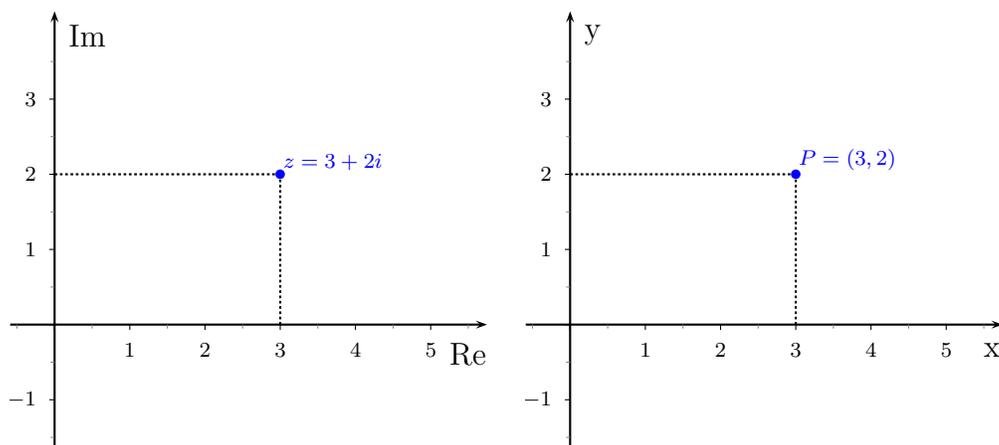


Figura 4.1: O número complexo $3 + 2i$ representado, à esquerda, no tal *Plano de Argand-Gauss* e, à direita, como o par ordenado $(3, 2)$.

Os sinais nos quadrantes funcionam da mesma forma que no Sistema de coordenadas retangulares, no Ciclo trigonométrico e na decomposição de vetores (tabela 4.1):

| | |
|---|---|
| 2º quadrante parte real negativa parte imaginária positiva | 1º quadrante parte real positiva parte imaginária positiva |
| parte real negativa parte imaginária negativa 3º quadrante | parte real positiva parte imaginária negativa 4º quadrante |

Tabela 4.1: A localização do afixo de um número complexo.

A representação geométrica é ferramenta útil e, como pode-se ver na figura 4.1, é – ou deveria ser – natural que o aluno observe a relação no momento

em que se representa um número complexo no plano.

Porém, antes de discutir isto, vamos entender melhor a estrutura das operações no conjunto dos complexos.

4.2 Estrutura operacional

Em [5], temos uma definição mais formal de número complexo:

“Um *número complexo* é um par ordenado (a, b) de números reais com as seguintes propriedades: dois números complexos (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$. A soma e o produto de dois números complexos (a, b) e (c, d) são definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)”$$

Observe que essa definição vai tratar do número como um par ordenado, e veremos que é perfeitamente consistente com aquela $a + i \cdot b$ com a qual já estamos acostumados.

4.3 Propriedades da adição e multiplicação de Números Complexos

P_1 . Comutatividade: dados $a, b \in \mathbb{C}$,

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

P_2 . Associatividade: dados $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

P_3 . Elemento Neutro: dado $a \in \mathbb{C}$,

$$\exists 0 \in \mathbb{C} \text{ tal que } a + 0 = 0 + a = a$$
$$\exists 1 \in \mathbb{C} \text{ tal que } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

P_4 . Elemento Simétrico:

a) $\forall a \in \mathbb{C}, \exists -a \in \mathbb{C}$ (chamado simétrico aditivo, ou oposto) tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

b) $\forall a \in \mathbb{C} (a \neq 0), \exists a^{-1} \in \mathbb{C}$ (chamado simétrico multiplicativo, ou inverso) tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

P_5 . Distributividade: dados $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

A seguir veremos como é simples trabalhar com ambas as representações.

4.4 Operações na forma algébrica e de pares ordenados

Quando trabalhamos com o número na forma $a + i \cdot b$ (que chamamos ‘forma algébrica’), é intuitivo para os alunos que as operações funcionem *mais ou menos* da mesma forma que no conjunto dos reais.

4.4.1 Adição e Subtração

A operação de adição de pares ordenados é análoga à operação na forma algébrica. A relação é tão direta que ambas podem ser apresentadas para os alunos de uma só vez, para facilitar.

| | | |
|--|--|------------------------------------|
| Forma algébrica | | Pares ordenados |
| $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ | | $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ |

A partir da definição de adição de complexos apresentada na seção 4.2, podemos investigar a operação de subtração.

Podemos entender a subtração $(a, b) - (c, d)$ como a adição do complexo (a, b) com o oposto de (c, d) , que, de acordo com a propriedade $P_4(a)$, é $(-c, -d)$. Então:

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + [-(c, d)] = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d).$$

| | |
|--|------------------------------------|
| Forma algébrica | Pares ordenados |
| $(a - ib) + (c - id) = (a - c) + i(b - d)$ | $(a, b) + (c, d) = (a - c, b - d)$ |

4.4.2 Multiplicação e divisão

Para multiplicar os números $a + ib$ e $c + id$, lembramos que $i = \sqrt{-1}$ e que $i^2 = -1$ e fazemos:

$$\begin{aligned} (a + ib) \cdot (c + id) &= ac + ibc + iad + i^2bd = \\ &= ac + (-1)bd + ibc + iad = (ac - bd) + i(bc + ad) \end{aligned}$$

| | |
|--|--|
| Forma algébrica | Pares ordenados |
| $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$ | $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ |

Fazer a divisão $\frac{(a, b)}{(c, d)}$ (com $(c, d) \neq (0, 0)$) significa procurar um número complexo (x, y) que satisfaça

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y)$$

fazendo a multiplicação,

$$(a, b) = (cx - dy, dx + cy)$$

e os números reais x e y devem satisfazer

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases},$$

e este sistema tem solução única:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Assim,

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Esse raciocínio é o mesmo que *multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador*:

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} \\ &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

| Forma algébrica | Pares ordenados |
|---|---|
| $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ | $\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$ |

4.4.3 Números reais e imaginários puros

Considerando-se os números complexos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, temos:

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0) \text{ e} \\ \frac{(a, 0)}{(b, 0)} &= \left(\frac{a}{b}, 0\right)\end{aligned}$$

que funcionam da mesma forma que as operações entre os números reais a e b . Podemos entender que um número real é um número complexo cuja *segunda componente* é zero. Ou, como é mais comum, cuja *parte imaginária* é zero.

Considerando os números reais a e b (que podem ser representados como $a + 0i$ e $b + 0i$, ou ainda $(a, 0)$ e $(b, 0)$), vamos comparar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão (nesta última, $b \neq 0$):

| Forma algébrica | Pares ordenados |
|--|---|
| $\begin{aligned}(a + 0i) + (b + 0i) &= \\ &= (a + b) + i(0 + 0) = \\ &= (a + b) + 0i = a + b\end{aligned}$ | $\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= \\ &= (a + b, 0 + 0) = \\ &= (a + b, 0)\end{aligned}$ |
| $\begin{aligned}(a + 0i) - (b + 0i) &= \\ &= (a - b) + i(0 - 0) = \\ &= (a - b) + 0i = a - b\end{aligned}$ | $\begin{aligned}(a, 0) - (b, 0) &= \\ &= (a - b, 0 - 0) = \\ &= (a - b, 0)\end{aligned}$ |
| $\begin{aligned}(a + 0i) \cdot (b + 0i) &= \\ &= (a \cdot b + 0 \cdot 0) + i(0 \cdot b + a \cdot 0) = \\ &= (ab + 0) + 0i = ab\end{aligned}$ | $\begin{aligned}(a, 0) \cdot (b, 0) &= \\ &= (ab + 0 \cdot 0, 0 \cdot b + a \cdot 0) = \\ &= (ab, 0)\end{aligned}$ |
| $\begin{aligned}\frac{a + 0i}{b + 0i} &= \\ &= \frac{a \cdot b + 0 \cdot 0}{b^2 + 0^2} + i \cdot \frac{0 \cdot b - a \cdot 0}{b^2 + 0^2} = \\ &= \frac{ab}{b^2} + i \cdot \frac{0}{b^2} = \\ &= \frac{a}{b} + 0i = \frac{a}{b}\end{aligned}$ | $\begin{aligned}\frac{(a, 0)}{(b, 0)} &= \\ &= \left(\frac{a \cdot b + 0 \cdot 0}{b^2 + 0^2}, \frac{0 \cdot b - a \cdot 0}{b^2 + 0^2}\right) = \\ &= \left(\frac{ab}{b^2}, \frac{0}{b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a}{b}, 0\right)\end{aligned}$ |

Agora, considerando que a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ é o número complexo $(0, 1)$, temos que

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$$

o que é compatível com $i^2 = -1$.

Assim, o número complexo (a, b) pode ser escrito como

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$$

o que justifica a expressão $a + i \cdot b$.

Da mesma forma, um número complexo cuja primeira coordenada (parte real) seja igual a 0, é um imaginário puro, e pode ser escrito na forma $(0, a)$.

Seguem, no próximo capítulo, algumas sugestões que podem fazer uma grande parte dos alunos – e não só aqueles que gostam de Matemática – se interessarem e entenderem a relação entre essas diversas representações.

Capítulo 5

Trabalhando com as diversas representações em sala de aula

Neste capítulo, proporemos algumas atividades para trabalhar as diversas representações do Número Complexo: na representação geométrica, serão observadas as semelhanças com o estudo dos vetores; na representação polar, ou trigonométrica, mostraremos as relações trigonométricas e apresentaremos um paralelo das operações na forma trigonométrica e de pares ordenados; mostraremos também a representação de Euler como uma alternativa para o ensino da Potenciação e Radiciação de Números Complexos. Algumas transformações no Plano (reflexões, rotações e dilatações) serão usadas como atividade exploratória para anteceder o estudo das operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica.

5.1 O plano complexo e os vetores no plano

Já que definimos um número complexo também como um par ordenado, e sabendo que o conjunto de todos os pares ordenados tem uma correspondência biunívoca com o plano \mathbb{R}^2 , é direto e natural (para os alunos também) que o número complexo $z = x + iy$ corresponda ao ponto (x, y) no plano \mathbb{R}^2 , como já vimos um exemplo na figura 4.1.

Pensando assim, os números reais, que têm a parte imaginária nula, são pontos do tipo $(x, 0)$, e correspondem a cada um dos pontos do eixo \overrightarrow{Ox} , o que justifica chamarmos-lo de *eixo real*. Da mesma forma, os imaginários puros, do tipo $(0, y)$, correspondem aos pontos do eixo \overrightarrow{Oy} , e assim o chamamos de *eixo imaginário*.

Pensemos em uma adição de complexos, algebricamente e geometricamente:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 + i) = (3 + 5) + i(2 + 1) = 8 + 3i$$

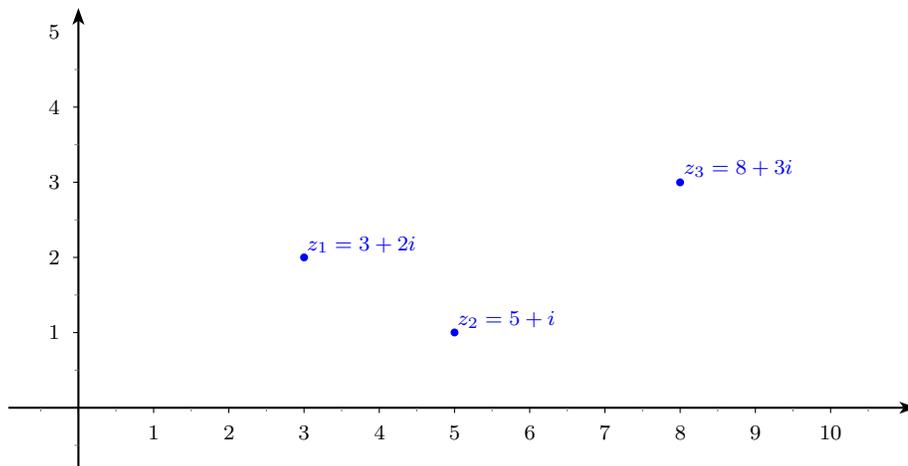


Figura 5.1: Adição de complexos

Essa adição nos faz pensar que seria interessante considerar um número complexo como um vetor; assim, o número complexo $z = x + iy$ é o vetor cujo ponto inicial é a origem $(0, 0)$ e cujo ponto final é o próprio (x, y) . Mais simples ainda, o complexo $z = x + iy$ é o vetor cujas projeções ortogonais são x e y . Vejamos como a ‘regra do paralelogramo’ nos ajuda a visualizar melhor a adição de complexos (figura 5.2):

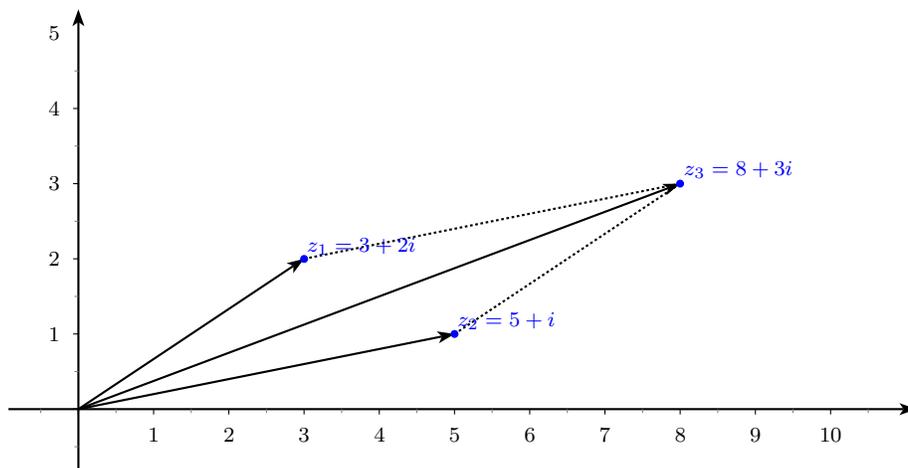


Figura 5.2: Adição de complexos pensando em vetores

Da mesma forma, podemos fazer um paralelo entre a multiplicação de um número complexo por um número real e a multiplicação de um vetor por um escalar. Vejamos um exemplo, com o número complexo $z = 4 - 5i$ e o vetor $\vec{v} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ sendo multiplicados pelo número real 3:

número real · número complexo

$$\begin{aligned} w &= 3z \\ w &= 3 \cdot (4 - 5i) \\ w &= 12 - 15i \end{aligned}$$

escalar · vetor

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3\vec{v} \\ \vec{u} &= 3 \cdot (4\hat{i} - 5\hat{j}) \\ \vec{u} &= 12\hat{i} - 15\hat{j} \end{aligned}$$

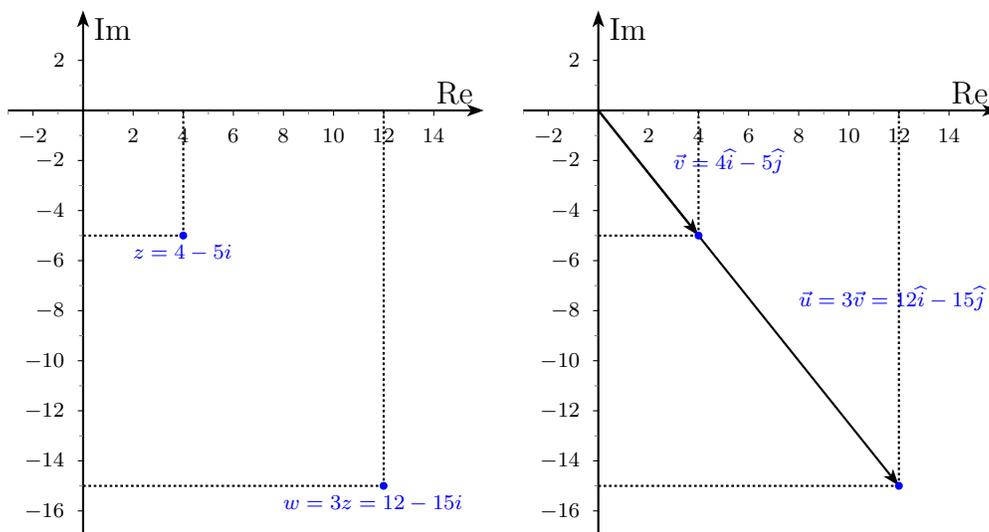


Figura 5.3: Paralelo entre a multiplicação de um número real por complexo e vetor

Podemos então pensar no número complexo como número, ponto ou vetor, e usar o que for mais adequado para cada situação. Do ponto de vista didático, é importante que o aluno consiga permear as diversas representações, percebendo quando são a mesma ‘coisa’, representada de um jeito ou de outro, mas com as mesmas (ou quase as mesmas) operações, propriedades etc.

Para Matemáticos, bem como para profissionais que usem a Matemática como ferramenta de resolução de problemas, essa interpretação geométrica apresentada pode parecer absolutamente trivial. Porém, ao aluno de Ensino Médio, em geral, as operações com números complexos são apresentadas

apenas como um sequência maçante de regras e algoritmos; é muito comum encontrar alunos que trabalham muito bem com números complexos mas se dizem péssimos para trabalhar com vetores, e *vice-versa*, e aqueles que dizem ‘não entendo porque não consigo *ver*’. Apresentar a interpretação acima em sala de aula é algo muito simples, que praticamente não demandará tempo/planejamento extra, mas que, por outro lado, pode fazer com que os alunos compreendam melhor este tópico.

5.2 Representação polar do número complexo

Para aprofundar essa interpretação geométrica, ou vetorial, temos que analisar uma diferença importante entre vetores e números complexos: no conjunto dos números complexos a operação de multiplicação é fechada (ou seja, o produto de dois números complexos é um número complexo), mas, quando falamos de vetores, ela não é bem definida! O produto escalar de dois vetores é um número real, e o produto vetorial é um vetor, porém não coplanar com os vetores multiplicados e, assim como o produto misto, somente faz sentido no espaço tridimensional. Para multiplicar e dividir complexos, além de fácil, a forma polar permite interpretações geométricas muito interessantes, que (no mínimo) irão motivar o aluno, mas principalmente serão ferramentas poderosas de aprendizagem. Vamos entender estas operações e suas representações.

Na seção 5.1 começamos a entender o complexo $z = x + iy$ como o vetor cujas projeções ortogonais são x e y . Para trabalhar essa ideia em sala de aula, sugerimos uma interdisciplinaridade com Física, pois no Ensino Médio, em geral, não se trata de vetores na aula de Matemática. Ora, se o aluno já aprendeu, ou está aprendendo (e nessa hora um planejamento conjunto com o professor de Física se faz necessário) a decomposição e a adição de vetores (seção 3.1), vamos aproveitá-la!

Assim, quando apresentamos a *forma trigonométrica do número complexo*, não precisamos falar do módulo e argumento como se fossem coisas novas. Basta relacionar o número complexo $z = x + iy$ (figura 5.4), cuja imagem é o ponto $P = (x, y)$, com o vetor \overrightarrow{OP} . O módulo de z , analogamente ao módulo do vetor, é a distância entre a origem $O = (0, 0)$ e o ponto $P = (x, y)$:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.1)$$

O argumento θ é, assim como para o vetor, o ângulo entre o segmento \overline{OP} e o eixo \overrightarrow{Ox} positivo, e valem as relações

$$x = r \cos \theta \quad (5.2)$$

$$y = r \sin \theta \quad (5.3)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ se } x \neq 0 \quad (5.4)$$

$\theta = 90^\circ$, se $x = 0$ e $y > 0$
 $\theta = 270^\circ$, se $x = 0$ e $y < 0$
 θ não é definido se $x = y = 0$.

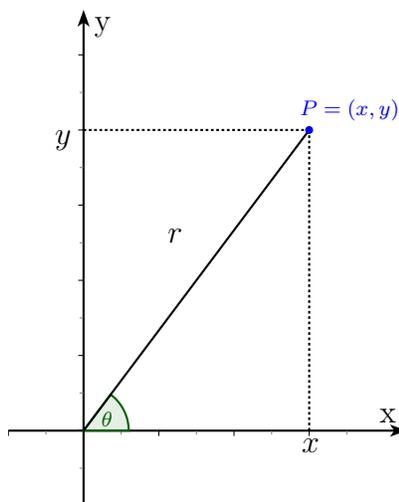


Figura 5.4: Forma trigonométrica do número complexo

Trabalhando com a forma algébrica do número, temos

$$z = x + iy$$

e, usando (5.2) e (5.3),

$$z = r \cos \theta + i \cdot r \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \quad (5.5)$$

Quando tratarmos de igualdades envolvendo argumentos, desconsideraremos diferenças de múltiplos de uma volta. Por exemplo, os números $z_1 = 3 (\cos 20^\circ + i \cdot \sin 20^\circ)$ e $z_2 = 3 (\cos 380^\circ + i \cdot \sin 380^\circ)$ serão entendidos, na verdade, como o mesmo

número.

Quando apresentamos a expressão (5.5) como sendo a forma trigonométrica do número complexo, estamos de fato apenas escrevendo a forma algébrica de outro jeito. Nem sempre é simples para o aluno visualizar o módulo e o argumento nesta expressão, então propomos usar as coordenadas polares na forma de par ordenado (r, θ) .

Uma maneira bastante atrativa de fazer essa introdução é começar a aula falando dos vetores da Física ou, dependendo da turma, trabalhando com trigonometria no triângulo retângulo, propondo problemas tão simples quanto os que apresentamos abaixo. Sugerimos que o professor proponha, no início da aula, estes três problemas, lembrando com os alunos que os problemas 1 e 2 já são conhecidos (supomos aqui que aquela ordem de currículo em que o aluno aprende números complexos na 3ª série do Ensino Médio, quando já trabalhou bastante com a trigonometria do triângulo retângulo e com vetores). O problema 3 instiga a apresentação da forma polar do número complexo, e é importante que o aluno observe que usamos, na verdade, o mesmo problema escrito de três formas diferentes.

1. Dado o triângulo retângulo ABC (figura 5.5), determine a medida da hipotenusa \overline{BC} e do ângulo α indicado.

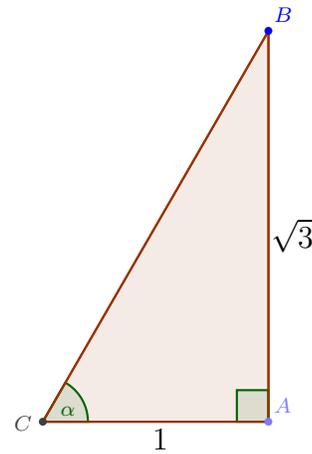


Figura 5.5: Problema 1

2. Dado o vetor $\vec{v} = \hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}$ (figura 5.6), determine seu módulo $|\vec{v}|$ e o ângulo α formado entre ele e o eixo x positivo.

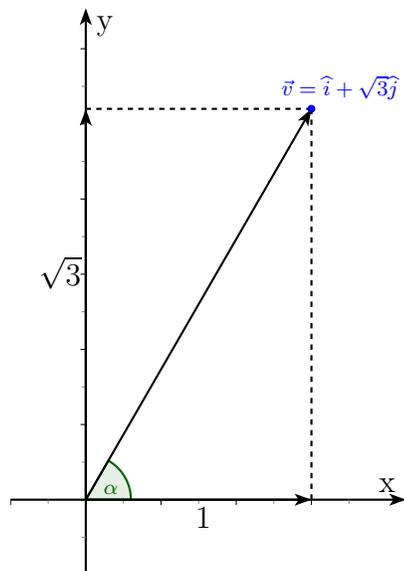


Figura 5.6: Problema 2

3. Determine o módulo r e o argumento θ do número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$, representado na figura 5.7.

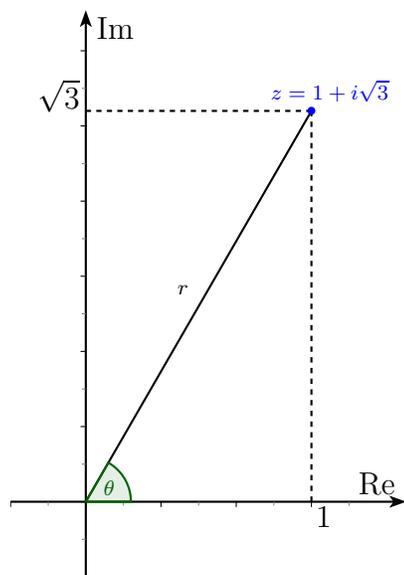


Figura 5.7: Problema 3

A partir da solução do problema 3, é interessante discutir com o aluno, antes de apresentar a expressão (5.5), que o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$ pode ser escrito de forma equivalente a partir de seu módulo e argumento:

$$z = 1 + i \cdot \sqrt{3} = 2 \cos 60^\circ + i \cdot 2 \sin 60^\circ = 2(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ),$$

e então propor a forma de par ordenado. Assim, dizendo que o número z pode ser escrito como $z = (r, \theta) = (2, 60^\circ)$ conseguimos introduzir esta

notação sem maiores traumas. Lembrando que é muito importante, na hora da escrita, diferenciar bem os pares ordenados (x, y) da forma retangular dos (r, θ) da forma polar. Por isso, a partir deste momento, usaremos a notação $(r \angle \theta)$, presente em alguns livros de Engenharia.

5.2.1 Multiplicação

Vamos multiplicar os complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, lembrando que r_1, r_2 são valores positivos e $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1) \end{aligned}$$

usando as fórmulas de adição de arcos,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \quad (5.6)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (5.7)$$

temos a fórmula que apresentamos aos alunos como “Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica”:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (5.8)$$

Essa expressão nos diz que, na multiplicação de complexos, o módulo do produto é o produto dos módulos, e o argumento do produto é a soma dos argumentos.

Vejamos como a forma polar com pares ordenados facilita a escrita, multiplicando os números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$:

| | | |
|--|--|---|
| Forma trigonométrica | | Pares ordenados |
| $[r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)] \cdot [r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] =$ $= r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ | | $(r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) =$ $= (r_1 \cdot r_2 \angle \theta_1 + \theta_2)$ |

5.2.2 Divisão

Da mesma forma que fizemos com a multiplicação, vamos agora dividir os números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} + i \cdot \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \right) \end{aligned}$$

usando a relação fundamental da trigonometria,

$$\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 = 1,$$

e as fórmulas de adição de arcos,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \end{aligned}$$

temos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{1} + i \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{1} \right)$$

e, finalmente, a fórmula que apresentamos aos alunos como “Divisão de números complexos na forma trigonométrica”:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad (5.9)$$

Assim como na multiplicação, na divisão de complexos podemos verificar uma particularidade interessante: o módulo do quociente é o quociente dos módulos, e o argumento do quociente é a diferença dos argumentos.

Vejamos como a forma polar com pares ordenados facilita a escrita também na divisão:

| | |
|---|---|
| Forma trigonométrica | Pares ordenados |
| $\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} =$ | $\frac{(r_1 \angle \theta_1)}{(r_2 \angle \theta_2)} =$ |
| $= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$ | $= \left(\frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \right)$ |

5.2.3 Potenciação

O cálculo da potência z^n (com $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$) é muito trabalhoso quando se escreve z na forma retangular ($z = a + bi$ ou $z = (a, b)$) uma vez que teremos que realizar o procedimento apresentado na subseção 4.4.2 por n vezes. Para facilitar, faremos tal operação na forma trigonométrica. Usaremos o resultado (5.8) para mostrar por indução que, dado um número complexo $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, então a potência n desse complexo é dada por $z^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$.

Queremos mostrar que a afirmativa $P(n) : z^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ é válida para todo $n \geq 1$.

$P(1)$ é válido pela própria definição da forma trigonométrica.

$$P(1) : z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Suponhamos agora, como hipótese de indução, que $P(n)$ é válido para algum n fixo. Vamos verificar a validade de

$$P(n+1) : z^{n+1} = r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)):$$

Usando a hipótese de indução em

$$z^{n+1} = z^n \cdot z,$$

temos:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= [r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))] \cdot [r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= [r^n \cdot r] \cdot [(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r^{n+1} [(\cos(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta) + i (\cos(n\theta) \sin \theta + \sin(n\theta) \cos \theta)] \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de adição de arcos (5.7) e (5.6), temos:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= r^{n+1} [\cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta)] \\ &= r^{n+1} [\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)] \end{aligned}$$

E $P(n+1)$ é válida para todo $n \geq 1$.

Então:

$$z^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \quad (5.10)$$

Esta igualdade é o que apresentamos como “Primeira fórmula de Moivre”.

Porém, essa expressão ficaria bem mais simples na forma $z = (r \angle \theta)$:

$$z^n = (r^n \angle n\theta) \quad (5.11)$$

5.2.4 Radiciação

A radiciação de números complexos é encarada por muitos professores – e, ato contínuo, por seus alunos – como difícil e desinteressante, o tipo de tema que somente permanece no programa do Ensino Médio por ser conteúdo de vestibular. Porém, mostraremos, na próxima seção, como ela pode ser ensinada de maneira geométrica, se tornando mais atraente e significativa. Vamos começar com o tratamento algébrico, aquele que usualmente é trabalhado antes do geométrico. Porém nossa proposta é que, em sala de aula, o tratamento geométrico seja trabalhado antes.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Dizemos que z_k é uma *raiz enésima* de z se $(z_k)^n = z$ (notemos que z_k pode assumir mais de um valor). Assim, podemos dizer que, por exemplo:

- 2 e -2 são raízes quartas de 16, pois $2^4 = (-2)^4 = 16$
- i é raiz cúbica de $-i$, pois $i^3 = -i$.

Vamos mostrar que $m = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ também é uma raiz cúbica de $-i$, pois

$$\begin{aligned} m^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^3 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + i \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) + i \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \\ &= 0 - 1i = -i \end{aligned}$$

A mesma operação, na forma trigonométrica (figura 5.8), fica mais simples.

Calculando o módulo r_m usando (5.1):

$$r_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = 1$$

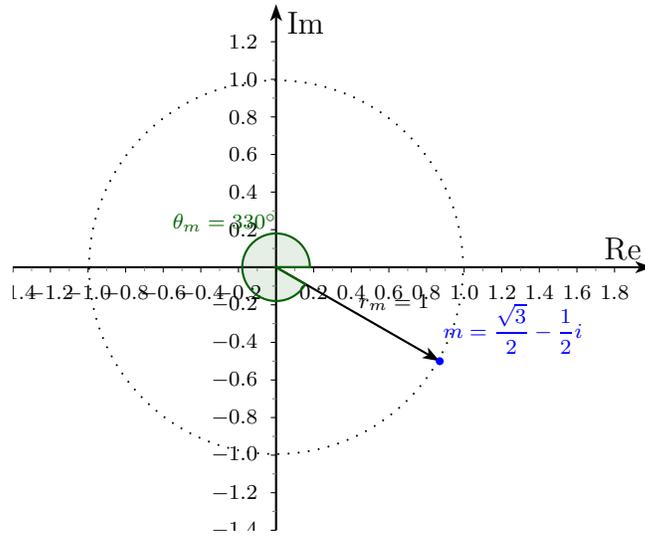


Figura 5.8: Representação geométrica do número m . Observamos que, se o número tem módulo igual a 1, o ponto correspondente a ele pertence à circunferência de raio 1 centrada na origem.

Calculando o argumento θ_m usando (5.4):

$$\tan \theta_m = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \theta_m = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Na primeira volta do ciclo trigonométrico temos dois arcos cuja tangente é $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, a saber, 150° e 330° . Para decidir qual dos dois é o correto, devemos usar a tabela (4.1): a parte real é positiva, e a imaginária, negativa, o que indica que m está no 4º quadrante. Então, $\theta_m = 330^\circ$.

Agora podemos fazer a operação com o número na forma trigonométrica $m = 1 \cdot (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$, ou $m = (1 \angle 330^\circ)$:

| Forma trigonométrica | Pares ordenados |
|---|--|
| $m^3 = 1^3 \cdot (\cos(3 \cdot 330^\circ) + i \sin(3 \cdot 330^\circ))$ | $m^3 = (1^3 \angle 3 \cdot 330^\circ)$ |
| $m^3 = 1 \cdot (\cos(990^\circ) + i \sin(990^\circ))$ | $m^3 = (1 \angle 990^\circ)$ |
| $m^3 = 1 \cdot (\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ))$ | $m^3 = (1 \angle 270^\circ)$ |

Porém, é preciso responder às perguntas: i e $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ são as únicas raízes

cúbicas de $-i$? Se há outras, como podemos determiná-las?

Para isto, livros didáticos apresentam a chamada “Segunda Fórmula de Moivre” (como em [6], “*cuja validade será aceita sem demonstração*”):

Dado $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, as raízes enésimas de z são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right) \quad (5.12)$$

ou, como propomos neste texto,

$$z_k = \left(\sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad (5.13)$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$ e $\sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$. (Note que aí supõe-se θ em radianos. Se θ estiver medido em graus, devemos substituir 2π por 360° .)

Esta igualdade será demonstrada na seção (5.4), usando a Notação de Euler.

Este algoritmo, para um aluno de Ensino Médio, exige um nível de abstração muito grande. Talvez por esse motivo os livros didáticos coloquem a interpretação geométrica no final, como uma leitura complementar. Na próxima seção tentaremos inverter essa ordem e mudar a função da representação geométrica, que deixará de ser uma ‘curiosidade’ para ser uma ferramenta de ensino.

Mas antes, vamos calcular todas as 3 raízes cúbicas de $-i$, e interpretá-las.

Encontrar a forma trigonométrica de $-i$ é fácil, e nem precisaremos das relações algébricas para isto, basta representar o número no Plano Complexo (figura 5.9) e verificar que o módulo $r = 1$ e o argumento $\theta = 270^\circ$.

Usando a fórmula (5.12):

$$z_k = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos \left(\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \right)$$

$$z_k = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \right)$$

e fazendo $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} \right) \right) = (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

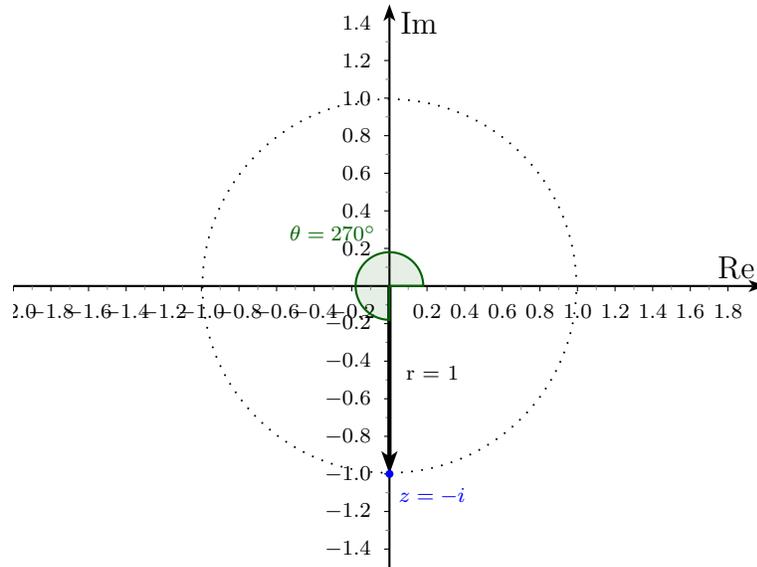


Figura 5.9: Representação geométrica do número $-i$. É fácil determinar seu módulo e argumento através dela.

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} \right) \right) = (\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ)$$

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} \right) \right) = (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$$

A mesma conta, agora com pares ordenados, $z = (1 \angle 270^\circ)$:

$$z_k = \left(\sqrt[3]{1} \angle \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right)$$

$$z_k = \left(1 \angle \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right)$$

e fazendo $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = \left(1 \angle \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} \right) = (1 \angle 90^\circ)$$

$$z_1 = \left(1 \angle \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} \right) = (1 \angle 210^\circ)$$

$$z_2 = \left(1 \angle \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} \right) = (1 \angle 330^\circ)$$

Vejamos, na figura 5.10, as representações geométricas das três raízes cúbicas (das quais já conhecíamos duas!) e suas formas algébricas:

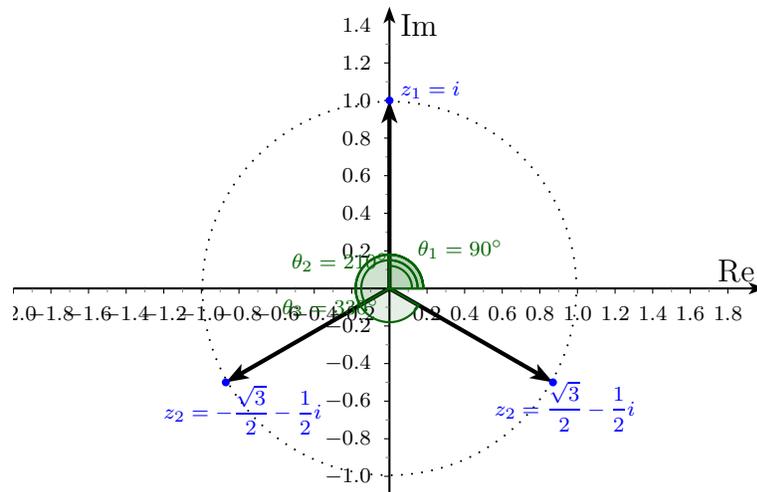


Figura 5.10: Representação geométrica das raízes cúbicas de $-i$

Notemos que os pontos que representam as raízes cúbicas são equidistantes (figura 5.11). Sabemos que este resultado vale para qualquer n , e na próxima seção vamos investigar melhor o porquê.

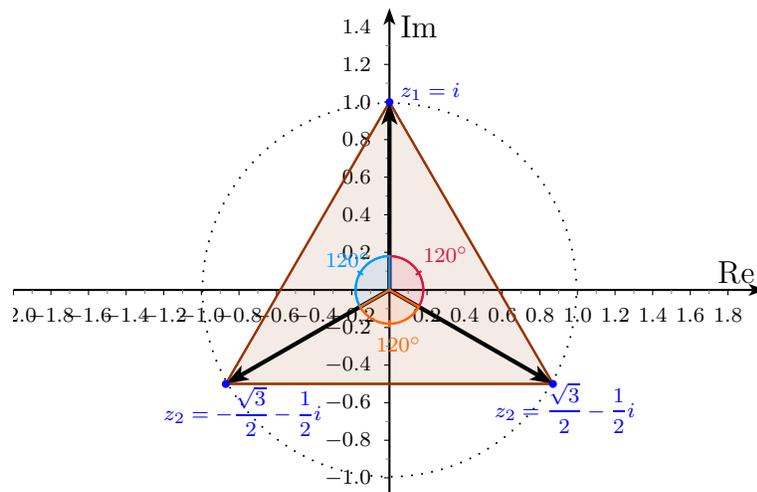


Figura 5.11: Os pontos correspondentes às raízes enésimas sempre são vértices de um polígono regular.

5.3 Interpretação geométrica/vetorial de algumas operações

Uma vez que já entendemos como funcionam as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, vamos propor uma nova maneira de apresentá-las, baseados na representação geométrica das operações e seus resultados. Vamos analisar uma série de exemplos e provocações que devem ser apresentados aos alunos antes dos algoritmos dessas operações na forma trigonométrica.

5.3.1 Reflexões

Começaremos com a reflexão, que consiste em determinar o simétrico de uma figura em relação a um eixo ou ponto.

Para fazer a reflexão de um número complexo z (ponto, vetor) em relação ao eixo x , basta encontrar seu conjugado (figura 5.12).

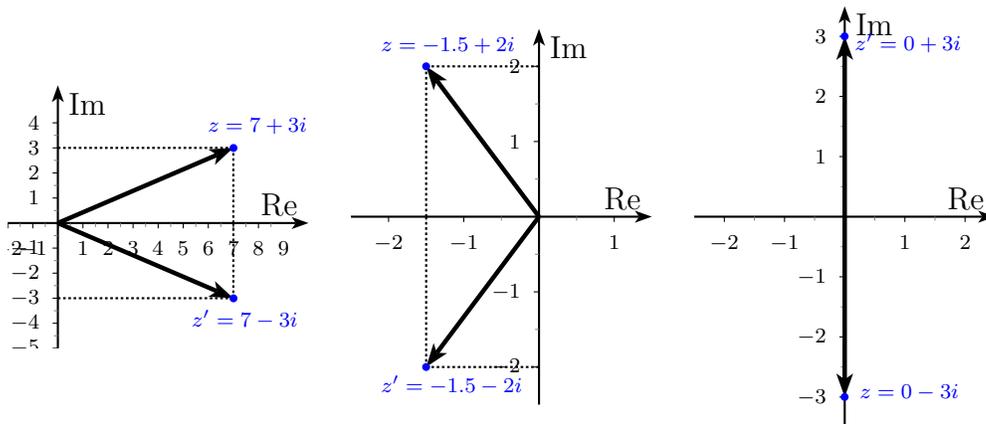


Figura 5.12: Alguns exemplos de reflexão em relação ao eixo x

Para fazer a reflexão em relação ao eixo y , calculamos o oposto do seu conjugado (figura 5.13).

E, finalmente, para fazer a reflexão em relação à origem, basta encontrar o oposto do número (figura 5.14).

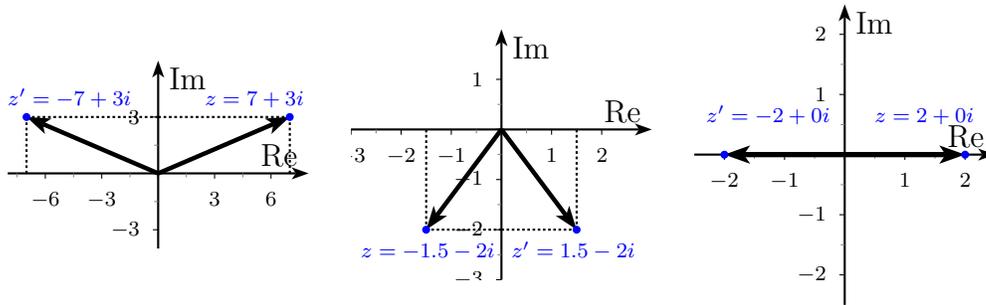


Figura 5.13: Alguns exemplos de reflexão em relação ao eixo y

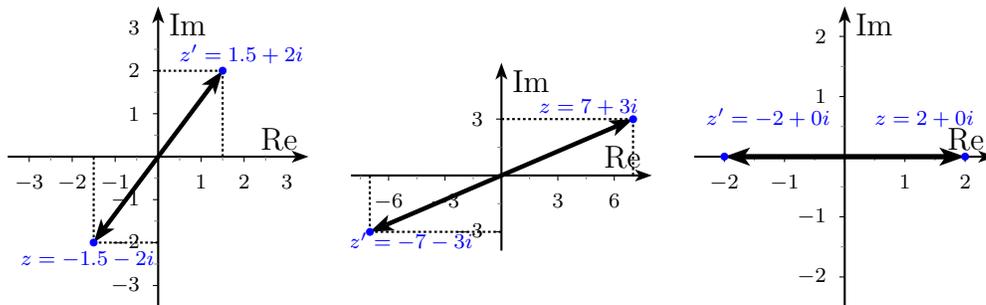


Figura 5.14: Alguns exemplos de reflexão em relação à origem

Vale comentar que a reflexão em relação à origem é também uma rotação de 180° , que analisaremos na subseção 5.3.2.

5.3.2 Dilatações e rotações

Voltando a um exemplo apresentado no início deste capítulo, a multiplicação do número complexo $z = 4 - 5i$ pelo número real 3 (figura 5.3): quando fizemos esta operação, seja pensando no número complexo ou no vetor a ele associado, o que fizemos foi a primeira transformação geométrica que abordaremos: a dilatação.

Exemplo 5.1. O número $z = 4 - 5i$ tem módulo $|z| = \sqrt{41} \approx 6,4$. Note, na figura 5.15, que o ponto correspondente a z pertence a uma circunferência de raio $r_z = \sqrt{41}$. Quando multiplicamos z pelo número real $m_1 = 3$, obtemos o número $w = 12 - 15i$, cujo módulo é $|w| = 3 \cdot \sqrt{41} \approx 19,2$, e cujo afixo pertence a uma circunferência de raio $r_w = 3 \cdot \sqrt{41}$.

Assim, a multiplicação do número z pelo número real 3 pode ser entendida

como um *aumento* de razão 3.

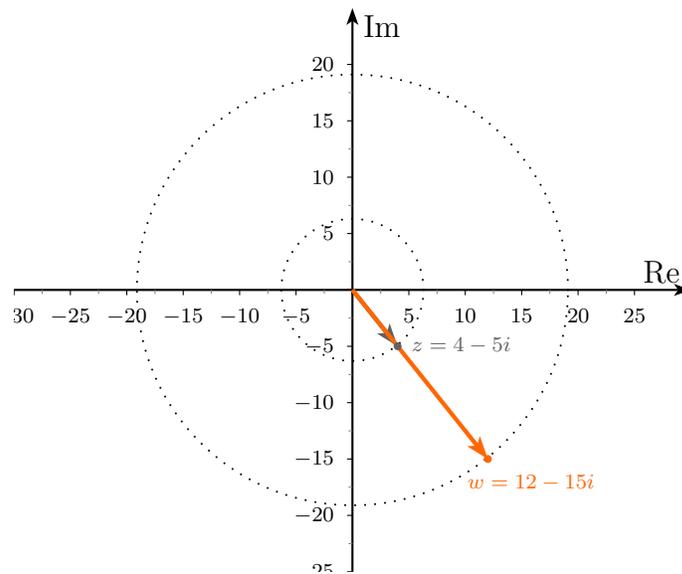


Figura 5.15: Exemplo 5.1

Exemplo 5.2. Agora, vamos analisar a multiplicação (representada geometricamente na figura 5.16) do mesmo número $z = 4 - 5i$ por outro número complexo, digamos, $m_2 = 3i$, um imaginário puro:

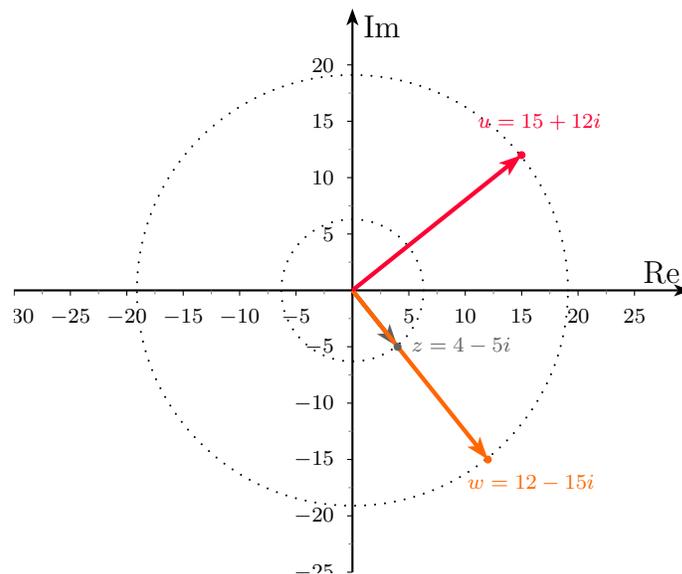


Figura 5.16: Exemplo 5.2

$$u = (3i) \cdot (4 - 5i) = 15 + 12i$$

Note que $|u| = |w| = 3 \cdot \sqrt{41} \approx 19,2$. Porém parece que o ponto ‘andou’ um pouco pela circunferência de raio $r_w = 3 \cdot \sqrt{41}$. Por enquanto, deixaremos que os alunos façam conjecturas sobre o motivo disso.

Exemplo 5.3. Vamos continuar multiplicando número $z = 4 - 5i$ por um número complexo, agora, $m_3 = -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ (figura 5.17):

$$v = \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) \cdot (4 - 5i) = \frac{15 - 12\sqrt{3}}{2} + \frac{12 + 15\sqrt{3}}{2}i$$

Note que $|v| = |u| = |w| = 3 \cdot \sqrt{41} \approx 19,2$. Nesse momento, podemos propor para os alunos refletirem se é coincidência ou não, e também questionar por que o afixo do produto está ‘aparecendo’ em lugares diferentes da mesma circunferência de raio $r_w = 3 \cdot \sqrt{41}$.

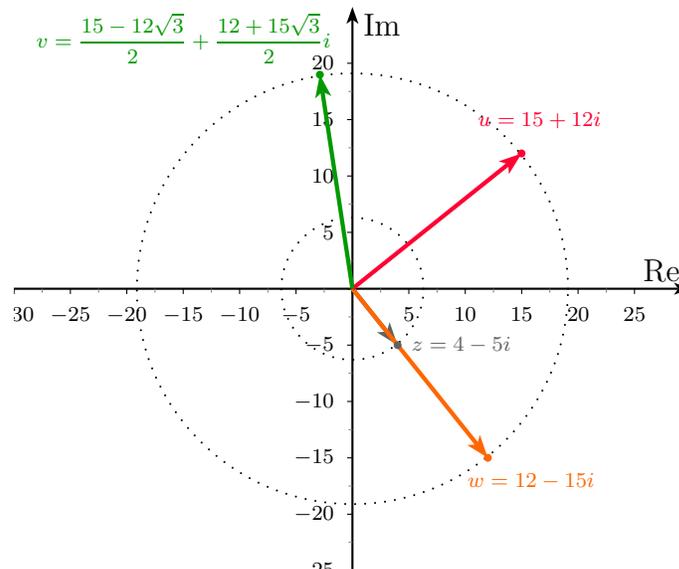


Figura 5.17: Exemplo 5.3

Com esses três exemplos, alguns alunos podem conjecturar que *multiplicar por um número real só ‘estica’ o vetor, mas multiplicar por um número complexo ‘estica’ e ‘gira’*. Podemos apresentar mais um exemplo para evitar esta conclusão:

Exemplo 5.4. Multiplicando o número $z = 4 - 5i$ por um outro número real, $m_4 = -3$ (figura 5.18):

$$s = -3 \cdot (4 - 5i) = -12 + 15i$$

Multiplicar por um número real negativo – estamos apenas investigando ainda – além de ‘esticar’, também inverte o sentido do vetor, o que é um tipo de rotação. Nesse caso, também temos $|s| = |v| = |u| = |w| = 3 \cdot \sqrt{41} \approx 19,2$, o que agora deve levar os alunos a procurar o motivo de todos esses módulos serem o triplo do módulo de z . Afinal, *o que os números $m_1 = 3$, $m_2 = 3i$, $m_3 = -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ e $m_4 = -3$ têm em comum?*

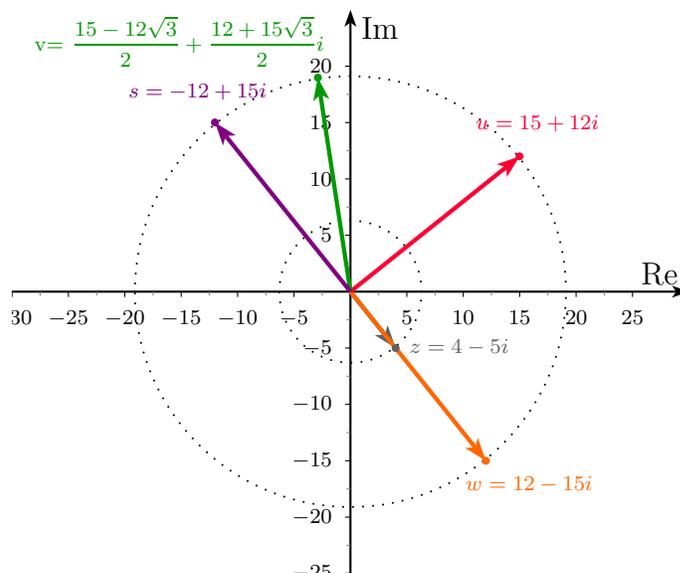


Figura 5.18: Exemplo 5.4

Para responder mais facilmente a esta pergunta, vamos preapresentar os números m_i ($m = 1, 2, 3, 4$) no Plano Complexo (figura 5.19) e vamos observar suas coordenadas polares:

$$m_1 = 3 = 3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = (3 \angle 0^\circ)$$

$$m_2 = 3i = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = (3 \angle 90^\circ)$$

$$m_3 = -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = (3 \angle 150^\circ)$$

$$m_4 = -3 = 3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = (3 \angle 180^\circ)$$

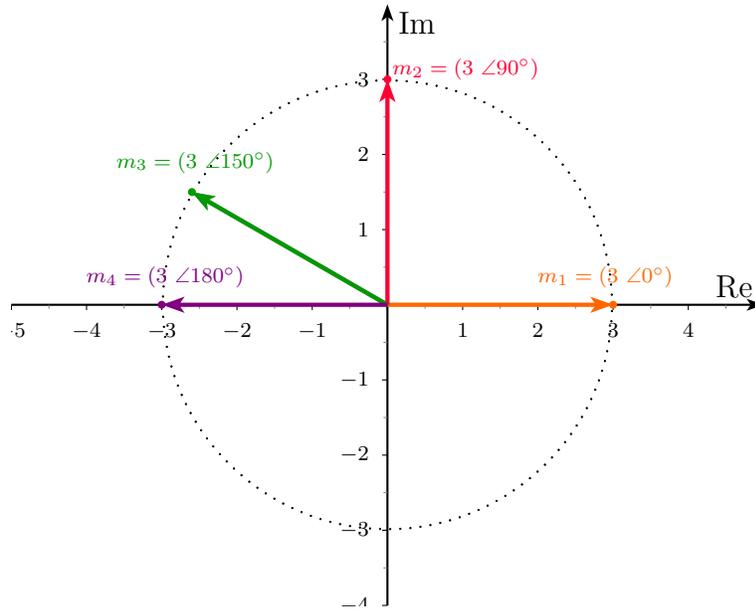


Figura 5.19: Representação geométrica dos números m_1 , m_2 , m_3 e m_4

Dessa forma, percebemos mais claramente que os m_i têm todos módulo igual a 3, e por isso o módulo do vetor foi multiplicado por 3.

Sugerimos fazer alguns exemplos de multiplicação por números com outros módulos – maiores, menores e iguais a 1 – até que os alunos intuem que a multiplicação de um número complexo $z \neq 0$ por outro $m \neq 0$ altera o módulo de z da seguinte forma:

- se $|m| > 1$, $|m \cdot z| > |z|$, ou seja, temos uma dilatação.
- se $|m| = 1$, $|m \cdot z| = |z|$, ou seja, o módulo não se altera.
- se $0 < |m| < 1$, $|m \cdot z| < |z|$, ou seja, temos uma contração.

Agora, falta investigar a rotação do vetor associado. Percebemos na figura 5.20 que, embora todos os m_i tenham módulo 3, seus argumentos são diferentes: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 150^\circ$ e $\theta_4 = 180^\circ$. Os produtos se diferem também pelo argumento, então podemos verificar que a rotação do produto $m_i \cdot z$ em relação ao número z é igual ao argumento de m_i .

Sugerimos ainda fazer outras possibilidades de multiplicação por números com outros argumentos – positivos, negativos e iguais a 0° – para intuir a

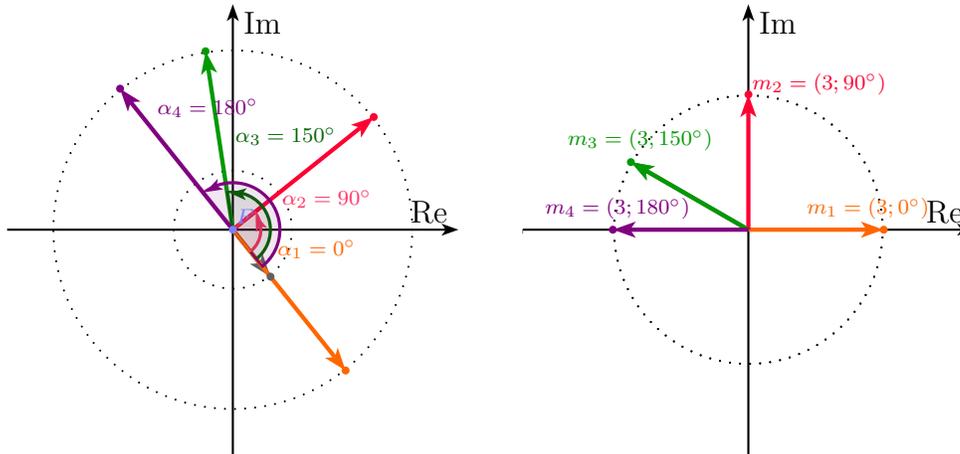


Figura 5.20: A relação entre o argumento do fator e o ângulo de rotação gerado pela multiplicação

ideia de que a multiplicação de um número complexo $z \neq 0$ por outro $m \neq 0$ altera o argumento de z da seguinte forma:

- se $\arg(m) > 0$, temos uma rotação no sentido positivo (anti-horário);
- se $\arg(m) = 0$, não temos uma rotação;
- se $\arg(m) < 0$, temos uma rotação no sentido negativo (horário).

Após esta manipulação concreta, que pode ser feita de várias maneiras (Geogebra, régua e compasso, calculadora e papel quadriculado, entre outras), a apresentação das operações de multiplicação e divisão na forma polar se tornará mais significativa.

Tendo em vista que é necessária uma grande quantidade de operações para fazer as experimentações sugeridas, e que o tempo em sala de aula é restrito, precisamos de um planejamento que otimize o tempo gasto. Uma possibilidade é propor, enquanto se trabalha com as operações na forma algébrica, uma lista de exercícios para ser feita em casa, ou em grupos de estudo, em que se obtenham os resultados que utilizamos nesta seção; outra ideia é planejar os exemplos a partir de resultados já obtidos em sala, no livro didático ou apostila. Dessa forma, podemos propor uma nova visão sem alterar muito o planejamento do professor, e aproveitamos para dar significado/utilidade/motivação para as – assim consideradas por muitos – inúteis listas de exercícios.

Após as atividades sugeridas – que foram feitas todas na forma algébrica –, podemos começar a formalizar a multiplicação (e a divisão como operação inversa) de complexos a partir da ideia de que um número complexo $w_1 = (r_1 \angle \theta_1)$, ao ser multiplicado por um complexo $w_2 = (r_2 \angle \theta_2)$, sofrerá duas alterações, conforme podemos ver na figura 5.21:

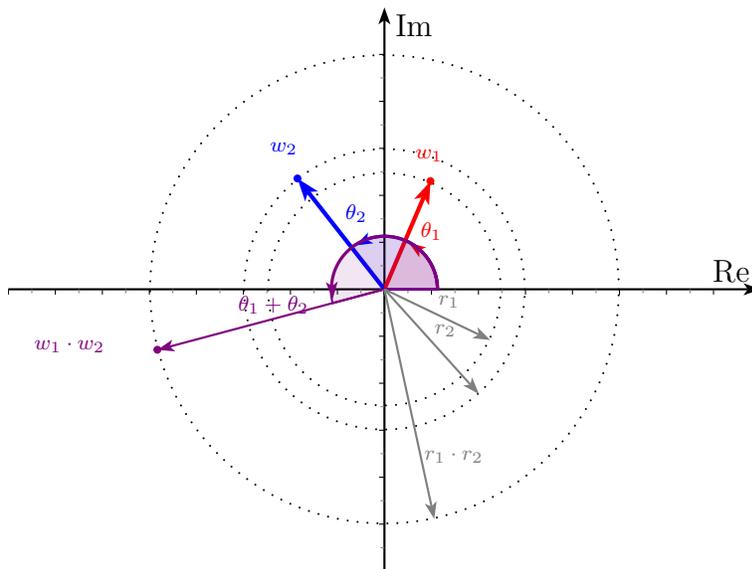


Figura 5.21: Transformações geométricas relacionadas com a multiplicação de números complexos

- a) uma dilatação de razão r_2 ; então o produto terá módulo $(r_1 \cdot r_2)$;
- b) uma rotação de um ângulo θ_2 ; então, o produto terá argumento $(\theta_1 + \theta_2)$.

Tendo entendido essa ideia geométrica, o aluno estará bem preparado para entender algebricamente as operações. Então podemos apresentá-las tal como o fazemos usualmente (conforme as seções 5.2.1 e 5.2.2) ou usando a sugestão que apresentaremos na seção 5.4. Ou das duas formas, o que seria ótimo!

5.4 A notação de Euler

Os números complexos podem ainda ser representados em uma outra forma bastante útil, praticamente não utilizada no Ensino Médio, decorrente da fórmula de Euler. Tal representação facilita não só a visualização do módulo

e do argumento, mas também das operações na forma polar.

Antes, vamos apresentar algumas igualdades oriundas de séries, que serão utilizadas a seguir.

A expansão em série de Taylor de uma função analítica $f(x)$ centrada em a é representada como:

$$f(x) = f(a)(x-a)^0 + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots \quad (5.14)$$

Quando $a = 0$ em (5.14), temos a Série de Mac Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)(x)^1}{1!} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} + \dots \quad (5.15)$$

Se expandirmos as funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin x$ e $f_3(x) = \cos x$ em série de Mac Laurin (5.15), temos:

$$e^x = e^0 + \frac{e^0(x)^1}{1!} + \frac{e^0(x)^2}{2!} + \frac{e^0(x)^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (5.16)$$

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos 0(x)^1}{1!} + \frac{(-\sin 0)(x)^2}{2!} + \frac{(-\cos 0)(x)^3}{3!} + \frac{\sin 0(x)^4}{4!} + \frac{\cos 0(x)^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (5.17)$$

$$\cos x = \cos 0 + \frac{(-\sin 0)(x)^1}{1!} + \frac{(-\cos 0)(x)^2}{2!} + \frac{\sin 0(x)^3}{3!} + \frac{\cos 0(x)^4}{4!} + \frac{(-\sin 0)(x)^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5.18)$$

Uma vez que temos as expansões das funções, vamos fazer $x = i\theta$ em (5.16):

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

Sabendo que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, e assim sequencialmente:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

Reagrupando os termos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)$$

E, observando que as expressões agrupadas entre parênteses são as expansões (5.17) e (5.18), temos o resultado denominado fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta \quad (5.19)$$

(Acreditamos que este resultado deve ser apenas apresentado, e não demonstrado, para uma turma regular de Ensino Médio.)

E, dado um $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, temos uma equivalência com a forma trigonométrica do Número Complexo:

$$r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \quad (5.20)$$

Usando a notação de Euler (5.20), vamos mostrar facilmente que valem as fórmulas (5.8), (5.9), (5.10) e (5.12).

É sabido por todo aluno de Ensino Médio que, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$. Essa propriedade também vale para $a \in \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{C}$, então:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1+i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad (5.21)$$

Supondo os complexos $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$, o produto $z_1 \cdot z_2$ será:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\theta_2})$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot (e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2})$$

Usando o resultado (5.21):

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Temos uma expressão equivalente às duas já vistas na subseção 5.2.1:

| Forma trigonométrica | Par ordenado | Notação de Euler |
|---|--|--|
| $r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ | $(r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2)$ | $(r_1 r_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ |

A operação de divisão pode ser apresentada da mesma forma, partindo do fato de que, dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{C}$, $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$:

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1 - i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (5.22)$$

O quociente $z_1 \cdot z_2$ será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\theta_1}}{r_2 \cdot e^{i\theta_2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$

Usando o resultado (5.22)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

E temos uma expressão equivalente às duas já vistas na subseção 5.2.2

| Forma trigonométrica | Par ordenado | Notação de Euler |
|---|---|--|
| $\frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$ | $\left(\frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \right)$ | $\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ |

Observando que o pré-requisito necessário para entender a multiplicação e a divisão na Notação de Euler (propriedades de potências) é mais simples que na Forma trigonométrica (fórmulas de adição de arcos).

Como já vimos, a potenciação pode ser deduzida por indução a partir da multiplicação:

$$z^n = r^n \cdot e^{(n\theta)}$$

Vamos agora investigar a expressão da radiciação. Como já vimos, z_k é uma raiz enésima de z se $z = (z_k)^n$. Sendo $z = r \cdot e^{i\theta}$:

$$r \cdot e^{i\theta} = r_k^n \cdot e^{in\theta_k}$$

Dessa igualdade, temos:

$$\text{a) } r = r_k^n \longrightarrow r_k = \sqrt[n]{r}$$

b) θ e $n\theta_k$ são arcos cômruos, ou seja,

$$\theta + k2\pi = n\theta_k \longrightarrow \theta_k = \frac{\theta + k2\pi}{n}$$

Então:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right)}$$

Note que esta expressão é compatível com a *Segunda Fórmula de Moivre* (5.12), mas a demonstração dela na Notação de Euler parece mais plausível, para uma turma de Ensino Médio, do que na Forma Trigonométrica.

Capítulo 6

Escher, Anjos, Demônios e a inversão do Círculo

A obra de Maurits Cornelis Escher é, certamente, uma bela fonte de provocações para o Professor de Matemática, uma vez que o artista, inspirando-se inicialmente em mosaicos árabes, desenvolveu, em muitas de suas obras, conceitos de Geometria de maneira muito atraente.

Um ponto interessante dessas obras é o ladrilhamento, que, segundo [9], consiste em preencher uma área com cópias repetidas de uma ou mais figuras geométricas.

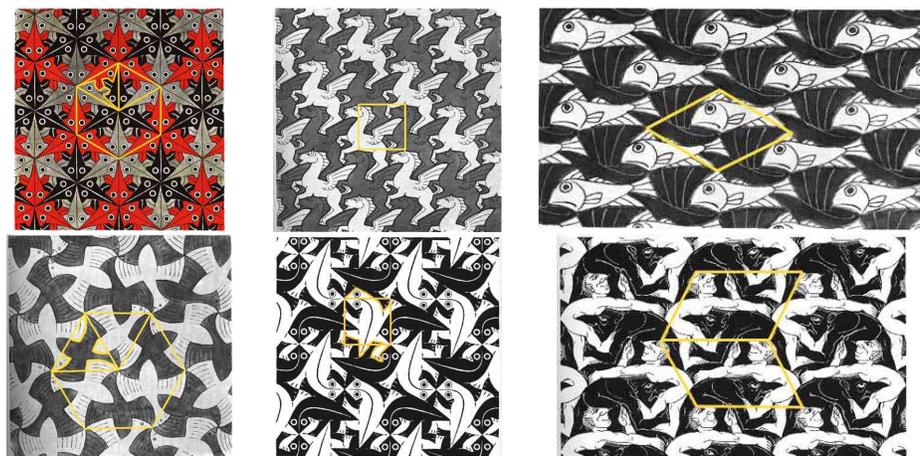


Figura 6.1: Alguns ladrilhamentos de Escher. Fonte: [1]

Embora o ladrilhamento não seja o foco principal desse texto, o professor pode encontrar conteúdo fácil e interessante no site <www.tesselations.org>.

que pode inclusive ser trabalhado com crianças. Na figura 6.1, temos obras em que aparecem diversas transformações no plano Euclidiano, como translações, rotações e reflexões.

Neste capítulo faremos a análise de uma transformação geométrica que aparece, entre outras, na obra “Circle Limit IV”, uma releitura da obra “Angels and Devils”, que resulta em ladrilhamento hiperbólico (figura 6.2).

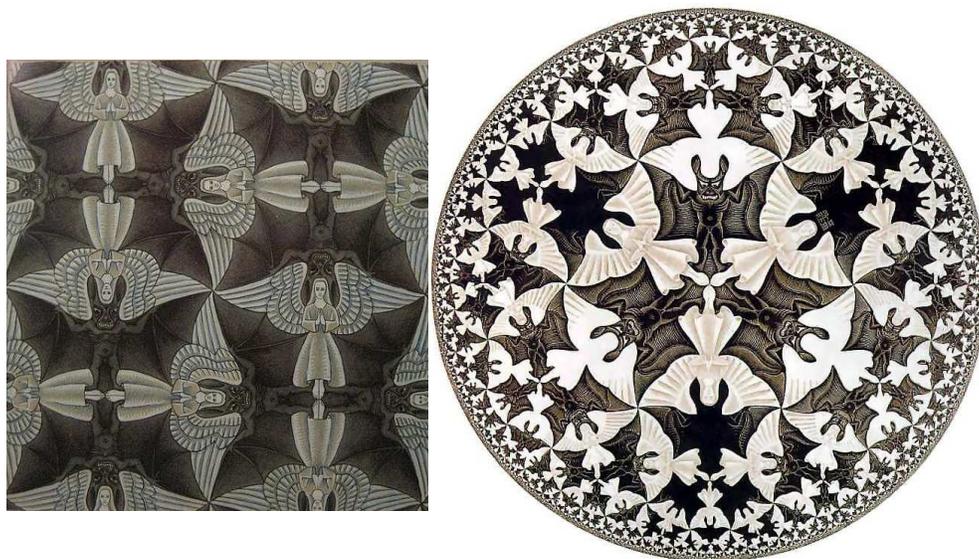


Figura 6.2: Obras de M.C. Escher: À esquerda, “Angels and Devils”, que é um ladrilhamento do Plano Euclidiano, e à direita, “Circle Limit IV”, um ladrilhamento do Plano Hiperbólico.

Vários temas podem ser instigados a partir destas obras – alguns inclusive muito avançados para o Ensino Médio – porém aqui abordaremos a *inversão do círculo*, pois é um tema que pode ser desenvolvido com os conceitos aprendidos no Ensino Fundamental e Médio, tais como circunferências, tangência e semelhança de triângulos. Fazer uma análise como essa demanda mais aulas que as aplicações apresentadas no capítulo 5; sendo assim, sugerimos que o professor faça um planejamento mais cuidadoso caso se interesse em fazer essa discussão em sala de aula.

Um bom vídeo para introduzir o assunto e instigar o interesse dos alunos é “Angels and Devils: MC Escher’s use of Hyperbolic Space”, disponível no YouTube no link <http://www.youtube.com/watch?v=QnSIWe_o15g>. Ele mostra de maneira didática, simples e acessível para o aluno de Ensino Médio

que Escher usou (conscientemente ou não) a Geometria Hiperbólica (não-Euclideana); note-se que essa discussão se faz necessária em sala de aula, já que muitos alunos saem do Ensino Médio vivendo a ilusão de que existe uma única Geometria.

A Geometria Hiperbólica não é tão simples de ser visualizada como a Euclideana, já que as experiências vividas pelos alunos (dentro e fora da escola) são baseadas, em sua maioria, nos postulados da Geometria Euclideana. Por exemplo, vejamos o postulado das paralelas, que diz que por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada; na Geometria Hiperbólica, tal postulado não é válido. No plano Hiperbólico, por um ponto pode passar *mais de uma* reta paralela a uma reta dada. Há muitas outras propriedades válidas na geometria Euclideana que não valem na Hiperbólica: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° , retas paralelas não estão sempre à mesma distância uma da outra etc. Até mesmo a medida de ângulos e distâncias pode ser diferente: na obra “Circle Limit IV”, por exemplo, temos que todos os anjos são do mesmo tamanho!

Para ajudar a visualizar essas propriedades que fogem muito à experiência prévia dos estudantes, podemos usar o Modelo de Poincaré, que representa todo o plano Hiperbólico no interior de um (já familiar) círculo.

6.1 Retas no Modelo de Poincaré

O Disco de Poincaré é um círculo (da Geometria Euclideana) em que reconheceremos apenas os pontos internos, não incluindo os pontos pertencentes à circunferência. Todas as retas deste plano serão representadas como diâmetros do círculo ou como arcos ortogonais a ele [9].

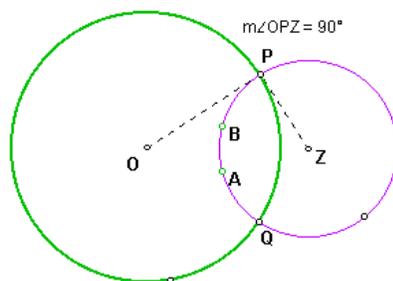


Figura 6.3: Círculos ortogonais. Fonte: [9]

Em primeiro lugar, vamos entender o que são círculos ortogonais, observando a figura 6.3. Nela, o círculo verde (que representa o Disco de Poincaré) e o círculo roxo (cujos pontos internos ao Disco de Poincaré representam uma reta) são ortogonais. Isto significa que o ângulo $O\hat{P}Z$ é reto, ou seja, os raios das circunferências são perpendiculares nos pontos de intersecção entre elas [9].

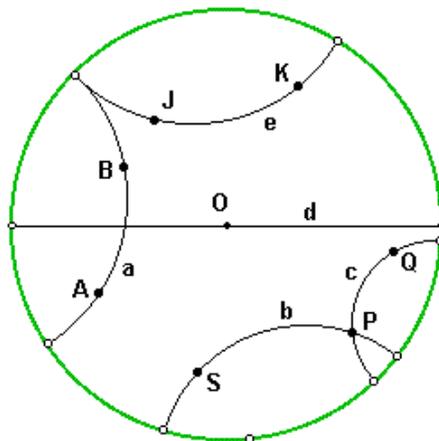


Figura 6.4: Algumas retas do Plano Hiperbólico representadas no Disco de Poincaré. Fonte: [9]

Na figura 6.4, vemos, em verde, um Disco de Poincaré (centrado em O) e as retas a , b , c , d e e (em que d é um diâmetro e a , b , c e e são arcos ortogonais ao Disco). Partindo da ideia de que, em um plano, retas paralelas *não têm pontos em comum*, podemos pedir aos alunos que procurem, nesta figura, as retas paralelas à reta a . Vemos facilmente que b e c são paralelas a a , pois claramente não têm pontos em comum com ela. E quanto à reta e ? Esta também é paralela a a , visto que os pontos pertencentes à circunferência não pertencem ao plano hiperbólico e então a e e não têm pontos em comum. Voltando ao Postulado das Paralelas, podemos ver também que as retas b e c são ambas paralelas a a passando por P . Será possível construir outras paralelas a a por P ?

Agora vamos entender qual é a relação da obra “Circle Limit IV” com o Modelo de Poincaré. Vemos na figura 6.5 algumas retas hiperbólicas, colocadas em lugares escolhidos estrategicamente.

Conseguimos, usando o nosso ‘senso comum’ da Geometria Euclideana, ver que as retas em vermelho são eixos de simetria. Porém, os arcos ortogonais

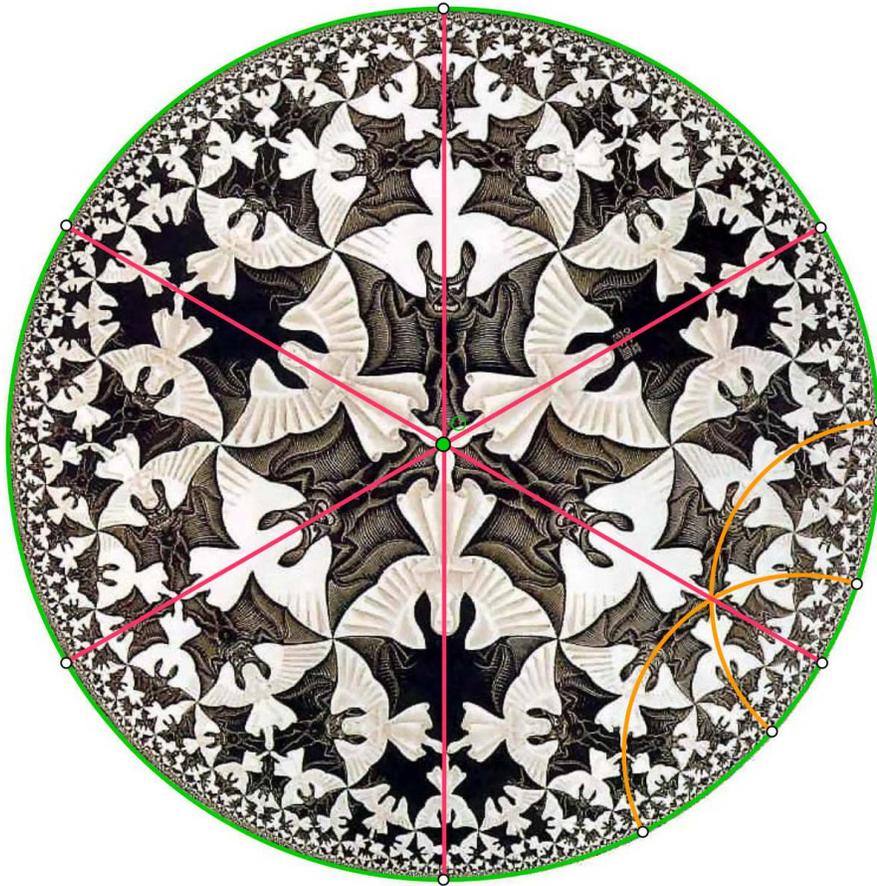


Figura 6.5: O Modelo de Poincaré sobreposto ao desenho de Escher

representados em laranja também são eixos de simetria (ou retas de reflexão), só que estes não são tão intuitivos como os diâmetros, principalmente porque no Disco de Poincaré os demônios (ou anjos) *parecem* ter tamanhos diferentes, quando na verdade são todos congruentes. A ferramenta matemática que nos ajuda a entender isto é a inversão do círculo.

6.2 Inversão de um ponto em relação a um círculo

Vamos, inicialmente, abordar o tema com os conceitos de Geometria Plana conhecidos do Ensino Fundamental:

Definição: Seja γ um círculo de raio r e centro O . Dado um ponto $P \neq O$ pertencente ao plano que contém o círculo, seu inverso P' será o único ponto em \overrightarrow{OP} tal que

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2 \quad (6.1)$$

Segundo [3], a inversão do círculo no plano é uma transformação do plano no plano, que “vira o círculo ao avesso”, levando pontos de dentro do círculo para fora, e *vice-versa*.

Nessa inversão:

- a) Um ponto pertencente ao círculo é inverso dele mesmo.
- b) $(P')' = P$.
- c) Quando $\overline{OP} = 0$, ou seja, quando o ponto P coincide com o centro do círculo, a inversão leva P para infinito (e, conseqüentemente, leva infinito para o centro)

6.2.1 Usando Régua e Compasso

É possível encontrar o inverso P' de um ponto P usando construções com régua e compasso. Essa construção é aplicável no Ensino Fundamental como motivadora no fechamento do aprendizado de construções elementares (perpendiculares, arcos, cordas, círculos, tangentes...). No Ensino Médio, caso não se julgue interessante trabalhar com as construções em papel, pode-se usar um software que as simule. Vale a pena fazer tal simulação no Geogebra, uma vez que, por ser um programa de Geometria dinâmica, permite explorar as várias posições do ponto P .

Caso 1: O ponto P está dentro do círculo γ (figura 6.6)

1. Traçar a semi-reta \overrightarrow{OP} ;
2. Construir a perpendicular a \overrightarrow{OP} por P , que intersectará γ em T e U ;
3. Construir uma tangente ao círculo por T (ou, analogamente, por U);
4. O ponto de intersecção entre essa tangente e \overrightarrow{OP} será o inverso P' de P .

Demonstração: $\overline{TP'}$ é tangente a γ , e \overline{OP} é raio, então $O\hat{T}P$ é reto. Por construção, $O\hat{P}T$ também é reto. Então $\triangle OPT$ e $\triangle OTP'$ são semelhantes pois o ângulo $T\hat{O}P$ é comum. Da proporcionalidade entre os lados segue que

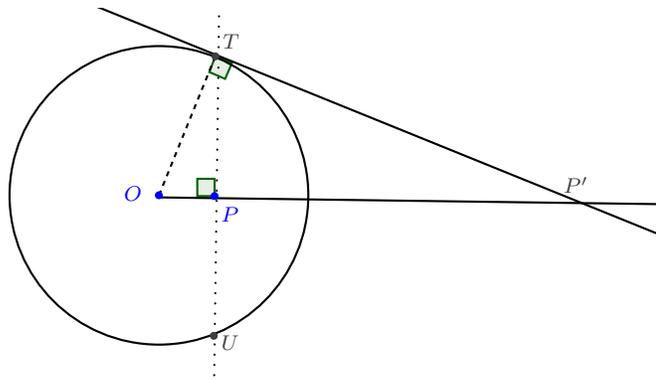


Figura 6.6: Caso 1: construção do inverso de P , quando P está dentro do círculo γ .

$$\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP'}}$$

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$$

Caso 2: O ponto P está fora do círculo γ (figura 6.7)

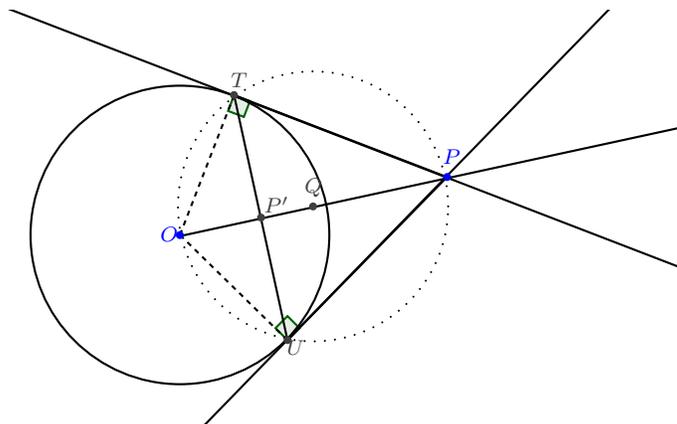


Figura 6.7: Caso 2: construção do inverso de P , quando P está fora do círculo γ .

1. Traçar a semi-reta \overrightarrow{OP} ;
2. Determinar o ponto médio Q do segmento \overline{OP} ;
3. Traçar um arco de centro Q e raio \overline{OQ} (círculo σ), que intersectará γ em

T e U ;

4. Construir o segmento \overline{TU} ;

5. O ponto de intersecção entre \overline{TU} e \overline{OP} será o inverso P' de P .

Demonstração: Por construção, T e U são os pontos de intersecção entre γ e σ . Os ângulos $O\hat{T}P$ e $O\hat{U}P$ estão inscritos em semicírculos de σ , então são retos e, conseqüentemente, \overline{PT} e \overline{PU} são tangentes a γ . Se o ponto P' é determinado pelo cruzamento de \overline{TU} e \overline{OP} , então P é inverso de P' (já que a construção é a mesma que a do Caso 1), então P' é o inverso de P .

6.2.2 Usando Coordenadas retangulares

Para as discussões a seguir, usaremos o círculo de raio unitário, de modo que equação (6.1) fica $(\overline{OP})(\overline{OP'}) = 1$, ou

$$(\overline{OP'}) = \frac{1}{(\overline{OP})} \quad (6.2)$$

Vejam os então como ficaria essa relação, mas agora representando os pontos como pares ordenados: quem será o inverso (em relação ao círculo de raio unitário centrado na origem) do ponto $P(x_0, y_0)$?

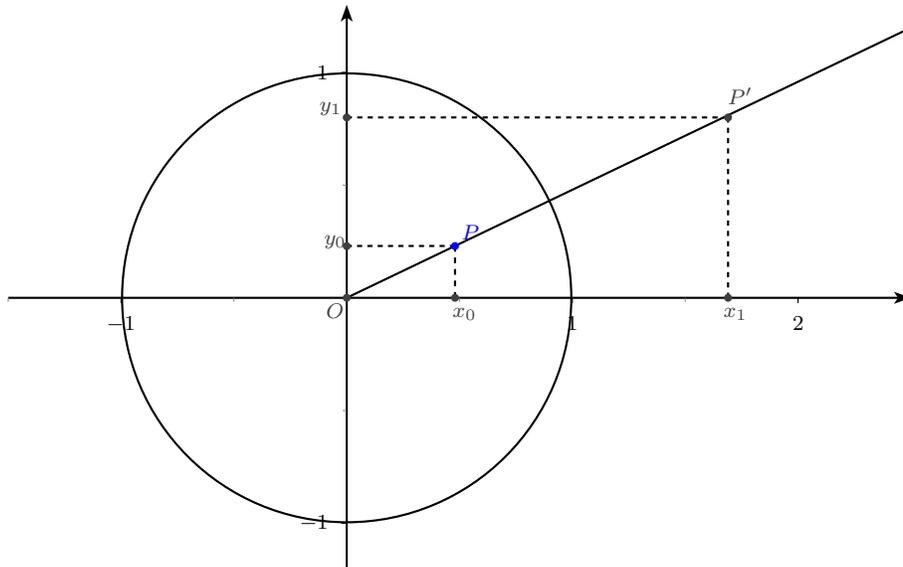


Figura 6.8: A inversão do ponto P em relação ao círculo unitário

Para $P'(x_1, y_1)$ ser inverso de $P(x_0, y_0)$ (figura 6.8), temos duas condições:

1) $P' \in \overrightarrow{OP}$, o que implica em:

a) P e P' estão no mesmo quadrante, ou seja, x_1 tem o mesmo sinal de x_0 e y_1 tem o mesmo sinal de y_0 ;

b) Os pontos O , P e P' estão alinhados, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} &= \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} \\ \frac{y_0}{x_0} &= \frac{y_1}{x_1}\end{aligned}\tag{6.3}$$

2) Os segmentos OP e OP' obedecem a relação $(\overline{OP}) \cdot (\overline{OP'}) = 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} \cdot \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} &= 1 \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} &= 1 \\ (x_0^2 + y_0^2) \cdot (x_1^2 + y_1^2) &= 1\end{aligned}\tag{6.4}$$

Resolvendo o sistema das equações (6.3) e (6.4) em x_1 e y_1 :

$$x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

Assim, o inverso do ponto $P(x_0, y_0)$ em relação ao círculo unitário centrado na origem é o ponto $P' \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)$.

6.2.3 Usando Números Complexos

Já que as transformações geométricas foram trabalhadas na seção 5.3, vamos agora representar o ponto P – cujo inverso procuramos – como o afixo do número complexo $z = a_0 + i \cdot b_0$. É fácil de perceber que a análise feita com o número na forma algébrica será muito parecida com as coordenadas retangulares (seção 6.2.2); então, para ficar mais interessante, vamos pensar

no número z na forma polar $z = (r_0 \angle \theta_0)$. Vamos analisar então as condições para que o afixo P' do número $z' = (r_1 \angle \theta_1)$ seja inverso de P em relação ao círculo unitário centrado na origem O (figura 6.9):

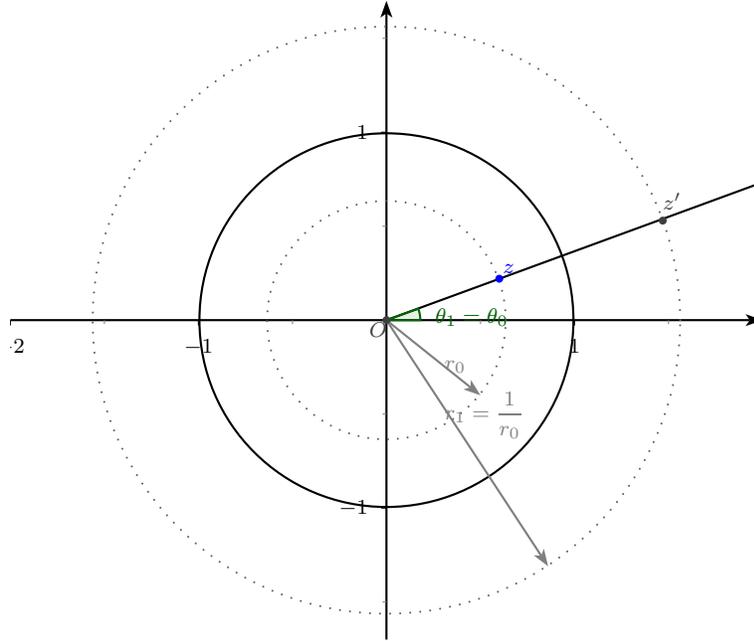


Figura 6.9: A inversão do ponto P (afixo de z) em relação ao círculo unitário

1) $P' \in \overrightarrow{OP}$, o que implica em z e z' terem o mesmo argumento, ou seja,

$$\theta_1 = \theta_0$$

2) Os segmentos OP e OP' obedecem a relação $(\overline{OP}) \cdot (\overline{OP'}) = 1$, e nesse momento a forma polar simplifica essa relação para

$$\begin{aligned} r_0 \cdot r_1 &= 1 \\ r_1 &= \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

Aparentemente, o problema já está resolvido. O número z' cujo afixo é o inverso de P é

$$z' = \left(\frac{1}{r_0} \angle \theta_0 \right)$$

Mas podemos melhorar essa resposta, procurando o tal número complexo z' que tem o mesmo argumento de z , e cujo módulo seja o inverso do módulo

de z . Partindo da condição do módulo, a primeira ideia que vem à mente é que z' pode ser o inverso de z . Vamos investigar:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

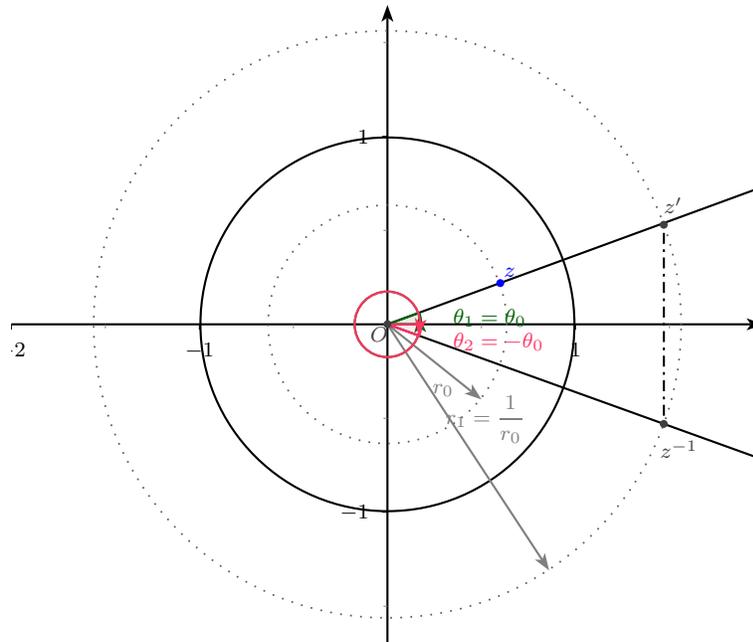


Figura 6.10: O inverso multiplicativo de z não é igual ao inverso em relação ao círculo, mas quase.

Fazendo a operação na forma polar:

$$z^{-1} = \frac{(1 \angle 0)}{(r_0 \angle \theta_0)}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{1}{r_0} \angle -\theta_0 \right)$$

Conseguimos acertar o módulo, mas o argumento não é exatamente o que queríamos, e sim o oposto dele. Vamos analisar a figura 6.10, que pode nos ajudar a encontrar z' .

Analisando a figura, lembramos das reflexões vistas na subseção 5.3.1. Para transformar o número complexo z^{-1} no z' que estamos buscando, basta fazer a reflexão em relação ao eixo x que, como já vimos, consiste em encontrar

seu conjugado:

$$z' = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Notemos que este resultado é compatível com o que obtivemos na subseção 6.2.2. Já que os números complexos podem ser também representados como pares ordenados, vamos fazer um paralelo do número complexo $z = a_0 + i \cdot b_0 = (a_0, b_0)$ com o ponto $P(x_0, y_0)$.

| Ponto | Número complexo |
|---|--|
| $P(x_0, y_0)$ $P' \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)$ | $z = (a_0, b_0)$ $z' = \left(\frac{a_0}{a_0^2 + b_0^2}, \frac{b_0}{a_0^2 + b_0^2} \right)$ |

$$z' = \frac{a_0}{a_0^2 + b_0^2} + i \frac{b_0}{a_0^2 + b_0^2} = \frac{a_0 + i b_0}{a_0^2 + b_0^2}$$

Mas: $z \cdot \overline{z} = (a + i \cdot b)(a - i \cdot b) = (a_0^2 + b_0^2)$

Logo:

$$z' = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

6.3 Inversão do Círculo Ortogonal

Usando um resultado da subseção 6.2.3, vamos pensar na inversão de todos os pontos internos a um círculo unitário centrado na origem do Plano Complexo: se o módulo de z' é o inverso do módulo de z , e todos os pontos internos ao círculo têm módulo menor que 1, então certamente o inverso terá módulo maior que 1. O contrário é análogo, e nos garante que a inversão de um ponto interno leva para a região externa, e *vice versa*. Na figura 6.11 podemos visualizar essa ideia, e ainda notar que, quanto mais próximo um ponto se encontra do centro do círculo, mais distante estará seu inverso. Os pontos pertencentes ao círculo tem módulo igual a 1, o que implica em o inverso do círculo unitário ser ele mesmo. Assim, a inversão da região preenchida em vermelho leva na azul, e *vice versa*.

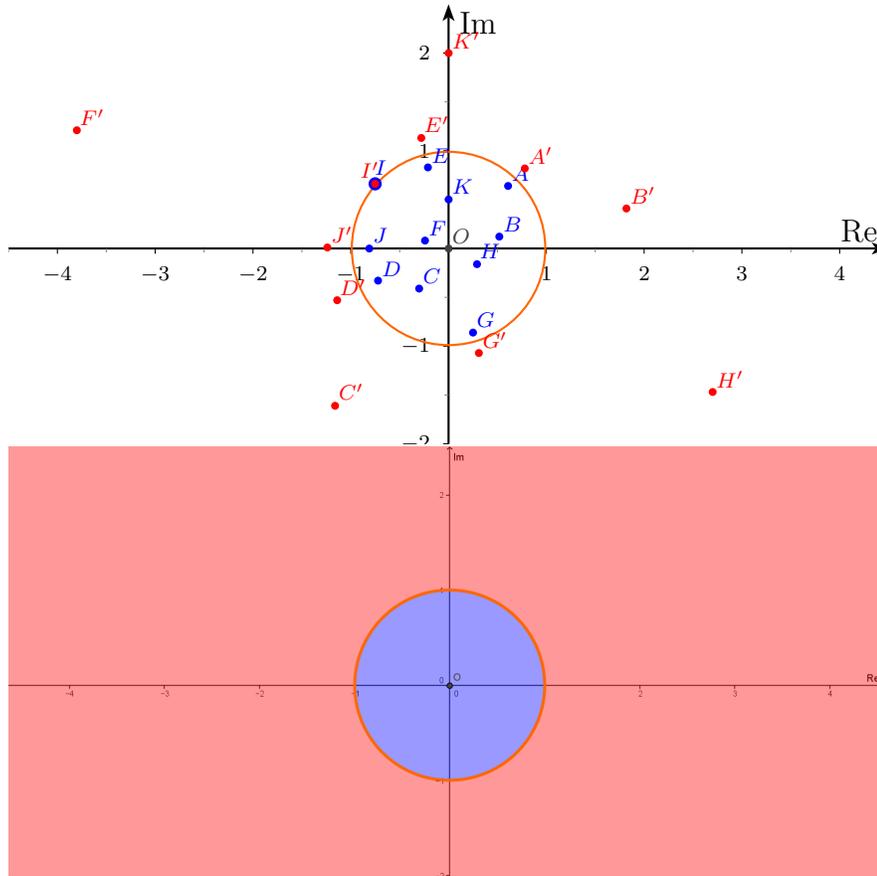


Figura 6.11: A inversão dos pontos internos ao círculo leva para pontos na região externa, e *vice versa*.

A inversão de um conjunto C de pontos do plano em relação a um círculo β é o conjunto C' formado pela inversão de cada ponto de C em relação a β . A inversão de um círculo α ou uma reta r (Euclidianos) em relação a um círculo β de centro O é também um círculo α' ou reta r' do plano Euclidiano ([4]).

Pode-se mostrar que:

- Se α é um círculo não contendo O seu inverso é também um círculo ([4, Proposition 7.6]);
- A inversão de um círculo α ortogonal a β leva α nele mesmo;
- Se r é uma reta não contendo O , sua inversa é um círculo passando por O . Notamos que a reta tangente a tal círculo em O é paralela a r ([4,

Proposition 7.7]);

- Reciprocamente, se α é um círculo passando por O , sua inversa é uma reta r' não contendo O ;
- A inversão de uma reta r passando por O leva r nela mesma.

Vamos usar essas afirmações para pensar nas retas hiperbólicas (representadas em laranja) da figura 6.5, que são, do ponto de vista da Geometria Euclideana, arcos ortogonais ao Disco de Poincaré. Na figura 6.12, o círculo β (em laranja) origina-se de uma das retas hiperbólicas representadas anteriormente, e estamos fazendo a inversão do Disco de Poincaré (círculo α , em verde). Note que, assim como na figura 6.11, a região em azul é transformada na região em vermelho e vice-versa.

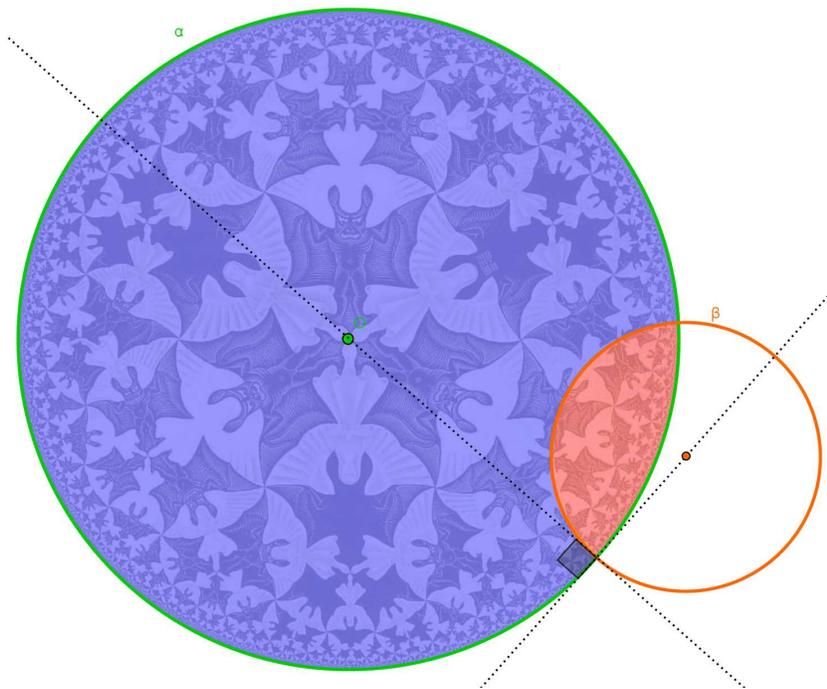


Figura 6.12: A inversão do Disco de Poincaré

Essa é a inspiração para justificar os eixos de simetria apontados no início do capítulo. Fica assim uma provocação ao leitor para que este faça, além dessa, muitas outras atividades com esta obra e outras obras semelhantes, buscando novos contextos e aplicações.

Conclusão

Ensinar números complexos não precisa ser tratado como um mal necessário. Podemos propor uma nova visão para nossos alunos, instigando, provocando a curiosidade e fazendo com que o ensino da Matemática recupere uma ferramenta fundamental: o prazer da descoberta.

Já que temos, nas salas de aula, alunos de todos os tipos e níveis, vimos que relacionar conteúdos, mostrar suas similaridades e apresentar temas de forma diferente torna as aulas mais significativas. Inverter as sequências tradicionais, investigando antes de formalizar, também é estratégia eficiente, principalmente para os alunos que não têm – ou acreditam não ter – grande facilidade no raciocínio lógico-matemático.

Da forma como propusemos, podemos dar significado e motivação para o estudo dos Números Complexos, trabalhando com suas diversas representações, mesmo que de maneira simples (como apresentamos no Capítulo 5) e relacionando-os com temas já conhecidos pelo aluno. Assim, as múltiplas inteligências são trabalhadas, atingindo uma parcela maior dos estudantes. A representação geométrica mostrou ser uma poderosa ferramenta de Ensino, e acreditamos que deve ser usada desde a primeira aula, desde a introdução ao conjunto dos Números Complexos.

Esperamos que este texto tenha plantado uma semente, e que seja motivador da criação de atividades, sequências didáticas inovadoras e, principalmente, tenha proposto uma fuga do lugar-comum proposto pelos livros didáticos mais tradicionalistas. Acima de tudo, esperamos que tenha sido uma leitura prazerosa para o Professor, e que ajude a criar aulas de Matemática tal como devem ser: interessantes, divertidas e significativas.

Afinal, Matemática é legal!!

Referências Bibliográficas

- [1] BHUSHAN, Alok; KAY, Kendrick; WILLIAMS, Eleanor. **Escher's Tessellations**. Disponível em: <<http://library.thinkquest.org/16661/escher/>>. Acesso em: 16 set. 2013.
- [2] BONJORNO, Regina Azenha et al. **Temas de Física, 1: Mecânica**. São Paulo: FTD, 1997.
- [3] CASSELMAN, Bill. **How did Escher do it?** 2010. Disponível em: <<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-circle-limit>>. Acesso em: 16 set 2013.
- [4] GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 4 ed. New York: W. H. Freeman and Company, 2008.
- [5] HAHN, Liang-shin. **Complex Numbers and Geometry**. Washington D.C.: The Mathematical Association Of America, 1994.
- [6] IEZZI, Gelson et al. **Matemática: Volume único**. São Paulo: Atual, 1999.
- [7] KRIKORIAN, Jorge; GRESPAN, Mauro. **Geometria: de Posição, Métrica e Analítica**. São Paulo: CERED, 2009. Coleção Objetivo - Sistema de Métodos de Aprendizagem.
- [8] MIRANDA, Daniel; GRISI, Rafael; LODOVICI, Sinuê. **Geometria Analítica e Vetorial: Notas de aulas**. Disponível em: <<http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ga/notas-de-aulas/>>. Acesso em: 17 jan. 2013.
- [9] SCHEIM, Charles. **M.C. Escher and Hyperbolic Geometry**. Disponível em: <<http://users.hartwick.edu/scheimc/page-escher.html>>. Acesso em: 16 set. 2012.

- [10] SERWAY, Raymond A. **Física 1:** para Cientistas e Engenheiros com Física Moderna. 3. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1996.