UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciencias Exatas
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NA GEOMETRIA FRACTAL

LUCAS CERQUEIRA MASCARENHAS

Feira de Santana
dezembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NA GEOMETRIA FRACTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dr(a). Fabíola de Oliveira Pedreira .

Feira de Santana
dezembro de 2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

M361 Mascarenhas, Lucas Cerqueira
Progressão aritmética e progressão geométrica : uma sequência didática baseada na geometria fractal / Lucas Cerqueira Mascarenhas. – 2024.
86 f :. il.

Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira.
Dissertação (mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2024.

1. Progressão aritmética. 2. Progressão geométrica. 3. Geometria fractal. 4. Matemática – Ensino médio. 5. Sequência didática. I. Título. II. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. III. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). IV. Departamento de Ciências Exatas. V. Universidade Estadual de Feira de Santana.

CDU 514.1:373.5

Luis Ricardo Andrade da Silva - Bibliotecário - CRB-5/1790

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Lucas Cerqueira Mascarenhas do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos nove dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 10 horas, na sala MT58, ocorreu a defesa pública da dissertação apresentada sob o título **"PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NA GEOMETRIA FRACTAL"**, do discente **Lucas Cerqueira Mascarenhas** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS). e Diego Daltro Conceição (UFRB). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito, Aprovado. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 9 de dezembro de 2024.

Fabíola de Oliveira Pedreira
Profª. Drª Fabíola de Oliveira Pedreira.(Orientadora,UEFS)

Darlan Ferreira de Oliveira
Prof.. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Diego Daltro Conceição
Prof. Dr. Diego Daltro Conceição. (UFRB)

Visto do Coordenador: Jean Fz. R

PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NA GEOMETRIA FRACTAL

LUCAS CERQUEIRA MASCARENHAS
Orientadora: Prof. Dr(a). Fabíola de Oliveira Pedreira

27 de dezembro de 2024

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por todo apoio, incentivo e por acreditar no meu potencial todos os dias nesta caminhada.

Agradeço a minha amada esposa por todo apoio, carinho, companheirismo, compreensão, colaboração que sempre me dedicou e por acreditar no nosso constante desenvolvimento.

Agradeço aos professores do Profmat - UEFS pelos ensinamentos e conhecimentos ministrados, pelo apoio no decorrer do curso e por todo carinho e compreensão.

Agradeço imensamente a professora e orientadora, Dr(a). Fabíola de Oliveira Pedreira pelas orientações, sugestões, incentivo, paciência e disponibilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, amigos de todos os momentos. Estudos, conversas, brincadeiras e ensinamentos, além de todo carinho e incentivo.

Agradeço aos meus alunos por, de forma voluntária, participarem na prática da proposta apresentada neste trabalho, pelo apoio, confiança, seriedade e pelos momentos descontraídos e de muito aprendizado.

Por fim, agradeço à CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso tem o intuito de auxiliar os docentes do ensino básico com uma didática não convencional, fomentando o interesse dos estudantes do Ensino Médio de uma instituição pública do estado da Bahia em relação às progressões aritméticas e geométricas a partir de uma didática baseada na perspectiva da Geometria Fractal. O desenho metodológico foi delineado por meio de uma sequência pedagógica estruturada em termos dos elementos históricos, epistemológicos e desafiadores que justificam a razão de ser destes objetos matemáticos, tanto das progressões quanto da geometria fractal. Na parte experimentação, observou- se que os discentes absorveram o assunto sem o convencional método de memorização de fórmulas, assim, tornando o aprendizado desafiador e interessante extraindo da matéria sua mais pura essência.

Palavras-chaves: Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Geometria Fractal; Ensino Médio; Sequência didática.

Abstract

This final project aims to assist elementary school teachers with an unconventional teaching method, fostering the interest of high school students from a public institution in the state of Bahia in arithmetic and geometric progressions from a teaching method based on the perspective of Fractal Geometry. The methodological design was outlined through a pedagogical sequence structured in terms of the historical, epistemological and challenging elements that justify the reason for these mathematical objects, both progressions and fractal geometry. In the experimental part, it was observed that the students absorbed the subject without the conventional method of memorizing formulas, thus making learning challenging and interesting, extracting the purest essence of the subject.

Keywords: Arithmetic Progression; Geometric Progression; Fractal Geometry; High School; Didactic sequence.

Sumário

Introdução

A matemática é uma ciência vital para a sociedade contemporânea, pois, está presente e inerente em todo seu cotidiano sendo uma importante forma de linguagem e o pilar de uma vida organizada. Os usos da matemática podem variar desde as tarefas mais simples até problemas mais complexos, desempenhando papel imprescindível em todos os aspectos da vida, seja em questões cotidianas, como rastreamento de tempo, condução, culinária ou trabalhos como contabilidade, finanças, bancos e pagamentos.

> "Sem números e evidências matemáticas, não podemos resolver muitos problemas em nossas vidas diárias. Há horários, medidas, taxas, salários, licitações, descontos, sinistros, suprimentos, empregos, ações, contratos, impostos, troca de dinheiro, consumo, entre outros, e na ausência desses dados esportivos, temos que enfrentar confusão e caos" . (BAIL, 2002)

Devido a sua importância na construção da cidadania, nos conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, o ensino da matemática deve ser meta prioritária no trabalho docente, procurando desenvolver nos alunos competências para compreender e transformar a realidade.

Mas, apesar da sua relevância, dificuldades relacionadas à aprendizagem da matemática são encontradas corriqueiramente, consequência de um ensino de memorização, repetição e reprodução. Os discentes não conseguem compreender os conhecimentos abstratos ou até concretos apresentados, não "visualizam" a aplicação do conteúdo em sua realidade, tem dificuldade no desenvolvimento construtivo da experiência matemática, não entendem noções básicas, operações e criam obstáculo na analise, compreensão e resolução de problemas, como resultado, transformam a matemática em algo incompreensível, desinteressante e para poucos; um "demônio" que deve ser evitado. "Na minha geração de brasileiros do Nordeste, quando se falava em matemática, nós estávamos falando algo sobre deuses" (FREIRE; D'AMBROSIO; MENDONÇA, 1997).

Em vista desta dificuldade no aprender e visando uma melhoria na absorção do conteúdo, o docente precisa adequar o trabalho escolar à essa realidade com o intuito de amenizar as barreiras perante esta ciência exata chamada matemática. Além disso, ainda é muito presente na sala de aula o desinteresse e desmotivação dos alunos em relação à aprendizagem dessa disciplina. Portanto, esse trabalho justifica-se pela necessidade de propor um ensino que fuja do padrão habitual, trabalhando conteúdos de uma forma mais interessante e não tradicional. Partindo deste contexto, desenvolveu-se nessa dissertação a apresentação de conceitos do Ensino Médio como *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas* com um desenho pedagógico delineado de uma perspectiva da *Geometria Fractal*. Desse modo, tem-se uma tentativa de auxiliar os docentes com uma concepção não habitual e o intuito de despertar o interesse do aluno, favorecendo o aprendizado e fugindo da didática convencional. Pois, ensinar e aprender não só dependem do conhecimento técnico, da habilidade e metodologia do professor, mas, além de tudo, precisa do desejo e dedicação do aluno, por consequência, precisa ser atrativo, agradável, cativante e desafiador.

Pensando nisso, esse estudo de conclusão está dividido em cinco capítulos: no primeiro, foi apresentada a história das progressões aritméticas e geométricas desde os seus supostos inícios nas sociedades antigas até as aplicações contemporâneas. A ideia principal é contextualizar o ensino da matemática, mas especificamente, das progressões.

O segundo capítulo apresenta a Ciência do Caos, na qual, dar-se origem e associa-se uma nova área da matemática que será uma das bases dessa dissertação, a denominada *Geometria Fractal*. Em vista disso, neste capítulo concentra-se as informações pertinentes à esta geometria, desde suas propriedades e classificações até a história do seu surgimento.

No terceiro capítulo, será abordada a fundamentação teórica essencial para o bom desenvolvimento deste projeto. Definições, conceitos, classicações e todas as informações pertinentes de sequências, séries, *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas*. Em outras palavras, neste capítulo está o alicerce de todo o trabalho.

O quarto capítulo é um trecho vital e indispensável deste estudo de conclusão de curso, pois, é nele que estudamos a matemática envolta nos fractais ou denominados "monstros matemáticos". De outro modo, é nesse capítulo que apresentamos os fractais escolhidos para compor o projeto, demonstrando sua classificação e construção. Consequetemente, é nesta parte que estudamos e analisamos as possíveis progressões existentes nesses objetos matemáticos.

O quinto e último capítulo é a descrição de todo o processo para se colocar a proposta na prática. Desenvolvimento das aulas, análise dos acontecimentos e considerações de tudo que se sucedeu. O intuito é fazer um estudo de caso da didática apresentada, analisando se, realmente, consegue obter êxito com os educandos fazendo-os evoluir nos seus conhecimentos teóricos e práticos a respeito das progressões. Em outras palavras, o capítulo é um relato das aulas e atividades baseadas neste estudo sendo aplicadas na realidade, por consequência, tem-se a finalidade de vivenciar tudo que foi fundamentado no trabalho, focando em toda experiência vivida e sentida pelos estudantes.

Capítulo 1

História das Progressões Aritmética e Geométrica

Na contextualização da história da matemática não se sabe ao certo seu início, pois, devido a falta de comunicação rápida entre os povos e a perda de informações perante o tempo, a questão de por onde começar se impõe. Corriqueiramente, se considera como a matemática mais antiga aquela, cronologicamente, resultante dos primeiros empenhos do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e quantidade, ou seja, começa-se focalizando de início o surgimento no homem primitivo o conceito de número e o processo de contar.

Não é difícil de imaginar que sociedades muito antigas tenham tido noções de quantidade e contagem, isto devido ao fato de se ter uma necessidade de subsistência e sobrevivência. Consequentemente, é razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois, há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos. Segundo algumas evidências arqueológicas, os homens, há uns 5000 anos, eram capazes de contar.

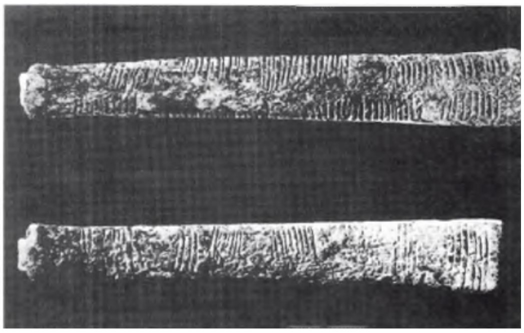


Figura 1.1: Osso Ishango, com mais de 8000 anos.

”Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o principio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira, como na Figura 1.1, ou fazendo-se numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o numero de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números. Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época”. (EVES, 2004)

1.1 Primeiros Indícios de Progressões na História

Nota-se então que a história da matemática confunde-se com as necessidades e evoluções da sociedade humana e suas constantes “lutas”, não muito distante disso surge o conceito de progressões aritméticas e geométricas, as quais serão apresentadas em conjunto, pois, a história das duas estão entrelaçadas.

Não se sabe ao certo quais os primeiros povos a usarem o conceito de progressão, no entanto, um dos primeiros indícios do estudo das progressões se deu com os egípcios há 5000 anos atrás, os quais estabeleceram padrões característicos do Rio Nilo, como eram comum ocorrer enchentes, eles precisavam saber quando haveria inundação, para poder plantar na época certa e garantir seus alimentos. Havia, portanto, a necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento. Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Além disso, dividiram os doze meses em três estações de quatro meses: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

O papiro de Rhind (Papiro de Ahmes), aproximadamente de 1650 a.C., é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Este papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, razão de seu nome, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. O manuscrito foi outra fonte primária rica sobre progressões, deixando evidências de que os egípcios sabiam utilizar este conceito. Uma das evidências se dá devido ao problema "divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".

Outro problema encontrado cita apenas: "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um exercício bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. No Papiro de Rhind, também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

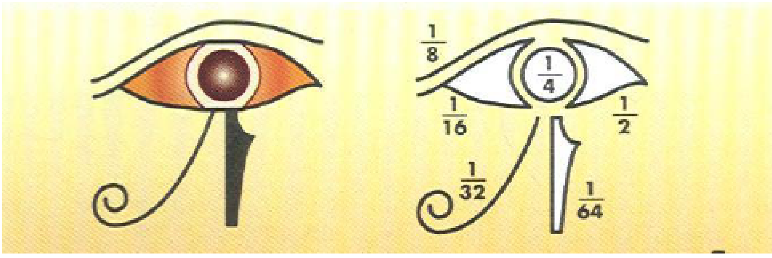


Figura 1.2: Olhos do Deus Hórus.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto à tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.), na qual, a soma de uma progressão geométrica $1+2^1+2^2+...+2^9$ é encontrada.

Os gregos também mostraram conhecimentos nas progressões, o indício que mais se destaca se deve ao matemático Pitágoras, pois, além de conhecer o conceito das progressões aritméticas e geométricas, ele associou à música, surgindo a "progressão harmônica".Na geometria, o número de pontos em certas configurações se dá por uma progressão aritmética. Um destes exemplos são os chamados números triangulares $(Tn) = (1, 3, 6, \dots)$, os quais podemos ver na Figura 1.3.

Evidentemente o enésimo número triangular Tn é dado pela soma dos n primeiros termos de uma *Progressão Aritmética*, lembrando que a soma dos termos de uma *Progressão Aritmética* finita é a metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos, sendo essa:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

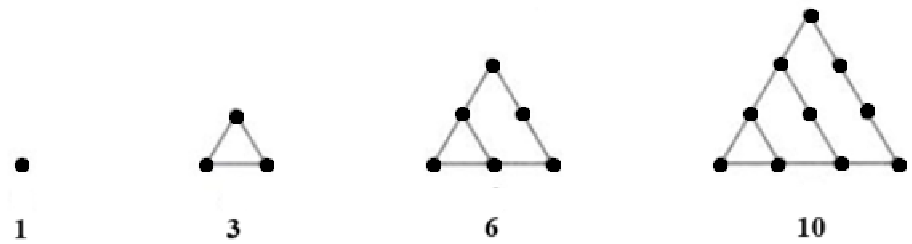


Figura 1.3: Números Triângulares.

Por volta de 300 a.c., em Alexandria, um grego chamado Euclides produziu a obra *Os Elementos*, a qual, teve sua primeira edição em 1482. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Nesta obra, composta por 465 proposições distribuídas em treze livros, encontra-se, no livro VIII, a progressão geométrica expressada da seguinte forma: se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

A proposição 35 do livro IX, o último sobre teoria dos números, contém uma fórmula para a soma de números em "progressão geométrica", expressa em termos elegantes mas poucos usuais:

"Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem".

$$\frac{a_n - a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Esse enunciado é equivalente à fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

1.2 A Lenda da Origem do Jogo de Xadrez

Segundo a lenda, reinou na Índia um príncipe chamado Iadava, senhor da província da Taligana, difícil será descobrir, dada a incerteza dos documentos antigos, a época precisa em que viveu, porém, os historiadores hindus narravam o rei como um dos soberanos mais ricos e generosos de seu tempo. Devido ao dever que lhe impunha a coroa de zelar pela tranquilidade de seus súditos, viu-se o monarca forçado a empunhar a espada para repelir o pequeno exército do príncipe de Caliã. Iadava tinha o maior talento para a arte militar, sereno em face da invasão iminente, elaborou um plano de batalha, e tão hábil e feliz foi em executá-lo, vindo a vencer e restaurar a paz de seu reino. O triunfo custou-lhe, infelizmente, a vida do seu filho o príncipe Adjamir, consequentemente, o rei, entrou em profunda depressão, se isolou em seus aposentos e só aparecia para atender aos ministros e sábios brâmanes quando algum grave problema nacional o chamava. As peripécias da batalha em que perdeu o príncipe Adjamir não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando, sobre uma grande caixa de areia, as diversas manobras executadas pelas tropas. Vindo de uma aldeia muito distante, um súdito chamado Lahur Sessa, para tirar o seu rei da depressão e angústia pela perda de seu filho e sabendo do amor do monarca por estratégias, inventa o jogo de xadrez e presenteia seu soberano. Ao se maravilhar com aquele jogo, o rei oferece ao jovem rapaz uma recompensa a sua escolha, então, Lahur Sessa faz a seguinte proposta:

"Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Peço-vos, ó Rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!" (Malba Tahan, p.134).

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, a recompensa pedida pelo jovem Lahur Sessa se tratava da soma dos 64 termos de uma *Progressão Geométrica*. A mesma daria um valor imensurável, inevitávelmente, era impagável, pois a quantia de trigo superava as suas colheitas nos próximos 2 000 anos. Visto que era impossível para o rei Iadava pagar a sua dívida e vendo da incapacidade de seu rei, o jovem Lessa recusou a recompensa educadamente com as seguintes palavras:

"Meditai, ó Rei, sobre a grande verdade que os brâmanes prudentes tantas vezes repetem: os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete."(Malba Tahan, p.140).

Apesar de não receber sua merecida recompensa, foi oferecido ao jovem Lessa um cargo de conselheiro real, o qual foi aceito com grande prontidão e respeito.

1.3 A soma de Gauss

Mais recente, temos o matemático, astrônomo e físico Johann Friederich Carl Gauss (1777 - 1855) que aos três anos de idade já sabia ler e fazer cálculos aritméticos mentalmente. Perguntado, durante uma aula de matemática, por seu professor a soma dos números de 1 a 100, Gauss apresentou o resultado correto em poucos minutos se utilizando de uma estratégia que, graças a ele, se usa até hoje na contemporaneidade. Ele observou que a soma dos números nas extremidades é sempre constante, ou seja, a soma do primeiro e último termo ou a soma de quaisquer dois termos equidistantes, como o segundo e o penúltimo, tinha sempre como resultado o mesmo número 101, e de 1 a 100 haviam 50 pares de somas desse tipo.

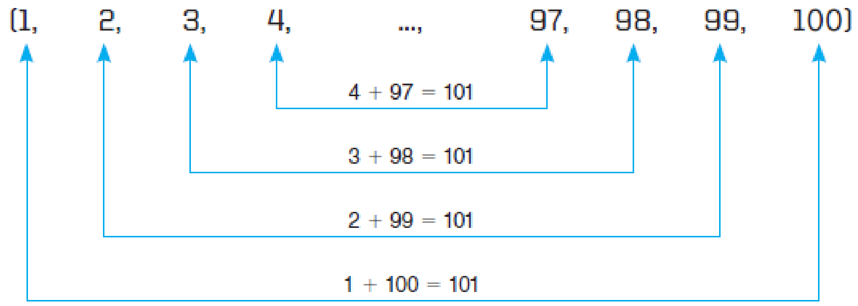


Figura 1.4: Estratégia de Gauss.

Então, ele multiplicou a constante 101 por 50, quantidade de vezes que essa soma aparece. Na verdade, Gauss percebeu que o 50 era número de termos da sequência dividido pela metade, criando assim a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita, a qual se resume em somar o 1° termo mais o último, multiplicar esta soma pelo número de termos e dividir tudo por dois, logo, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Capítulo 2

Geometria Fractal e sua História

A matemática é uma ciência que tenta compreender e transformar a realidade do mundo em que vivemos. Realidade esta que não está, na grande maioria das vezes, em uma forma convencional ou perfeita , mas sim, de forma caótica, complexa, irregular, aleatória e imprevisível. À vista disso, surge o desenvolvimento de uma ciência denominada "Caos", na qual, biólogos, físicos, matemáticos e cientistas de várias especialidades deram enfoque para as questões da natureza e sua complexidade. A Ciência do Caos trouxe consigo o ver ordem e padrão na desordem, pois, em toda a natureza, coexistem o determinismo (ordem) e o imprevisível (caos). Nesta ciência, criou-se e associou-se uma nova área da matemática chamada de *Geometria Fractal* que é uma linguagem descritiva, analítica e modeladora das formas geométricas encontradas na natureza. Por desafiarem o enquadramento nas definições convencionais da geometria clássica, as formas geométricas geradas foram apelidadas de "monstros matemáticos" ou "casos patológicos".

> "A geometria fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca a perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará os objetos da mesma forma." (BARNSLEY, 2014).

O termo fractal foi criado em 1975 pelo matemático francês Benoît Mandelbrot (1924-2010) que vem do adjetivo fractus, do verbo frangere em latim, que significa partir, quebrar e fracionar em segmentos irregulares que, apesar de estarem em tamanhos menores, mantém um padrão que representa o todo. A Geometria Fractal influenciou decisivamente para o rompimento do determinismo, ampliou a abrangência da geometria e possibilitou ao homem trabalhar com partes das complexidades da natureza. Na contemporaneidade, o estudo dos fractais tem uma larga aplicação em diversos campos da ciência e tecnologia como: a utilização de antenas para equipamentos móveis; misturador de fluídos; a análise de solos; nebulosidade da área; movimentos dos rios; estrutura de vários cristais; fisiologia animal; as ramificações pulmonares; veias e artérias; ritmo cardíaco que, apesar de aparentemente constante, tem variações aleatórias, porém, identificaram-se padrões fractais nessas variações em diferentes escalas; análise de imagens no diagnóstico precoce de câncer e do Mal de Alzheimer; estrutura de plantas e micro-organismos e muitas outras áreas da ciência.

2.1 Propriedades dos Fractais

2.1.1 Auto-Semelhança ou Auto-Similaridade

É a semelhança que uma parte tem com o todo, em outras palavras, mesmo alterando-se a escala do objeto observado, podemos identificar numa parte a auto-semelhança ou auto-similaridade com o todo completo. Existem dois tipos de auto-similaridade: a exata e a estatística. Na exata, as partes são cópias exatas dos padrões em diferentes ampliações. Na estatística, forma mais encontrada na natureza, os padrões não se repetem com exatidão sendo uma aproximação com sutis diferenças. Mas, em qualquer um desse casos, mantém uma semelhança independente da escala que observamos o objeto, ou seja, um fractal é uma figura que pode ser representada por uma de suas partes sem perder suas características iniciais.

2.1.2 Complexidade Infinita e Iteração

O processo ou iteração de quebrar ou dividir em partes menores que se assemelham com o todo é recursivo e infinito. Quando se executa um determinado procedimento, no decorrer do mesmo encontra-se como subprocedimento o próprio procedimento anteriormente . É através desta propriedade que há o contraste entre complexidade e a simplicidade de um fractal. Consiste em repetir o mesmo ato ou princípio infinitamente em uma espécie de feedback.

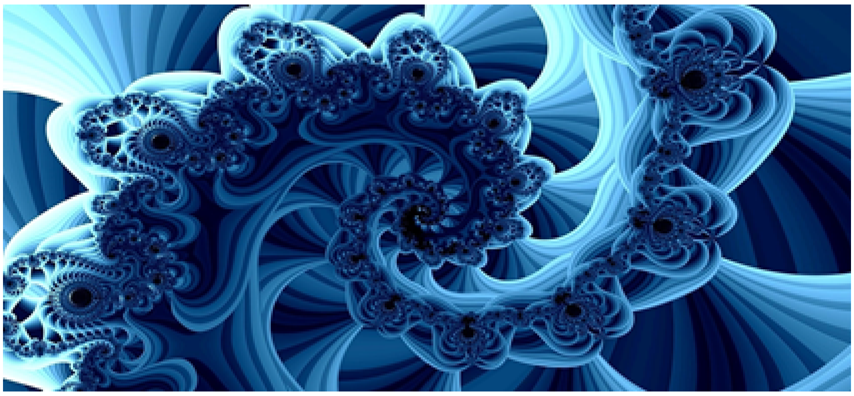


Figura 2.1: Fractal e sua perspectiva de infinito.

2.1.3 Dimensão Não - Inteira

Na geometria clássica, os objetos estudados tem dimensões inteiras, também chamada de dimensão Euclidiana. Um ponto tem dimensão 0 (zero), uma reta tem dimensão 1 (um), uma área tem dimensão 2 (dois) e um volume dimensão 3 (três). Mas, na *Geometria fractal*, a maioria dos objetos estudados apresentam dimensão não-inteira, dimensão esta quantificada, de certo modo, pelo grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto considerado. Esta é chamada de dimensão de Hausdorff, pois, vem do matemático alemão Felix Hausdorff.

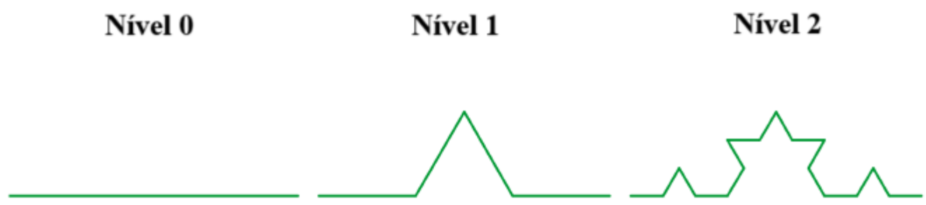


Figura 2.2: Curva de Koch com Dimensão de 1,262.

2.2 Classificação dos Fractais

Podemos agrupar os fractais em três grupos de acordo com a forma de geração e o grau de auto-similaridade observada.

2.2.1 Fractais por Sistemas de Funções Iteradas

Denominado fractal determinístico ou geométrico, possui uma regra fixa de substituição geométrica bem definida. Os fractais gerados por *Funções Iteradas* possuem auto-semelhança exata, característica marcante e evidente, ele é idêntico em diferentes escalas. Alguns fractais desse grupo bastante conhecidos são Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Curva e a Ilha de Koch, o Tapete e Triângulo de Sierpinski, entre outros. Estes podem ser divididos em grupos de acordo com as formas geradoras: fractais pela fronteira, fractais por remoção, fractais tipo Dürer e fractais tipo Árvore.

1. Fractais pela Fronteira:

As funções iteradas para construção de fractais pela fronteira são definidas a partir da substituição de uma determinada parte pelo seu gerador, aumentando-se assim o seu comprimento ou área a cada iteração.

Exemplo 2.1. A curva de Koch, a qual mencionamos sua dimensão, tem a seguinte iteração:
Passo 1: Considere um segmento de reta;
Passo 2: Divida o segmento em três partes iguais, retire a parte central, substituindo-a por dois segmentos de mesmo tamanho, inclinados como se fosse formar um triângulo equilátero sem base;

Passo 3: Considere os segmentos de reta e retorne para o Passo 2, repita o processo sucessivamente.

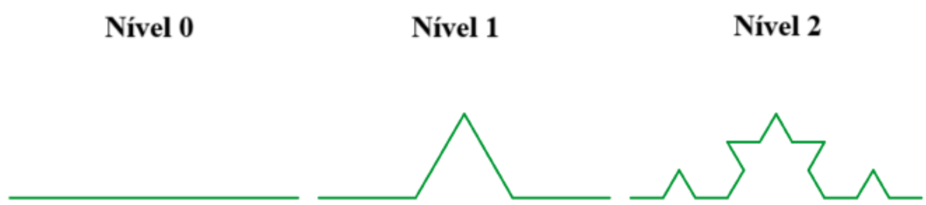


Figura 2.3: Curva de Koch.

2. Fractais por Remoção:

Os fractais por remoção, conforme o nome sugere, são objetos em que são removidas partes do mesmo de forma iterativa.

Exemplo 2.2. O Tapete de Sierpinski tem a seguinte iteração:
Passo 1: Considerar inicialmente um quadrado de lado (L) ;
Passo 2: Divida-o em 9 quadrados;
Passo 3: Remova o quadrado central;
Passo 4: Repetir em cada um dos quadrados não eliminados os passos 2 e 3;
Passo 5: Repetir o passo 4 sucessivamente.

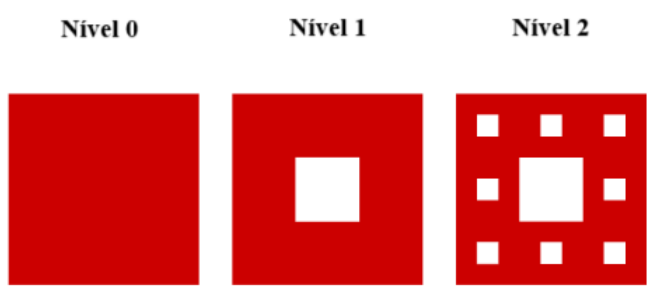


Figura 2.4: Tapete de Sierpinski.

3. Fractais Tipo Dürer:

Na construção de fractais Tipo Dürer, utilizamos inicialmente um polígono regular, e a cada iteração substituímos cada vértice por um polígono regular com a mesma quantidade de lados. Os novos polígonos são semelhantes e devem estar igualmente espaçados.

Exemplo 2.3. O Hexagonal tem a seguinte iteração:
Passo 1: Considere um hexágono regular;
Passo 2: Em cada um dos 6 (seis) vértices, insira novos hexágonos regulares de escala menor;
Passo 3: Repita o Passo 2 nos novos hexágonos, e assim sucessivamente.

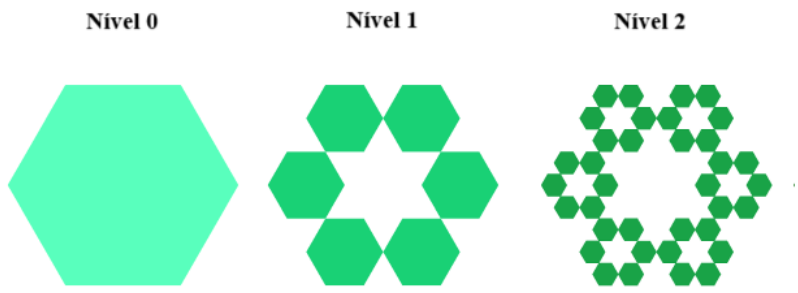


Figura 2.5: Fractal Hexagonal.

4. Fractais Tipo Árvore:

Os fractais Tipo Árvore têm em seu processo de iteração ramificações que geralmente se assemelham às árvores, originando assim o seu nome.

Exemplo 2.4. A Árvore Pitagórica tem a seguinte iteração:
Passo 1: Construa um quadrado;
Passo 2: Usando como base o lado de cima deste quadrado, construa um triângulo retângulo tendo como hipotenusa o lado do quadrado;
Passo 3: Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construa dois novos quadrados cujos lados são exatamente os catetos;
Passo 4: Repita os 3 passos anteriores para os dois novos quadrados, e assim sucessivamente.

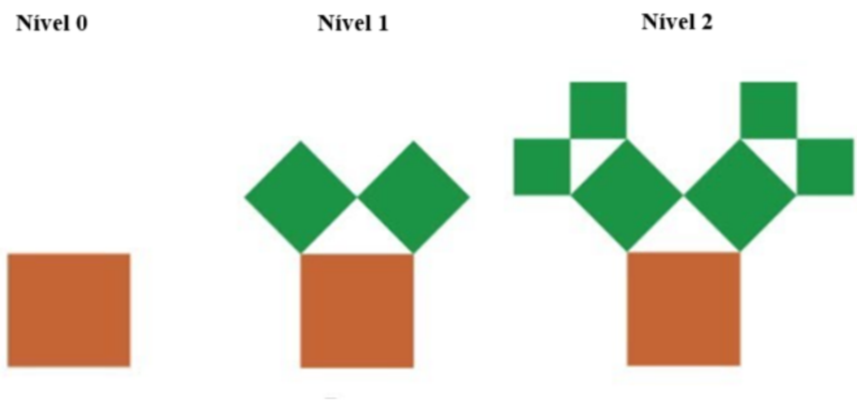


Figura 2.6: Árvore Pitagórica.

2.2.2 Fractais por Relação de Recorrência

Denominados de fractais de fuga de tempo, possuem uma forma mais livre de similaridade definida como quase auto-similaridade, pois, apresentam pequenas cópias do fractal inteiro de maneira distorcida ou degenerada. O fractal símbolo dos fractais gerado por Mandelbrot e Júlia é um exemplo deste grupo.

Para a construção dos Conjuntos de Mandelbrot e Julia é utilizado o conjunto dos números complexos, $z = x + iy = (x, y)$, onde $i^2 = -1$ e a relação de recorrência $z_n : C \to C$ definida por $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$, onde, $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{C}$, isto é, $c = a + ib = (a, b)$.

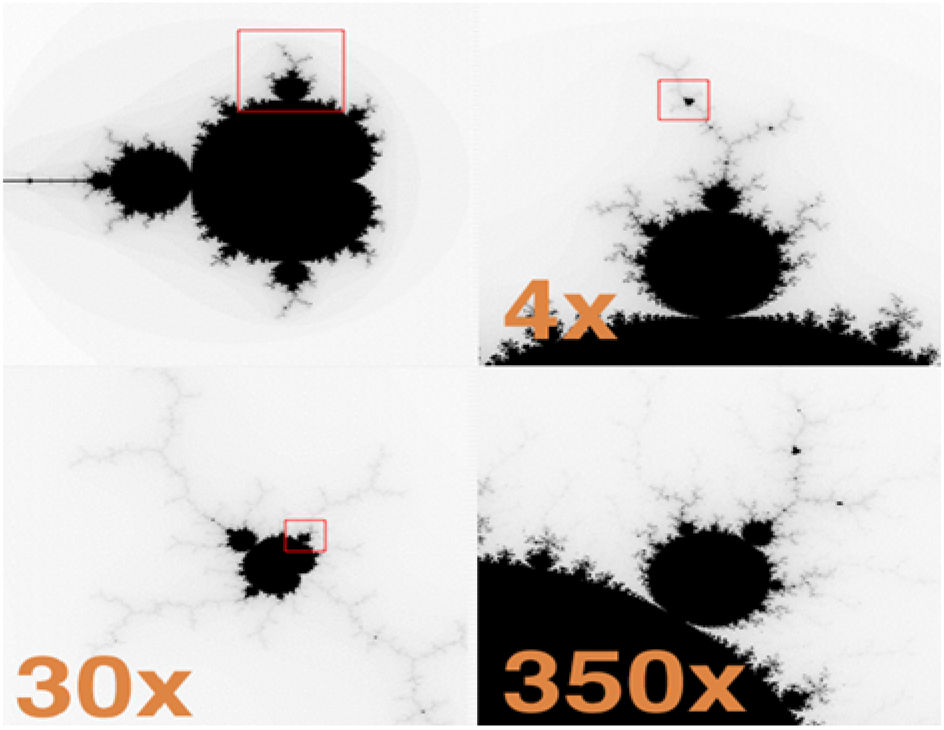


Figura 2.7: Conjuntos de Mandelbrot e Julia ampliado várias vezes.

2.2.3 Fractais Aleatórios

Denominados de fractais naturais, são gerados por processos aleatórios ao invés de processos determinados, esses fractais são relacionados aos estudos da Teoria do Caos, aos fractais encontrados na natureza e associados às simulações de imagens na computação gráfica.

Possuem auto-similaridade estatística, a qual não é exata e sim aproximada, mas as medidas numéricas ou estatísticas são preservadas em diferentes escalas, tendo como consequência a preservação da dimensão fractal. É a forma menos evidente de auto-semelhança.

Apesar de terem características de um fractal, geralmente, os fractais aleatórios são pseudo-fractais naturais, pois, esses objetos exibem uma estrutura auto-similar, mas é finito, perdendo uma das principais características de um fractal que é a *Complexidade Infinita*.

Num ramo de uma árvore ou na folhagem de uma samambaia pode ser observada uma réplica não idêntica, porém semelhante ao todo. Existem diversos casos encontrados na natureza que possuem este tipo de caracterísitica: terrenos, costas, plantas, um floco de neve, as veias de um corpo humano, os raios de uma tempestade e uma flor com camadas quase que idênticas são exemplos de fractais desse grupo.

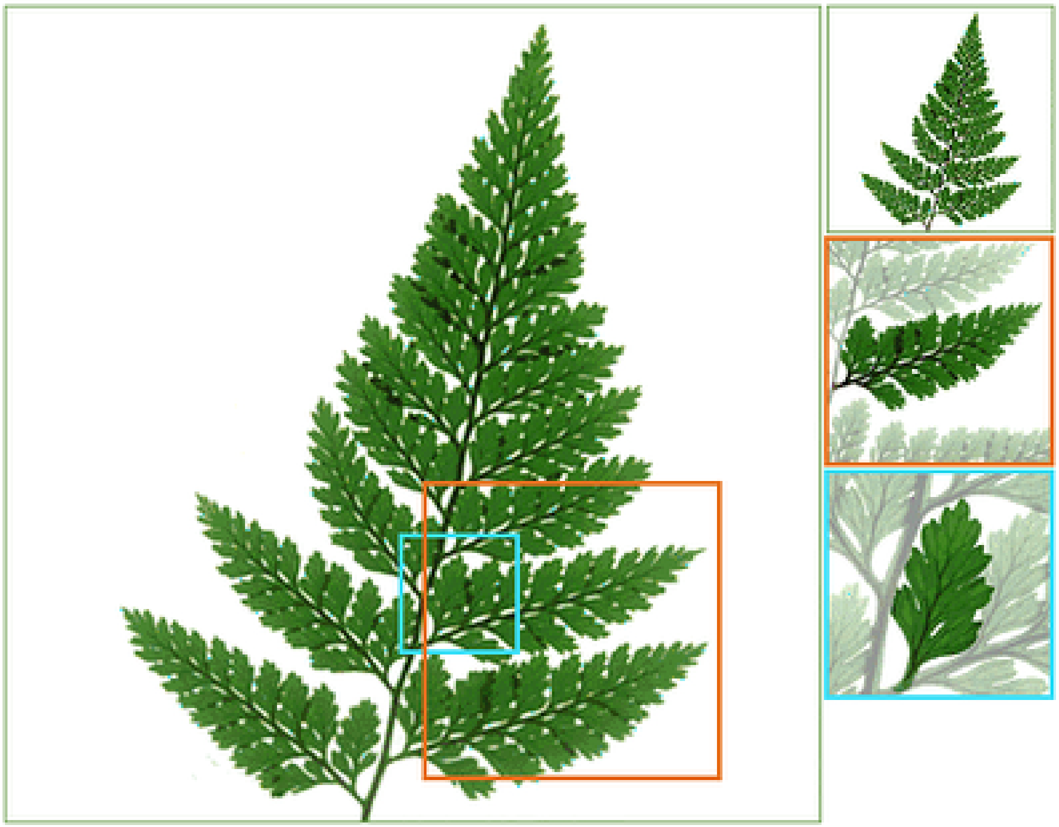


Figura 2.8: Samambaia.

2.3 História da Geometria Fractal

Apesar de Mandelbrot ter criado o termo fractal na década de 70, a existência dos fractais já era conhecida e estudada por muitos matemáticos. O próprio Mandelbrot, na década de 60, quando trabalhava na IBM (International Business Machines) – Centro de Pesquisas Thomas Watson, solucionou o problema dos ruídos nas linhas telefônicas se utilizando de um famoso "monstro matemático" chamado de Conjunto de Cantor.

Em vez de tentar eliminar o ruído, Mandelbrot fez o caminho inverso, considerou-os inevitáveis. Percebeu que os erros vinham em blocos que, se ampliados, revelavam outros blocos menores em sua estrutura intercalados pelos dados da transmissão. Dessa forma, tratou os erros de maneira semelhante à poeira de Cantor. Programando os computadores para trabalhar assim, conseguiu fazer com que os receptores diferenciassem a informação transmitida e o ruído indesejável. Mesmo não eliminando a chegada dos erros, eliminou a maior parte da interferência. Após isto, Mandelbrot reuniu todos os seus trabalhos e direcionou-os para o que conhecemos como Geometria Fractal.

2.3.1 Cronologia:

• 1500 - O Matemático, físico, botânico, zoólogo, desenhista e pintor alemão Albrecht Dürer desenvolve fractais a partir de polígonos regulares;

• 1883 - Georg Cantor, matemático alemão, publica o primeiro objeto fractal a Curva de Cantor;

• 1890 - Giuseppe Peano, famoso matemático conhecido pelos axiomas de Peano, publica seu "demônio"matemático, a Curva de Peano que tinha o objetivo de cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular;

• 1891 - David Hilbert, professor alemão, publica a Curva de Hilbert montros matemático que também tinha a intenção de cobrir a superfície quadrada, sem interseção de pontos. Conhecida como curva de preenchimento, hoje é utilizada em técnicas de compressão de imagens;

• 1904 - Helge von Koch, matemático sueco, cria a Curva de Koch que aplicada aos lados de um triângulo equilátero gera a Ilha de Koch ou floco de neve, pois é bastante semelhante a flocos de neve naturais;

• 1918 - Felix Hausdorff, professor polonês, publica resultados sobre estudos topológicos e com isso cria a Dimensão de Hausdorff;

• 1918 - Gaston Julia, matemático fracês, publica um artigo sobre o seu conjunto gerado num plano complexo;

• 1918 - Pierre Fatou, outro matemático francês, publica trabalho semelhante ao de Julia, porém, sem muita repercussão;

• 1926 - Karl Menger, professor e matemático austriaco, apresenta a Esponja de Menger explorando o conceito de dimensão topológica. Como cada face da Esponja de Menger apresenta o Tapete de Sierpinski cuja linha central representa o Conjunto de Cantor, é considerado uma expansão tridimensional desses outros objetos fractais.

• 1938 - Pierre Lévy, matemático francês, descreve sobre a propriedade de auto-similaridade de algumas curvas, além disso, representou e forneceu o modelo de construção da Curva de Lévy ou Curva C;

• 1967 - Mandelbrot publica seu artigo sobre a topologia da costa da Grã-Bretanha, iniciando um novo capítulo sobre a Geometria Fractal.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Sequências Numéricas

Antes de falarmos de progressões, precisamos de um conhecimento prévio sobre sequências numéricas, as quais, geralmente, possuem uma lei de formação ou lei de recorrência com especificidades, características ou ordenamento a ser seguido.

Definição 3.1. Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real $a(n)$, indicado por a_n, o qual é chamado de *n-ésimo* termo da sequência.

Exemplo 3.2.

1. $(2, 4, 6, 8..., 2n, ...) \to$ sequência dos números pares de $a_n = 2n$.

2. $(1, 3, 5, 7..., 2n - 1, ...) \to$ sequência dos números ímpares de $a_n = 2n - 1$.

Observação 3.3. É preciso clareza na lei que define os termos de uma sequência, embora nem sempre seja possível ter uma fórmula específica para isto, como por exemplo, a sequência dos números primos.

3.1.1 Sequências Limitadas e Ilimitadas

Muitas sequências tem todos os termos confinados em um intervalo limitado, enquanto que outras não tem seus termos confinados em nenhum intervalo, o que nos conduz à seguinte definição:

Definição 3.4. Uma sequência (a_n) é dita limitada, se existe $k > 0$, tal que $|a_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (a_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.

Exemplo 3.5.

1. $(-1, 1, -1, 1..., (-1)^n, ...) \to$ sequência limitada de $a_n = (-1)^n$.

2. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}..., \frac{1}{n}, ...) \to$ sequência limitada de $a_n = \frac{1}{n}$.

3. $(1, 2, 3, 4..., n, ...) \to$ sequência ilimitada de $a_n = n$.

3.1.2 Sequências Convergentes e Divergentes

Note que a sequência $(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}..., \frac{n}{n+1}, ...)$ tem a propriedade de que quanto maior for a variável n, mais próximo o valor da sequência se aproxima de 1, em outras palavras, ela converge para um determinado número real, consequentemente, temos:

Definição 3.6. Sejam (a_n) uma sequência de números reais e L um número real. Dizemos que (a_n) converge para L, ou é convergente, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ quando para qualquer intervalo aberto I contendo L (por menor que ele seja) é possível encontrar um inteiro $n_0 \geq 1$, de modo, que $a_n \in I$ para todo $n > n_0$. Quando não existir o número real L para o qual a_n convirja, dizemos que a sequêncoa é dita divergente.

Exemplo 3.7.

1. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}..., \frac{1}{2^n}, ...) \to$ sequência convergente de $a_n = \frac{1}{2^n}$.

2. $(1, 2, 4, 8..., 2^n, ...) \to$ sequência divergente de $a_n = 2^n$.

3.1.3 Sequências Monótonas

Existem sequências em que de um termo para o próximo nunca descresce, ou seja, ela é sempre não-decrescente ou crescente. Do mesmo modo, existem as sequências em que de um termo para o próximo nunca cresce, neste caso, ela é sempre não-crescente ou decrescente. Estes tipos de sequências são chamadas de Monótonas.

Definição 3.8. Dizemos que uma sequência é monótona não–decrescente ou crescente se, para todos os naturais m, n tais que $m < n$ implicar, respectivamente, $a_m \leq a_n$ ou $a_m < a_n$. E dizemos que a sequência é monótona não–crescente ou decrescente se $m < n$ implicar, respectivamente, $a_m \geq a_n$ ou $a_m > a_n$.

Exemplo 3.9. A sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8...)$ é conhecida como Sequência de Fibonacci, podemos observar que ela é uma sequência monótona não-decrescente e os termos são obtidos pela relação de recorrência $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ e

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

3.2 Séries Númericas

Definição 3.10. Seja a_n uma sequência numérica infinita, a soma dos seus infinitos termos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$$

é definida como série numérica de termo geral a_n.

As séries podem ser convergentes ou divergentes, dizemos que uma série é convergente quando existir um número real S que é a soma da série, ou seja, a série converge para S quando

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

onde,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Se o limite de S_n não existir, ou for infinito, dizemos que a série é divergente.

3.3 Progressões Aritméticas

Na contemporaneidade, temos vários casos em nosso cotidiano ou no universo científico que relacionam grandezas que crescem ou decrescem se somadas ou subtraídas por uma constante, grandezas estas que sofrem variações iguais. Medir distâncias percorridas de forma gradativa, planejar um orçamento familiar, pagar uma dívida, calcular investimentos por juros simples, realizar censo de crescimento populacional e até mesmo ler um livro de forma progressiva são exemplos que podemos recorrer ao conceito de progressão aritmética.

Definição 3.11. *Progressões Aritméticas* ou, simplesmente, PA é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o seu anterior é uma constante, esta diferença constante é chamada de razão (r). Em outras palavras, a variação de um termo para o próximo é sempre constante.

3.3.1 Classificação de uma Progressão Aritmética

As progressões aritméticas podem ser classificadas como crescente, decrescente ou constante.

1. Crescente.

Uma PA é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isto aconteça, é necessário que a razão seja positiva ($r > 0$).

Exemplo 3.12.

1) $(2, 4, 6, 8, ...)$ é uma PA crescente de razão $r = 2$.

2) $(-25, -21, -17, -13, ...)$ é uma PA crescente de razão $r = 4$.

2. Decrescente.

Uma PA é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isto aconteça, é necessário que a razão seja negativa ($r < 0$).

Exemplo 3.13.

1) $(8, 4, 0, -4, -8, ...)$ é uma PA decrescente de razão $r = -4$.

2) $(-1, -4, -7, -10, ...)$ é uma PA decrescente de razão $r = -3$.

3. Constante.

Uma PA é constante quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando sua razão é 0.

Exemplo 3.14.
$(25, 25, 25, 25, ...)$ é uma PA constante de razão $r = 0$.

3.3.2 Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Em toda *Progressão Aritmética*, um termo pode ser expresso em função do primeiro ou de outro termo qualquer. Pois, em uma PA, para avançar um termo basta somar a razão, para avançar dois termos basta somar a razão duas vezes e assim por diante. Logo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.15. *(Fórmula do Termo Geral:) Dada uma progressão aritmética* (a_n)*, seu termo geral pode ser determinado por*

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando os termos do lado direito entre si e igualando a soma dos termos do lado esquerdo da equação, temos:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}+a_n = a_1+(a_1+r)+(a_2+r)+(a_3+r)+(a_4+r)+...+(a_{n-1}+r)$$

$$a_n+(a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}) = a_1+(r+r+r+r...+r)+(a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1})$$

Observe que ao passar de a_1 para a_n, avançamos $(n-1)$ termos, ou seja, somamos a razão $(n-1)$ vezes, assim, temos:

$$a_n + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}) = a_1 + (n-1)r + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1})$$

Subtraindo tudo por $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1})$, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Demonstração por Indução:

Por hipótese, considere $a(n) = a(1) + (n-1)r$, com $n \in \mathbb{N}$. Observemos inicialmente que para $n = 1$:

$$a(1) = a(1) + (1-1)r = a_1 + 0 \cdot r = a(1);$$

a expressão é verdadeira.

Suponha que a expressão do termo geral $a(n)$ seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$. Vejamos se vale para $n+1$:

$$a(n+1) = a(n) + r$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(1) + (n-1)r + r \\ &= a(1) + nr - r + r \\ &= a(1) + nr \\ &= a(1) + ((n+1)-1)r. \end{aligned}$$

Mostrando assim que a expressão para $a(n+1)$ é verdadeira.

Exemplo 3.16. Em um ginásio de esportes, a contagem dos torcedores que entravam passou a ser feita por catracas que registraram o ingresso de 400 pessoas por hora, até completar a capacidade máxima do ginásio, que é de 4000 espectadores. Quantas horas se passaram para lotar o ginásio?

Solução: $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde $a_1 = 400$, pois, é o número de pessoas que entraram após 1 hora. Sabendo que o ginásio lota com 4000 pessoas, queremos achar a posição deste valor na PA. Logo, $a_n = 4000$ e a razão $r = 400$, pois entra esta quantidade a cada hora, então, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ 4000 &= 400 + (n-1)400 \\ 4000 &= 400 + 400n - 400 \\ 4000 &= 400n \\ n &= \frac{4000}{400} \\ n &= 10 \ horas. \end{aligned}$$

.

Fórmula alternativa do Termo Geral:

Seguindo uma ideia similar, podemos ter uma fórmula, na qual não nos prendemos ao primeiro termo, para isso, considerando $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, temos:

$$a_n = a_k + (n-k)r.$$

Onde, seguindo o mesmo raciocínio, para avançarmos de a_k para a_n, daremos $(n-k)$ passos.

Exemplo 3.17. Pedro Augusto tem um saldo em sua poupança com o valor de R$ 18.500,00. Como precisou de dinheiro, sacou R$ 200,00 na terceira vez, R$ 250,00 na quarta, R$ 300,00 na quinta vez e assim sucessivamente na mesma razão. Quanto ele sacará no décimo oitavo saque?

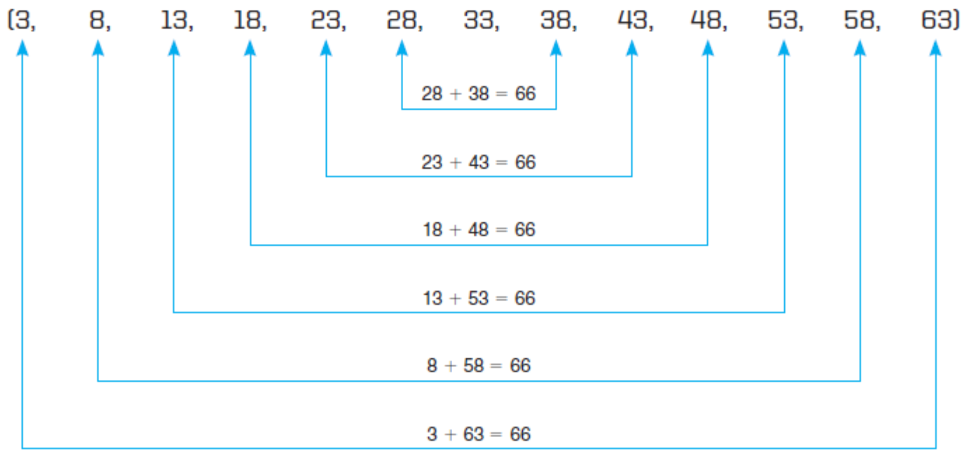
Solução: $a_{18} = a_4 + (18-4)50$, pois, ao passar do 4° saque para o 18°, estamos saindo do a_4 para o a_{18}. Além disso, como ele sacou R$250 na quarta vez, temos $a_4 = 250$ e de um saque para o próximo aumenta R$ 50, temos $r = 50$, logo, temos:

$$\begin{aligned} a_{18} &= 250 + (18-4)50 \\ a_{18} &= 250 + 14.50 \\ a_{18} &= 250 + 700 \\ a_{18} &= 950 \ reais. \end{aligned}$$

3.3.3 Propriedade de uma Progressão Aritmética

Em toda *Progressão Aritmética* finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Exemplo 3.18.



Demonstração:

Seja a PA finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão q, com $n, K \in \mathbb{N}$, temos que os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Logo, mostraremos que $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + ((k+1) - 1)r + a_1 + ((n-k) - 1)r \\
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + kr + r - r + a_1 + nr - kr - r \\
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + r - r + a_1 + nr + kr - kr - r \\
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + a_1 + nr - r \\
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + (a_1 + (n-1)r) \\
a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + a_n
\end{aligned}$$

Observação 3.19. Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é } PA \longleftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

3.3.4 A Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

A soma dos n primeiros termos de uma *Progressão Aritmética* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão $r \neq 0$ é igual a:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1)n}{2} \tag{3.3.1}$$

Demonstração:

Tomando a soma dos n primeiros termos de uma PA, temos

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n. \ (I) \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1. \ (II) \end{aligned}$$

Somando (I) com (II), obtemos:

$$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1)$$

Observando que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos, então, pela Propriedade 3.3.3, podemos escrever da sequinte maneira:

$$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n),$$

onde a soma $(a_1 + a_n)$ se repete n vezes. Logo, temos:

$$\begin{aligned} 2.S_n &= (a_1 + a_n)n \\ S_n &= \frac{(a_n + a_1)n}{2} \end{aligned}$$

Demonstração por Indução:

Considere $S(n)$ a soma dos n primeiros termos da PA. Observemos inicialmente que, para $n = 1$:

$$\begin{aligned} S(1) &= a_1 \\ S(1) &= \frac{(2a_1)}{2} \\ S(1) &= \frac{(a_1 + a_1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo a expressão 3.3.1 é verdade para $n = 1$.

Suponha que a expressão 3.3.1 seja valida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$S(n) = S_n = \frac{(a_n + a_1)n}{2}.$$

Vejamos para $n+1$:

$$S(n+1) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}.$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_n + 2a_{n+1})}{2} \\
&= \frac{(na_1 + na_n + a_{n+1} + a_{n+1})}{2} \\
&= \frac{(na_1 + n(a_{n+1} - r) + a_{n+1} + (a_1 + (n+1-1)r)}{2} \\
&= \frac{(na_1 + na_{n+1} - nr + a_{n+1} + a_1 + nr)}{2} \\
&= \frac{(na_1 + na_{n+1} + a_{n+1} + a_1)}{2} \\
&= \frac{(a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1))}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Mostrando assim que $S(n+1)$ é verdadeira.

Exemplo 3.20. Em um prédio comercial, o número de salas é organizado de maneira especial. Cada andar possui uma quantidade diferente de salas comerciais para aluguel. No primeiro andar, existem 5 salas; no segundo andar, há 10 salas; e no terceiro andar, 15 salas. De acordo com essas informações, quantas salas haverá no prédio todo sabendo que existem 10 andares?

Solução: Sabemos que o $a_1 = 10$ e a razão $r = 5$, pois, de um andar para o outro aumentam 5 salas. Com isso, só resta encontrar o número de salas do 10°

andar, ou seja, o a_{10} que é o último termo desta PA. Então, temos:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 5 + (10 - 1)5 \\ a_{10} &= 5 + 9.5 \\ a_{10} &= 5 + 45 \\ a_{10} &= 50\ salas. \end{aligned}$$

Após achar o 10° termo, usaremos a Fórmula da Soma dos Termos de uma PA para saber o total de salas no prédio, pois, o número de salas é a soma de cada andar (termo) da progressão, logo, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2} \\ S_n &= \frac{(5 + 50).10}{2} \\ S_n &= \frac{(55).10}{2} \\ S_n &= \frac{550}{2} \\ S_n &= 275\ salas. \end{aligned}$$

3.3.5 Representação Gráfica de uma Progressão Aritmética

Em uma Progressão Aritmética, o Termo Geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + (a_1 - r)$. Com efeito, se $a_n = an + b$, a_n é uma progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$. Em outras palavras, uma PA é uma função que associa a cada natural n o valor de a_n ou, simplesmente, a restrição aos naturais da Função Afim:

$$a(n) = a_0 + nr$$

O gráfico desta função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano, de outro modo, $\mathrm{a_n}$ é uma PA, se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas (1, $\mathrm{a_1}$), (2, $\mathrm{a_2}$), (3, $\mathrm{a_3}$)... estão em linha reta.

Exemplo 3.21. Considere a PA (2, 4, 6, 8, ...). Como vimos, o termo geral é dado por $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2$, com isso, $a_n = 2 + 2n - 2$, logo, $a_n = 2n$.

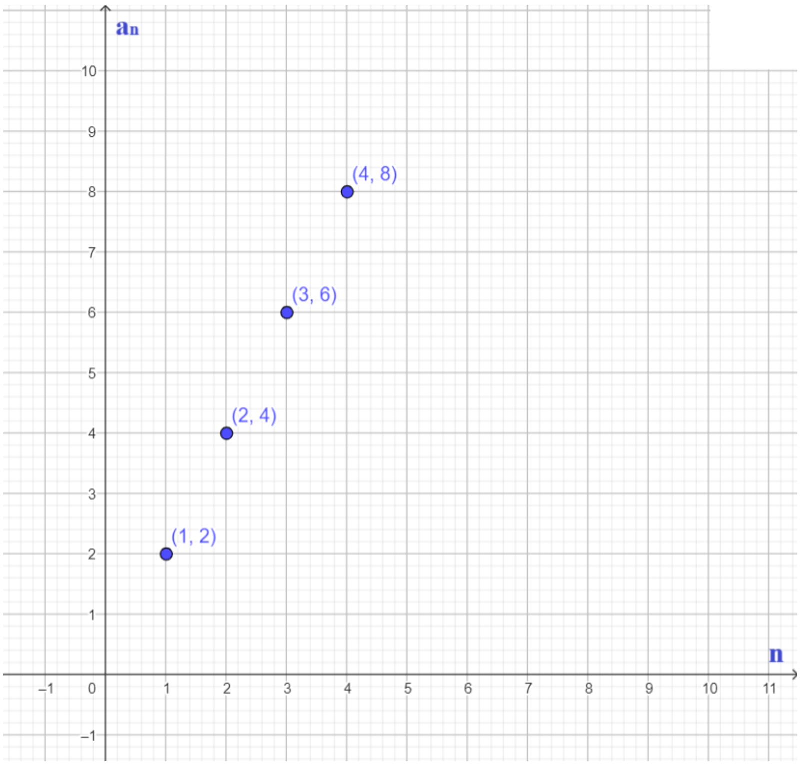


Figura 3.1: Representação gráfica da PA.

3.4 Progressões Geométricas

Existem casos em nosso cotidiano ou no universo científico em que as grandezas crescem ou decrescem se multiplicadas por uma constante, em outras palavras, a taxa de crescimento ou decrescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. Aplicação de juros, crescimento populacional de alguns seres vivos, o decaimento da radiação emitida por um material radioativo e estimar a propagação de doenças são exemplos deste conceito que, necessariamente, exige o conhecimento de um tipo especial de sequência chamada de progressão geométrica.

Definição 3.22. A *Progressão Geométrica* ou, simplesmente, *PG* é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante chamada de razão da progressão geométrica (q). Por outro lado, é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão entre um termo e o seu antecessor.

3.4.1 Classificação de uma Progressão Geométrica.

As progressões geométricas podem ser classificadas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

1. Crescente.

Uma PG é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $q > 1$, ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Exemplo 3.23.

1) $(4, 8, 16, 32, ...)$ é uma PG crescente de razão $q = 2$.

2) $(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, ...)$ é uma PG crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

2. Decrescente.

Uma PG é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, ou $a_1 < 0$ e $q > 1$

Exemplo 3.24.

1) $(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...)$ é uma PG decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

2) $(-1, -3, -9, -27, ...)$ é uma PG decrescente de razão $q = 3$.

3. Constante.

Uma PG é constante quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando sua razão é 1 ou quando todos os seus termos são nulos.

Exemplo 3.25.

1) $(14, 14, 14, 14, ...)$ é uma PG constante de razão $q = 1$.

2) $(0, 0, 0, 0, ...)$ é uma PG constante de razão indeterminada.

4. Oscilante.

Uma PG é oscilante quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos connsecutivos quaisquer têm sinais opostos. Isso só ocorre quando $a1 \neq 0$ e $q < 0$

Exemplo 3.26.

1) $(1, -2, 4, -8, ...)$ é uma PG oscilante de razão $q = -2$.

2) $(-1, 3, -9, 27, ...)$ é uma PG oscilante de razão $q = -3$.

5. Quase Nula.

Uma PG é quase nula quando o primeiro termo é diferente de zero e os demais são iguais a zero. Isso só ocorre quando $a1 \neq 0$ e $q = 0$

Exemplo 3.27.

$(4, 0, 0, 0, ...)$ é uma PG quase nula

3.4.2 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Em toda *progressão geométrica*, um termo pode ser expresso em função do primeiro ou de outro termo qualquer. Pois, em uma PG, para avançar de um termo para o próximo, basta multiplicar pela razão, para avançar dois termos, multiplica-se pela razão duas vezes e assim por diante. Note que qualquer termo da progressão é o produto do primeiro termo a_1 por uma potência da razão q. Logo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.28. *(Fórmula do Termo Geral) Dada uma progressão geométrica* (a_n)*, seu termo geral pode ser determinado por:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Demonstração:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1 \\ a_2 & = & a_1 \cdot q \\ a_3 & = & a_2 \cdot q \\ a_4 & = & a_3 \cdot q \\ & \vdots & \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot q \end{array}$$

Observe que ao passar de a_1 para a_n, avançamos $(n–1)$ termos. Multiplicando os termos do lado direito entre si e igualando a multiplicação dos termos do lado esquerdo da equação, temos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 ... a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_2 \cdot q) \cdot (a_3 \cdot q) \cdot (a_4 \cdot q) ... (a_{n-1} \cdot q)$$

$$a_n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 ... a_{n-1}) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 ... a_{n-1})$$

Dividindo tudo por $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 ... a_{n-1})$, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Demonstração por Indução:

Por hipótese, considere $a(n) = a(1) \cdot q^{(n-1)}$, com $n \in \mathbb{N}$. Observemos inicialmente para $n = 1$:

$$a(1) = a(1) \cdot q^{1-1} = a(1) \cdot q^0 = a(1);$$

Assim, $a(n)$ é verdade para $n = 1$.

Suponha que $a(n)$ seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$. Vejamos para $n+1$:

$$a(n+1) = a(n) \cdot q$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(1) \cdot q^{n-1}.q \\ &= a(1) \cdot q^{n} \\ &= a(1) \cdot q^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

Mostrando assim que $a(n+1)$ é verdadeira.

Exemplo 3.29. Uma fábrica de doces vende 250 caixas de chocolate em janeiro. Sabe-se que a quantidade vendida dobrou mensalmente seguindo um padrão de uma progressão geométrica. Podemos afirmar que a quantidade de caixas vendidas no mês outubro foi de:

Solução: $a_{10} = a_1 \cdot q^{(10-1)}$, pois, ao passar de janeiro a outubro, estamos saindo do primeiro mês para o décimo. Como as vendas dobram a cada mês e no primeiro mês vendeu 250 , temos que $a_1 = 250$ e a razão $q = 2$, logo:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 \cdot 2^{(10-1)} \\ a_{10} &= 250 \cdot 2^{(9)} \\ a_{10} &= 250 \cdot 512 \\ a_{10} &= 128.000 \; caixas. \end{aligned}$$

Fórmula alternativa do Termo Geral:

Consequentemente, seguindo a mesma ideia, podemos ter uma fórmula similar, na qual não nos prendemos ao primeiro termo, para isso, considerando $n, k \in \mathbb{N}$, temos:

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$$

Onde, seguindo o mesmo raciocínio, para avançarmos de a_k para a_n, daremos $(n-k)$ passos.

Exemplo 3.30. O número de bactérias em uma colônia cresce em uma progressão geométrica. Sabendo que no 4° dia, tinham 1.000 bactérias no total, que, no 5° dia, passam a ser 5.000 bactérias ao todo e no 6° dia, sobe para um total de 25.000 bactérias. O número de bactérias no 12° dia será igual a:

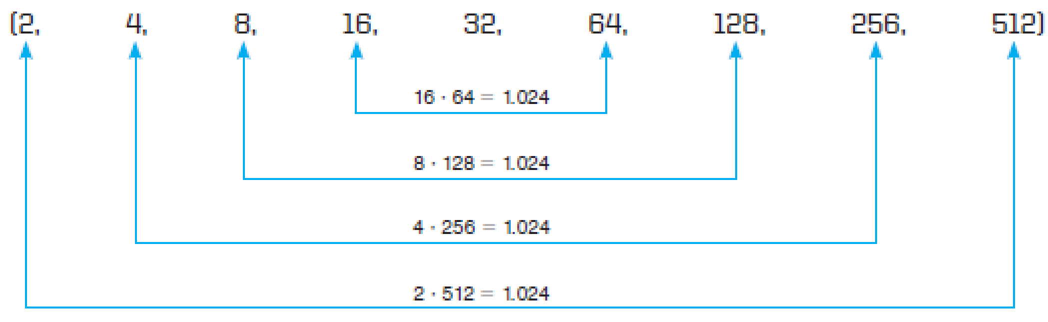
Solução: $a_{12} = a_4 \cdot q^{(12-4)}$, pois, ao passar do 4° dia para o 12°, estamos saindo do a_4 para o a_{12}. Além disso, como as bactérias quintuplicaram sua quantidade de um dia para o próximo e no 4°dia eram 1.000, temos que $a_4 = 1000$ e a razão $q = 5$, logo:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= a_4 \cdot 5^{(12-4)} \\
a_{12} &= 1000 \cdot 5^{(8)} \\
a_{12} &= 1000 \cdot 390625 \\
a_{12} &= 390.625.000 \; bactérias.
\end{aligned}
$$

3.4.3 Propriedades de uma Progressão Geométrica

Em toda *Progressão Geométrica* finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo 3.31.



Demonstração:

Seja a PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão q, com $n, K \in \mathbb{N}$, temos que os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Logo, mostraremos que $a_{k+1}.a_{n-k} = a_1.a_n$.

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} \cdot a_{n-k} &= a_1 \cdot q^k \cdot a_1 \cdot q^{(n-k-1)} \\
&= a_1 \cdot a_1 q^{(k+(n-k-1))} \\
&= a_1 \cdot a_1 q^{(n-1)} \\
&= a_1 \cdot a_n
\end{aligned}
$$

Observação 3.32. Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PG se,e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a_1 = a \neq 0$, temos:

$$(a, b, c) \text{ é } PG \longleftrightarrow b^2 = ac$$

3.4.4 A soma dos termos de uma Progressão Geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão $q \neq 1$ é igual a:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n. \ (I)$$

Multiplicando (I) por q, obtemos:

$$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1}. \ (II)$$

Subtraindo (I) por (II), temos:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$$

Dividindo os dois lados da equação por $(1-q)$, temos:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Demonstração por Indução:

Por hipótese, considere $S(n) = a(1) \cdot \dfrac{(1-q^n)}{(1-q)}$, com $n \in \mathbb{N}$. Observemos inicialmente para $n = 1$:

$$S(1) = a(1) \cdot \frac{(1-q)}{(1-q)} = a(1)$$

Logo $S(1)$ é verdade.

Suponha que $S(n)$ seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$. Vejamos para $n+1$:

$$S(n+1) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}.$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + a(n+1) \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} + a(n+1) \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} + a(1) \cdot q^{(n+1)-1} \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} + a(1) \cdot q^n \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^n + q^n \cdot (1-q))}{(1-q)} \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^n + q^n - q^{n+1})}{(1-q)} \\
&= a(1) \cdot \frac{(1-q^{(n+1)})}{(1-q)}.
\end{aligned}$$

Mostrando assim que $S(n+1)$ é verdadeira.

Exemplo 3.33. Vimos, no Capítulo 1 , Seção1.2, a lenda da origem do jogo de xadrez, na qual, o rei perguntou ao jovem Lahur Sessa, inventor do jogo, o que ele queria como recompensa por ter inventado o xadrez. O jovem respondeu : “1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda cada, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa". Qual seria a recompensa de Lahur?

Solução: Como os grãos dobram a cada casa e um tabuleiro de xadrez tem 64 casas, temos a soma de uma PG de 64 termos, onde, $a_1 = 1$ e razão $q = 2$.

$$\begin{aligned} S_{64} &= 1 \cdot \frac{(1-2^{64})}{(1-2)} \\ S_{64} &= \frac{(1-18.446.744.073.709.551.616)}{(1-2)} \\ S_{64} &= \frac{(-18.446.744.073.709.551.615)}{(-1)} \\ S_{64} &= 18.446.744.073.709.551.615 \; \textit{grãos}. \end{aligned}$$

Soma dos termos de uma PG infinita:

Em geral estamos interessados em séries numéricas infinitas, e no caso da soma infinita dos termos de uma *Progressão Geométrica*, temos que a soma dá um número real, ou seja, converge, se e somente se, o módulo da razão for menor que 1, $|q| < 1$. Além disso, se a série converge, sua soma é, $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Demonstração:

De fato, consideremos primeiro o caso em que $q = 1$ e seja $a_1 = a$. Neste caso, temos que a enésima soma parcial é $S_n = n \cdot a$, e então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \pm\infty$ a depender do sinal de a ser positivo ou negativo.

Para o caso em que $q = -1$, temos a série

$$a - a + a - \dots,$$

o que nos dá a sequência de somas parciais S_n, igual a

$$a, 0, a, 0, \dots$$

que diverge. Agora, para $|q| \neq 1$, vimos que

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}.$$

Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, quando, $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ para $q > 1$ e para $q < -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ não existe.

Assim, se $|q| < 1$ a soma dos n primeiros termos tem um limite finito, que é

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= a_1 \cdot \frac{(1-\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n)}{(1-q)} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= a_1 \cdot \frac{1-0}{1-q} \\
S &= \frac{a_1}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a série converge para $|q| < 1$, e diverge para os outros casos.

3.4.5 Representação gráfica de uma Progressão Geométrica

Seguindo uma ideia similar às *Progressões Aritméticas*, numa *Progressão geométrica*, o Termo Geral é dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$, de certo modo, é uma função que associa a cada natural n o valor de a_n, sendo, simplesmente, a restrição aos naturais da função exponencial:

$$a(n) = a_0 \cdot q^n.$$

Portanto, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

Observação 3.34. Se a razão q de uma PG for negativa ou igual a 1, a representação gráfica desta é formada pelos pontos (n, a_n), que não pertencem ao gráfico de uma função exponencial.

Exemplo 3.35. Considere a PA (1, 2, 4, 8, ...). Como vimos, o Termo Geral é dado por $a_n = 1 \cdot 2^{(n-1)}$, logo, $a_n = 2^{(n-1)}$.

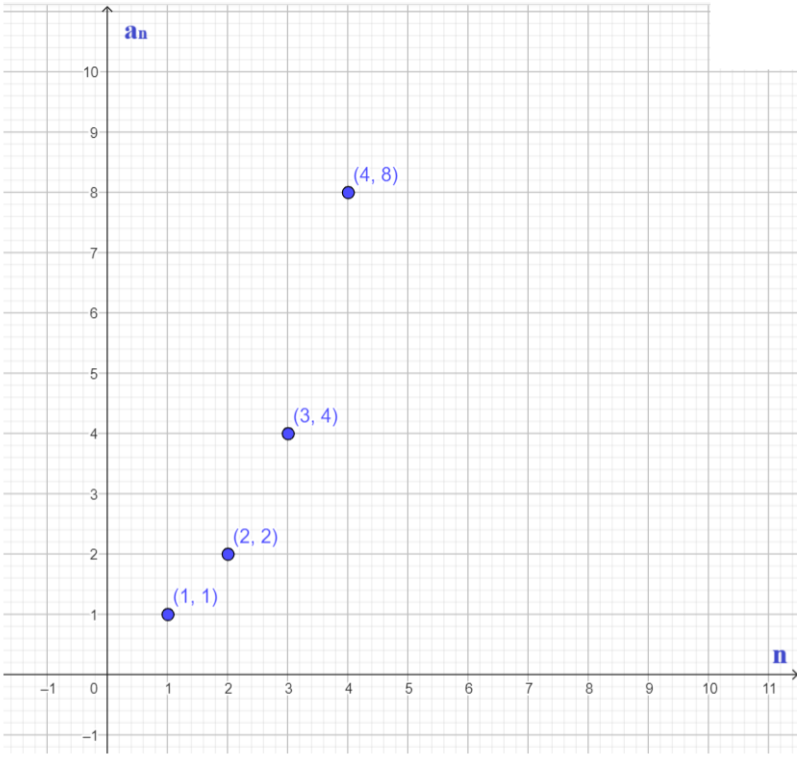


Figura 3.2: Representação gráfica de uma PG

Capítulo 4

Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas a partir da Geometria Fractal

Neste Capítulo, iremos tratar de um dos temas principais deste trabalho que é estudar e analisar a matemática existente nos fractais. A finalidade é explorar os conceitos de *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas* existentes nesses objetos de um modo que possa ser utilizado pelos docentes do Ensino Médio Básico. Consequentemente, tem-se o intuito de despertar e estimular o interesse dos discentes, desenvolvendo a compreensão e apredizagem destes conceitos a partir de uma visão não tradicional.

A princípio, foram escolhidos alguns fractais para serem analisados neste trabalho, mas deixamos claro que cada docente pode escolher, a seu critério, qual ou quais fractais serão desenvolvidos em sua sala de aula, pois, cada fractal tem sua estrutura específica e sua iteração.

4.1 Conjunto de Cantor do Terço Médio

O matemático e professor Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nascido em São Petersburgo, na Rússia, em 3 de março de 1845, publicou em 1883 um trabalho no qual havia um conjunto denominado Conjunto de Cantor. Este conjunto talvez tenha sido o primeiro objeto reconhecido como fractal, ou, especificamente, um fractal por remoção pois de um nível para o próximo remove-se uma parte do mesmo. Apesar de não possuir o mesmo apelo estético que a maioria dos fractais, é um objeto bastante fundamental para o estudo dos fractais e Sistemas Dinâmicos.

O *Conjunto de Cantor (K)* ou *Conjunto de Cantor do Terço Médio* é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo:

4.1.1 Construção

Passo 1: Divide o segmento do intervalo $[0, 1]$ em três parte iguais e retira-se o segmento do meio ou seu terço médio aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$;
Passo 2: Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes;
Passo 3: Repita o processo infinita vezes.

Figura 4.1: Conjunto de Cantor.

4.1.2 Número de Extremidades em cada Nível (E_n)

Veja que no *Nível* 0 temos 2 extremidades (0 e 1) , no *Nível* 1 temos 4 extremidades $(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$ e $1)$, no *Nível* 2 temos 8 e assim em diante. Logo, se chamarmos de E_0 a quantidade de extremidades do *Nível* 0, E_1 do *Nível* 1 e assim por diante, temos uma PG de razão $q = 2$ e 1º termo $E_0 = 2$, então, teremos:

$$E_0 = 2$$

$$E_1 = 4$$

$$E_2 = 8$$

$$\vdots$$

Então, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} E_n &= E_0 \cdot q^{(n-0)} \\ E_n &= 2 \cdot 2^n \\ E_n &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

4.1.3 Quantidade de Segmentos retirados em cada Nível (R_n)

Note que no *Nível* 1 retira-se 1 segmento, no *Nível* 2 retira-se 2 segmentos, no *Nível* 3 são 4 e assim prosseguindo de um nível para o próximo. Logo, se chamarmos de R_1 o número de segmentos retirados no *Nível* 1, R_2 o número no *Nível* 2 e assim por diante, temos uma PG de razão $q = 2$ e 1º termo $R_1 = 1$. Ou seja,

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 2$$

$$R_3 = 4$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} R_n &= a_1 \cdot 2^{n-1} \\ R_n &= 1 \cdot 2^{n-1} \\ R_n &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

4.1.4 Comprimento dos Segmentos retirados por Nível (C_n)

Perceba que no *Nível* 1 retira-se um segmento de tamanho $\frac{1}{3}$ do comprimento total, no *Nível* 2 o comprimento de cada um dos segmentos retirados é $\frac{1}{9}$, no *Nível* 3 é $\frac{1}{27}$, e assim sucessivamente. Consequentemente, se chamarmos de C_1 o comprimento do segmento retirado no *Nível* 1, C_2 o comprimento de cada segmento retirado no *Nível* 2 e assim por diante, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$ e 1º termo $C_1 = \frac{1}{3}$. Logo, temos:

$$C_1 = \frac{1}{3}$$

$$C_2 = \frac{1}{9}$$

$$C_3 = \frac{1}{27}$$

$$\vdots$$

Ou seja, de modo análogo a quantidade de segmentos retirados, temos:

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} \\ C_n &= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3^{n-1}} \\ C_n &= \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

4.1.5 Soma do comprimento dos segmentos retirados (S_n)

Podemos calcular o comprimento de todos os segmentos retirados até um nível n e então ver qual o total do comprimento retirado ao final de todos os níveis, ou seja, o comprimento total retirado quando $n \to \infty$, com $n \in \mathbb{N}$. Para isto, basta somarmos os segmentos retirados em cada nível. Logo, temos, no *Nível* 1, 1 segmento de tamanho $\frac{1}{3}$, no *Nível* 2, 2 de tamanho $\frac{1}{9}$, e assim por diante. De certo modo, é a soma da multiplicação de R_n (4.1.3) com C_n (4.1.4) de cada nível. Iremos chamar o comprimento total retirado até o nível n de S_n, logo, temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} \\
S_n &= \frac{1}{3} + 2^1 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \ ... + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} \\
S_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \cdot \frac{2^1}{3^1} + \cdot \frac{2^2}{3^2} + \ ... + \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right). \\
S_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}}\right)
\end{aligned}$$

Note que temos $\frac{1}{3}$ multiplicando uma soma de uma PG finita de razão $q = \frac{2}{3}$ e 1º termo $a_1 = 1$, assim, a soma total do comprimento dos intervalos retirados em todo o processo, ou seja, a soma infinita 3.4.4 ficará:

$$\begin{aligned}
S = \lim_{n \to \infty} S_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \dfrac{2}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\dfrac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclue-se que o tamanho retirado é igual ao tamanho do intervalo inicial, logo, o *Conjunto de Cantor do Terço Médio* tem tamanho nulo, mas não é vazio, pois restam infinitos pontos, dando uma ideia de "poeira", por isso, este conjunto também pode ser chamado de *Poeira de Cantor.*

4.2 Triângulo de Sierpinski

Criado em 1916 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, o Triângulo de Sierpinski também chamado de Curva de Sierpinski é um fractal por remoção, isto se deve ao fato de sua iteração remover partes do mesmo de um nível para o próximo. Existem diferentes processos para sua construção, mas vamos utilizar a mais convencional.

4.2.1 Construção

Passo 1: Considere, inicialmente, um triângulo eqüilátero (pode utilizar qualquer triângulo);
Passo 2: Marcar os segmentos que une os pontos médios dos lados, formando 4 triângulos eqüiláteros;
Passo 3: Remover o triângulo central;
Passo 4: Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;
Passo 5: Repetir o passo 4 sucessivamente.

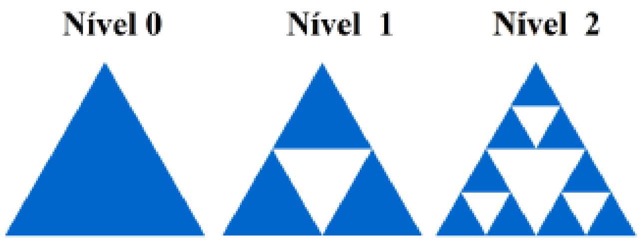


Figura 4.2: Triângulo de Sierpinski.

4.2.2 Quantidade de Triângulos removidos (T_n)

Observe que no *Nível* 1, remove-se 1 triângulo, no *Nível* 2, são removidos 3 triângulos, no *Nível* 3, são 9 e assim sucessivamente. Chamando T_n, a quantidade de triângulos removidos no nível n, temos uma PG de razão $q = 3$ e 1° termo $T_1 = 1$, com isso, a sequência fica assim:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 3$$

$$T_3 = 9$$

$$T_4 = 27$$

$$\vdots$$

Utilizando-se da Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 \cdot q^{n-1} \\ T_n &= 1 \cdot 3^{n-1} \\ T_n &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

4.2.3 Comprimento do lado de cada triângulo removido(L_n)

Note que o comprimento do lado do triângulo retirado no *Nível* 1 é metade do triângulo inicial, analogamente, no *Nível* 2, cada triângulo retirado tem metade do comprimento do nível anterior e assim por diante. Consequentemente, se chamarmos de L o comprimento inicial e considerando L_n o comprimento no *Nível* n, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e 1° termo $L_1 = \frac{L}{2}$, logo, teremos:

$$L_1 = \frac{L}{2}$$

$$L_2 = \frac{L}{4}$$

$$L_3 = \frac{L}{8}$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} L_n &= L_1 \cdot q^{n-1} \\ L_n &= \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ L_n &= \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ L_n &= \frac{L}{2^n}. \end{aligned}$$

4.2.4 Perímetro de cada Triângulo removido em cada nível (P_n)

Perceba que o perímetro do triângulo retirado no *Nível* 1 é 3 vezes o comprimento de seu lado L_1 4.2.3, analogamente, no *Nível* 2, o perímetro de cada triângulo retirado neste nível é 3 vezes L_2, no *Nível* 3 é 3 vezes L_3 e assim sucessivamente. Consequentemente, se chamarmos de P_n o perímetro de cada triângulo retirado no *Nível* n, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e 1° termo $P_1 = \frac{3L}{2}$, logo, teremos:

$$P_1 = \frac{3L}{2}$$

$$P_2 = \frac{3L}{4}$$

$$P_3 = \frac{3L}{8}$$

$$\vdots$$

Então, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 \cdot q^{n-1} \\ P_n &= \frac{3L}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ P_n &= \frac{3L}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ P_n &= \frac{3L}{2^n} \end{aligned}$$

4.2.5 Perímetro Total em cada nível (PT_n)

Consequentemente, podemos obter o Perímetro Total da figura obtida em cada nível que é a soma dos perímetros adicionados. Neste caso, teremos de considerar o perímetro do triângulo inicial no *Nível* 0, e temos de multiplicar o perímetro de cada triângulo removido em cada nível (P_n) 4.2.4 com a quantidade de triângulos removidos em cada nível (T_n) 4.2.2, logo, temos que:

$$\begin{aligned} PT_n &= 3L + \frac{3L}{2} + 3 \cdot \frac{3L}{4} + ... + 3^{n-1} \cdot \frac{3L}{2^n} \\ PT_n &= 3L + 3L\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + ... + \frac{3^{n-1}}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Note, que temos a soma de uma PG de razão $q = \frac{3}{2}$ e 1° termo $a_1 = \frac{1}{2}$,assim, tem-se:

$$\begin{aligned} PT_n &= 3L + 3L\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{3}{2})^n}{1-\frac{3}{2}}\right) \\ PT_n &= 3L + 3L\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{3}{2})^n}{-\frac{1}{2}}\right) \\ PT_n &= 3L + 3L\left(-1 + (\tfrac{3}{2})^n\right) \\ PT_n &= 3L - 3L + 3L(\tfrac{3}{2})^n \\ PT_n &= \frac{3^{n+1} \cdot L}{2^n} \end{aligned}$$

4.2.6 Área de cada triângulo removido em cada nível (A_n)

Veja que, inicialmente, temos um triângulo equilátero, logo, sua área é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, consequentemente, no *Nível* 1 temos 1 triângulo removido com $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inicial, no *Nível* 2, temos a área de cada triângulo removido sendo $\frac{1}{4}$ da área do nível anterior e assim por diante. Logo, se chamarmos de A_n a área de cada triângulo removido no *Nível* n, tem-se uma PG de razão $q = \frac{1}{4}$ e 1° termo A_1, então, temos:

$$A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{16}$$

$$A_2 = \frac{L^2\sqrt{3}}{64}$$

$$A_3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{256}$$

$$\vdots$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned}
A_n &= A_1 \cdot q^{n-1} \\
A_n &= \frac{L^2\sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{1}{4})^{n-1} \\
A_n &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4^2} \cdot \frac{1}{4^{(n-1)}} \\
A_n &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}
\end{aligned}$$

4.2.7 Soma das Áreas Removidas (S_a)

Para calcularmos a área total removida basta somarmos as áreas removidas quando $n \to \infty$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, somaremos as áreas removidas em cada nível. Logo, temos que, no *Nível* 1, foi removido 1 triângulo de área $A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{16}$, no *Nível* 2, foram removidos 3 triângulos de área $A_2 = \frac{L^2\sqrt{3}}{64}$ e assim por diante. Então, temos a soma da multiplicação de T_n (4.2.2) com A_n (4.2.6) de cada nível. Vamos chamar esta soma de S_a, logo, tem-se:

$$\begin{aligned}
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{16} + 3 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{64} + 9 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{256} + ... \\
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + ...\right) \\
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + ...\right)
\end{aligned}$$

Perceba que temos $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ multiplicando uma Soma de uma PG infinita 3.4.4 de razão $q = \frac{3}{4}$ e 1° termo $a_1 = \frac{1}{4}$, então:

$$
\begin{aligned}
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \right) \\
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right) \\
S_a &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

Conclue-se que a área total removida é igual a área do triângulo equilátero inicial, logo, assim como o *Conjunto de Cantor do Terço Médio*, o *Triângulo de Sierpinski* tem área com medida nula, mas também, não é vazio, pois ao final de todo o processo, ainda restam infinitos pontos.

4.3 Floco de Neve de Koch

O *Floco de Neve de Koch* é assim chamado em homenagem a seu criador, o matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch e por se assemelhar a um floco de neve natural. Este monstro matemático foi baseado na *Curva de Koch*, a qual foi citada pela primeira vez em 1904 em um artigo no qual Koch descreve a criação de curvas contínuas sem tangentes.

É um fractal pela fronteira, ou seja, suas iterações de construção são definidas a partir da substituição de uma determinada parte pelo seu gerador, aumentando-se assim o seu comprimento e sua área a cada iteração.

Apesar de ser baseado na *Curva de Koch*, o *Floco de Neve de Koch* tem seu processo de criação geométrico diferente, pois, em vez de começar sua construção com um único segmento de reta como na curva, ele inicia sua construção a partir de um triângulo equilátero.

4.3.1 Construção

Passo 1: Considerar inicialmente um triângulo eqüilátero;
Passo 2: Em cada lado do triângulo dividir o segmento em 3 partes iguais, substituir o segmento central por uma triângulo equilátero sem base;
Passo 3: Repetir cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura;

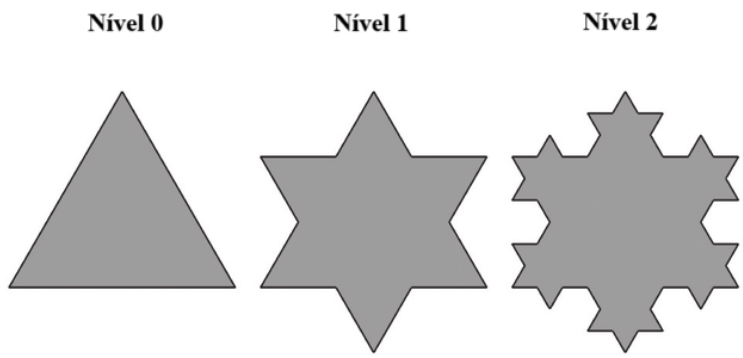


Figura 4.3: Floco de Neve de Koch.

4.3.2 Número de Lados por nível (NL_n)

Observe que no *Nível* 1, temos 12 lados, pois cada lado do triângulo equilátero inicial gerou 4 lados, no *Nível* 2, cada lado do nível anterior irá gerar 4 lados, ou seja, 48 lados, no *Nível* 3, são 192 e assim sucessivamente. Chamando de NL_1 o número de lados do *Floco de Neve* no 1° nível, temos uma PG de razão $q = 4$ e 1° termo $NL_1 = 12$, com isso, a sequência fica assim:

$$NL_1 = 12$$
$$NL_2 = 48$$
$$NL_3 = 192$$
$$\vdots$$

Logo, usando a Fórmula do Termo Geral, temos:

$$\begin{aligned} NL_n &= NL_1 \cdot q^{n-1} \\ NL_n &= 12 \cdot 4^{n-1} \\ NL_n &= 3 \cdot 4 \cdot 4^{n-1} \\ NL_n &= 3 \cdot 4^n \end{aligned}$$

4.3.3 Comprimento de cada lado (L_n)

Note que o comprimento do lado no *Nível* 1 é $\frac{1}{3}$ do triângulo inicial, analogamente, no *Nível* 2, cada lado adicionado tem $\frac{1}{3}$ do comprimento do nível anterior e assim por diante. Consequentemente, se chamarmos de L o comprimento inicial e considerando L_1 o comprimento no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$ e 1° termo $L_1 = \frac{L}{3}$, logo, teremos:

$$L_1 = \frac{L}{3}$$

$$L_2 = \frac{L}{9}$$

$$L_3 = \frac{L}{27}$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} L_n & = & L_1 \cdot q^{n-1} \\ L_n & = & \frac{L}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ L_n & = & \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \\ \\ L_n & = & \dfrac{L}{3^n} \end{array}$$

4.3.4 Perímetro em cada nível (P_n)

Consequentemente, podemos obter o perímetro em cada nível. Basta multiplicarmos o número de lados de cada nível (N_n) 4.3.2 com o comprimento de cada lado (L_n) 4.3.3, logo, se chamarmos de P_1 o perímetro no *Nível* 1, teremos uma *PG* de razão $q = \frac{4}{3}$ e 1° termo $P_1 = \frac{12L}{3}$:

$$P_1 = \frac{12L}{3}$$

$$P_2 = \frac{48L}{9}$$

$$P_3 = \frac{192L}{27}$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} P_n & = & P_1 \cdot q^{n-1} \\ P_n & = & \frac{12L}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ P_n & = & \frac{3.4.L}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \\ \\ P_n & = & \dfrac{4^n L}{3^{n-1}} \end{array}$$

4.3.5 Valor de cada Área adicionada por nível (A_n)

Veja que, inicialmente, temos um triângulo equilátero, logo, sua área é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, consequentemente, no *Nível* 1 temos cada área adicionada sendo $\frac{1}{9}$ da área do triângulo inicial, no *Nível* 2, temos cada área sendo $\frac{1}{9}$ da área do nível anterior e assim por diante. Logo, se chamarmos de A_1 o valor de cada área adicionada no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{9}$ e 1°termo A_1, então, tem-se:

$$A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{36}$$

$$A_2 = \frac{L^2\sqrt{3}}{324}$$

$$A_3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2916}$$

$$\vdots$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & A_1 \cdot q^{n-1} \\ A_n & = & \frac{L^2\sqrt{3}}{36} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ A_n & = & \frac{L^2\sqrt{3}}{4\cdot 9} \cdot \frac{1}{9^{n-1}} \\ & & \\ A_n & = & \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4 \cdot 9^n} \end{array}$$

4.3.6 Número de Áreas adicionadas em cada nível (NA_n)

Observe que no *Nível* 1, temos 3 áreas a mais, pois em cada lado do triângulo equilátero inicial irá adicionar 1, no *Nível* 2, cada um dos 12 lados do nível anterior irá adicionar 1, no *Nível* 3, analogamente, são mais 48 e assim sucessivamente. Chamando de NA_1 o número de áreas adicionadas no 1° nível, temos uma PG de razão $q = 4$ e 1° termo $NA_1 = 3$, com isso, tem-se:

$$NA_1 = 3$$

$$NA_2 = 12$$

$$NA_3 = 48$$

$$\vdots$$

Logo, usando a Fórmula do Termo Geral, temos:

$$\begin{array}{rcl} NA_n & = & NA_1 \cdot q^{n-1} \\ NA_n & = & 3 \cdot 4^{n-1} \end{array}$$

4.3.7 Área Total (AT)

Para calcularmos a área total do *Floco de Neve* basta somarmos todas áreas quando $n \to \infty$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, somaremos a área inicial mais todas as áreas adicionadas em cada nível. Logo, temos que, no *Nível* 1, foi adicionada 3 áreas de $\frac{L^2\sqrt{3}}{36}$, no *Nível* 2, foram 12 áreas $\frac{L^2\sqrt{3}}{324}$ e assim por diante. Então, temos a soma da multiplicação de NL_n (4.3.2) com NA_n (4.3.6) de cada nível. Vamos chamar esta soma de AT, logo, tem-se:

$$
\begin{aligned}
AT &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{36} + 12 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{324} + ... \\
AT &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{1}{81} + ...) \\
AT &= \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + ...)
\end{aligned}
$$

Perceba que temos $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ multiplicando 1 mais a Soma de uma PG infinita 3.4.4 de razão $q = \frac{4}{9}$ e 1° termo $a_1 = \frac{1}{3}$, então:

$$
\begin{aligned}
AT &= \tfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \tfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right) \\
AT &= \tfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \tfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}\right) \\
AT &= \tfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{5}\right) \\
AT &= \tfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \tfrac{3}{5}\right) \\
AT &= \tfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \tfrac{8}{5}
\end{aligned}
$$

$$
AT = \frac{2L^2\sqrt{3}}{5}
$$

Conclue-se, deste modo, que o *Floco de Neve* é um fractal com um perímetro infinito e com a área finita.

4.4 Curva de Peano

Criada em 1890 pelo matemático italiano Giuseppe Peano, é chamada de curva de preenchimento de espaço, pois, tinha como principal objetivo passar por todos os pontos de um quadrado, preenchendo todo um espaço bidimensional.

Este caso patológico é um tipo de fractal pela fronteira, pois, suas iterações de construção são definidas a partir da substituição de uma determinada parte pelo seu gerador, aumentando-se assim o seu comprimento. A curva é iniciada de um segmento de reta que será a diagonal do quadrado preenchido.

4.4.1 Construção

Passo 1: Começa com um segmento de reta;
Passo 2 : O segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial;
Passo 3 : Recursivamente, substitui cada um dos 9 segmentos por outros 9 segui-

mentos, repetindo o processo indefinidamente.

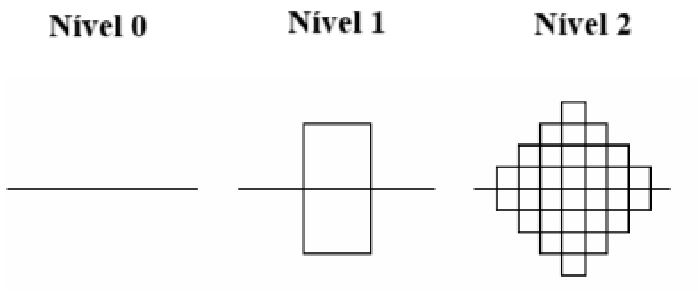


Figura 4.4: Curva de Peano.

4.4.2 Número de segmentos por nível (N_n)

Observe que no *Nível* 1, o segmento inicial é substituido por 9 segmentos com $\frac{1}{3}$ do seu tamanho, no *Nível* 2, cada novo segmento é substituido por 9 segmentos de $\frac{1}{3}$ do seu tamanho, perfazendo um total de 81 segmentos e assim sucessivamente. Chamando de N_1 o número de segmentos no 1° nível, temos uma PG de razão $q = 9$ e 1° termo $N_1 = 9$, com isso, temos:

$$N_1 = 9$$
$$N_2 = 81$$
$$N_3 = 729$$
$$\vdots$$

Logo, usando a Fórmula do Termo Geral, temos:

$$\begin{aligned} N_n &= N_1 \cdot q^{n-1} \\ N_n &= 9 \cdot 9^{n-1} \\ N_n &= 9^n \end{aligned}$$

4.4.3 Comprimento de cada segmento (C_n)

Note que o comprimento de cada segmento do *Nível* 1 é $\frac{1}{3}$ do segmento incial, analogamente, no *Nível* 2, cada segmento adicionado tem $\frac{1}{3}$ do comprimento do nível anterior e assim por diante. Consequentemente, se chamarmos de L o comprimento inicial e considerando C_1 o comprimento no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$ e 1° termo $C_1 = \frac{L}{3}$, logo, teremos:

$$C_1 = \frac{L}{3}$$

$$C_2 = \frac{L}{9}$$

$$C_3 = \frac{L}{27}$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} C_n & = & L_1^{n-1} \\ C_n & = & \frac{L}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ C_n & = & \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \\ & & \\ C_n & = & \dfrac{L}{3^n} \end{array}$$

4.4.4 Comprimento da curva em cada nível (CC_n)

Consequentemente, podemos obter o comprimrnto total da curva em cada nível. Basta multiplicarmos o número de segmentos de cada nível (N_n) 4.4.2 com o comprimento de cada segmento (C_n) 4.4.3, logo, se chamarmos de CC_1 o comprimento no *Nível* 1, teremos uma *PG* de razão $q = 3$ e 1° termo $CC_1 = 3L$:

$$\begin{array}{rcl} CC_1 & = & 9 \cdot \dfrac{L}{3} = 3L \\ & & \\ CC_2 & = & 81 \cdot \dfrac{L}{9} = 9L \\ & & \\ CC_3 & = & 729 \cdot \dfrac{L}{27} = 27L \end{array}$$

$$\vdots$$

Assim, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} CC_n & = & CC_1^{n-1} \\ CC_n & = & 3L \cdot 3^{n-1} \\ CC_n & = & 3^n L \end{array}$$

4.4.5 Área de cada quadrado gerado por nível (A_n)

Veja que, inicialmente, temos dois quadrados com área de $(\frac{L}{3})^2$, consequentemente, no *Nível* 2 temos cada área adicionada sendo $\frac{1}{9}$ da área anterior, no *Nível* 3, temos cada área sendo $\frac{1}{9}$ da área do 2° nível e assim por diante. Logo, se chamarmos de A_1 o valor de cada área adionada no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{9}$ e 1°termo $A_1 = \frac{L^2}{9}$, então, tem-se:

$$A_1 = \frac{L^2}{9}$$
$$A_2 = \frac{L^2}{81}$$
$$A_3 = \frac{L^2}{729}$$
$$\vdots$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & A_1^{n-1} \\ A_n & = & \frac{L^2}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ A_n & = & \frac{L^2}{9} \cdot \frac{1}{9^{n-1}} \\ A_n & = & \dfrac{L^2}{9^n} \end{array}$$

4.5 Árvore Pitagórica

Construída usando-se a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras e por ser um fractal do tipo árvore, onde seu processo de iteração cria ramificações que se assemelham às árvores, este monstro matemático recebe o nome de Árvore Pitagórica. Pode ser feita a partir de qualquer triângulo retângulo, mas, para nosso estudo, vamos utilizar o triângulo retângulo isósceles.

4.5.1 Construção

Passo 1: Construa um quadrado;
Passo 2: Usando como base o lado de cima deste quadrado, construa um triângulo retângulo isósceles tendo como hipotenusa o lado do quadrado;
Passo 3: Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construa dois novos quadrados cujos lados são exatamente os catetos;
Passo 4: Repita os 3 passos anteriores para os dois novos quadrados.

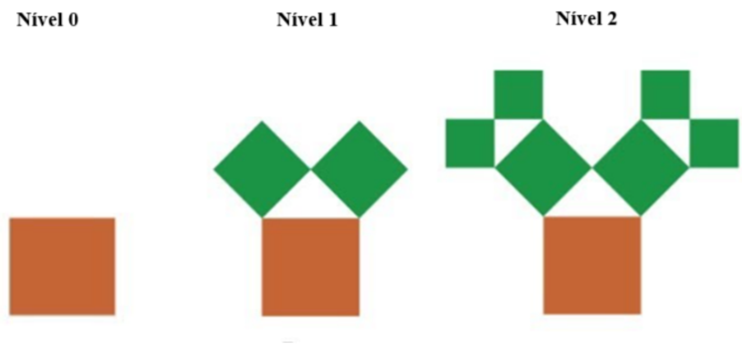


Figura 4.5: Árvore Pitagórica.

4.5.2 Número de quadrados adicionados (N_n)

Observe que, no *Nível* 1, temos 2 quadrados adicionados, no *Nível* 2, cada quadrado adicionado no nível anterior irá receber mais 2 perfazendo 4 quadrados , no *Nível* 3, são 8 e assim sucessivamente. Chamando de N_1 o número de quadrados adicionados no 1° nível, temos uma PG de razão $q = 2$ e 1° termo $N_1 = 2$, com isso, a sequência fica assim:

$$N_1 = 2$$
$$N_2 = 4$$
$$N_3 = 8$$
$$\vdots$$

Logo, usando a Fórmula do Termo Geral, temos:

$$\begin{aligned} N_n &= N_1 \cdot q^{n-1} \\ N_n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\ N_n &= 2^n \end{aligned}$$

4.5.3 Comprimento do lado de cada quadrado adicionado por nível (L_n)

Perceba que, inicialmente, temos um quadrado que chamaremos seu lado de L, no *Nível* 1, cada quadrado adicionado terá o comprimento do lado igual a $\frac{L\sqrt{2}}{2}$, isto, baseado no Teorema de Pitágoras, pois, os lados destes quadrados eram os catetos do triângulo retângulo isósceles que tinha L como hipotenusa.

No *Nível* 2, temos a mesma iteração com o nível anterior, consequentemente, cada quadrado adicionado terá $\frac{L}{2}$ de lado e assim sucessivamente nos níveis seguintes. Logo, se chamarmos de L_1 o valor do comprimento de cada lado dos quadrados adicionados no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1°termo $L_1 = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, então, tem-se:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{L\sqrt{2}}{2} \\ L_2 &= \frac{L}{2} \\ L_3 &= \frac{L\sqrt{2}}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} L_n &= L_1 \cdot q^{n-1} \\ L_n &= \tfrac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \\ L_n &= L \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

4.5.4 Perímetro de cada quadrado adicionado (P_n)

O perímetro de cada quadrado adicionado é a multiplicação do comprimento do seu lado (L_n) 4.5.3 por 4, pois, o perímetro é a soma dos 4 lados iguais do quadrado. Logo, se chamarmos de P_1 o perímetro de cada quadrado adicionado no 1° nível, teremos uma PG de razão $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1° termo $P_1 = 2L\sqrt{2}$, então, tem-se:

$$\begin{aligned} P_1 &= 2L\sqrt{2} \\ P_2 &= 2L \\ P_3 &= L\sqrt{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 \cdot q^{n-1} \\ P_n &= 2L\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Substituindo 2 por $\frac{4}{2}$, tem-se:

$$P_n = \frac{4L\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$P_n = 4L \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$$

4.5.5 Perímetro Total em cada nível (PT_n)

O Perímetro Total em cada nível que é a soma dos perímetros adicionados. Mas, neste caso, teremos de considerar o perímetro do quadrado inicial no *Nível* 0. Além disso, temos de multiplicar o perímetro de cada quadrado adicionado em cada nível (P_n) 4.5.4 com o número de quadrados adicionados em cada nível (N_n) 4.5.2, logo, temos que:

$$PT_n = 4L + 2 \cdot 2L\sqrt{2} + 4 \cdot 2L + ... + 2^n \cdot 4L \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}$$

$$PT_n = 4L + 4L\sqrt{2} + 8L + ... + 2^n \cdot 4L \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}$$

Note, que temos a soma de uma PG de razão $q = \sqrt{2}$ e 1° termo $a_1 = 4L$. Além disso, perceba que temos $(n+1)$ termos, pois, começamos nossa sequência do *Nível* 0, então, tem-se:

$$PT_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

$$PT_n = 4L \cdot \frac{(1 - \sqrt{2}^{n+1})}{(1 - \sqrt{2})}$$

4.5.6 Área de cada quadrado adicionado por nível (A_n)

Veja que, inicialmente, temos dois quadrados com área de $\frac{L^2}{2}$ cada um, consequentemente, no *Nível* 2 temos cada quadrado adicionado sendo metade da área anterior, no *Nível* 3, temos cada área sendo metade da área do 2° nível e assim por diante. Logo, se chamarmos de A_1 o valor da área de cada quadrado adicionado no *Nível* 1, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e 1°termo $A_1 = \frac{L^2}{2}$, então, tem-se:

$$A_1 = \frac{L^2}{2}$$

$$A_2 = \frac{L^2}{4}$$

$$A_3 = \frac{L^2}{8}$$

$$\vdots$$

Desta forma, se usarmos a Fórmula do Termo Geral de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 \cdot q^{n-1} \\ A_n &= \tfrac{L^2}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ A_n &= \tfrac{L^2}{2} \cdot \tfrac{1}{2^{n-1}} \\ A_n &= \frac{L^2}{2^n} \end{aligned}$$

4.5.7 Área Total por nível (AT_n)

A área total da *Árvore Pitagórica* em cada nível é soma da área do quadrado incial com as áreas dos quadrados adicionados. Logo, chamando de AT_1 a área total do 1° nível, temos que, no *Nível* 1, foi adicionado 2 quadrados de $\frac{L^2}{2}$, ou seja, $AT_1 = L^2 + 2 \cdot \frac{L^2}{2} = 2L^2$, no *Nível* 2, foram mais 4 quadrados de áreas $\frac{L^2}{4}$, ou seja, $AT_2 = 2L^2 + 4 \cdot \frac{L^2}{4} = 3L^2$ e assim por diante.

Note que de um nível para o próximo estamos somando L^2, então, temos uma PA de razão $r = L^2$ e 1° termo $AT_1 = 2L^2$, logo, tem-se:

$$AT_1 = 2L^2$$

$$AT_2 = 3L^2$$

$$AT_3 = 4L^2$$

$$\vdots$$

Consequentemente, usando a Fórmula do Termo Geral de uma PA, temos:

$$\begin{aligned} AT_n &= AT_1 + (n-1)r \\ AT_n &= 2L^2 + (n-1)L^2 \\ AT_n &= 2L^2 + nL^2 - L^2 \\ AT_n &= L^2 + nL^2 \\ AT_n &= L^2(n+1) \end{aligned}$$

Capítulo 5

Proposta na prática: Construção, aulas, atividades e análise

Este capítulo é o mais revelador deste trabalho, desde o início da construção desse estudo final do curso, a principal motivação sempre foi aplicar em sala de aula a proposta e metodologia até aqui apresentada neste trabalho. O intuito essencial é de despertar e estimular o interesse dos discentes, desenvolvendo a compreensão e apredizagem de conceitos como *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas* a partir da *Geometria Fractral*, abordando esses conteúdos tradicionais com uma visão diferente e não convencional. Essencialmente, o capítulo é um relato de todo o processo de aplicação da proposta.

Primordialmente, foi ofertada as aulas aos alunos dos 2° e 3° anos do ensino médio básico de uma escola pública do Estado da Bahia. Pois, são os anos que estudam ou já estudaram o assunto proposto. Além disso, devido ao ano letivo já está em percurso e não poder colocar as aulas na grade principal, estas foram ministradas como grade extra no turno oposto às segundas-feiras com 3 horas de duração e 7 encontros. Inicialmente, de forma voluntária, compereceram 30 estudantes, 26 do 3° ano e 4 do 2° ano. Entretanto, no início do processo, surgiu o primeiro problema que foi a não permanência de muitos, isto devido a alguns começarem a trabalhar no turno oposto, dificuldade de transporte, focar em outros estudos e falta de interesse de outros, fazendo com que o número de discentes reduzisse para 10.

5.1 Desenvolvimento e Análise das Aulas

Inicialmente, para ter uma melhor didática e metodologia, as aulas foram agrupadas e divididas em três partes. A primeira parte (Aula 1), tinha o intuito de contar a história das progressões e revisar seus conceitos e definições; pois, apesar de serem assuntos já estudados pelos discentes, não se sabia até que ponto eles estavam com uma base teórica bem definida, o que seria essencial para o andamento da proposta.

Com uma abordagem introdutória, a segunda parte (Aula 2) deu ênfase a Geometria Fractal e tinha a intenção de tratar os conceitos, definições, história entre outras coisas que envolvem esta geometria, pois, todos ali presentes não sabiam da existência dos fractais e nem o que seriam estes "monstros matemáticos".

Na terceira e última parte (Aulas 3, 4, 5, 6 e 7), foram escolhidos e trabalhos fractais famosos que tem processos de iterações diferentes, os quais foram associados às *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas.* O objetivo era diversificar o estudo, criando maior perspectiva nos alunos e, consequentemente, aumentando o interesse dos mesmos.

5.1.1 Primeira Parte: Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas e Atividade Diagnóstica.

A primeira aula foi dividida em três períodos, na qual, inicialmente, foi lecionado, através da lousa, os conceitos, definições e comportamentos das progressões. No segundo período, utilizando-se de Datashow, foi apresentado, através de slides, a história das Progressões Aritmética e Geométrica, desde sua hipotética origem até os dias contemporâneos. No terceiro e último período, foi entregue aos alunos uma atividade diagnóstica com o objetivo de sondar os conhecimentos ou a "bagagem" teórica e prática que eles trazem consigo. A atividade foi dividida em 9 (nove) questões para avaliar os conhecimentos básico inerentes para o bom desenvolvimento do projeto proposto. As questões tinham por objetivo, determinar e identificar sequências (1ª questão); demonstrar que absorveu os conceitos apresentados na primeira aula e diferenciar uma PA de uma PG (2ª, 3ª e 4ª questões); mensurar conhecimentos prévios sobre proporção, pois será um conceito bastante utilizado no decorrer do curso (5ª e 6ª questões); reconhecer a razão, termo geral e soma dos termos tanto de uma PA quanto de uma PG (7ª, 8ª e 9ª questões).

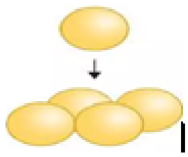
Atividade Diagnóstica:

Colégio Estadual Professor Carlos Valadares
Avenida Patrício São Paulo, Santa Bárbara-BA, 44.150.000
e-mail: carlosvaladares15@yahoo.com.br

Aluno:	Data:	Peso:
Professor (a): Lucas C. Mascarenhas	Turno:	Nota:

ATIVIDADE 1 - DIAGNÓSTICO

1- Camila pretende empilhar esferas de 1cm de diâmetro em um suporte de base quadrada medindo 10 cm de lado. Para isso, ela coloca 100 esferas na primeira camada, preenchendo toda a base do suporte. Cada esfera das camadas superiores será apoiada em 4 esferas da camada anterior, como na figura:



a) Quantas esferas haverá na 3° camada?

b) As camadas estão ordenadas numa progressão aritmética, geométrica ou outro tipo de sequência? Justifique!

c) Qual é a quantidade máxima de camadas que essa pilha pode ter?

2 - Certa companhia de transporte organizou seus preços de acordo com a seguinte tabela:

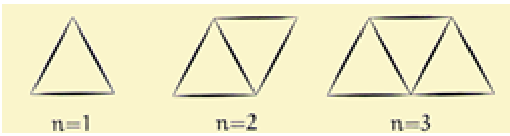
Tabela de preços

Quantidade de passagens	Preço (R$)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
⋮	⋮

A direção

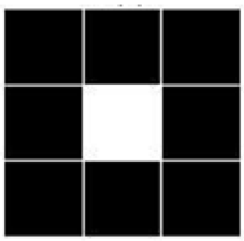
Os preços estão organizados como numa progressão aritmética ou geométrica? Justifique

3 - Quantos palitos serão necessários para construir 10 triângulos seguindo o padrão do desenho abaixo? Que tipo de progressão a figura obedece?



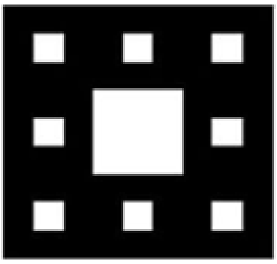
4 - Considere um capital de R$ 10.000, 00 aplicado a uma taxa de juros mensal de 2%, qual o juros gerado em cada mês sabendo que a aplicação durou 5 meses? O juros de um mês para o próximo está em uma progressão aritmética ou geométrica?

5 - Visando às eleições, o prefeito de Santa Bárbara quer construir uma praça em formato quadrangular com um chafariz em seu centro, como mostra a figura a seguir:



Sabendo que área do chafariz é proporcional a área total da praça, você saberia dizer qual seria a proporção ao olhar a figura? Se a praça tivesse 81 m^2, qual seria a área do chafariz? Qual a relação de proporção do chafariz em relação à praça?

6 - Ainda sobre a questão anterior, sabendo que o prefeito quer construir na mesma praça zonas verdes com diversas plantas como mostra a figura a seguir:



Qual a área de cada zona? E qual a proporção desta área com a área total?

7 - Qual a razão e os próximos 5 termos das Progressões Geométricas a seguir?

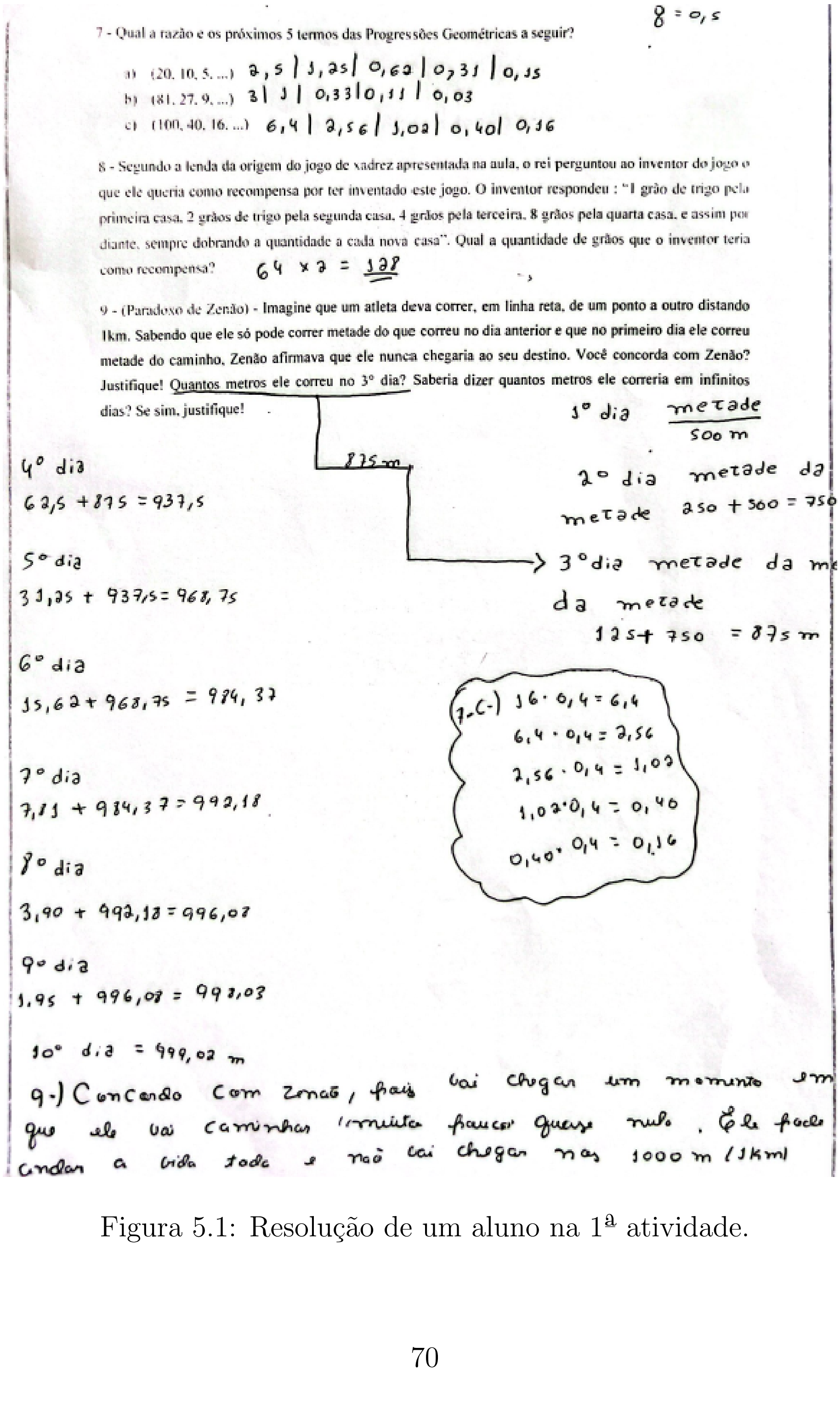
a) (20, 10, 5,...)
b) (81, 27, 9,...)
c) (100, 40, 16, ...)

8 - Segundo a lenda da origem do jogo de xadrez apresentada na aula, o rei perguntou ao inventor do jogo o que ele queria como recompensa por ter inventado este jogo. O inventor respondeu : "1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa". Qual a quantidade de grãos que o inventor teria como recompensa?

9 - (Paradoxo de Zenão) - Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Sabendo que ele só pode correr metade do que correu no dia anterior e que no primeiro dia ele correu metade do caminho, Zenão afirmava que ele nunca chegaria ao seu destino. Você concorda com Zenão? Justifique! Quantos metros ele correu no 3° dia? Saberia dizer quantos metros ele correria em infinitos dias? Se sim, justifique!

O fato de contextualizar historicamente o ensino das Progressões Aritmética e Geométrica, situando o espaço e o tempo, criou possibilidades de motivar os discentes para um despertar mais leve e dinâmico. Ficou notório o interesse e a motivação no desenvolvimento da atividade proposta. A matemática deixou de ser "memorização e fórmulas" passando para uma ciência mais real e penetrante, mais humana e com maior acessibilidade. Apesar da afeição dos alunos e de demonstrarem facilidades no aprendizado de parte do conteúdo, foram encontradas muitas dificuldades inerentes à aprendizagem do assunto.

No desenvolvimento do assunto na lousa e na atividade proposta no final da aula, os educandos apresentaram um misto de entendimento e dificuldade. Nas *Progressões Aritméticas*, eles analisaram com facilidade, identificaram com rapidez a razão e todo o processo, mas nas *Progressões Geométricas*, apresentaram bastante empecilho tanto na hora de interpretar quanto identificar, principalmente, se a PG tivesse uma razão $0 < q < 1$. Fato este, decorrente de problemáticas encontradas nos discentes, a primeira é ter mais habilidade na soma e subtração do que na multiplicação e divisão, a segunda é dificuldade na interpretação do que é proposto, a terceira é a barreira em trabalhar com números não inteiros ou fracionários e, por último, falta de conhecimento básico como proporção.



8 = 0,5

7 - Qual a razão e os próximos 5 termos das Progressões Geométricas a seguir?

a) (20, 10, 5, ...) 2,5 | 1,25 | 0,62 | 0,31 | 0,15

b) (81, 27, 9, ...) 3 | 1 | 0,33 | 0,11 | 0,03

c) (100, 40, 16, ...) 6,4 | 2,56 | 1,02 | 0,40 | 0,16

8 - Segundo a lenda da origem do jogo de xadrez apresentada na aula, o rei perguntou ao inventor do jogo o que ele queria como recompensa por ter inventado este jogo. O inventor respondeu : "1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa". Qual a quantidade de grãos que o inventor teria como recompensa? 64 x 2 = 128

9 - (Paradoxo de Zenão) - Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Sabendo que ele só pode correr metade do que correu no dia anterior e que no primeiro dia ele correu metade do caminho, Zenão afirmava que ele nunca chegaria ao seu destino. Você concorda com Zenão? Justifique! Quantos metros ele correu no 3° dia? Saberia dizer quantos metros ele correria em infinitos dias? Se sim, justifique!

1° dia metade 500 m

2° dia metade da metade 250 + 500 = 750

3° dia metade da metade da metade 125 + 750 = 875 m

875 m

4° dia 62,5 + 875 = 937,5

5° dia 31,25 + 937,5 = 968,75

6° dia 15,62 + 968,75 = 984,37

7° dia 7,81 + 984,37 = 992,18

8° dia 3,90 + 992,18 = 996,08

9° dia 1,95 + 996,08 = 998,03

10° dia = 999,02 m

7-c-) 16 · 0,4 = 6,4
6,4 · 0,4 = 2,56
2,56 · 0,4 = 1,02
1,02 · 0,4 = 0,40
0,40 · 0,4 = 0,16

9-) Concordo com Zenaõ, pois bai chegar um momento em que ele vai caminhar muito pouco quase nulo. Ele pode andar a bida toda e naõ bai chegar nas 1000 m (1km)

Figura 5.1: Resolução de um aluno na 1ª atividade.

Nota-se, na Figura 5.1, que o aluno sabe identificar a sequência e o que está acontecendo de um termo para o próximo, mas, perguntado ao mesmo se conseguiria identificar a razão ou o termo geral da progressão, ele disse que não, pois tinha dificuldade com números fracionários e que só conseguiria ir de um termo para seu sucessor. Isto não foi um fato isolado, grande parte dos discentes tiveram a mesma dificuldade, mostrando que é algo bastante comum devido a uma falta de conhecimento básico.

5.1.2 Segunda Parte: Geometria Fractal e o Jogo do Caos.

Na segunda aula, foi, inicialmente, lecionado, através de slides, os conceitos, definições e características dos fractais e sua geometria. Utilizando-se da lousa como auxílio, estes conceitos foram, minuciosamente, explicados, exemplificados e detalhados. Após isso, na lousa e com a ajuda de um dado, foi jogado com os discentes o chamado Jogo do Caos.

Para o Jogo do Caos, desenhou-se um triângulo equilátero com vértices A, B e C, e assim, associamos os números 1 e 6 ao vértice A, 2 e 5 ao vértice B e 3 e 4 ao vértice C. Posteriormente, através de um sorteio, foi escolhido um aluno, o qual marcou um ponto aleatório dentro do triângulo desenhado no quadro. Com todo o processo inicial preparado, começamos o jogo. Na sequência, outro discente jogou o dado e com a numeração que saiu, ele, a partir do ponto feito pelo colega anterior, traçava um segmento de reta até o vértice associado e, após isso, marcava o ponto médio deste segmento. Logo em seguida, o próximo aluno fazia o mesmo processo a partir do ponto marcado pelo colega anterior e assim por diante. Consequentemente, o objetivo do jogo era mostrar ordem em um processo totalmente aleatório, mas apesar de marcados vários pontos, foi com a ajuda de um aplicativo no computador do professor que conseguiu acelerar o processo e assim, os alunos perceberam que, mesmo marcando pontos aleatórios, o Triângulo de Sierpinski foi gerado.

Nesta aula, os discentes absorveram bem o conteúdo proposto, mostrando todas as suas curiosidades em descobrir algo novo e nunca visto por muitos ali presentes. Além disso, os fractais, por serem conhecidos como “monstros matemáticos” com uma certa complexidade e beleza, instigaram e atraíram os alunos, fazendo-os saírem da visão cotidiana, metódica e sistemática que tinham da matemática. Conceitos como auto semelhança, complexidade infinita e dimensão não - inteira foram absorvidos e discutidos pelos educandos, os quais relataram vivências cotidianas e opiniões no decorrer da aula, assim, demonstrando total domínio do que foi exposto.

5.1.3 Terceira Parte: Fractais estudados, Atividade do Tapete de Sierpinski, Atividade do Penta Cruz e Atividade Final.

Nesta terceira e última parte, foram estudados junto com os educandos todos os fractais que serviram de base para esse trabalho, sendo eles separados pelo seu processo de iteração, ou seja, divididos pela sua classificação. O intuito primordial era de fazer os discentes analisarem os objetos matemáticos e assim, tentar obter uma conexão com alguma progressão. Além disso, partindo desta premissa, no decorrer do curso, foram entregues aos alunos atividades para medir o grau de desenvolvimento dos mesmos perante a proposta.

Conjunto de Cantor (Aula 3), Triângulo de Sierpinski (Aula 4), Atividade 2 - Tapete de Sierpinski e Atividade 3 - Penta Cruz.

Nas aulas 3 e 4 foram apresentados por slides e com auxílio da lousa, respectivamente, o Conjunto de Cantor Terço Médio e o Triângulo de Sierpinski. Estes fractais possuem a mesma iteração, ou seja, são classificados como Fractais por Remoção (2.2.1).

No Conjunto de Cantor, os alunos enxergaram logo que a quantidade de segmentos retirados dobrava de um nível para o outro, com isto, viram que era uma PG de razão $q = 2$. Além disso, conseguiram analisar que o tamanho do segmento retirado de um nível para o próximo era três vezes menor, mas, novamente, veio a tona a dificuldade de associar esta ideia de proporção a uma razão de $q = \frac{1}{3}$. Ou seja, sabiam que o tamanho de um nível para o próximo era dividido por 3, mas não entendiam que a ideia era mesma se multiplicado por $\frac{1}{3}$, ou seja, que reduziam na proporção de $\frac{1}{3}$.

No Triângulo de Sierpinski, os discentes continuaram com a mesma problemática do fractal anterior, eles perceberam, logo de imediato, que o número de triângulos removidos de um nível para o subsequente triplicava, deste modo, associaram a uma PG de razão $q = 3$. Em contrapartida, tanto no comprimento do lado de cada triângulo removido quanto na área, eles tiveram dificuldades. Inicialmente, perceberam que o comprimento era metade do nível anterior, mas, novamente, não associaram a uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$. Já na área, tiveram um obstáculo ainda maior, pois, apesar de terem um conhecimento prévio de perímetro, muitos ali não tinham uma compreensão básica de geometria, e nem de áreas, o que precisou ser explicado pelo docente. Após isso, os alunos notaram que a área de cada triângulo removido era 4 vezes menor de um nível para o próximo, mas, como de praxe, não observaram que seria outra PG de razão $q = \frac{1}{4}$.

Após a aula 4, foi entregue aos discentes duas atividades para medir o aprendizado dos mesmos até então. Para isso, foi utilizado o Tapete de Sierpinski e o Penta Cruz, pois, tinham uma metodologia semelhante ao fractal anterior, mas, diferente do Triângulo de Sierpinski, o Tapete e o Penta Cruz se iniciam com um quadrado.

Atividade 2 - Tapete de Sierpinski:

ATIVIDADE 2 – Tapete de Sierpinski

Processo de Construção:

1º - Considerar inicialmente um quadrado de lado (L) = 1;

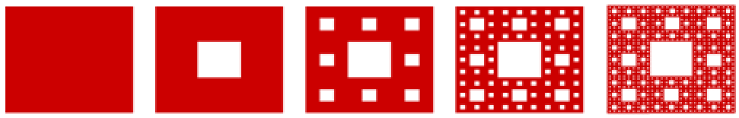
2º - Divida-o em 9 quadrados;

3º - Remova o quadrado central;

4º - Repetir em cada um dos quadrados não eliminados os passos 2º e 3º;

5º - Repetir o passo 4 sucessivamente.

Nível 0 **Nível 1** **Nível 2** **Nível 3** **Nível 4**



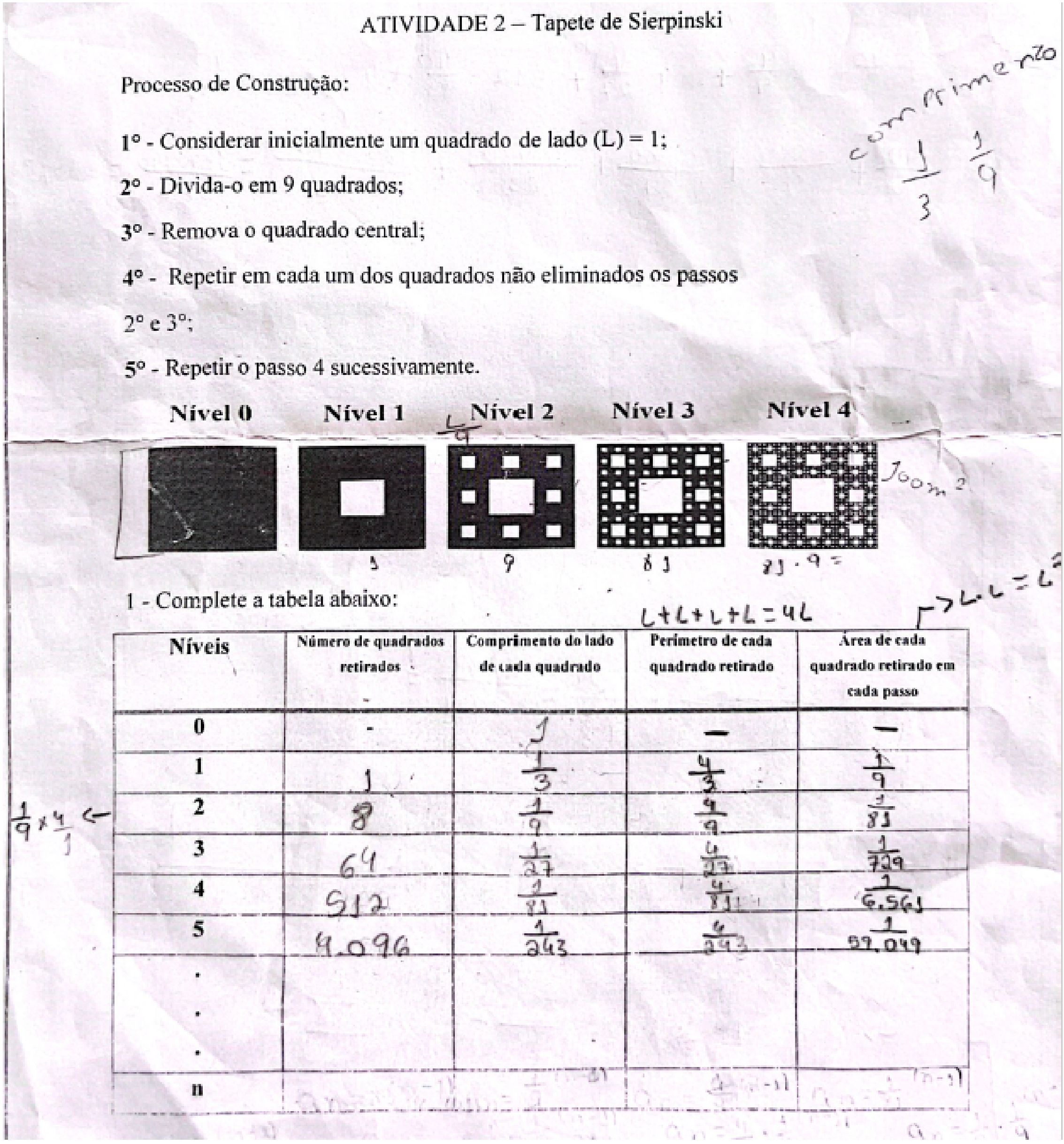
1 - Complete a tabela abaixo:

Níveis	Número de quadrados retirados	Comprimento do lado de cada quadrado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado em cada passo
0	-			
1				
2				
3				
4				
5				
. . .				
n				

2 - Qual a área total retirada após 5 níveis? E até o nível n? Se fizermos n crescer infinitamente qual será a área total retirada?

3 - Em uma fazenda, existe uma plantação no formato do tapete de Sierpinski de nível 4 e que, no local dos "quadrados retirados", foram plantadas hortaliças. Sabendo que Sr. João, o dono, percorre toda a plantação ao longo do dia passando por todos os lugares não plantados e que a área total do terreno é de 100m^2. Quantos metros ele percorre ao terminar sua vistoria? OBS: (Considere que Sr. João não passa duas vezes pelo mesmo lugar)

Na atividade 2, os alunos se habituaram a didática proposta e conseguiram analisar o fractal com maior facilidade. Inicialmente, notaram o processo de iteração do objeto estudado, identicaram com precisão as Progressões Geométricas e suas razões. Mas, apesar da facilidade em alguns aspectos, eles apresentaram difuldades em outros, pois, não conseguiram enxergar o Termo Geral das Progressões de nenhum dos itens da tabela, ou seja, novamente, eles conseguiram ir de um termo ao próximo mas não conseguiram associar a um nível n qualquer, como demonstra a Figura 5.2:


ATIVIDADE 2 – Tapete de Sierpinski

Processo de Construção:

1° - Considerar inicialmente um quadrado de lado (L) = 1;

2° - Divida-o em 9 quadrados;

3° - Remova o quadrado central;

4° - Repetir em cada um dos quadrados não eliminados os passos 2° e 3°;

5° - Repetir o passo 4 sucessivamente.

comprimento $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$

Nível 0 Nível 1 Nível 2 Nível 3 Nível 4

zoom?

1 9 81 81 · 9 =

1 - Complete a tabela abaixo:

L+L+L+L=4L

Níveis	Número de quadrados retirados	Comprimento do lado de cada quadrado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado em cada passo
0	-	1	—	—
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$
2	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{81}$
3	64	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{729}$
4	512	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{6.561}$
5	4.096	$\frac{1}{243}$	$\frac{4}{243}$	$\frac{1}{59.049}$
.				
.				
.				
n	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\frac{1}{9} \times \frac{4}{1}$

Figura 5.2: Resolução de um aluno na 2ª atividade.

Atividade 3 - Penta Cruz:

ATIVIDADE 3 – Penta Cruz

Processo de Construção:

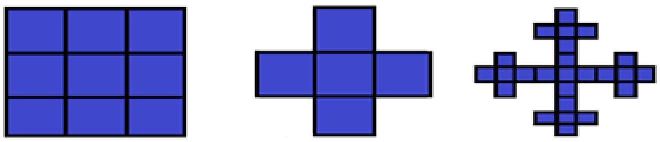
1° - Considerar inicialmente um quadrado de lado (L) = 1;

2° - Divida-o em 9 quadrados iguais;

3° - Remova os 4 quadrados dos cantos;

4° - Repetir em cada um dos quadrados não eliminados os passos 2° e 3°;

5° - Repetir o passo 4 sucessivamente.

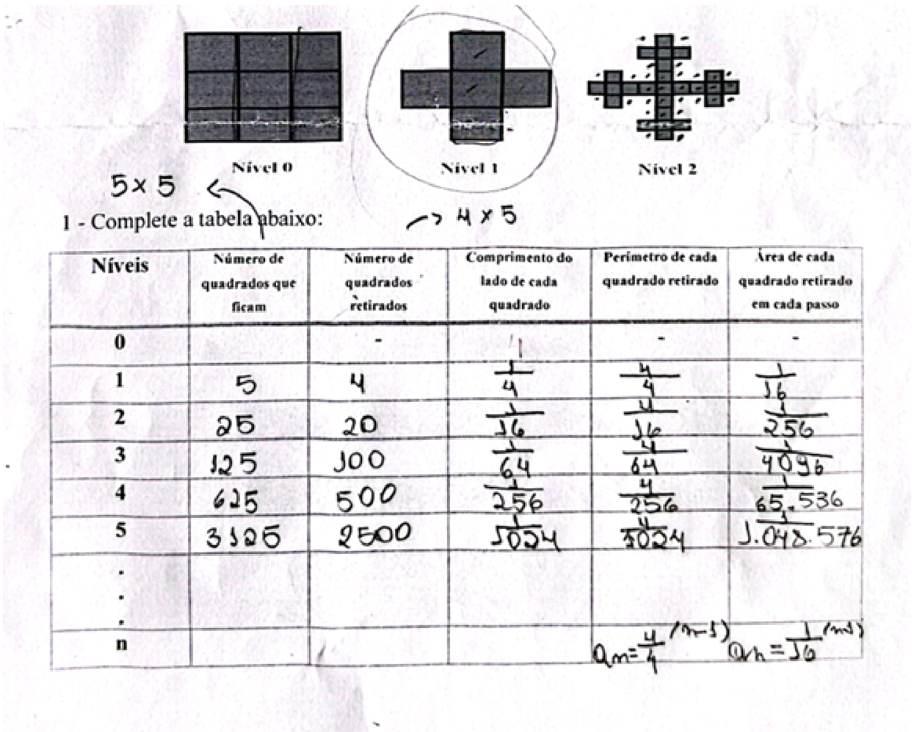


Nível 0 **Nível 1** **Nível 2**

1 - Complete a tabela abaixo:

Níveis	Número de quadrados que ficam	Número de quadrados retirados	Comprimento do lado de cada quadrado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado em cada passo
0		-		-	-
1					
2					
3					
4					
5					
. . .					
n					

Já na atividade 3, por ser um fractal de maior complexidade, os alunos tiveram um misto de entendimento e dificuldade. Alguns conseguiram, identificar o número de quadrados que ficam e o número de quadrados retirados, observando que eram duas PG's de razões $q = 5$ e com os 1^{os} termos iguais a 5 e 4, respectivamente. Mas, isto, induziu um dos alunos ao erro na hora de encontrar o comprimento do lado de cada quadrado adicionado, pois, o estudande associou o 1^{o} termo à proporção de redução do lado, ou seja, achou que o lado reduziria $\frac{1}{4}$ de um nível para o próximo, como mostra a Figura5.3.



Nível 0 Nível 1 Nível 2

5×5

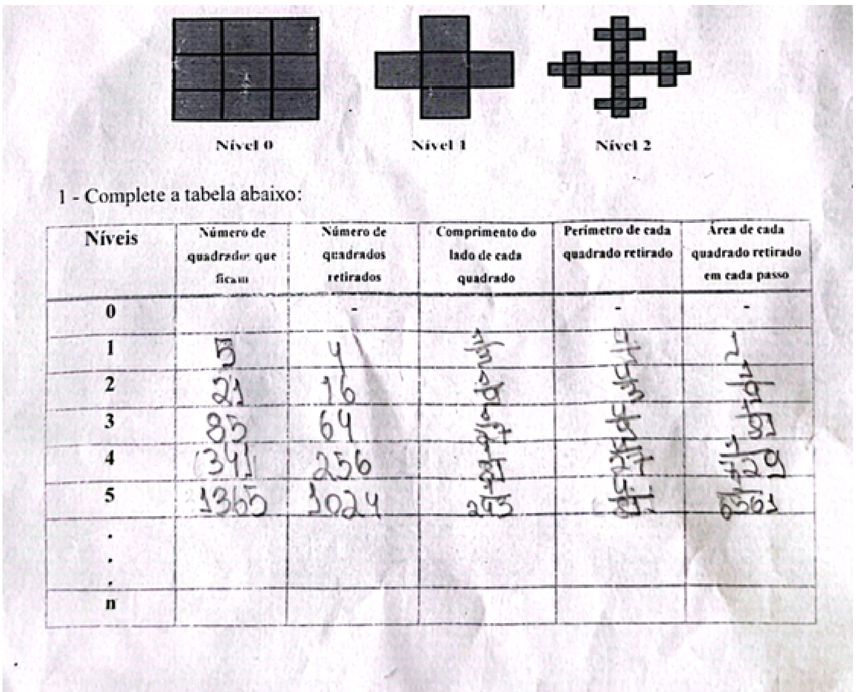
1 - Complete a tabela abaixo:

→ 4×5

Níveis	Número de quadrados que ficam	Número de quadrados retirados	Comprimento do lado de cada quadrado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado em cada passo
0		-	1	-	-
1	5	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{16}$
2	25	20	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{256}$
3	125	100	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{4096}$
4	625	500	$\frac{1}{256}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{1}{65.536}$
5	3125	2500	$\frac{1}{1024}$	$\frac{4}{1024}$	$\frac{1}{1.048.576}$
. . .					
n				$a_n = \frac{4}{4}^{(n-1)}$	$a_n = \frac{1}{16}^{(n-1)}$

Figura 5.3: Resolução 1 do Penta Cruz.

Já outro estudante conseguiu analisar com precisão o comprimento do lado de cada quadrado adicionado, notando que é $\frac{1}{3}$ do comprimento do nível anterior, ou seja, uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$. Consequentemente, ficou fácil observar o perímetro e a área. Apesar disso, ele se equivocou no número de quadrados retirados e número de quadrados que ficam, pois, como relatado pelo mesmo, acabou não fazendo um de cada vez, confundindo um com o outro, como mostra a Figura 5.4.



Nível 0 Nível 1 Nível 2

1 - Complete a tabela abaixo:

Níveis	Número de quadrados que ficam	Número de quadrados retirados	Comprimento do lado de cada quadrado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado em cada passo
0		-		-	-
1	5	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{[illegible]}$
2	21	16	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	85	64	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{81}$
4	341	256	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{729}$
5	1365	1024	243	$\frac{4}{[illegible]}$	6561
. . .					
n					

Figura 5.4: Resolução 2 do Penta Cruz.

Conclue-se, então, que os discentes, apesar da complexidade do objeto matemático proposto, consequiram entender a iteração do mesmo, demonstrando uma evolução do início do curso até este momento. Mas continuam com a mesma dificuldade de não observar para um nível n qualquer, limitando-os a ter que fazer nível por nível.

Floco de Neve de Koch (Aula 5) e Curva de Peano (Aula 6)

Nas aulas 5 e 6, foram usadas as mesmas didáticas e metodologias das anteriores. Desse modo, através de slides e com o auxílio do quadro, foram apresentados aos alunos dois "casos patológicos", respectivamente, o Floco de Neve de Koch e a Curva de Peano. Estes objetos matemáticos possuem a mesma iteração e são classificados como Fractais por Fronteira (2.2.1).

No Floco de Neve de Koch, os alunos demonstraram um certo desenvolvimento e uma maior intimidade com os fractais, como resultado, a análise passou a ser mais rápida e precisa. O maior exemplo disso foi, antes mesmo do professor perguntar, observaram que o comprimento do lado de um nível para o próximo era três vezes menor, por consequência, associaram a uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$. Além disso, notaram que o número de lados do nível seguinte era 4 vezes o do nível anterior, ou seja, uma PG de razão $q = 4$, assim, ratificando ainda mais que haviam sanado problemáticas das aulas antecedentes. Apesar da notória melhora, ainda apresentavam dificuldades em identificar áreas, principalmente, pela iteração do fractal retirar o segmento que seria a "base"do triângulo equilátero adicionado, revelando, mais uma vez, que a falta de conhecimento básico é uma grande barreira para o aprendizado da matemática.

Na Curva de Peano, os educandos estavam totalmente habituados com a dinâmina das aulas e dos objetos matemáticos, portanto, observaram logo de cara que cada segmento gerava 9 novos segmentos, ou seja, uma PG de razão $q = 9$. Além disso, notaram também que os segmentos gerados de um nível para o próximo era 3 vezes menor, em consequência, tinha-se uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$. Em outras palavras, na Curva de Peano, os discentes não apresentaram nenhuma dificuldade, mostrando uma evolução significativa.

Árvore Pitagórica (Aula 7) e Atividade Final

Mantendo-se o padrão das aulas anteriores, na aula 7 foi apresentado aos alunos a Árvore Pitagórica, fractal classificado como do Tipo Árvore (2.2.1).

Nessa aula, ficou bastante evidente que os estudantes já tinham se acostumado com a idéia da proposta e, em vista disso, observaram, de forma imediata, que o número de quadrados adicionados dobrava de um nível para o subsequente, em outras palavras, tinha-se uma PG de razão $q = 2$. Apesar de notória melhora nos alunos, surgiu uma novo obstáculo. Eles, como foi admitido pelos mesmos, não conseguiram perceber que o comprimento do lado de cada quadrado adicionado de um nível para o próximo obedecia uma PG de razão $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Essa problemática se dar pela recorrente falta de conhecimento na matemática básica, fazendo com que eles tenham dificuldades ao trabalharem com raízes e isso se agrava ainda mais por a raíz está em uma fração, pois, como revelado em aulas anteriores, os discentes não tem total domínio de números fracionários, o que até foi melhorado mas não totalmente.

Além disso, eles também não tinham entendimento básico de geometria e muitos ali nem sabiam da interpretação geométrica de Pitágoras ou Teorema de Pitágoras, por consequência, não notaram que cada quadrado adicionado tinha metade da área dos quadrados dos níveis anteriores, em outras palavras, uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$.

Após a aula, foi entregue aos estudantes uma atividade final com o intuito de medir o aprendizado adquirido pelos mesmos. A atividade foi composta por 9 questões que envolviam todo o assunto ministrado neste trabalho de conclusão de curso. As primeiras questões (1 a 5) foram encontradas em concursos e exames como o Enem, o que seria conveniente para testar os alunos. As demais questões (6 a 9) foram desenvolvidas pelo docente, o qual se utilizou de cada fractal ensinado na proposta.

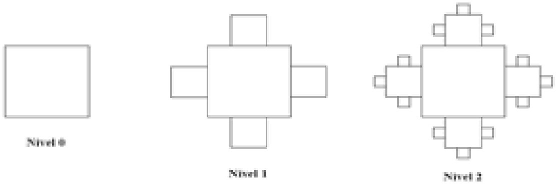
Atividade Final:

ATIVIDADE FINAL

1 - Uma pessoa decide guardar dinheiro todo mês num cofrinho. Ela começa no mês de janeiro colocando R$10,00 e a cada mês subsequente ela coloca o triplo do que tinha colocado no mês anterior. Qual o valor a ser guardado no mês de julho?

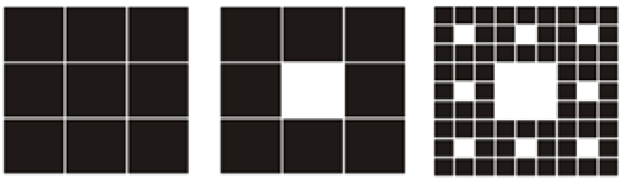
2 - Suponha que, na cidade de Salvador, a quantidade de guardas municipais em cada posto forma uma progressão geométrica. Sabendo que, no 1° posto, há 10 guardas; no 2° posto, 20; e no 3° posto, 40, quantos guardas há no 10° posto? E o total de guardas nos primeiros 10 postos?

3 - Observe o fractal abaixo:



Sabendo que o lado do quadrado no **nível 0** é 4 cm, e que cada quadrado adicionado de um nível para o próximo tem metade do lado do nível anterior, qual a área do **nível 2**?

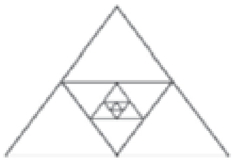
4 - (ENEM - Adaptada) Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar fractais. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o Carpete de Sierpinski, criado por um processo recursivo, o qual, um quadrado é divido em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles. Como mostra a figura a seguir:



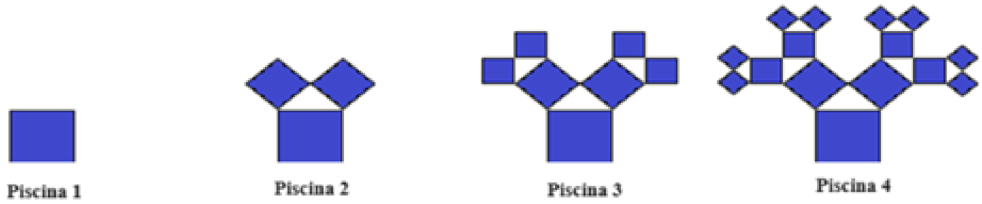
Admita que esse processo seja executado 3 vezes. O número de quadrados pretos restantes nesse momento é?

a) 64. b) 512. c) 568. d) 576. e) 648.

5 - Um fractal é uma estrutura geométrica que se repete em qualquer escala. Unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, obtemos outro triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, determinamos um fractal bem simples, ilustrado na figura abaixo. Se começarmos a construção com um triângulo equilátero de lado de medida 8 unidades de comprimento, o limite para a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal será, em unidades de comprimento?



6 - Um parque aquático resolve criar um conjunto de piscinas seguindo a idéia do fractal Árvore Pitagórica Isósceles como mostra a figura abaixo:

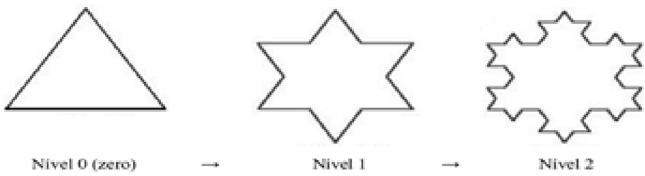


a) Sabendo que a **Piscina 1** tem $100m^2$ de área, qual seria a área das piscinas 2, 3 e 4?

b) As áreas estão em uma progressão aritmética ou geométrica de uma piscina para a próxima?

c) Qual a soma das áreas das piscinas?

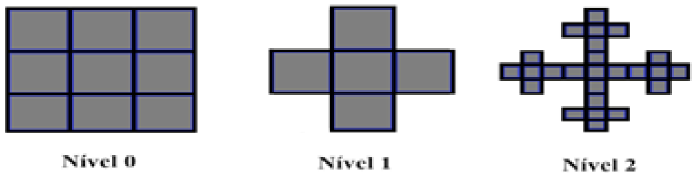
7 - Fractais são formas geométricas apelidadas de "monstros matemáticos" ou "casos patológicos" por desafiarem o enquadramento nas definições convencionais da geometria clássica. Estas estruturas chamam bastante atenção por suas esuberâncias e assim sendo muito utilizadas na arquitetura e na arte. Baseado neste pensamento, o organizador do Festival de Inverno de Vitória da Conquista resolveu fazer o palco do evento no formato do Floco de Neve de Koch, pois, este fractal se assemelha a um floco de neve real. Na sua construção, considera-se, inicialmente, um triângulo eqüilátero, em cada lado do triângulo dividimos o segmento em 3 partes iguais, substituímos o segmento central por uma triângulo equilátero sem base e repetimos cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura indefinidamente como mostra a figura ilustrativa:



Sabendo que o triângulo inicial (Nível 0) tem 81m de lado e que o palco do festival é um floco de neve de Koch nível 3, qual seria o perímetro do palco e qual seria sua área?

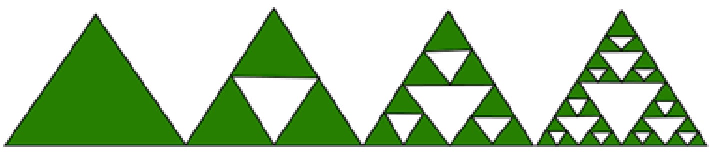
Quantos metros uma pessoa percorrerá se ela fizer o mesmo percurso 20 vezes?

8 - O padre de Santa Bárbara resolveu colocar no topo da sua igreja uma cruz de aço inox no formato do fractal Penta Cruz de nível 2, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $1m^2$ de aço inox pesa, aproximadamente, 800kg e que cada quilo de aço custa R$ 5,50. Quanto a igreja irá gastar numa cruz de 3m de comprimento e 3m de largura?



Penta Cruz

9 - Sabrina irá fazer uma reforma na faixada de sua casa. Além de pintar o muro da frente de sua residência, ela pretende colocar mosaicos de piso utilizando como inspiração o Triângulo de Sierpinsk. Sabendo que ela colocará dois tipos de piso um branco e um verde que valem, respectivamente, R$ 80,00 e R$ 100 o m^2 e que o primeiro mosaico tem 1m de comprimento em seu lado, quanto ela gastará para fazer seu muro com os mosaicos abaixo? (Obs: considere todos os triângulos equiláteros)



A atividade final foi marcada por pontos positivos e negativos, os estudantes fizeram as questões de PG "convencionais", em outras palavras, as questões que estamos habituados a trabalhar no nosso cotidiano, com muita facilidade e demonstrando um certo domínio sobre os conceitos empregados. Essa facilidade é reflexo do fato de os fractais serem mais desafiadores, forçando e estimulando-os ainda mais. Além disso, muitos deles conseguiram trabalhar com a Fórmula do Termo Geral 3.4.2 e interpretando para um termo n qualquer, mostrando um certo desenvolvimento. Mas, apesar deste desenvolvimento, os mesmos narraram que não tem total domínínio para um termo n qualquer, entretanto, começaram a entender o processo, como ilustra a Figura 5.5:

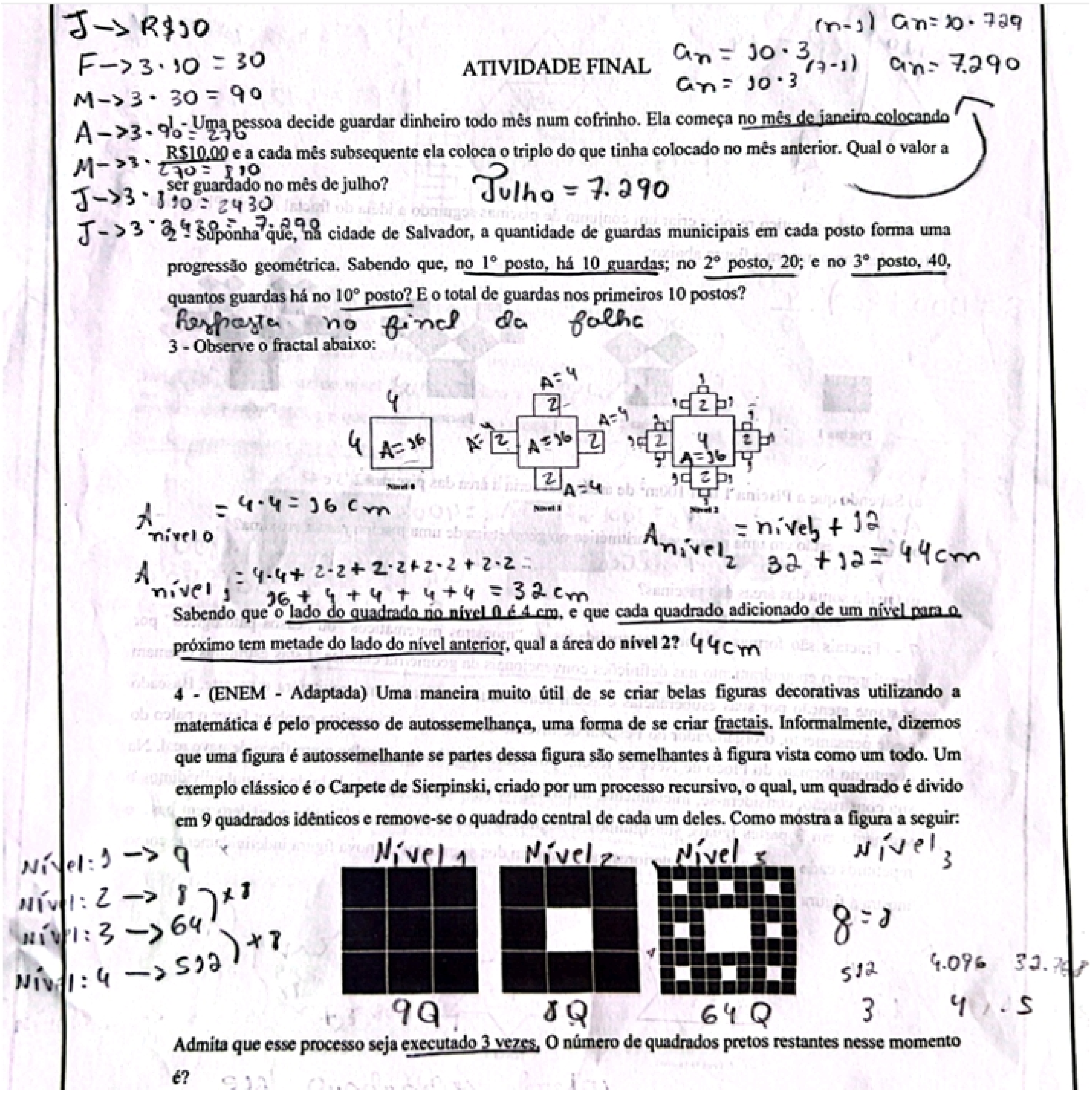
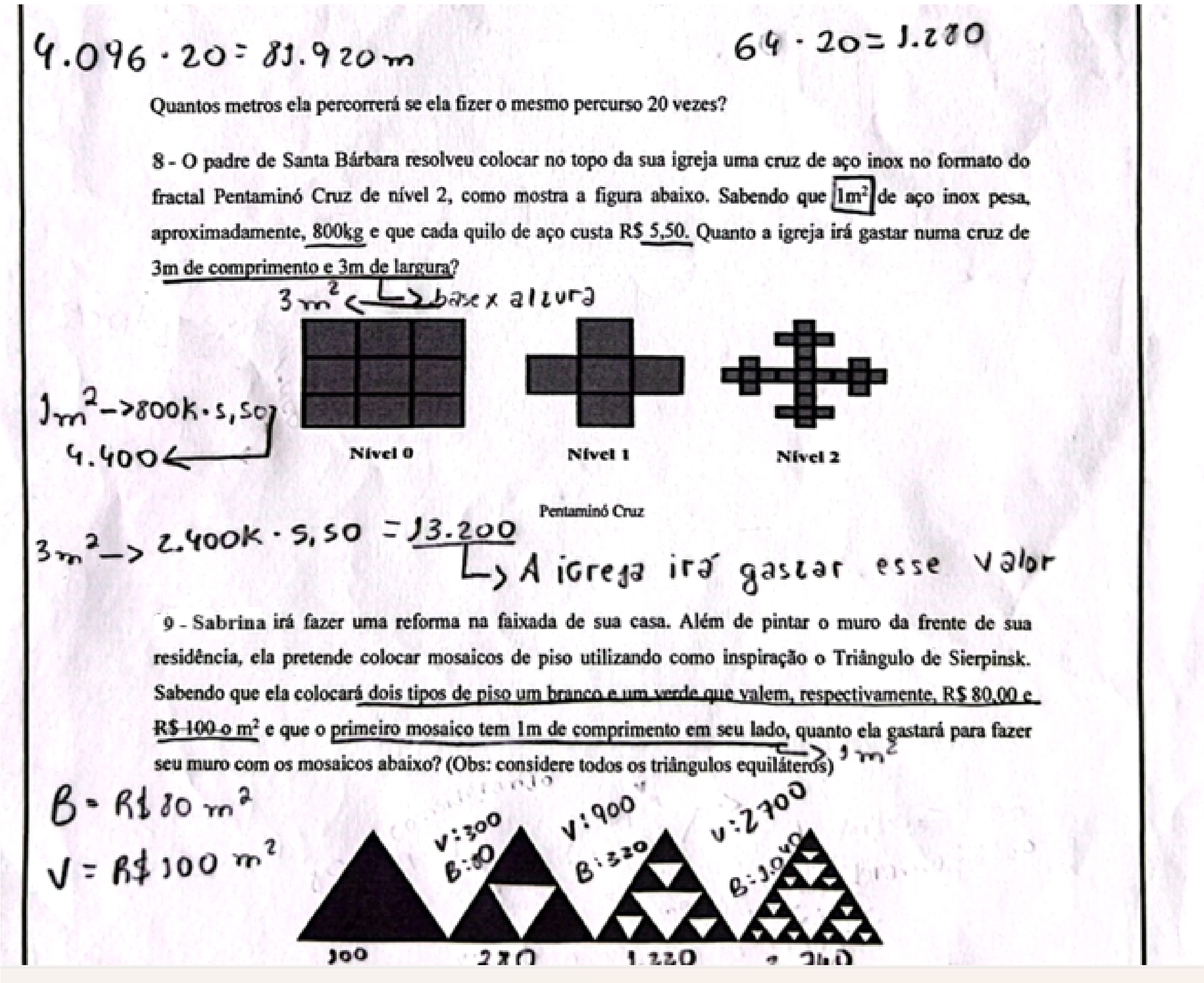


Figura 5.5: Resolução 1 da Atividade Final.

Um segundo ponto positivo foi o fato de os alunos conseguirem desenvolver bem as questões dos fractais com uma observação e análise precisas.

Em contrapartida, foi notório que nas questões envolvendo os fractais, eles ainda apresentam empecilhos para um nível n qualquer e, novamente, só desenvolvem nível por nível. Outro ponto negativo, é o fato deles não interpretarem as questões corretamente e, por consequência, se "perdem"ou deixam escapar detalhes acarretando no erro da resposta final, como mostram as Figuras 5.5 e 5.6:



4.096 · 20 = 81.920 m   64 · 20 = 1.280

Quantos metros ela percorrerá se ela fizer o mesmo percurso 20 vezes?

8 - O padre de Santa Bárbara resolveu colocar no topo da sua igreja uma cruz de aço inox no formato do fractal Pentaminó Cruz de nível 2, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $\boxed{1m^2}$ de aço inox pesa, aproximadamente, 800kg e que cada quilo de aço custa R$ 5,50. Quanto a igreja irá gastar numa cruz de 3m de comprimento e 3m de largura?

3 m² ← base x altura

1 m² → 800k · 5,50

4.400

Nível 0   Nível 1   Nível 2

Pentaminó Cruz

3 m² → 2.400k · 5,50 = 13.200

→ A igreja irá gastar esse valor

9 - Sabrina irá fazer uma reforma na faixada de sua casa. Além de pintar o muro da frente de sua residência, ela pretende colocar mosaicos de piso utilizando como inspiração o Triângulo de Sierpinsk. Sabendo que ela colocará dois tipos de piso um branco e um verde que valem, respectivamente, R$ 80,00 e R$ 100 o m² e que o primeiro mosaico tem 1m de comprimento em seu lado, quanto ela gastará para fazer seu muro com os mosaicos abaixo? (Obs: considere todos os triângulos equiláteros) → 3 m²

B = R$ 80 m²

V = R$ 100 m²

V: 300 B: 80   V: 900 B: 320   V: 2700 B: 1.040

100   280   1.220   3.740

Figura 5.6: Resolução 2 da Atividade Final.

Considerações Finais

A BNCC (A Base Nacional Comum Curricular), documento que rege e determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da educação básica, propõe que a Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, ampliem e detalhem as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências rotineiras dos estudantes. Nesse sentido, os assuntos ministrados no ensino médio devem ser intrigantes, envolventes e incentivantes, assim, galgando melhores resultados no ensino e na aprendizagem.

Neste trabalho de conclusão de curso, apresentamos uma proposta de abordagem para o estudo das *Progressões Aritméticas* e *Progressões Geométricas* a partir de uma perspectiva da *Geometria Fractal.* O intuito primordial é auxiliar os professores de matemática com um método de ensino diferente, interessante e dinâmico, fugindo do convencional, da memorização e do mecânico, passando a matemática para uma ciência mais penetrante, estimulante e desafiadora.

Para alcançar nosso objetivo, partimos da apresentação das progressões pela sua história, situando o espaço e o tempo, tornando os conceitos mais "humanos", vívidos e presentes na sociedade. Em consequência, os estudantes viram que são contéudos reais e não só abstratos, assim, facilitando a assimilação. Logo após, apresentamos a *Geometria Fractal* e todos seus aspectos deslumbrantes e visuais com a ideia principal de chamar a atenção dos discentes, estimula-los para algo desafiante e complexo como a natureza que vivemos exige. Por fim, associamos um conceito ao outro, deste modo, se afastando do tradicional e habitual para uma didática diferente.

Ao final deste processo, resolvemos aplicar na prática tudo que foi empregado nesta dissertação utilizando uma escola do ensino médio do Estado da Bahia. Dessa forma, queriámos averiguar e ratificar se, realmente, seria uma proposta positiva, capaz de alavancar os conhecimentos teóricos dos educandos ou facilitar a absorção e o aprendizado.

Após a aplicação, observamos que foi notório o desenvolvimento dos discentes, eles começaram a proposta com uma "bagagem"superficial do assunto ministrado e foram evoluindo aula por aula, atividade por atividade. Trabalhar com números fracionários, entender um pouco da geometria clássica, encontrar um termo qualquer e muitas outras barreiras foram sanadas ou minimizadas após a aplicação da metodologia deste trabalho. Além disso, foi evidente a satisfação, o prazer e a motivação dos alunos, eles se sentiram desafiados, obrigados a corresponder e a enfrentar estes desafios, por consequência, acarretando num maior empenho e por fim numa automática evolução.

Referências Bibliográficas

BAIL, V. S. **Educação matemática de jovens e adultos, trabalho e inclusão**. [S.l.]: Editora Insular, 2002.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal-para a sala de aula**. [S.l.]: Autêntica, 2016.

BARNSLEY, M. F. **Fractals everywhere**. [S.l.]: Academic press, 2014.

CARVALHO, A. C. M. e P. C. P. **Matemática Discreta**. [S.l.]: Coleção Profmat; Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)., 2014.

CERQUEIRA, A. C. S. **Um estudo sobre sequências e séries**. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 2004.

FEY, F.; ROSA, J. **Teoria do Caos: a ordem na não-linearidade**. [S.l.]: Faculdades Integradas de Taquara, 2012.

FIGUEIRA, A. L. d. S. T. **Sequências e Séries Numéricas.** [S.l.]: UFPA, 2013.

FREIRE, P.; D'AMBROSIO, U.; MENDONÇA, M. D. C. **A Conversation with Paulo Freire. For the Learning of Mathematics**. [S.l.]: JSTOR, 1997. v. 17. 7–10 p.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, vol. 1**. [S.l.]: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001.

LIMA, V.; SILVA, A. **Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações**. [S.l.]: Revista Intellectus., 2004.

MILANI, W. N. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio.** [S.l.]: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Departamento de Matemática, 2011.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo**. [S.l.]: Coleção Profmat; Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)., 2015.

PAIVA, M. **Matemática Paiva, vol. 1**. [S.l.]: Moderna, 2010.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal.** [S.l.]: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat). Universidade Federal da Paraíba, 2013.

SILVA, K. M. **Fractais e algumas aplicações ao ensino**. [S.l.]: IFSP, 2015.

STEWART, J. **Cálculo**. [S.l.]: Cengage Learning São Paulo, 2010. v. 2.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. [S.l.]: Record, 2013.