UFG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ITAMAR DE CAMARGO JÚNIOR

FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO:
uma abordagem conceitual e o uso de gamificação

GOIÂNIA
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação   [ ] Tese   [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Itamar de Camargo Júnior

3. Título do trabalho

Funções no Ensino Médio: uma abordagem conceitual e o uso de gamificação

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM   [ ] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Jhone Caldeira Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 08/12/2024, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Itamar De Camargo Júnior**, **Discente**, em 16/12/2024, às 13:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

ITAMAR DE CAMARGO JÚNIOR

FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO:
uma abordagem conceitual e o uso de gamificação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva

GOIÂNIA
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **24** da sessão de Defesa de Dissertação de **Itamar de Camargo Júnior**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos seis dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e quatro, a partir das 10:00h, **por meio de videoconferência**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Funções no Ensino Médio: uma abordagem conceitual e o uso de gamificação"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Jhone Caldeira Silva (IME/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora, a Professora Doutora Maria Bethânia Sardeiro dos Santos (IME/UFG), e o membro externo, Professor Doutor Porfírio Azevedo dos Santos Júnior (IMTec-UFCAT). A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Jhone Caldeira Silva, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos seis dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Funções no Ensino Médio: uma abordagem conceitual e o uso de gamificação

---

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva, pelas excelentes orientações, oportunidade e dedicação. Foram sempre muito valiosas e contribuíram grandemente para minha evolução profissional.

À minha Mãe, Marizete Cristina Rosa, ao meu Pai, Itamar de Camargo, minhas Irmãs e Irmão, por todo apoio e incentivo durante todo o período do curso.

Aos professores e professoras por todo o aprendizado durante as disciplinas do curso. Contribuíram muito para minha formação. Aos meus colegas de curso que estiveram junto comigo.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma discussão a respeito da forma como o conceito de função é abordado no Ensino Médio e discutimos possibilidades do ensino desse assunto por meio de tarefas gamificadas, a fim de promover oportunidades de aprendizagem em Matemática. É uma pesquisa qualitativa e classificada como aplicada por sua finalidade. Trazemos um levantamento bibliográfico sobre funções e gamificação e como instrumentos de pesquisa utilizamos dois questionários, aplicados a professores e estudantes da 1ª série do Ensino Médio, com o propósito de conhecer as suas percepções sobre o ensino-aprendizagem do conceito de função, o caminho metodológico adotado pelos professores e pelo livro didático, as principais dificuldades dos estudantes, e a visão dos envolvidos em relação a novas abordagens no ensino e a gamificação. Elaboramos uma sequência didática composta por avaliação diagnóstica, devolutiva, estudo dirigido, aulas teóricas, com contextualização histórica e conceitos, e aula prática por meio de uma tarefa gamificada elaborada na plataforma digital *Scratch*. Percebemos a importância do cuidado com os conceitos e a relevância de metodologias que fortaleçam a aprendizagem e que dão oportunidades promovendo ambientes favoráveis ao estudo de Matemática. Inferimos que há potencialidade em utilizar as tecnologias digitais no ensino associadas ao rigor dos conceitos, possibilitando um cenário promissor para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Função; Conceito; Gamificação; Sequência didática.

ABSTRACT

In this paper we present a discussion about the manner how the concept of functions is approached in high school and discuss the teaching possibilities for this topic through gamified tasks in order to promote learning opportunities in Mathematics. It is a qualitative study and it is also classified as an applied research due to its goal. We bring a literature review about functions and gamification and as the research instruments we utilized two questionnaires. They were applied to both teachers and students from the 1st year of high school with the purpose of knowing their perceptions about the teaching and learning of functions the methodological approach adopted by the teachers and the textbook, the main difficulties of the students, and the vision of both parties in relation to new approaches to teaching and gamification We elaborated a didactic sequence composed by diagnostic and formative evaluation, directed study, theoretical lessons with contextual background and concepts, and practical lessons through a gamified task created on the digital platform Scratch. We realize the importance of caring about the concepts and the relevance of methodologies that enhance learning and provide new opportunities, all of which promote favorable learning environments for the teaching of Mathematics. We infer that there is potential in utilizing digital tools in teaching and learning, associated with the strictness of the concepts, which makes it possible to have a promising scenario for the teaching of Mathematics in Basic Education.

Keywords: Functions; Concepts; Gamification; Didactic sequence.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

A pesquisa busca compreender o ensino do conceito de função para estudantes ingressantes no Ensino Médio e encontrar uma metodologia engajadora para se chegar ao objetivo proposto. Como aluno do curso de matemática do então Departamento de Matemática, *campus* Catalão da UFG (hoje Instituto de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Catalão) tive a oportunidade de participar do projeto de extenção chamado "Torneio de Jogos Matemáticos" proposto pela universidade em parceria com as secretarias municipal e estadual. Vivenciei todo o processo do projeto. Percebi nos estudantes da Educação Básica grande interesse e entusiasmo em atividades de jogos e disputas em forma de campeonato.

Apresentada a capacidade de motivação e concentração que os jogos desempenham na interação entre pessoas, também o avanço tecnológico constante que a sociedade vivencia, investigaremos a metodologia de Gamificação como uma forma de propor atividades voltadas a tecnologias e jogos no ensino de Matemática.

Como problema de pesquisa trazemos a forma como o conceito de função é tratado no ensino básico de Matemática em contraponto com a forma que é apresentado durante cursos de formação de professores, a partir das literaturas utilizadas. Soa, por vezes, uma "incompletude" relacionada ao conceito de função em Matemática. Assim desejamos investigar como proporcionar um ambiente de estudo significativo quanto ao ensino de funções no ensino básico. Ainda, estudar possibilidades de abordar a gamificação nesse contexto.

A hispótese é que o ambiente de ensino pode ser enriquecido com o uso de tecnologias digitais e de tarefas gamificadas.

Entendemos como justificativa e motivação para a pesquisa a circunstância pela qual o presente sistema de ensino da educação pública brasileira encontra-se desafiado quanto a métodos que usem tecnologias. Os resultados obtidos pelos estudantes do Ensino Médio nas avaliações diagnósticas promovidas pelos governos Estadual e Federal nos dão uma visão dos desafios que precisam ser enfrentados pela Educação Brasileira. Diante desse fato, propostas de abordagens educacionais aparecem como importantes suportes aos professores da Educação Básica. Principalmente para a área de Matemática e suas Tecnologias. É preciso encontrar propostas que visam estabelecer alternativas para fortalecer a aprendizagem de matemática. A gamificação aparece como uma alternativa que faz o uso de jogos educacionais envolvendo conteúdos e propiciando ambiente agradável. O lúdico e tarefas competitivas podem ser exploradas como apoio e como uma forma de garantir que se consiga atender mais estudantes com uma aprendizagem significativa.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que é formado por avaliações a nível nacional, possibilita o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) fazer um diagnóstico da Educação Básica do Brasil. Nele são evidenciados níveis de aprendizagem de estudantes das redes de ensino municipais, estaduais e federal. A formalização do conteúdo de Função aparece a partir do nível 2 para estudantes da 3ª série do Ensino Médio, veja Tabela 1 onde na terceira coluna descrevemos o tipo de função envolvido na respectiva habilidade.

Tabela 1: Níveis do Saeb e Funções

NÍVEIS	**HABILIDADES SAEB**	**TIPO DE FUNÇÕES**
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	O estudante pode ser capaz de reconhecer os zeros de uma função dada graficamente. Também é bem provável que os alunos determinem: o valor de uma função afim, dada sua lei de formação;	Função afim
Nível 3 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300	O estudante pode ser capaz de reconhecer: o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente; em um gráfico, o intervalo no qual a função assume valor máximo.	Função quadrática
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função considerando valores fornecidos em um texto. Além disso, pode ser capaz de determinar: a lei de formação de uma função linear a partir de dados fornecidos em uma tabela;	Função afim
Nível 5 Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	O estudante pode ser capaz de determinar: o valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada;	Função exponencial
Nível 6 Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	O estudante pode ser capaz de determinar os zeros de uma função quadrática, a partir de sua expressão algébrica.	Função quadrática

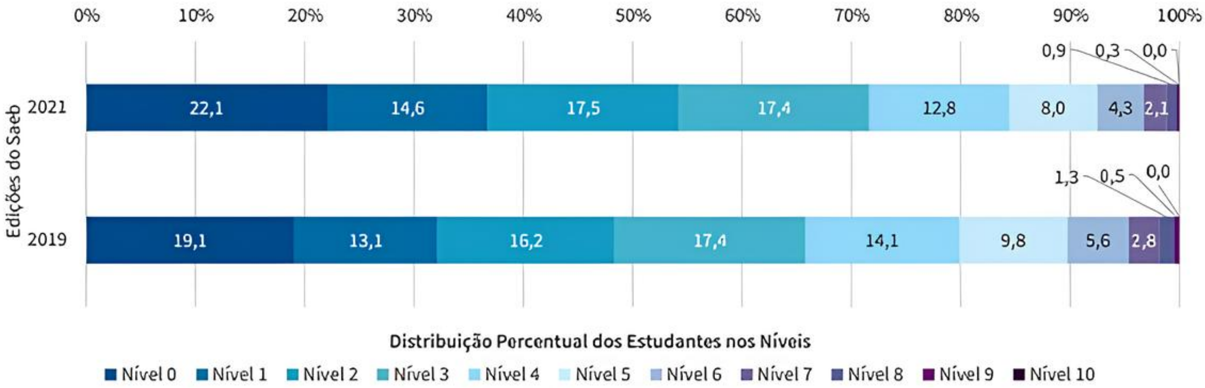
Continua na próxima página

Nível 7 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 450	O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função a partir de informações sobre sua variação descritas em um texto; os zeros de uma função quadrática em sua forma fatorada; gráfico de função afim a partir de sua representação algébrica; Além disso, é provável também que os alunos sejam capazes de determinar os pontos de máximo ou mínimo a partir do gráfico de uma função; a expressão algébrica que relaciona duas variáveis com valores dados em tabela ou gráfico; Também é provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas: para obter valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada;	Função afim, quadrática e exponencial
Nível 8 Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	O estudante pode ser capaz de reconhecer: o gráfico de uma função trigonométrica na forma $y = sen(x)$; Também é provável que seja capaz de determinar: a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes; o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice;	Função trigonométrica, quadrática e função definida por várias sentenças
Nível 9 Desempenho maior ou igual a 425 e menor que 450	O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x) = 10^{x+1}$; o gráfico de uma função logarítmica, dada a expressão algébrica da sua função inversa e seu gráfico. Também é provável que seja capaz de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, com base em dados fornecidos em texto ou gráfico; a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano;	Função exponencial

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 1 podemos ver um comparativo dos resultados do Saeb 2019 e 2021 do Ensino Médio no Brasil. Em 2021, dos estudantes que estão finalizando o Ensino Médio, 22,1% estão no nível 0 e 14,6% no nível 1. Vemos então que 36,7% dos estudantes não chegam ao nível 2.

Figura 1: Distribuição percentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência no Saeb, em Matemática, na 3ª série do Ensino Médio regular - Brasil - 2019 e 2021



Fonte: BRASIL, Inep (2023)

No contexto do estado de Goiás temos que 30,3% não alcançaram o nível 2 do Saeb em 2021. Se considerarmos os conteúdos de função afim e quadrática temos que 51,7% atingiram os primeiros níveis desses conteúdos.

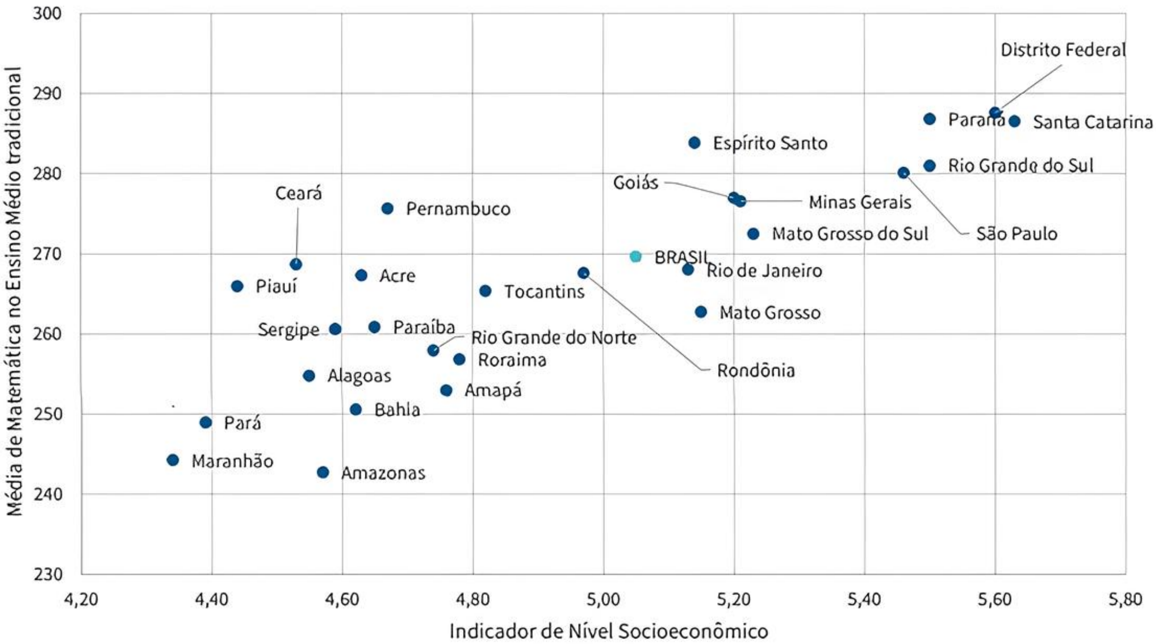
Figura 2: Distribuição percentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência, no Saeb, em Matemática, na 3ª série do Ensino Médio regular - unidade da federação - 2021

UF	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
Goiás	16,8	13,5	17,6	19,0	15,1	9,9	5,0	2,0	0,8	0,2	0

Fonte: Adaptado de BRASIL, Inep (2023)

Em 2021 temos como referência a média nacional de Matemática de 270,0 pontos, enquanto que em Goiás a média foi de 277,0 pontos. O que nos mostra que, em média, os estudantes da terceira série do Ensino Médio em Goias se encontram no nível 3, enquanto que no Brasil como um todo estão no nível 2 (conforme Figura 3).

Figura 3: Proficiências médias, no Saeb, de Matemática, na 3ª série do Ensino Médio regular por UF segundo a média estadual do indicador socioeconômico - 2021



Fonte: BRASIL, Inep (2023)

A fim de abordar essa temática na primeira série do Ensino Médio, elegemos tópicos relacionados ao estudo das funções em Matemática. Isso porque observações realizadas a partir de experiências com professores de Matemática no ensino básico ou via partipação de projetos em escolas de ensino básico, foi possível realizar reflexões a respeito da forma como o conceito de função é apresentado e tratado, bem como as representações e os exemplos. Identificamos literaturas clássicas e materiais didáticos que assumem uma maneira quase que artificial em alguns elementos teóricos sobre o tema e procuramos identificar se há discrepâncias entre livros da Educação Básica e livros do Ensino Superior que supostamente possam ser utilizados em cursos de formação de professores de Matemática. Diante disso, gostaríamos de discutir os caminhos de apresentação do conceito de funções e o tratamento dado ao conceito, às suas reprentações e exemplos.

O objetivo geral é o de abordar o ensino de conceitos relacionados às funções por meio de tarefas gamificadas a fim de promover oportunidades de aprendizagem em Matemática.

Como objetivos específicos podemos elencar três:

1. Refletir o ensino do conceito de funções e possibilidades de abordagem para a primeira série do Ensino Médio.

2. Explorar possiblidades para estudar funções, suas representações e exemplos focados no conceito por meio de tarefas gamificadas.

3. Abordar as funções afim e quadrática em tarefas gamificadas.

A estrutura do trabalho é formada por capítulos, apêndices e anexos. No primeiro capítulo descrevemos a metodologia da pesquisa. Foram apresentados o tipo de pesquisa, a classificação, os instrumentos que serão elaborados e aplicados, a forma de análise que tangenciaremos e o produto educacional que será elaborado.

O segundo capítulo é composto por uma fundamentação sobre ensino, tecnologias e gamificação. Buscaremos, conforme os documentos oficiais que norteiam a Educação Básica em nível nacional e estadual, tais como a Base Nacional Comum Curricular e o Documento Curricular de Goiás, sustentar o uso das tecnologias digitais no ensino. Embasando a metodologia de gamificação no ensino e trazendo exemplos de plataformas digitais favoráveis a tal recurso.

Começaremos o terceiro capítulo com apontamentos sobre o ensino de funções e os documentos oficiais da Educação Básica. Um pequeno histórico do conceito de função, para então elencar as definições de funções, abordagens e caminhos metodológicos de livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, da 1ª série do Ensino Médio e de livros textos de Ensino Superior. Daí encaminharemos, com exemplos, a definição que pensamos ser mais abrangente e está dentro do que defendemos.

Dedicaremos o quarto capítulo para fazer uma proposta de produto educacional em forma de sequência didática com público-alvo voltado a estudantes ingressante do Ensino Médio. Serão apresentadas a fundamentação, a estrutura, um organograma, a divisão das aulas e a descrição de uma tarefa gamificada que compõe como uma etapa da sequência didática.

No quinto capítulo faremos a análise dos questionários que foram aplicados a trinta estudantes da 1ª série do Ensino Médio e dez professores da Educação Básica que atuam em instituições pública do Estado de goiás e série em estudo.

Concluindo, faremos as considerações finais respondendo perguntas sobre a possibilidade da compreensão do tema da pesquisa, da solução ou não do problema proposto, da confirmação ou contraposição da hipótese levantada, do alcance ou não dos objetivos gerais e específicos, da metodologia da pesquisa quanto sua eficácia aos objetivos propostos, das referências na capacidade de ter preparado o estudo. Também, além disso, o olhar que teremos dado a execução da pesquisa.

Serão disponibilizados em apêndices os questionários elaborados no trabalho e as atividades da sequência didática desenvolvida. Bem como as avaliações, as devolutivas, o estudo dirigido, os planos de aulas, uma tarefa gamificada e um banco de questões que foram utilizadas nela.

1 METODOLOGIA DA PESQUISA

A presente pesquisa tem um enfoque central qualitativo. Segundo Winques (2022, p. 103), as abordagens na pesquisa qualitativa "partem do pressuposto de que o conhecimento pode ser produzido no conjunto das interações entre sujeito e objeto" e "ao invés da mensuração, se caracterizam pela compreensão de uma dada realidade". O procedimento desse tipo de pesquisa tem como característica o entendimento de um determinado contexto.

De acordo com a sua finalidade é classificada como pesquisa aplicada, uma vez que busca discutir problemas relacionados à aprendizagem e levantar possibilidades que respondam à perguntas sobre processos educacionais. Especificamente, visa apontar problemas relativos a aprendizagem do conceito de função em Matemática, para então buscar soluções do ponto de vista da prática. Assim, percebendo o valor e destaque que as tecnologias digitais têm desempenhado atualmente, estudaremos a metodologia de gamificação. Conforme seus objetivos, o nível dessa pesquisa é exploratória, aquela que busca conhecer o problema, formular hipóteses, aprimorar ideias e descobrir intuições (MOREIRA, 2022, p. 46). Pretendemos alcançar estudantes da 1ª série do Ensino Médio com o uso de tarefa gamificada que visa apresentar e fixar o conceito de função e outros conceitos relacionados ao tema, chegando às funções afim e quadrática.

Ainda que o documento curricular oriente o ensino de funções polinomiais do 1º e 2º graus no 9º ano do Ensino Funtamental, a experiência tem revelado que muitas vezes a abordagem é superficial se limitando a ideias muito introdutórias. Assumiremos aqui que de fato esses temas são melhor abordados na primeira série do Ensino Médio e oferecemos discussões de como abordá-los considerando que os estudantes possam estar em sua primeira vivência com os conteúdos próprios sobre funções. Levaremos em consideração que eles tenham certa familiaridade com os conceitos de conjuntos e produtos cartesianos, mas não seria um cenário improvável a negligência aos produtos cartesianos (ensinado em teoria de conjuntos no início do Ensino Médio) como etapa anterior ao estudo de funções.

Com a finalidade de validar e atingir os objetivos dessa pesquisa, traçaremos alguns percursos. Num primeiro momento, faremos um levantamento bibliográfico a respeito do conteúdo de funções, como esse tema é abordado em documentos oficiais e na literatura, procurando entender como livros didáticos têm apresentado o conceito de função e delineado as discussões com exemplos, representações e tipos de funções, particularmente afim e quadrática. Ainda, investigaremos na literatura alguns pontos sobre as tecnologias digitais presentes em ambientes de ensino, buscando abordar, em particular, detalhes sobre conceitos e ideias da gamificação. Estudaremos as perspectivas do uso de tecnologias presentes na BNCC e no Documento Curricular do Estado de Goiás e apresentaremos algumas plataformas digitais disponíveis para uso. O aporte teórico também traz sugestões de organização e estruturação norteadoras para a elaboração de uma sequêncida didática. Com o levantamento bibliográfico realizado para a pesquisa, listaremos trabalhos de dissertação de mestrado relacionadas à gamificação que já foram defendidas e estão presentes no banco de dissertações do PROFMAT.

Na segunda etapa do percurso construiremos dois questionários como instrumentos de pesquisa, onde um será aplicado a professores de Matemática da Educação Básica que atuam em Goiás e o outro será destinado a estudantes do Ensino Médio. Ambos os questionários têm a finalidade de conhecer percepções de professores e estudantes a respeito do conceito de funções e outras questões relacionadas a possíveis estratégias de abordagens de ensino do tema.

Elaboraremos os questionários de acordo com autores apontados na literatura, orientando a potencialidade deste tipo de instrumento de coleta de dados. Marconi e Lakatos (2003, p. 201) apontam que questionário é "um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador". Fiorentini e Lorenzato (2012) explicam que a utilização de questionários na pesquisa qualitativa é uma ferramenta de coleta de dados, a qual propicia, em um tempo curto, registrar um número significativo de respostas de forma objetiva. Vemos que nesse tipo de ferramenta o pesquisador não estará presente, o que aumenta o número de alcance de pessoas e os deixam livres para responder sem nenhuma intervenção ou interferência.

Danton (2002) ressalta condições para o uso do questionário: o objeto de pesquisa do observador tem que estar definido, as questões devem ser o mais objetivas possível; o questionário deve seguir uma estrutura lógica progressiva. Compreendemos então que os questionários não devem ser extensos, de forma a não desmotivar quem está respondendo e que tenham coerência de acordo com o que se quer pesquisar.

Portanto, segundo o entendimento, consideramos que o questionário apresenta mais vantagens que desvantagens para a pesquisa. É um instrumento impessoal e abrangente, podendo nos ajudar a entender o problema da presente pesquisa. A busca por compreender o ponto de vista de colegas de profissão somará na busca por um ensino de matemática notável e, não menos importante, o lado dos estudantes contribuirá de maneira a tornar a proposta interessante.

Para a análise dos questionários utilizaremos algumas ideias sobre a análise de conteúdo de Bardin (2016). Não aprofundaremos nesse processo, mas utilizaremos alguns elementos como norteadores paras as discussões dos dados. Segundo a autora, a análise acontece por três diferentes fases: "1) a pré-análise; 2) a exploração do material; 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação". Onde a primeira fase é a de organização. Compor ideias e arranjar um plano para analisar o material (leitura flutuante, escolha de documentos, formulação das hipóteses e dos objetivos, referênciação dos índices e elaboração de indicadores), nesse sentido suas ideias nos orientaram na organização do material, na leitura flutuante, na escolha dos documentos, assim como para propor hipóteses e estabelecer objetivos. A segunda fase é basicamente dedicada a procedimentos de codificação, desconto ou enumeração. A partir da natureza dos dados extraídos em nossa pesquisa, usamos superficialmente algumas ideias para codificação e enumeração dos resultados. A terceira fase é a do tratamento dos resultados usando de operações estatísticas simples ou complexas e, em nosso caso, não foi necessário aplicar instrumentos muito precisos uma vez que foi possível usar ferramentas meramente descritivas.

Finamente, elaboraremos uma sequência didática a fim de propor um percurso interessante de abordagem para a apresentação do conceito de funções, passando por exemplos e representações, promovendo um caminho que se inicia com uma atividade diagnóstica, passando por motivações ao estudo de funções, formalizações em aulas programadas e finalizando com uma tarefa gamificada, aprofundamento e avaliação final.

2 ENSINO, TECNOLOGIAS E GAMIFICAÇÃO

Nesse capítulo falaremos sobre os documentos oficiais e as tecnologias digitais, acompanhado de uma fundamentação sobre a metodologia de gamificação. Ao final listaremos alguns exemplos de plataformas para a elaboração e execução de tarefas gamificadas.

2.1 Ensino e tecnologias

O uso das Tecnologias Digitais no Ensino é destaque em pesquisas devido a sua versatilidade. Tem aplicabilidade divertida e motivadora. Para a nova geração de estudantes a presença dos *Smartphones* é uma realidade permanente no cotidiano, inclusive no ambiente escolar. As práticas docentes e sua relação diária com os estudantes demandam aprimoramento no que se refere a inovações tecnológicas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo e tem como objetivo orientar os sistemas e redes de ensino no Brasil, define aprendizagens essenciais para garantir aos estudantes a construção de conhecimentos, competências e habilidades. As competências gerais abrangem direitos de aprendizagens em todas a etapas da Educação Básica. Nelas podemos perceber que os conhecimentos que foram construídos ao longo da história humana devem ser valorizados uma vez que ajudam a compreender a realidade. A curiosidade intelectual deve ser instigada e treinada indo ao encontro do método científico.

Ao todo são dez as competências gerais indicadas na BNCC que incluem direitos de aprendizagem. Entre elas as Tecnologias Digitais (TD) são apresentadas na quinta competência geral como:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

O estudante tem o direito de compreender o mundo e a realidade social em que vive para exercer sua cidadania de forma consciente. Começando pelo ambiente escolar, onde a rotina necessita incluir as tecnologias digitais que permeam a vida fora da escola. Vivemos em comunidade e somos chamados a participar dela. O protagonismo juvenil pode ser trabalhado por meio de ações e projetos de modo a ensinar habilidades que ajudem na resolução de problemas. De acordo com BRASIL (2018, p. 536), o " uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações".

Em particular, a habilidade EM13MAT101 da BNCC chama a atenção para a capacidade de interpretação crítica das situações econômicas e sociais que demandam a aprendizagem matemática (BRASIL, 2018, p. 533). Dar sentidos e significados ao que se ensina para os jovens da atualidade e integrar o seu dia-a-dia ao conteúdo matemático utilizando estratégias de jogos, por exemplo. Vemos aí uma oportunidade de trabalhar temas importantes para a vida das pessoas, tais como a gestão de recursos financeiros, a responsabilidade cidadã com impostos, a busca por trabalho e a sustentabilidade. Conectar os objetivos de aprendizagens e habilidades à realidade do estudante. Potencializar o ensino de matemática para o exercício da cidadania e articulação com a ciência.

Em relação à Matemática, a BNCC recomenda o uso de calculadores e planilhas para o desenvolvimento do pensamento computacional, construindo modelos e resolvendo problemas. Com isso, devemos envolver o estudante com tarefas que utilizem do raciocinio, da representação, da comunicação e da argumentação. Para tanto, a área da matemática e suas tecnologias assegura competências específicas de matemática para o Ensino Médio. São cinco as compretencias específicas.

Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Temos aí a importância do papel da educação matemática na formação do cidadão que reflete e analisa informações dos diversos meios de comunicação, informações estas que geralmente são apresentadas por estatísticas, tabelas e gráficos. Essa competência inspira habilidades que envolvem fatos sociais e econômicos juntamente com riscos probabilísticos. Mas ela também não limita a contribuição desses conhecimentos matemáticos as ciências humanas, visto que o tratamento da informação no conhecimento científico das ciências da natureza está presente.

Competência específica 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Agora, de um modo mais amplo, o estudante analisa o mundo com relação as ações individuais e coletivas e seus efeitos na sociedade. O quanto de matemática temos na saúde com suas estatísticas e estudos e na preservação da natureza, por exemplo. Um olhar para a sua comunidade fazendo medidas e cálculos, utilizando aplicativos e planilhas.

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Aqui nessa competência as habilidades devem ter um sentido mais real para o estudante. O estudante tem que saber onde quer chegar e assim buscar etapas que o levarão a construção de modelos. O mundo do trabalho deve ser levado em conta pois tem ligação direta com o futuro do estudante. Há também na competência específica 3 a ênfase na elaboração de problemas e não somente na resolução.

Competência específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

O foco nessa competência são as representações matemáticas. O estudante deve utilizar as diversas representações matemáticas no sentido de compreender as ideias envolvidas, aumentando sua bagagem de conhecimentos matemáticos. O que o ajudará a ampliar sua experiência em resolver problemas com ferramentas matemáticas.

Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Essa última competência específica da matemática é direcionada para a verificação de proposições matemáticas com experimentações e raciocínio hipotético-dedutivo. A capacidade de fazer conjeturas buscando aprofundar propriedades matemáticas e demonstrar padrões. As tecnologias digitais aqui podem colaborar nos testes de validação e busca de contraexemplos.

Diante dessas competências apontadas, vemos os desafios postos aos professores frente à formação de seus estudantes. Os conhecimentos matemáticos, além de bem compreendidos e assimilados, devem passar por identificação, representação e validação, de modo que tudo isso impacte em conexões com a vida cotidiana e os avanços tecnológicos da sociedade.

Outro documento que tem sua relevância para a realidade de atuação de professores no Estado de Goiás é o Documento Curricular do Estado de Goiás (DC-GO). Ele foi elaborado a partir da BNCC com a finalidade de considerar a realidade regional do Estado. Para Goiás (2019, p. 380), a "Matemática apresentada no DC-GO traz habilidades permeadas com conceitos, procedimentos e processos, tais como: a linguagem matemática, o letramento matemático, a resolução de problemas, a modelagem matemática e a investigação matemática".

O DC-GO é direcionado também pelas dez competências gerais da BNCC. Entretanto, o contexto do Estado de Goiás não pode ser deixado de lado.

> O grande diferencial do DC-GO em relação à BNCC é justamente a aproximação das habilidades e objetivos de aprendizagens e desenvolvimento ao contexto de Goiás. O olhar goiano dos redatores e de todos os profissionais da educação, que contribuíram com a escrita deste Documento, destaca as especificidades de nosso Estado em diversos âmbitos (social, cultural, geográfico, dentre outros), avança ao apresentar a Goianidade e contextualizá-la em todas as etapas, componentes curriculares e áreas de conhecimento (GOIÁS, 2019, p. 43).

São adaptações que visam colaborar com a BNCC, enriquecê-la e que contribuem para a apropriação de competências e habilidades essenciais no âmbito da educação básica. Góias segui então seu compromisso de avançar a BNCC e aproximar as habilidades a caracteríscas goianas.

O Documento Curricular para Goiás tem quatro volumes, sendo eles: 1. Educação Infantil, 2. Ensino Fundamental/ Anos Iniciais, 3. Ensino Fundamental/ Anos Finais e 4. Ensino Médio (DC-GOEM). Na Figura 4 temos um exemplo da adaptação de uma habilidade da BNCC na 1ª série do Ensino Médio e 1º bimestre de matemática.

A habilidade EM13MAT101, que trata sobre interpretação de situações e fatos das Ciências da Natureza que envolvam variação de grandezas por meio de gráfico de funções, foi dividida em três objetivos de aprendizagem do DC-GOEM. GO-EMMAT101A que trata da interpretação de dados que envolvam variação de grandezas, GO-EMMAT101B sobre resolver situações-problemas e o GO-EMMAT101C fala de análise de gráficos das situações-problemas.

Figura 4: Exemplo de adaptação de habilidade da BNCC por Goiás

1ºBimestre **1ª Série** **MAT**

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM	OBJETOS DE CONHECIMENTO DO DC-GOEM
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	**(GO-EMMAT101A)** Interpretar dados e informações (econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza) que envolvam a variação entre grandezas, pesquisando e analisando gráficos (funções e/ou taxas de variação) para avaliar situações gerais relativas ao cotidiano. **(GO-EMMAT101B)** Resolver situações problemas que envolvam a matemática (econômicos, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza), sintetizando conhecimentos, situações apresentadas em jornais, revistas, *sites* de notícia etc. para modelar/propor soluções/alternativas relacionadas com as políticas e estratégias sociais direitos sociais, riscos, contingências e necessidades. **(GO-EMMAT101C)** Analisar gráficos (velocidade x tempo; espaço x tempo; aceleração x velocidade), utilizando gráficos da Mecânica (Física) para compreender situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza.	• Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. • Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. • Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc.

Fonte: Bimestralização DC-GOEM (2021)

Diante da BNCC e do DC-GO é esperado do estudante a sua atuação no mundo de maneira mais inteligente e concreta. Que ele dedique-se a estudar os conceitos matemáticos a fim de adquirir conhecimentos e apropiar-se de instrumentos e métodos que possam ajudá-lo no cumprimento de objetivos estabelecidos. Aquele que usa da razão para conviver com seus colegas de sala e o professor. Raciocina, argumenta, representa e comunica.

Acreditamos que aprende muito aquele que explica e argumenta a solução que encontrou para o problema matemático proposto. O caminho é um encadeamento de hipóteses e resultados que o leva a demonstrar uma tese. Questionar faz parte do processo, e o segredo é fazer perguntas acertivas. Vizualizar possíveis trajetórias para chegar a solução. A comunicação então é de suma importância e o envia a uma melhor compreenção de problemas, valorizando assim, a utilidade da linguagem e representações em matemáticas.

É importante destacar que existem diferenças quanto a forma de entender conteúdos matemáticos pelos estudantes e que estes, por vezes, se pensam incompreendidos, podendo assim levar a um atraso na aprendizagem e criar uma certa imagem prejudicial com respeito a matemática. Tal como um conhecimento de difícil acesso. Diante disso, precisamos encontrar propostas que visam estabelecer alternativas para fortalecer a aprendizagem da matemática.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) ao discutirem quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática, do uso de calculadoras nos anos de 1980, uso de computadores pessoais em meados de 1990, o advento da internet e início dos anos 2000 com a melhora da velocidade da internet, destacam que, "As dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino e aprendizagem de matemática". A obra é anterior a versão final da BNCC, contudo ao pensar sobre o futuro da educação matemática e as tecnologias digitais, ela antecipa ideias que justificam habilidades e competências ao mostrar a possibilidade que a sala de aula poderá ser transformada pela internet, podendo não ser mais o ambiente em que a educação se dá principalmente.

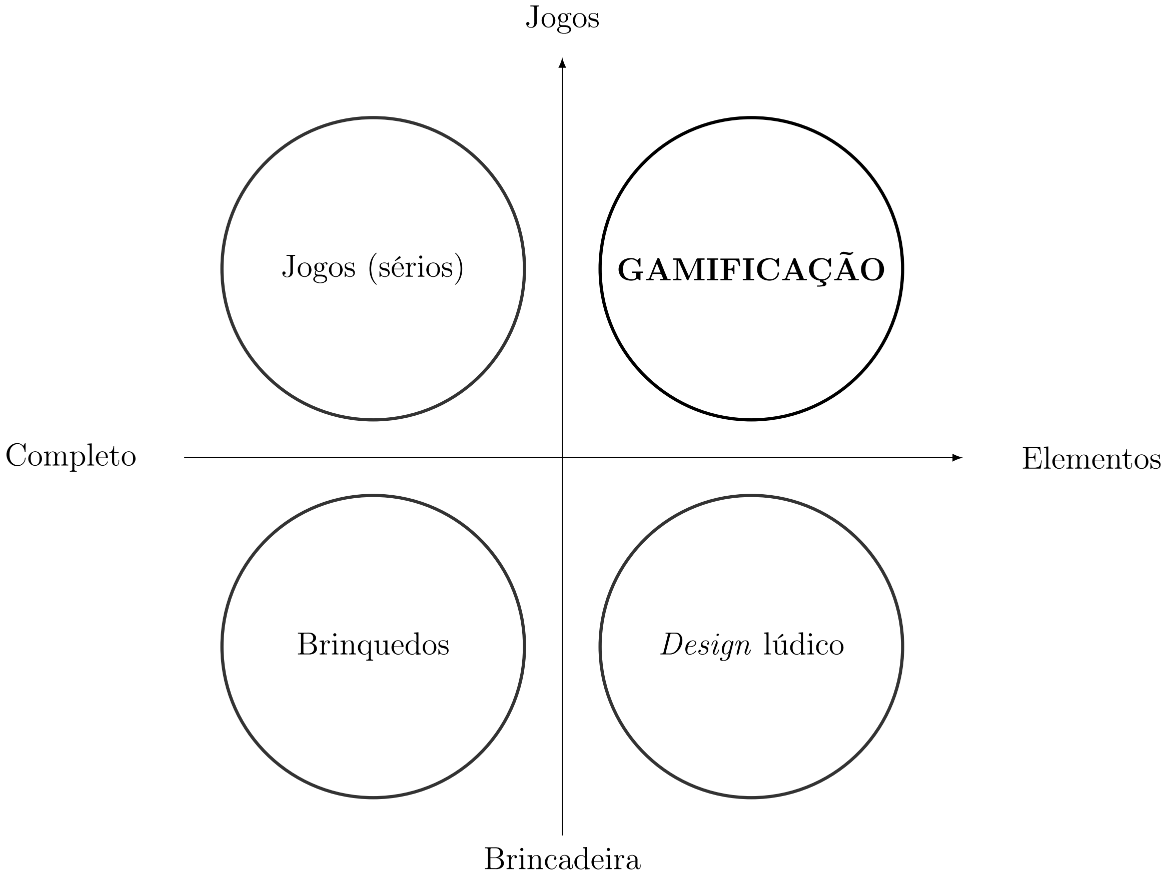
Para Prensky (2021), a "aprendizagem baseada em jogos pode desempenhar um papel importante na interiorização de conteúdos que não motive as pessoas de forma intrínseca, mas que precisam ser aprendidos". Ele mostra que sistemas educacionais buscam ceder as formas tradicionais de aulas expositivas que levam a mensurar apenas o quanto o estudante tem de habilidade em guardar conteúdos, memorização. Que uma provável solução para esse sistema pode ser baseada na tecnologia. O que relaciona-se com as competências gerais e específicas de matemática da BNCC. Mas tem vantagens e desvantagens. Não basta simplesmente criar cursos de formação para professores e investir em *hardwares*. É importante o investimento em *softwares*, ele nos esclarece.

Sabemos que o estudante que vê a aprendizagem dos conteúdos matemáticos de forma natural, tem certa afinidade com o assunto e busca o conhecimento de forma dedicada, não possui muitas dificuldades no estudo de Matemática. Aqui pensamos, principalmente, naquele que não é afetado pelo assunto naturalmente e pode ser instigado, aquele que precisa de um maior apoio para compreender e fixar conteúdos matemáticos. Por esse ângulo a Gamificação se apresenta como alternativa no uso de tecnologias digitais previstas nas BNCC e DC-GO. Uma aliada para o professor na busca de metodologias que conquiste os estudantes e os encaminhem a uma aprendizagem significativa do conteúdo matemático. No entanto precisamos entender o que é de fato Gamificação e uso de Jogos para a aprendizagem de matemática.

2.2 Gamificação

A ideia da gamificação é, segundo proposta de Deterding, *et al.* (2011), "o uso de elementos de *design* de jogos em contextos não relacionados a jogos" (tradução nossa). Compreendendo daí duas bases, uma formada por partes de jogos que são chamados de elementos e outra que a distingue de brincadeiras, diferenciando então a gamificação de simplesmente jogos com intenção de entretenimento e brincadeira. Eles sustentam que basicamente podemos resumir como o uso, o *design*, os elementos (no lugar de jogos completos), as características (em vez de brincadeiras) e o contexto (independente do uso).

Figura 5: Dimensões entre Jogos/Brincadeira e Elementos/Completo



Fonte: Adaptado de Deterding, *et al.* (2011)

A finalidade da gamificação deve ser sempre pedagógica e não somente a de entreter os jovens para um momento de lazer. Vale ressaltar que muitos jogos possuem práticas que implicitamente colaboram com o raciocínio matemático e que podem ser usados na educação. Porém, podemos ficar com esses jogos, talvez restritos a conteúdos matemáticos da Educação Infantil e Ensino Fundamental. Destacamos que esses são conteúdos importantíssimos para a base e ampliação das habilidades matemáticas do Ensino Médio e Superior, mas que podem ser aprofundados com uma metodologia que se baseia nas características que os tornam atrativos.

Assim, conhecimentos que aparentemente não poderiam ser trabalhados de forma lúdica com um jogo completo, podem ser inseridos a elementos de jogos de maneira a torná-los mais chamativos aos jovens estudantes.

> “Não pense na gamificação apenas como o uso de distintivos, recompensas e pontos; em vez disso, pense nos elementos envolventes que explicam por que as pessoas jogam - não é apenas pelos pontos, mas pelo senso de envolvimento, feedback imediato, sentimento de realização e sucesso de lutar contra um desafio e superá-lo” (Kapp, 2012, p. xxii, tradução nossa).

Buscando uma melhor definição de jogo e elucidar o significado de gamificação, Kapp (2012) conecta a definição de Tekinbas e Zimmerman (2003) com a ideia de diversão de Koster (2013) para se adequar a um melhor contexto de aprendizagem e chega que: “Um jogo é um sistema no qual os jogadores se envolvem num desafio abstrato, definido por regras, interatividade e feedback, que resulta num resultado quantificável, muitas vezes provocando uma reação emocional” (tradução nossa). Para contribuir e enriquecer as ideias aqui colocadas, podemos ver outra visão de definição.

> Um game é uma atividade lúdica composta por uma série de ações e decisões, limitado por regras e pelo universo do game, que resultam em uma condição final. As regras e o universo do game são apresentados por meios eletrônicos e controlados por um programa digital. As regras e o universo do game existem para proporcionar uma estrutura e um contexto para ações de um jogador. As regras também existem para criar situações interessantes com o objetivo de desafiar e se contrapor ao jogador. As ações do jogador, suas decisões, escolhas e oportunidades, na verdade, sua jornada, tudo isso compõe a “alma do game”. A riqueza do contexto, o desafio, a emoção e a diversão da jornada de um jogador, e não simplesmente a obtenção da condição final, é que determinam o sucesso do game (SCHUYTEMA, 2008, p. 7).

Logo, um jogo envolve diversão em um universo ecossistêmico próprio com um propósito a se chegar. O jogador assume um personagem que vive e atua nesse universo. E ainda mais que o objetivo final, é o percurso que potencializa o jogo.

Pensamos assim que a gamificação aplicada no ensino de Matemática será uma ferramenta que utiliza de elementos da criação e funcionamento de jogos. Para Werbach e Hunter (2012) “Existem três categorias de elementos de jogo que são relevantes para a gamificação: dinâmica, mecânica, e componentes” (tradução nossa). As dinâmicas estão relacionadas aos aspectos gerais do sistema, as mecânicas são maneiras de conseguir alcançar uma ou mais dinâmicas e os componentes são formas específicas que as dinâmicas e mecânicas podem assumir.

Tabela 2: Elementos de jogos

DINÂMICAS	MECÂNICAS	COMPONENTES
1. Restrições	1. Desafios	1. Conquistas
2. Emoções	2. Chance	2. Avatares
3. Narrativa	3. Competição	3. Emblemas
4. Progressão	4. Cooperação	4. Lutas contra chefes
5. Relacionamentos	5. Feedback	5. Coleções
	6. Aquisição de recursos	6. Combate
	7. Recompensas	7. Desbloqueio de Conteúdos
	8. Transações	8. Presentes
	9. Turnos	9. Tabelas de classificação
	10. Estados de Vitória	10. Níveis
		11. Pontos
		12. Missões
		13. Gráficos Sociais
		14. Equipes
		15. Bens virtuais

Fonte: WERBACH e HUNTER, 2012

Trazemos na Tabela 3 exemplos de trabalhos correlatos a essa pesquisa. São publicações de gamificação aplicada no ensino de Matemática e que foram publicados no banco nacional de dissertações do PROFMAT, com o propósito de contextualizar a pesquisa dentro do programa de mestrado. Autor(a), ano, instituição, título e descrição da proposta respectivamente. Conhecer esses trabalhos nos permitiu aprofundar no delineamento bibliográfico e teórico a respeito do tema da gamificação em investigações já realizadas. Separamos o trabalho de SERRA (2022) para tecermos alguns comentários, uma vez que sua proposta se alinha com nossos objetivos.

Tabela 3: Exemplos do PROFMAT

CREMONTTI FILHO, 2016 na UFRR em **O uso da aprendizagem móvel e técnicas de gamificação como suporte ao ensino de matrizes**, desenvolveu um aplicativo de QUIZ com os conteúdos de matrizes e determinantes.
GURGEL MORAES, 2017 na UFERSA em **Gamificação no ensino de matemática: propostas para o ensino de matrizes através de um jogo de realidade alternativa**, desenvolveu um Jogo de Realidade Alternativa (ARG) para o ensino de matrizes

Continua na próxima página

ESQUIVEL, 2017 na UFRRJ em **Gamificação no ensino da matemática: uma experiência no ensino fundamental**, estudo de caso com a utilização dos aplicativos Slice It e Euclidea
AGUIAR, 2019 na UFRR em **O uso de técnicas de gamificação como auxílio a resolução de problemas no campo da análise combinatória**, desenvolveu um protótipo de um aplicativo mobile quanto a resolução de problemas de análise combinatória
SOUZA, 2020 na UFAL em **Gamificação voltada para o ensino de geometria plana: a busca do pergaminho perdido de euclides**, construiu uma gamificação voltada para o ensino de geometria plana usando o Google formulário
ESCOBAR, 2021 na UnB em **Xadrez de sociedade: do game à gamificação**, propôs game de tabuleiro envolvendo materiais simples e de baixo custo, com a ideia do jogo Xadrez de Sociedade
FERRONATO, 2021 na UFFS em **A gamificação como uma estratégia de aprendizagem: construções geométricas utilizando o aplicativo euclidea**, analisou as possíveis contribuições da gamificação para a aprendizagem significativa de geometria, utilizando o aplicativo Euclidea
SERRA, 2022 no CEFET em **Gamificação e ensino de matemática: proposta de um jogo para a aprendizagem de equações polinomiais de primeiro grau**, propôs a implementação de um jogo destinado ao ensino de equações polinomiais de 1º grau
MUTTI, 2023 na UNIVASF em **Gamificação no ensino de matemática: uma revisão de literatura e uma intervenção por meio de oficinas no ensino médio no município de Monte Santo, Bahia**, analisou os benefícios da gamificação para o ensino com a literatura especializada e oficinas aplicadas na utilização dos aplicativos “2048” e “Rei da matemática"
TAVARES, 2023 no CEFET em **Algoritmos evolutivos e gamificação: uma proposta de atividade para a educação básica**, propôs um produto educacional envolvendo uma competição de algoritmos evolutivos pensada para a educação básica

Continua na próxima página

MOREIRA, 2023 na UFRRJ em **Estimulando o engajamento estudantil nas aulas de matemática do ensino fundamental: uma experiência baseada em gamificação**, elaborou uma sequência didática fundamentada na teoria da Gamificação com materiais manipuláveis, sem uso de tecnologias digitais

Fonte: Banco de dissertações do PROFMAT

Em "Gamificação e ensino de matemática: proposta de um jogo para a aprendizagem de equações polinomiais de primeiro grau", Serra teve como objetivo o de "compreender como utilizar e inserir nas práticas docentes as mecânicas, dinâmicas e estéticas presentes nos jogos". Propôs implementar um jogo com a finalidade de ensinar o conteúdo de equações do 1º grau. Na sua dissertação foi falado sobre história de jogos, fundamentação sobre gamificação, aprendizagem tangencial, *game design*, álgebra e ensino, jogo em desenvolvimento. Concluiu que para o sucesso da prática da gamificação no ensino não é obrigatório a criação de novos jogos, mas é muito importantante seguir aplicações exitósas. Por isso a importância de novos estudos e trabalhos voltados a exibição de aplicações no ensino.

O trabalho de Serra, um vez que aborda o estudo sobre equações polinomiais de 1º grau com o uso de gamificação, pode ser tratado com uma ação paralela à proposta que estamos apresentando sobre o ensino de funções de primeiro grau com a gamificação. Dado que é de suma importância para o início do estudo de funções a compreensão das equações polinomiais de 1º grau. Um dos primeiros contatos com aplicações de funções que os estudantes têm é o do estudo das funções polinomiais de 1º e de 2º grau. Sendo elas as funções afins (constantes, lineares e polinomiais de 1º grau) e as funções quadráticas. Essas são funções primordiais para fixação do conceito de função e preparam os estudantes para o estudo das funções modulares, exponenciais, logarítimicas e trigonométricas.

2.3 Plataformas favoráveis à gamificação

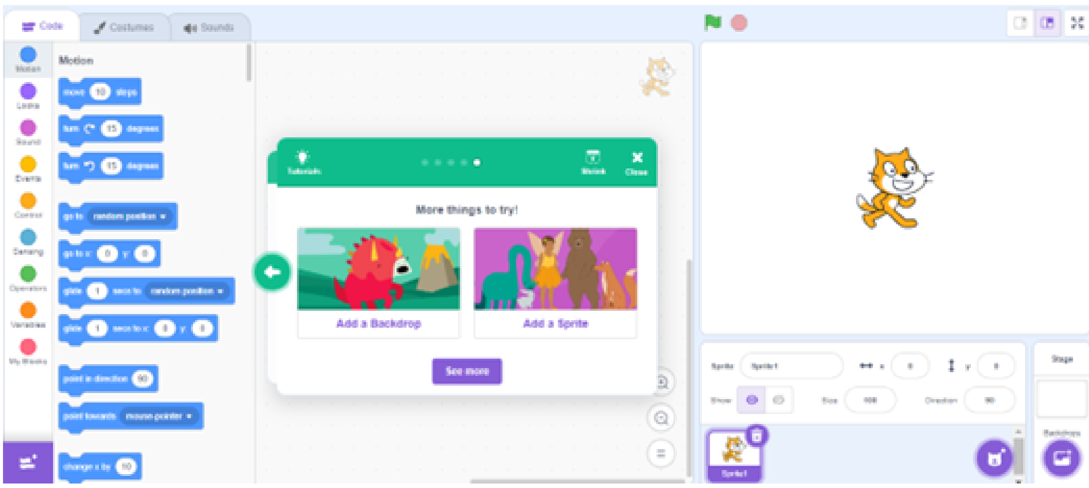
As plataformas digitais desempenham um papel muito importante para o ensino. São através delas que podemos planejar, construir e executar tarefas gamificadas para ensinar matemática. Elas nos possibilitam estruturas digitais pelas quais criamos espaços de aprendizagem. Apresentaremos resumidamente algumas das plataformas utilizadas no ensino de matemática com tarefas gamificadas e jogos. Detalharemos melhor a plataforma *Scratch*, visto que será a ferramenta utilizada neste trabalho.

Scratch é uma comunidade de programação com interfaces visuais para criação de jogos e animações digitais. Nessa comunidade é possível criar, compartilhar, ver e modificar projetos de outras pessoas. Foi lançado em 2007 pelo *MIT Media Lab*, Laboratório de mídea do Instituto Tecnológico de Massachussets. Em 2013 foi criada a *Scratch Foundation*, organização sem fins lucrativos, para apoiar o crescimento do Scratch. Com o passar dos anos teve um impacto muito abrangente e conseguiu atingir 100 milhões de usuários registrados, 196 países e mais de 70 idiomas diferentes (SCRATCH Foundation, 2024).

Segundo Camargo e Fortunato (2018) o termo *Scratch* "deriva-se da técnica de Scratching, utilizada pelos Disco-Jockeys do *Hip-Hop*, que manipulam, por exemplo, um discos de vinil com as suas mãos para frente e para trás fazendo infinitas misturas e distorções musicais de forma criativa e inesperada". Essa é a ideia daquilo que podemos fazer com as midias disponíveis na plataforma *online*. O site possui tutoriais que ajudam a quem está començando a dar os primeiros passos e guias de atividade com, por exemplo, crie uma história, faça algo voar, anime uma personagem, entre outras.

O pesquisador do MIT, Seymour Papert, no final da década de 1960, criou a linguagem de programação utilizada no scratch, a linguagem LOGO. Foi a primeira linguagem da história de programação para crianças. A programação é acessível e intuitiva pois é criada usando os chamados "*buildingblocks*". Fazemos a montagem em pilhas de blocos que se encaixam, uma maneira lúdica e acessível para jovens da educação básica. A Figura 6 mostra a tela de início onde podemos construir animações e jogos.

Figura 6: *Scratch*



Fonte: Site da *Scratch*. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Dispomos no *Scratch* um palco onde podemos criar atores, fantasias e sons. A criatividade é livre para personalizar o ambiente da animação da forma como o usuário queira. Para isso, devemos utilizar e montar códigos de programação disponíveis. São blocos de comandos divididos em: movimento, aparência, som, eventos, controle, sensores, operadores e variáveis.

Movimento: são usados para indicar o movimento, deslocamento e posição dos atores no palco. Podemos mover, deslizar e girar. Muito importantes na dinâmica de jogos ou animações, que exigem ação e mobilidade entre os componentes. São um total de dezoito blocos de movimento.

Figura 7: *Scratch*: códigos de movimento

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Aparência: é útil para mudar as fantasias dos atores, tamanho, cenário, dizer algo, esconder ou mostrar. Está relacionado com a apresentação dos componentes. Esses blocos podem determinar ações dos atores como o de falar algo ou pensar em alguma coisa, aparecer, se esconder, aumentar ou diminuir o tamanho, trocar de cenário ou fantasia. São vinte blocos de aparência.

Figura 8: *Scratch*: códigos de aparência

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Som: é utilizado para todos os efeitos sonoros. Tocar, mudar, remover ou para alterar o volume dos sons. Aqui os atores ou cenários podem se expressar além da escrita e emitir sons. É possível usar os sons disponíveis na plataforma ou subir gravações externas. São nove blocos de som.

Figura 9: *Scratch*: códigos de som

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Eventos: são usados como condições iniciais, sempre no começo de um grupo de códigos de programação. Põe em funcionamento a programação tais como quando for clicada determinada tecla ou ator, mudar de cenário, receber alguma mensagem. Também é muito útil para transmitir mensagens e criar sequências de comandos. São ao todo oito blocos de eventos.

Figura 10: *Scratch*: códigos de eventos

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

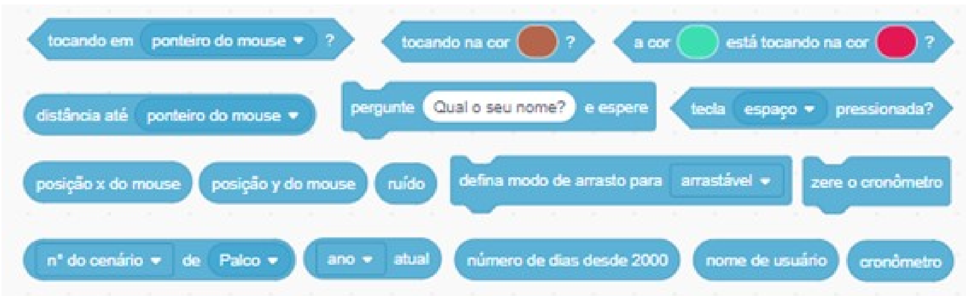
Controle: possui estruturas de lógicas fixadas que são usadas para interligar comandos. Tem um papel de organização nas ações atores ou cenários determinadas por outros blocos. Temos os comandos lógicos de repetição, sempre e de condicionais tais como "se-então" e "se-então-senão" que são estruturas de decisão durante a execução da programação. São um total de onze blocos de controle.

Figura 11: *Scratch*: códigos de controle

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Sensores: podem ser utilizados para distinguir cores, teclas e distâncias. Também para perguntas e respostas. A maioria tem formato para ser usado encaixando eles dentro de outros blocos como de controle e movimento. São um total de dezoito blocos sonsores.

Figura 12: *Scratch*: códigos de sensores



Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Operadores: são usados principalmente para operações matemáticas, desigualdades, igualdades ou números aleatórios. Destacamos também o operadores de comparação e os boleanos (e, ou, não). São um total de dezoito blocos operadores.

Figura 13: *Scratch*: códigos de operadores

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

Variáveis: tem a finalidade de criação ou armazenamento de valores. Podem ser criadas variáveis de muitos tipo e também listas. São um total de 6 blocos de variáveis, mas a medida que é criada uma nova variáveis aumenta um bloco.

Figura 14: *Scratch*: códigos de variáveis

Fonte: Site da Scratch. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 30 abr. 2024

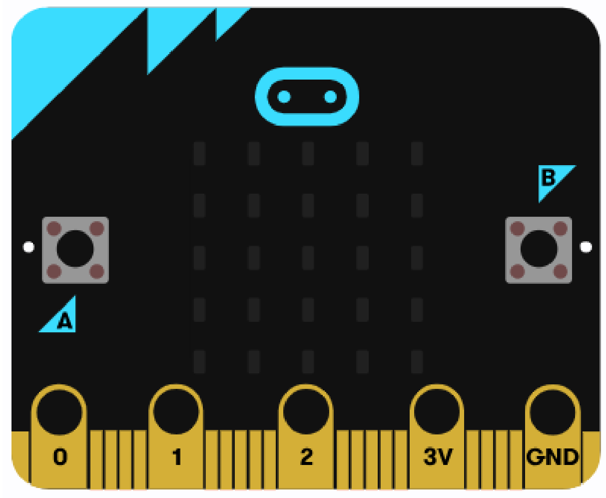
Kahoot! é uma plataforma de aprendizagem desenvolvida por uma empresa com o objetivo de capacitar e contribuir com o potencial de aprender de todos. Na plataforma é possível criar ou participar de Quizzes interativos. Respondemos questões objetivas com tempo definido, e ao final é feito um rankeamento com a respectiva pontuação dos acertos durante o jogo. Recursos sonoros e visuais deixam a atividade mais descontraída e motivadora.

Figura 15: *Kahoot! Gameplay*

Fonte: *Kahoot!* Disponível em: https://kahoot.com/schools/how-it-works/. Acesso em: 30 abr. 2024

Placa BBC *micro:bit* é um microcomputador criado para incentivar jovens a serem criativos com tecnologias digitais na educação. Possui muitos recursos para serem explorados no ensino. É possível programar, simular e criar jogos. Para além da placa podemos elaborar e simular na plataforma digital.

Figura 16: Simulador digital da placa BBC *micro:bit*



Fonte: Site da BBC *micro:bit*. Disponível em: https://microbit.org/pt-br/. Acesso em: 30 abr. 2024

Vale destacar que a gamificação não se limita a platamformas em que se usem linguagens de programação. É perfeitamente possível criar ambientes gamificados com atividades elaboradas por meio de planilhas eletrônicas, aplicativo de apresentações e formulários. Destacam-se a utilização do *Google Forms*, *Microsoft Excel* e *PowerPoint*.

3 O CONCEITO DE FUNÇÃO

Escolhemos o tema sobre o ensino do conceito de função e abordagens relacionadas devido ao fato de acreditarmos que este é um conceito de grande relevância para o ensino de ciências e é amplamento aplicado em diversas áreas do conhecimento. Observamos que tal conceito não tem sido essencialmente compreendido, tendo sua abordagem de certa forma reduzida exclusivamente ao estudo de regras algébricas de associação de elementos. Vale destacar que estudar funções não é basicamente construir tabelas, esboçar gráficos e calcular zeros. Nesse tópico trazemos o que os documentos oficiais nos orientam sobre o tema, um pouco da história da construção do conceito e exemplos de definições.

Os documentos curriculares apontam objetos do conhecimento que devem ser ensinados. São eles a noção de função, funções do tipo afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas. O DC-GO prevê para o 9º ano do Ensino Fundamental, na unidade temática Álgebra, os conteúdos: funções polinomiais do 1º e 2º grau, seus gráficos, e máximos e mínimos de funções do 2º grau. A Tabela 4 mostra as habilidades para os conteúdos em questão.

Tabela 4: Exemplos de habilidades do Documento Curricular de Goiás 9º ano

(EF09MA06-A) Descrever em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau.
(EF09MA06-B) Ler, interpretar, resolver e elaborar problemas com parte fixa e parte variável que podem ser expressas por funções do 1º grau, calculando valores numéricos e estabelecendo o comportamento da função, crescente ou decrescente, para um determinado intervalo de valores numéricos.
(EF09MA06-H) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, utilizando esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
(EF09MA06-C) Descrever em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau.
(EF09MA06-D) Reconhecer uma função quadrática e seus coeficientes angular, linear e termo independente quando apresentada em situações problemas diversos. (EF09MA06-E) Aplicar a fórmula de Bháskara para resolver equações do 2º grau associadas às funções quadráticas.

Continua na próxima página

(EF09MA06-F) Construir gráficos de funções de 1º e 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$, identificando-as no plano cartesiano como reta e parábola, respectivamente.
(EF09MA06-G) Estabelecer o valor de máximo ou de mínimo de uma função quadrática, através do cálculo das coordenadas do vértice da parábola associada no plano cartesiano, para resolver problemas significativos como determinar o custo mínimo para a confecção de uma certa quantidade de produtos, encontrar a altura máxima obtida por um objeto lançado verticalmente para cima, entre outros.

Fonte: GOIÁS, 2019

O texto da BNCC traz, dentre as cinco competências específicas de Matemática, dezesseis habilidades sobre funções no Ensino Médio. Inicialmente o estudo de variação de grandezas, utilizando gráficos, com ou sem o uso de tecnologias digitais, contextualizado com situações e fatos correlacionados às Ciências da Natureza e problemas em diversos contextos, recorrendo às funções polinomiais de 1º ou 2º graus. Seguindo com o estudo de funções exponencias em Matemática Financeira e outros. As funções logarítmicas em abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira e outros. Funções seno e cosseno em fenômenos periódicos reais, podendo ou não utilizar aplicativos digitais. Trabalhar a variação da área e do perímetro de polígonos regulares dispondo de funções. Ao fim, propõe identificar e associar funções afins e quadráticas com progressões aritméticas e geométricas.

A seguir destacamos algumas orientações que são condizentes com nossa proposta de investigação.

Tabela 5: Exemplos de habilidades da BNCC Matemática

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Continua na próxima página

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Continua na próxima página

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte: BRASIL, 2018, p. 533-541

Observamos como ponto principal, orientado pelos documentos oficiais, a perspectiva de ensino-aprendizagem de funções através da compreenção do conceito por meio de relações entre duas variáveis, do ponto de vista da bem definição de função (que envolve seu domínio e sua imagem), suas aplicabilidades e estudos por meio de gráficos de modelação matemática.

Em Zuff (2001), podemos ver alguns fatos da formação histórica do conceito de função. Foram contribuições de muitos matemáticos ao longo de diversos períodos da história, chegando à noção de função que temos atualmente. Na antiguidade são citados o "instinto de funcionalidade" dos babilônicos e os gregos com tabelas de Matemática e Astronomia com a ideia de dependência funcional, por exemplo. São mencionados também Descartes com equações relacionando a dependência entre duas variáveis, Newton com a ideia de curva e taxa de mudanças, Leibniz e o termo função em comprimento de segmentos de retas e retas relacionadas a curvas, Bernoulli e suas contribuições à Geometria Diferencial, Euler em *Introductio in analysin infinitorum*, D'Alembert e o problema das cordas vibrantes.

Segundo Ponte (1990), "com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no Século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não". Particularmente, essa ideia está em total consonância com nossas percepções.

Para Silva e Rezende (1999), é com Nicolas Bourbaki (pseudônimo de um coletivo de matemáticos do século XX e publicado em 1939), que temos "que o conceito de função atingiu o seu caráter mais geral e formal". Afirma Zuff (2001, p. 7) que com a definição de Bourbaki:

> o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e quase que sem usar palavras da língua materna e com a eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, hoje é possível elaborar funções muito mais abrangentes.

No momento atual conseguimos observar discretas diferenças na definição de função enunciada por diferentes autores. A partir de uma busca bibliográfica, trazemos algumas definições encontradas nos livros de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, da 1ª série do Ensino Médio e alguns do Ensino Superior. Nosso objetivo é delinear as abordagens dos livros para a apresentação do conceito de função.

3.1 O conceito de função em livros do 9º ano do Ensino Fundamental

Definição 1. [40] Dados dois conjuntos A e B, há uma função f de A em B se cada elemento do conjunto de partida A se relaciona por meio de f, com um, e apenas um, elemento do conjunto de chegada B.

O livro utiliza a expressão "se relaciona", mas não explica produto cartesiano e relação.

Caminho metodológico: o conceito de função; definição de função; gráficos de funções; zeros ou raízes de uma função. Poucos exemplos, dois representados com diagramas e um com plano cartesiano.

Definição 2. [10] Chamamos a relação entre conjuntos não vazios A e B de **função de A em B**, se para todo o x pertencente a A (**domínio**) existe um único y pertencente a B (**contradomínio**) que satisfaz essa relação.

Começa o capítulo de função falando sobre relação, mas não formaliza a ideia.

Caminho metodológico: relações na vida e na Matemática; variáveis e relações de dependência; a ideia de função; representação gráfica de uma função; função afim; gráfico da função afim. Poucos exemplos, um exemplo representado por diagramas e outros por tabelas.

Definição 3. [33] Quando entre duas grandezas, A e B quaisquer, existe uma correspondência e para cada medida de A ocorre uma **única** medida correspondente de B, podemos dizer que **B está em função de A** ou que temos uma **função de A em B**.

Apesar de falar sobre conjuntos no primeiro capítulo, ao definir função utiliza da ideia de função por grandezas e medidas.

Caminho metodológico: noção de função; lei de formação de uma função; valor de uma função; representação gráfica de uma função; função afim; gráfico de uma função afim; zero de uma função afim; variação de uma função afim; estudo do sinal da função afim; função linear e proporcionalidade. Poucos exemplos e representados por tabelas.

Definição 4. [23] Quando há correspondência entre duas grandezas x e y, de modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é **função** de x.

O livro não aborda conjuntos e trata de funções no último capítulo.

Caminho metodológico: sistema cartesiano ortogonal (sistema cartesiano); função e suas representações (noção de função; gráfico de uma função; função afim; função crescente e função decrescente; proporcionalidade; proporcionalidade inversa). Poucos exemplos, representados por tabelas e planos cartesianos.

Definição 5. [47] Sejam os conjuntos A e B não vazios. Uma função f de A em B é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$.

Define função como uma regra e não ensina conjuntos, não define produto cartesiano e relação.

Caminho metodológico: noção de função; o conceito de função; função afim; gráfico de uma função afim; função quadrática; gráfico de uma função quadrática; valor máximo e mínimo de uma função quadrática. Poucos exemplos, representados por tabelas.

Observamos que, de acordo com a formalização inerente da linguagem matemática e dos preceitos para a formulação de definições em Matemática, todas as definições apresentadas soam pouco formais, adequado ao 9º ano do EF. Pensamos que a abordagem deve ser voltada a contextualização em problemas práticos e as representações de funções. Notamos a ausência de expressões como domínio, imagem, conjunto de partida e de chegada na maioria dos casos. A Definição 2 traz um texto que nos parece bastante adequado, no entanto, a partir do caminho metodológico adotado não conseguimos afirmar que o texto deixe claro que função é um conjunto de pares ordenados (relação) satisfazendo a propriedade expressa na Definição 2.

3.2 O conceito de função em livros da 1ª série do Ensino Médio

Definição 6. [3] Considerando dois conjuntos, A e B, não-vazios e uma relação binária de A em B, dizemos que essa relação é **função** de A em B se, e somente se, a cada elemento x do conjunto A corresponder um único elemento y do conjunto B.

Define produto cartesiano, relação binária e gráfico cartesiano como pré-requisitos para função.

Caminho metodológico: pré-requisitos para o estudo de funções (produto cartesiano, relação binária, diagrama de flechas, gráfico cartesiano) e funções (domínio, contra-domínio e imagem de uma função; imagem de um elemento; raiz ou zero de uma função; qualidade de uma função; domínio de uma função real; função inversa; função composta). Poucos exemplos, representados por diagramas.

Definição 7. [24] Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{\text{f é aplicação de A em B} \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f)}$$

Observe que, neste caso, aparece o termo "aplicação", o que não é algo surpreendente, pois tal termo vinha sendo utilizado em contextos mais gerais para relações entre conjuntos (não necessariamente numéricos), em que a correspondência cumprisse a propriedade de que a cada elemento do conjunto de partida se associasse um único elemento no conjunto de chegada. Inferimos que esse termo seja herança de *map* em inglês (esse termo é amplamente utilizado na literatura em língua inglesa). No entanto, observamos que atualmente é mais raro encontrar tal termo nos textos adotados no Brasil.

Por isso, a fim de padronizar os enunciados para nossas comparações e discussões, indicamos uma adaptação na Definição 7, apenas trocando o termo aplicação por função.

Definição 7 (adaptada): [24] Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f)}$$

O livro dedica um capítulo para conjuntos e outro capítulo para relações. No capítulo de relações aborda: par ordenado, representação gráfica, produto cartesiano, relação binária, domínio e imagem, relação inversa, propriedades das relações.

Caminho metodológico: conceito de função; definição de função; notação das funções; domínio e imagem; funções iguais. Tem uma boa quantidade de exemplos nas mais diversas representações (conjuntos de pares ordenados, plano cartesiano, diagramas) e exercícios.

Definição 8. [4] Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função** de A em B é uma relação que associa **cada** elemento x de A a um **único** elemento y de B.

O primeiro capítulo é dedicado a conjuntos, mas não define produto cartesiano e relação. Mesmo assim utiliza da palavra relação na definição de função no próximo capítulo.

Caminho metodológico: introdução; a ideia de função; definição de função; domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; gráfico de uma função. Os exemplos são poucos e predomimantes em tabelas, diagramas e planos cartesianos.

Definição 9. [35] Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.

No capítulo anterior ao de funções, onde aborda conjuntos, não define produto cartesiano. Define relação rapidamente no capítulo de funções.

Caminho metodológico: sistemas de coordenadas; o conceito de função; gráfico de uma função; análise de funções. Traz um exemplo de relação representada por conjunto de pares ordenados, tabela, diagramas e plano cartesiano. Quando define função os exemplos são predominantementes de digramas, tabelas e planos cartesianos.

Definição 10. [1] Dados os conjuntos A e B não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x do conjunto A existe em correspondência um único elemento y do conjunto B.

No primeiro capítulo faz um estudo sobre conjuntos, mas não define produto cartesiano e relação.

Caminho metodológico: introdução; estudo do domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; gráfico de uma função; função definida por mais de uma sentença; funções crescente, decrescente e constante. Poucos exemplos, representados por diagramas e planos cartesianos.

Definição 11. [12] Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x $\in$ A a um único elemento y $\in$ B.

Define função pela regra (sua lei de formação) e, apesar de dedicar um capítulo inteiro para conjuntos, não define produto cartesiano e relação.

Caminho metodológico: um pouco da história das funções, explorando intuitivamente a noção de função; a noção de função por meio de conjuntos, domínio, contradomínio e conjunto imagem; estudo do domínio de uma função real; coordenadas cartesianas; gráfico de uma função; função crescente e função decrescente, analisando gráficos; taxa de variação média de uma função; função injetiva, sobrejetiva e bijetiva; função e sequências. Poucos exemplos, representados por tabelas e diagramas.

Definição 12. [11] Dados os conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B ($f : A \to B$) é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento x de A um único elemento $y = f(x)$ de B.

O Capítulo 1 do livro que traz a Definição 12 trata sobre conjuntos, define em uma seção adicional, brevemente, de produto cartesiano, mas não define relação. Fala em relação entre grandezas, não define, aborda para introduzir a ideia de função.

Caminho metodológico: noções de função; domínio, contradomínio e conjunto imagem; sistema cartesiano ortogonal de coordenadas; gráfico de funções; função crescente, função decrescente e função constante; zero de uma função; função injetora, função sobrejetora ou função bijetora. Poucos exemplos, um representado por tabela e outros por diagramas.

Definição 13. [29] Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

O livro aborda, brevemente, relação e produto cartesiano no início do capítulo de funções afins, depois de ter definido função utilizando "regra" em capítulo anterior. São poucos os exemplos, o livro foi baseado no curso de aperfeiçoamento para professores de matemática.

Caminho metodológico: conjuntos; números naturais; números cardinais; números reais e funções afins, quadráticas, polinomiais, exponenciais e logarítmicas, trigonométricas.

Com isso, a partir de algumas obras adotadas para o Ensino Médio, observamos maior conexão do conceito de funções com tópicos sobre conjuntos, pares ordenados e relações. No entanto, na maioria dos casos, vemos que apenas se limitam a utilizar desses termos para escrever as definições, nem sempre formalizando cada um deles. Uma obra que se destaca pelo fato de definir e abordar em detalhes cada um desses elementos teóricos é [24], a qual é uma obra bem conhecida e também tida como parte de uma coleção de excelência no cenário dos textos de matemática básica. Numa situação hipotética ideal, acreditamos que se tal coleção fosse adotada na íntegra em âmbito nacional, a realidade da aprendizagem em Matemática por nossas crianças e nossos adolescentes seria outra.

3.3 O conceito de função em livros do Ensino Superior

Definição 14. [17] Uma função f: D $\mapsto$ Y é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.

Define função por meio de uma lei, porém está incompleta pois não são descritas as principais propriedades para uma função estar bem definida: todo elemento do domínio está associado a um único elemento do contradomínio.

Caminho metodológico: Conceitos básicos (Terminologia e notação, Vários tipos de função); Limite e continuidade; Limites laterais e funções monótonas; Funções contínuas em intervalos fechados; Notas históricas e complementares.

Definição 15. [18] Chama-se função a toda correspondência f que atribui a cada valor de uma variável x em seu domínio (também chamado domínio da função) um e um só valor de uma variável y num certo conjunto Y (chamado o contradomínio da função).

Define função por meio de uma correspondência utilizando os termos "a cada" e "um e um só", satisfazendo as propriedades para bem definição de uma função. Antes de trazer o conceito de função faz muito resumidamente noções sobre conjuntos. Mas após a definição, o autor explica que quando fala em "correspondência" diz respeito a uma lei.

Caminho metodológico: Exemplos simples de funções; noções sobre conjuntos; intervalos; o conceito de função; domínio, imagem e contradomínio; notação; operações com funções; função linear e função afim; a função quadrática e a parábola; o trinômio do segundo grau; a parábola $y = \sqrt{x}$; a hipérbole; translações de funções quaisquer. Poucos exemplos, alguns representados por plano cartesiano, mas não representados por diagramas ou conjuntos de pares ordenados.

Definição 16. [41] Uma relação f é chamada função desde que $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ impliquem $b = c$.

Enunciada de forma negativa, uma relação f não é uma função se existem a, b, c com $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, e $b \neq c$.

Define função por meio de relação e, anteriormente ao capítulo de função, define produto cartesiano e relação. Entendemos que essa definição está incompleta, da forma como está escrita podem existir relações que satisfazem essa propriedade para uma parte do domínio, mas acontecer de se ter elementos do domínio sem associação.

Caminho metodológico: função; notação de função; domínio; imagem; gráficos de funções; contagem de funções; funções inversas; composição; a função identidade. Exemplos de funções representadas por conjuntos de pares ordenados são predominantes. Não utiliza diagramas.

Definição 17. [22] Uma função consiste de dois conjuntos não vazios X e Y e de uma lei f que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $f(x) \in Y$.

Fala sobre conjuntos e produto cartesiano resumidamente antes do tópico de funções.

Caminho metodológico: o conceito de função; composição de funções; imagens diretas e inversas; funções inversas; conjuntos de funções; relações binãrias. Exemplos por meio de lei de formação e propriedades.

Definição 18. [39] Dados dois conjuntos A e B diremos que f é uma função f : A $\rightarrow$ B se para cada elemento de A existe um único elemento f(x) $\in$ B, chamado valor da função.

No primeiro capítulo, onde define função, traz teoria de conjuntos definindo, antes de função, produto cartesiano.

Caminho metodológico: conjuntos; relações entre conjuntos; operações entre conjuntos; os números; existência dos números irracionais; funções; domínio e imagem de uma função; composição de funções; função inversa; simetrias. Utiliza de diagramas para explicar o conceito de função, os exemplos são em maioria por representações no plano cartesiano.

Definição 19. [46] Uma **função** é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado f(x), em um conjunto B.

Começa o livro definindo função por meio de uma lei.

Caminho metodológico: definição; representações de funções; funções definidas por partes; simetrias; funções crescentes e decrescentes. Os exemplos são representados por quatro maneiras, segundo o autor, verbalmente (descrevendo-a com palavras), numericamente (por meio de tabelas de valores), visualmente (através de gráficos) e algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita).

Definição 20. [49] Uma **função** f de um conjunto D para um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.

A definição é apresentada na primeira página.

Caminho metodológico: funções; domínio e imagem; gráfico de funções; representação numérica de uma função (tabela de valores); teste da reta vertical para uma função; funções definidas por partes; funções crescentes e decrescentes; funções pares e funções ímpares; funções comuns; combinando funções. Muitos exemplos de funções representadas com gráficos no plano cartesiano.

Definição 21. [20] Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos de função do conjunto A no conjunto B a uma regra que a cada elemento de A associa um único elemento de B, e denotamos simbolicamente por

$$f : A \to B$$

$$a \rightsquigarrow f(a)$$

onde para cada $a \in A$ está associado um único $b = f(a) \in B$, através da regra que define f.

Inicia o livro trazendo muito resumidamente conjuntos, define função e só depois define produto cartesiano e relação binária.

Caminho metodológico: definição, domínio e imagem; função sobrejetiva, injetiva e bijetiva; imagem inversa; função composta, função identidade e função inversa. Vale ressaltar que este conteúdo faz parte do primeiro capítulo como noções preliminares.

Definição 22. [28] Uma função $f : A \to B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x.

Segundo o autor no prefácio, o primeiro capítulo chamado Conjuntos e Funções "contém apenas generalidades" sobre o assunto, "fatos básicos".

Caminho metodológico: conjuntos; operações entre conjuntos; funções; composição de funções; famílias.

Definição 23. [21] Entendemos por uma função f uma terna

$$(A, B, a \to b)$$

onde A e B são dois conjuntos e $a \to b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B.

No primeiro capítulo o autor trata de números reais, logo após, é apresentada iniciando o segundo capítulo, a definição de função.

Caminho metodológico: definição; domínio; contradomínio; gráfico; exemplos; operações com funções. Muito rico em exemplos com funções representadas por meio de tabelas e planos cartesianos.

Curiosamente, observamos quase unanimemente os livros de Ensino Superior definindo função com "regra" ou "lei", sem grandes aprofundamentos a respeito do conceito.

Junto aos objetos de estudo de Matemática no Ensino Médio, números e funções reais se destacam por sua importância e linguagem desafiadora para os estudantes. O ensino de funções na Educação básica justifica-se pela sua capacidade de aplicações em diversas áreas das ciências. Trabalhadas em conjunto com a tecnologia, podem trazer benefícios ao processo de ensino-aprendizagem. Fenômenos naturais podem ser melhor compreendidos com o uso do conceito, linguagem e modelos de funções em Matemática. Destacamos, por exemplo, o estudo de grandezas proporcionais, aplicações em Física e Biologia, em Matemática Financeira, entre outros.

Tendo a possibilidade de escolha entre as definições de função citadas para usar no ensino, pensamos que a Definição 7 (na versão adaptada) está em concordância no que defendemos. Para tanto iremos levantar algumas hipóteses sobre todas as definições aqui elencadas.

Definição 7 (adaptada): [24] Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f)}$$

Por que as Definições 5, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, não nos parecem as mais adequadas para o que pretendo ensinar? Vamos analisar e levantar algumas questões. Vejamos: Realmente a função é a regra (ou lei)? Pensamos que um dos problemas ao se definir função seja o de focar somente na regra de associação. Daí, a regra e a função se confundem? Será que de fato uma regra de associação é a maneira correta de matematicamente se entender o conceito de função?

Consideramos que as Definições 22 e 23 trazem pontos positivos. Elas nos mostram que para compreender uma função, temos que entender o seu domínio, o seu contradomínio e a sua regra de associação de elementos. Os pontos positivos seriam o destaque em não reduzir a definição de função somente para a regra de associação de elementos e valorizar como elementos fundamentais os conjuntos que formam a função. No entanto levantamos outra questão: para toda função temos que necessariamente existe uma regra de associação de elementos? Traçamos a seguir um caminho possível para elucidar alguns aspectos sobre essa discussão. Passaremos pelos conceitos de produto cartesiano e relações.

3.4 Um delineamento teórico para introduzir o conceito de função a partir do produto cartesiano entre conjuntos

Definição de produto cartesiano: [24] *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.*

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Definição de relação: [24] *Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.*

$$\boxed{R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B.}$$

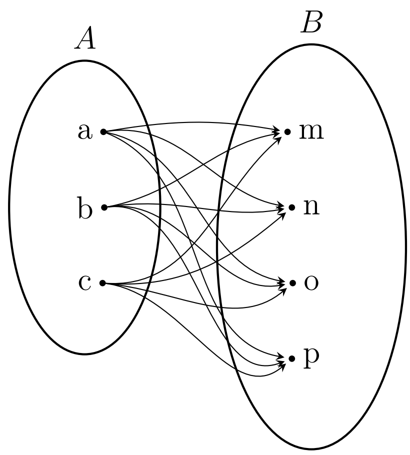
Logo, observaremos que embora todo subconjunto do produto cartesiano seja uma relação, nem toda relação será uma função. Funções são subconjuntos especias de produtos cartesianos entre conjuntos, pois para uma função estar bem definida, devemos ter que para cada elemento do domínio, existe e é único, o elemento no contradomínio relacionado a ele. Ou seja, imagens diferentes estão associados por elementos diferentes do domínio. Dada f uma função de A em B, ela está bem definida quando, ao tomarmos quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 = x_2$, teremos que $f(x_1) = f(x_2)$.

Definição de função: *Dados dois conjuntos A e B, não vazios, dizemos que uma relação f de A em B é uma função se, e somente se, para todo elemento $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

Voltando à Definição 7, conseguimos destacar que esse conceito é mais universal que os outros três. **Existem relações que são funções mas não tem regra de associação**. Para melhor visualizar essa ideia, a seguir vamos trazer exemplos onde é satisfeita a definição 7 e que não tem uma regra de associação.

Exemplo 1: Considere os conjuntos A={a, b, c} e B={m, n, o, p}, temos que: $A \times B$ = {(a, m), (a, n), (a, o), (a, p), (b, m), (b, n), (b, o), (b, p), (c, m), (c, n), (c, o), (c, p)} e sua representação por diagramas de Venn está a seguir.

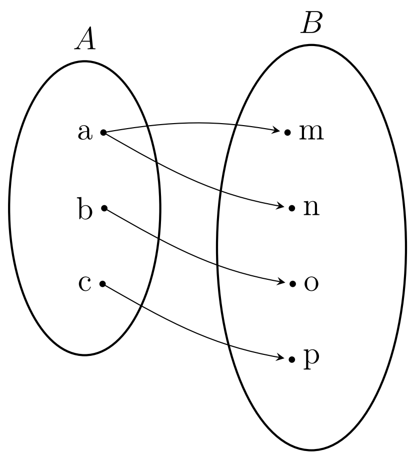
Figura 17: Diagrama de $A \times B$



Fonte: Elaborada pelo autor

Se pegarmos R={(a, m), (a, n), (b, o), (c, p)} uma relação de A em B pois $R \subset A \times B$, vemos que ela não é função devido ao elemento a $\in A$ ter duas associações.

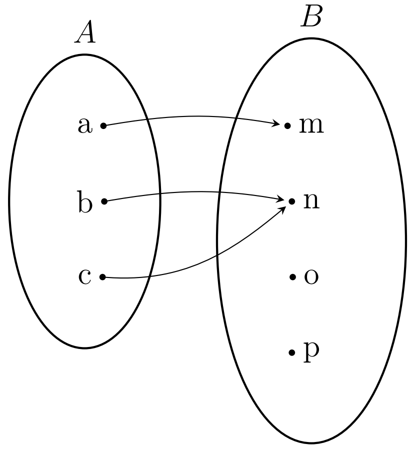
Figura 18: Diagrama da relação R



Fonte: Elaborada pelo autor

Por outro lado, F={(a, m), (b, n), (c, n)} é relação de A em B, $F \subset A \times B$, e é também função de A em B, contudo não existe uma regra de associação de elementos. A relação F, um subconjunto de pares ordenados de A e B, é uma relação especial pois cumpre todas as propriedades que a Definição 7 nos traz. **Qualquer** que seja o elemento do domínio, existe um **único** elemento do contradomínio associado a ele.

Figura 19: Diagrama da função F

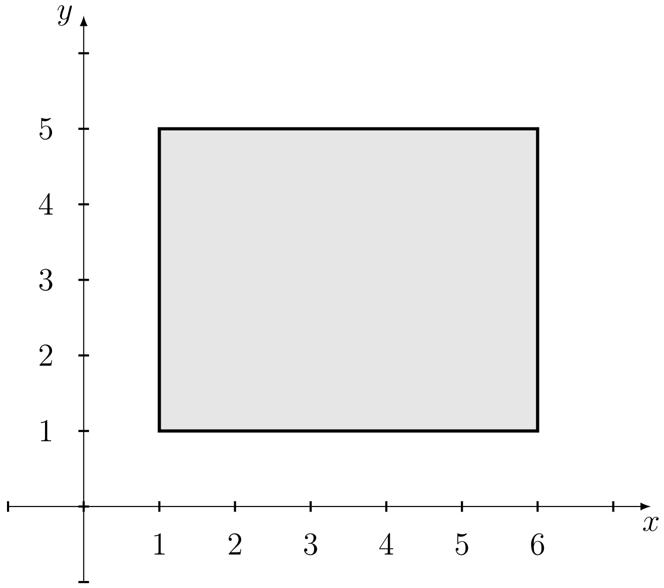


Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2: Sejam $A = [1, 6]$ e $B = [1, 5]$.

Temos que, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1, 6] \ e \ y \in [1, 5]\}$ e sua representação no plano cartesino é dada a seguir.

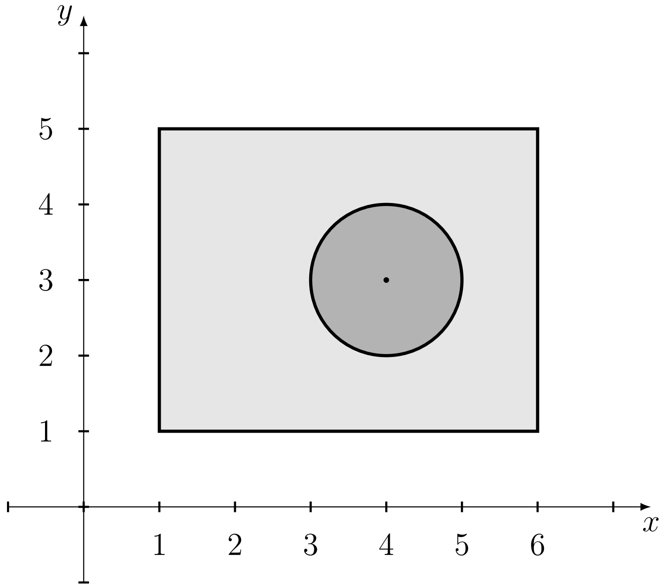
Figura 20: Representação no plano cartesiano de $A \times B$



Fonte: Elaborada pelo autor

Se tomarmos o conjunto $C = \{(x, y) \mid (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 1\}$ teremos uma relação de A em B pois $C \subset A \times B$, mas não é uma função, mesmo com uma regra de associação. Para todo $x \in]3,5[$ existe mais de um $y \in B$ associado a ele.

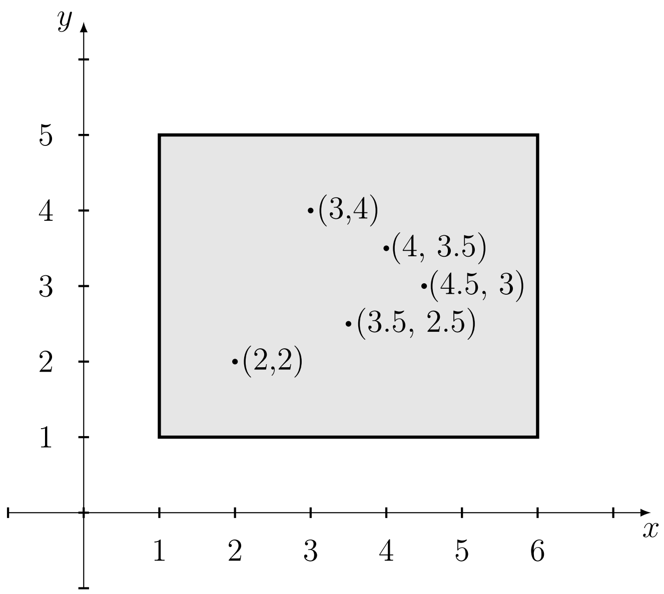
Figura 21: Representação no plano cartesiano da relação C



Fonte: Elaborada pelo autor

Em contrapartida, o conjunto $F = \{(2,2), (3,4), (4,\ 3.5), (4.5,\ 3), (3.5,\ 2.5)\}$, $F \subset A \times B$, é outro exemplo de função que não tem regra de associação.

Figura 22: Representação no plano cartesiano da Função F



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 3: Sejam A={a, b, c, d, e, f, g, h} e B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} podemos representar como o conjunto $A \times B$ = {a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, b1, b2, b3, b4, b5,

Figura 23: Representação de $A \times B$

a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1

Fonte: Elaborada pelo autor

b6, b7, b8, c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8, g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8}.

Qualquer relação que tenha pelo menos dois elementos de uma ou mais colunas não serão funções (exemplos R_1, R_2 e R_3) e podemos formar funções, por exemplo, escolhendo um elemento somente das colunas (exemplos F_1, F_2 e F_3).

R_1={a1, a2, b1, c2, e1}

R_2={b7, d3, d5, d6, e8, g5}

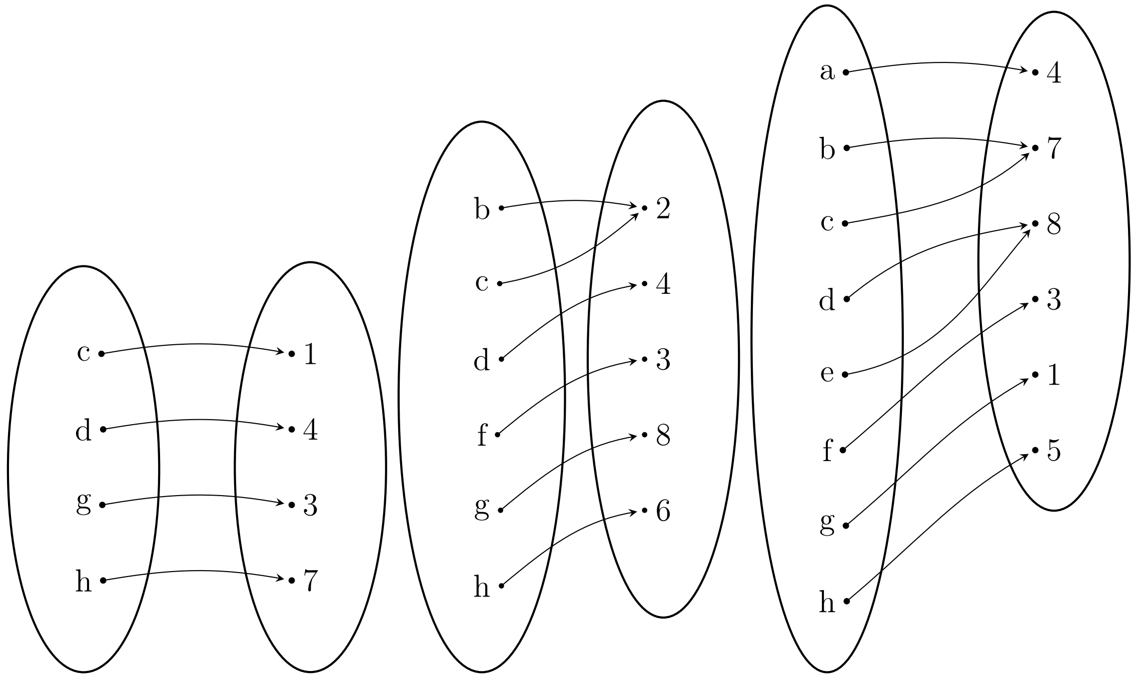
R_3={e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8}

F_1={c1, d4, g3, h7} considerando A={c, d, g, h} e B={1, 3, 4, 7}

F_2={b2, c2, d4, f3, g8, h6} considerando A={b, c, d, f, g, h} e B={2, 3, 4, 6, 8}

F_3={a4, b7, c7, d8, e8, f3, g1, h5} considerando A={a, b, c, d, e, f, g, h} e B={1, 3, 4, 5, 7, 8}

Figura 24: Diagramas das funções F_1, F_2 e F_3



Fonte: Elaborada pelo autor

Sendo assim, qual poderia ser então um caminho viável e interessante para apresentar ao estudante a Definição 7 (adaptada)? Consideramos que são necessários pré-requisitos. Um caminho que acreditamos ser interessante é aquele em que, inicialmente, o estudante tenha acesso à linguagem de conjuntos, que é necessário entender o conceito de produto cartesiano e relação, para então levarmos a ideia de função como um caso particular do produto cartesiano. Vemos que assim é interessante propor ao estudante a identificação em situações quando subconjuntos de produtos cartesianos são funções, isto é, analisar especificamente em que situações, partindo de produtos cartesianos, relações formem funções e quando são só relações binárias.

Ainda, sugerimos a seguinte reflexão: ao olharmos a representação de uma função, seja por diagramas de Venn ou gráficos no plano cartesiano, o que estamos representando: uma lei de formação (regra), quando existe, ou um conjunto de pontos? O que isso nos diz a respeito do percurso adotado para introduzir o conceito de função?

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a estrutura e o esquema da sequência didática que propomos nessa pesquisa. Antes, porém, faremos alguns apontamentos teóricos a respeito de concepções pedagógicas deste instrumento.

> Sequência didática é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem (OLIVEIRA, 2013, p. 39).

Assim sendo, precisamos olhar com atenção as atividades que farão parte da sequência didática. Zabala (1998, p. 63) organiza um conjunto de questões sobre sequências didáticas com o objetivo de ajudar na elaboração das atividades. São elas:

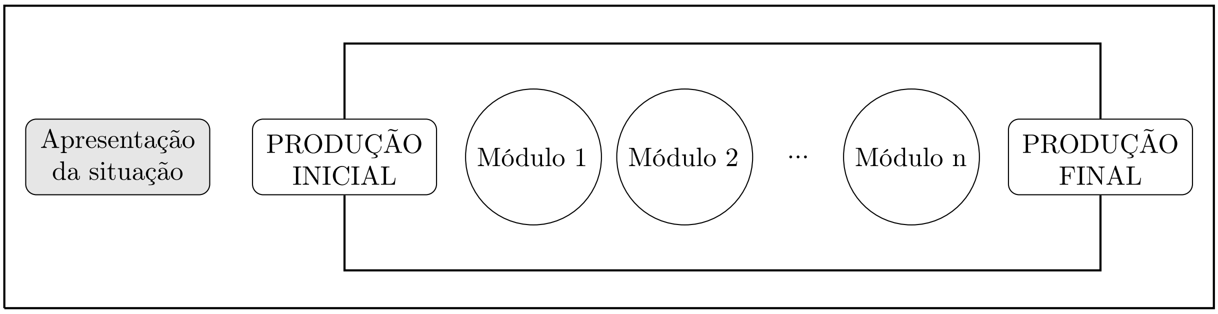
> **Na sequência didática existem atividades**:
> **a)** que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> **b)** cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas?
> **c)** que possamos inferir que são adequadas as nível de desenvolvimento de cada aluno?
> **d)** que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
> **e)** que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> **f)** que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
> **g)** que estimulem a auto-estima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> **h)** que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

Perguntas assim nos orientam quanto ao planejamento de atividades que promovam uma aprendizagem significativa, aquela que conscientiza o estudante sobre a real importância dos estudos, que o faça refletir o quanto é gratificante conquistar novos conhecimentos e que esse é um caminho em busca de sua autonomia.

As tarefas que compõem a sequência didática proposta são voltadas para o ensino do conceito de função, análise de gráficos envolvendo funções afins e quadráticas, e envolvem, também, questões contextualizadas. Disporemos, numa etapa inicial, de uma atividade voltada a uma avaliação diagnóstica, sua devolutiva e um estudo dirigido que contribue para a verificação de conteúdos preliminares ao que se pretende ensinar. A etapa posterior envolve aulas expositivas contextualizadas e direcionadas ao público a que se propõe, permitindo uma adaptação ao nível em se encontram, constará na primeira aula dois textos iniciais (um sobre a contextualização história sobre funções e outro de aplicações práticas). Finalmente, apresentaremos uma tarefa gamificada em quatro níveis que buscará fortalecer, fixar e engajar os estudantes para os objetos do conhecimento e habilidades essenciais no estudo de funções que serão tão importantes para o 1º ano do Ensino Médio.

Para exemplificar e encaminhar o que propomos, veremos um modelo de esquema de sequência didática, no caso, aplicada a produção oral e escrita de textos, mas que acreditamos ser útil como um direcionamento a estruturação de sequências didáticas (Figura 25) e também entendemos que se aplica à nossa proposta. Para Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), a sequência didática pode ser dividida em apresentação da situação, produção inicial, módulos (podendo variar a quantidade) e produção final.

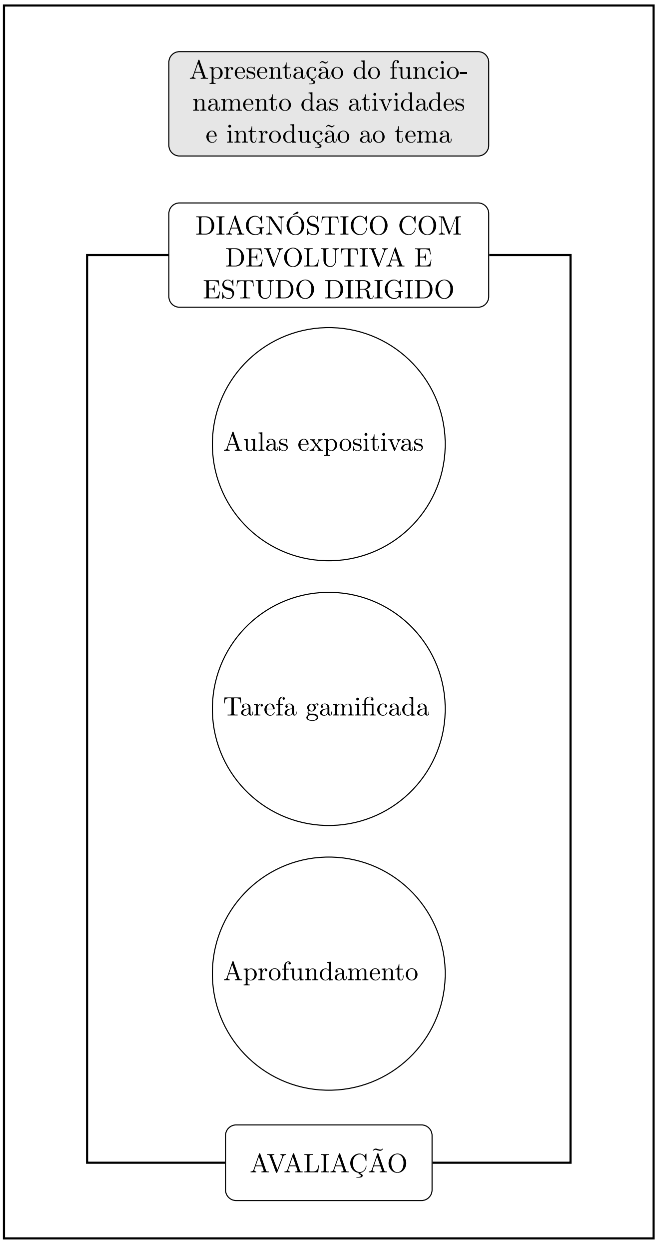
Figura 25: Esquema da sequência didática



Fonte: Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004)

A apresentação da situação tem com objetivo mostrar o contexto ao qual os estudantes farão parte. É na produção inicial que o professor poderá conhecer melhor as aprendizagens relativas a conteúdos anteriores, possibilitando o planejamento e adaptação das próximas atividades de acordo com o nível dos participantes. Os módulos são o conjunto de atividades/tarefas que serão desenvolvidas durante a sequência didática. A produção final tem caráter de aprofundamento e avaliação que busca verificar a aprendizagem dos conteúdos trabalhados na sequência didática. A Figura 26 exibe essa ideia de esquema adaptada a proposta da pesquisa.

Figura 26: Esquema da proposta de sequência didática



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1 Estrutura, organograma e divisão das aulas

Na Tabela 6 apresentamos a estrutura da sequência didática que foi elaborada segundo as ideias que buscam desenvolver um recurso pedagógico muito eficiente no ensino de matemática. Esperamos oferecer ao professor de matemática um produto que o ajude no exercício da docência.

Tabela 6: Estrutura da sequência didática

SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO	
Série	1ª série do Ensino médio
HABILIDADE DA BNCC	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Continua na próxima página

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM EM13MAT101	(GO-EMMAT101A) Interpretar dados e informações (econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza) que envolvam a variação entre grandezas, pesquisando e analisando gráficos (funções e/ou taxas de variação) para avaliar situações gerais relativas ao cotidiano. (GO-EMMAT101B) Resolver situações problemas que envolvam a matemática (econômicos, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza), sintetizando conhecimentos, situações apresentadas em jornais, revistas, sites de notícia etc. para modelar/propor soluções/alternativas relacionadas com as políticas e estratégias sociais direitos sociais, riscos, contingências e necessidades. (GO-EMMAT101C) Analisar gráficos (velocidade x tempo; espaço x tempo; aceleração x velocidade), utilizando gráficos da Mecânica (Física) para compreender situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM EM13MAT510	(GO-EMMAT510A) Pesquisar situações relacionadas às leis de formação ou funções em temas voltados a natureza socioeconômicas, técnicocientífica etc. registrando os dados relativos ao comportamento das variáveis investigadas para construir gráficos que possibilitem tomadas de decisões posteriores. (GO-EMMAT510B) Construir gráficos de funções diversas definidas pela relação entre duas grandezas, utilizando dados apresentados em tabelas para inferir sobre a natureza das grandezas envolvidas. (GO-EMMAT510C) Investigar (com ou sem o apoio de tecnologias) dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, analisando as relações e variações estabelecidas entre as mesmas para descrever (oralmente ou por meio de textos - verbais, gráficos, esquemáticos entre outros) a relação observada.

Continua na próxima página

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM EM13MAT501	(GO-EMMAT501A) Compreender o conceito de função polinomial do 1º grau, identificando a relação entre duas variáveis apresentadas em textos de origem socioeconômicas e/ou de natureza técnico ou científica, entre outros para resolver situações problemas do cotidiano. (GO-EMMAT501B) Identificar possíveis leis de formação que se estabelecem da relação entre duas grandezas, analisando conjecturas apresentadas em quadros e/ou tabelas para expressar algebricamente as generalizações que se definem da relação entre duas grandezas. (GO-EMMAT501C) Modelar situações relacionadas as leis de formação definidas no campo das funções polinomiais do 1º grau, representando no plano cartesiano os dados apresentados em quadros e/ou tabelas para analisar situações que possibilitem a tomada de decisões. (GO-EMMAT501D) Compreender as relações estabelecidas entre duas grandezas, analisando os dados e informações apresentadas em quadros e tabelas para construir gráficos de funções polinomiais do 1º grau. (GO-EMMAT501E) Investigar relações entre números expressos em tabelas simples, identificando padrões e criando conjecturas para representar pontos no plano cartesiano.

Continua na próxima página

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM EM13MAT502	(GO-EMMAT502A) Reconhecer as relações existentes entre duas grandezas, diretamente proporcional ao quadrado da outra dentro de textos técnicos e/ou científicos, relacionando gráficos para resolver problemas do cotidiano. GOEMMAT502B) Modelar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas quadráticas, observando dados numa tabela para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT502C) Selecionar números expressos em tabelas, identificando padrões para expressar graficamente essa generalização no plano cartesiano. (GO-EMMAT502D) Identificar padrões e criar conjecturas, utilizando dados de tabelas e gráficos para expressar algebricamente uma função polinomial do 2º grau do tipo $y = ax^2$.
OBJETOS DE CONHECIMENTO DO DC-GOEM	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. Análise e construção de gráficos.
DURAÇÃO	14 aulas de 50 minutos
RECURSOS	Quadro e pincéis, computadores conectados a internet
METODOLOGIA	Aula expositiva e dialogada, Devolutiva, Estudo dirigido e Aula prática com o uso de computador e tarefa gamificada.
AVALIAÇÃO	Diagnóstica; Participação e realização das tarefas propostas; Final.

Fonte: Elaborada pelo autor

A sequência didática seguirá os procedimentos descritos abaixo, que interligam-se como na Figura 27. Avaliaremos conteúdos aprendidos previamente, proporemos assunto útil aos estudantes, isso no nível de escolaridade em que estão, que sejam acessíveis, que os estimulem a buscar mais conhecimento, que os incentivem ao estudo, que venha ser recompensador para eles o esforço necessário e promova o protagonismo como forma de autonomia.

Apresentação: Começaremos a sequência didática com uma apresentação aos estudantes das informações sobre o funcionamento das aulas programadas. O propósito é uma sucessão de atividades interligadas e que compreendam teoria e prática. Importante deixar claro os objetivos do ensino e todo o processo em que se darão todas as aulas.

Introdução: Para iniciar o assunto faremos um breve relato do conteúdo que pretendemos ensinar e a relevância do tema para o estudo da matemática. É interessante citar e exemplificar aplicações que o estudo da teoria de funções pode levar o estudante a chegar.

Avaliação diagnóstica: Para a avaliação dignóstica pensamos em um pequeno teste para verificação da aprendizagem do estudo prévio da linguagem de conjuntos, produto cartesiano e relação binária. Daremos uma devolutiva com a correção comentada do conteúdo do teste e para reforçar a aprendizagem, será proposto um estudo dirigido.

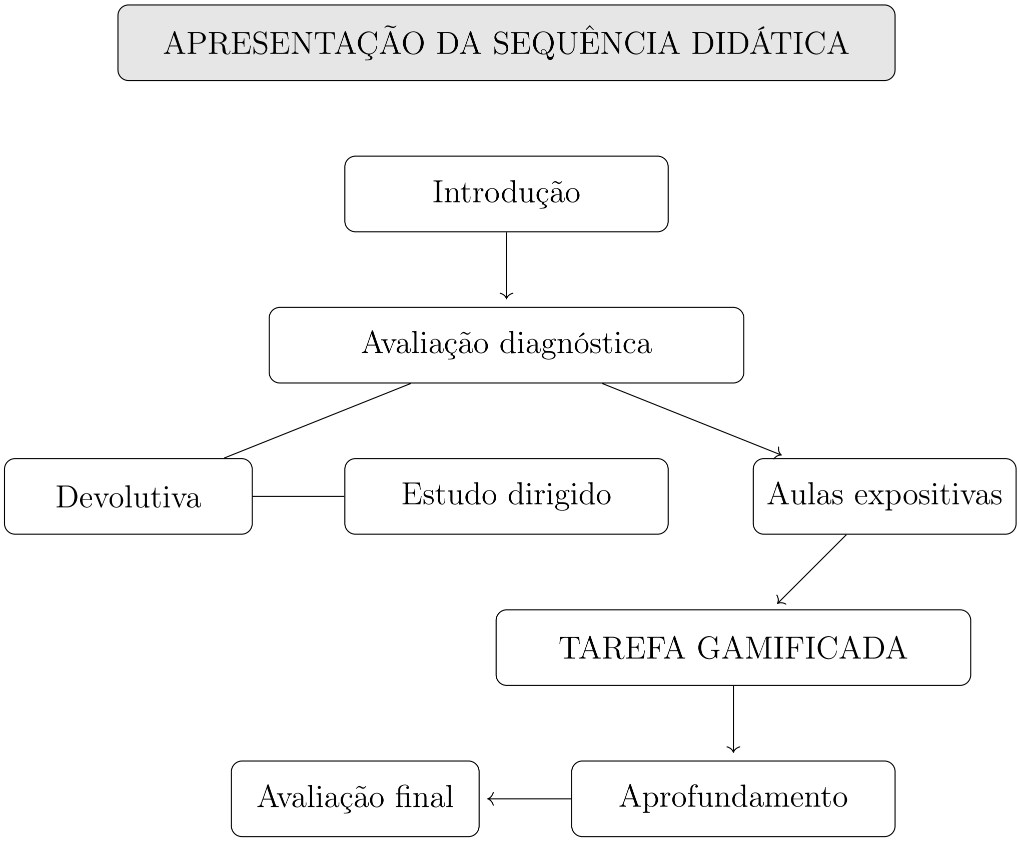
Aulas expositivas: Prosseguiremos com aulas expositivas e dialogadas com a apresentação do conceito de função. Aqui é importante o rigor e cuidado quanto a forma de apresentar o conceito. Não podemos perder a essência da definição tentando buscar uma facilitação do conteúdo. O estudante é capaz e espera-se que esteja preparado para esse fim.

Tarefa gamificada: Para aplicação divertida e motivadora usaremos as tecnologias digitais e gamificação com aulas práticas. Uma tarefa gamificada sobre o conceito de função será apresentada e praticada. Os jovens da atualidade estão conectados diariamente a internet por meio de *smartphones* e também atentos as novas tecnologias digitais. O que justifica uma tarefa assim no ensino.

Aprofundamento: Será feita uma aula de aprofundamento com problemas que visam fixar e aplicar as ideias estudadas. Nesta sequência, desejamos que os estudantes adquiram a compreensão exigida na teoria de funções em matemática.

Avaliação final: Chegaremos ao final da sequência didática e aplicaremos uma avaliação final. Nela esperamos verificar as habilidades e objetos de conhecimentos propostos. Sendo assim, buscando garantir uma aprendizagem relevante para o estudante.

Figura 27: Organograma mostrando os passos da Sequência Didática sobre Função



Fonte: Elaborada pelo autor

Acreditamos que para um bom andamento da execução da sequência didática que estamos propondo, tem muita relevância a divisão dinâmica das aulas. Com o planejamento da sequência didática temos na Tabela 7 a divisão das aulas a serem dadas, na qual indicamos a relação de cada atividade com os apontamentos de Zabala (1998).

Tabela 7: Divisão das aulas

METODOLOGIA	**CONTEÚDO**	**Zabala (1998, p. 63)**	**DURAÇÃO**
Avaliação diagnóstica	Conjuntos, produto cartesiano e relação	a	2 aulas
Devolutiva	Revisão do conteúdo.	a	1 aula
Estudo dirigido	Ampliação do conhecimento	a	1 aula
Primeira aula expositiva	Contextualização histórica e aplicações	b, c, f	1 aula

Continua na próxima página

Aulas expositivas seguintes	Conceito de função, função afim e quadrática	b, c	6 aulas
Tarefas gamificada	Conceito de função, função afim e quadrática	d, e, f	1 aulas
Aprofundamento	Sistematização do conhecimento	g	1 aula
Avaliação final	Conceito de função, função afim e quadrática	h	1 aula

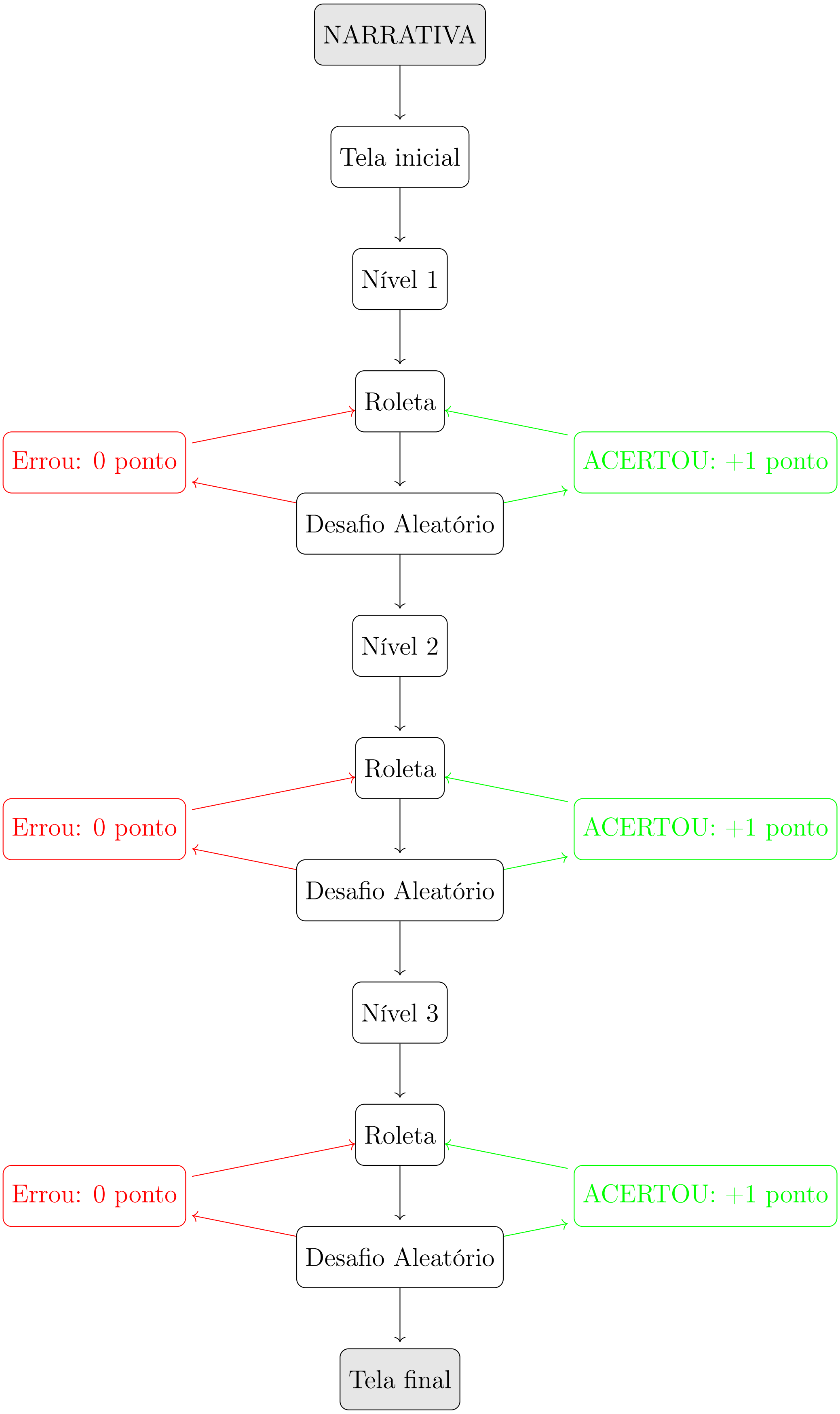
Fonte: Elaborada pelo autor

Para a tarefa gamificada que será usada na sequência didática vamos identificar e definir quais elementos de jogos utilizaremos (veja Tabela 2). Não é obrigatório o uso de todos os elementos uma vez que gamificações não são necessariamente jogos completos. Nas dinâmicas, que são propriamente a imerção e experiência no mundo virtual da gamificação, queremos as emoções narrativa e progressão. As reações que se esperam durante a execução da tarefa. O enredo no qual se passará a história com o objetivo de chamar a atenção do estudante para a tarefa e preservar sua imerção nela. E, o avanço do estudante na tarefa, a ideia é ter um objetivo final a se cumprir.

As mecânicas, formas de interação entre jogador e jogo, selecionamos desafios, chances, feedback e recompensas. A convocação para a realização da tarefa, as condições para por em prática objetivos, o retorno como maneira de avaliação e prêmios em retribuição por êxitos. Já os componentes que fazem parte como peças de aplicação pensamos em níveis, pontos e missões. As etapas que delimitam graus de dificuldade, os valores úteis para classificação e a atividade completa com a finalidade de ganhar recompensas.

Para organizar as ideias, trazemos um fluxograma (Figura 34) contendo o processo pelo qual a tarefa será baseada. Nossa tarefa terá começo, meio e fim. Será composta por dois blocos, o primeiro com os Níveis 1 a 3, e o segundo com o Nível *HARD*, organizados em etapas que conduzem o estudante a resolver desafios matemáticos.

Figura 28: Fluxograma base para a tarefa gamificada, primeiro bloco



Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos que no esquema apresentado, propomos que o erro não leve a descontos na pontuação do estudante, caso em que ele apenas não aumenta a sua pontuação. Variações podem ser consideradas aqui, mudando as regras da tarefa. Disponibilizamos um canal de comunicação com os autores para os professores, os *links* e *QR code* para acesso as tarefas.

E-mail: funcoesnoensinomedio@gmail.com

Tarefa Bloco I: https://scratch.mit.edu/projects/1087820126

Tarefa Bloco II: https://scratch.mit.edu/projects/1087820248

4.2 Descrição da tarefa gamificada

O nome da tarefa é Roleta das Funções e nela serão desenvolvidas habilidades da primeira e quinta comptências específicas de matemática da Base Nacional Comum Curricular. Também serão realizados descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica e objetos de conhecimento do Documento Curricular de Goiás Ensino Médio, conforme descritos na Tabela 8.

Tabela 8: Documentos e a tarefa gamificada

HABILIDADES DA BNCC	**DESCRITORES DO Saeb**	**OBJETOS DE CONHECIMENTO DO DC-GOEM**
EM13MAT101 EM13MAT510 EM13MAT501 EM13MAT502	D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano. D14 - Identificar a localização de números reais na reta numérica. D18 - Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. D23 - Reconhecer o gráfico de uma função polinomial do 1º grau por meio de seus coeficientes. D24 - Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau, dado o seu gráfico. D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. Função polinomial do 1° grau. Função polinomial do 2°grau. Análise e construção de gráficos. Funções polinomiais do 1º grau (função afim, função linear, função constante, função identidade) Gráficos de funções Taxa de variação de funções polinomiais do 1º grau. Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática): gráfico, raízes, pontos de máximo / mínimo, crescimento / decrescimento, concavidade

Fonte: Elaborada pelo autor

A tarefa gamificada terá os seguintes elementos de jogos: emoções, progressões, desafios, chances, feedback, conquistas, níveis e pontos. Consistirá na apresentação de desafios aleatórios onde o jogador avança níveis e tem por objetivo chegar ao fim da tarefa com sucesso. A plataforma utilizada é a *Scratch*, que tem muitas possibilidades na elaboração de jogos e tarefas gamificadas. Lá dispomos de um palco, lugar onde podemos criar cenários, atores e fantasias que interagem por meios de códigos de programação.

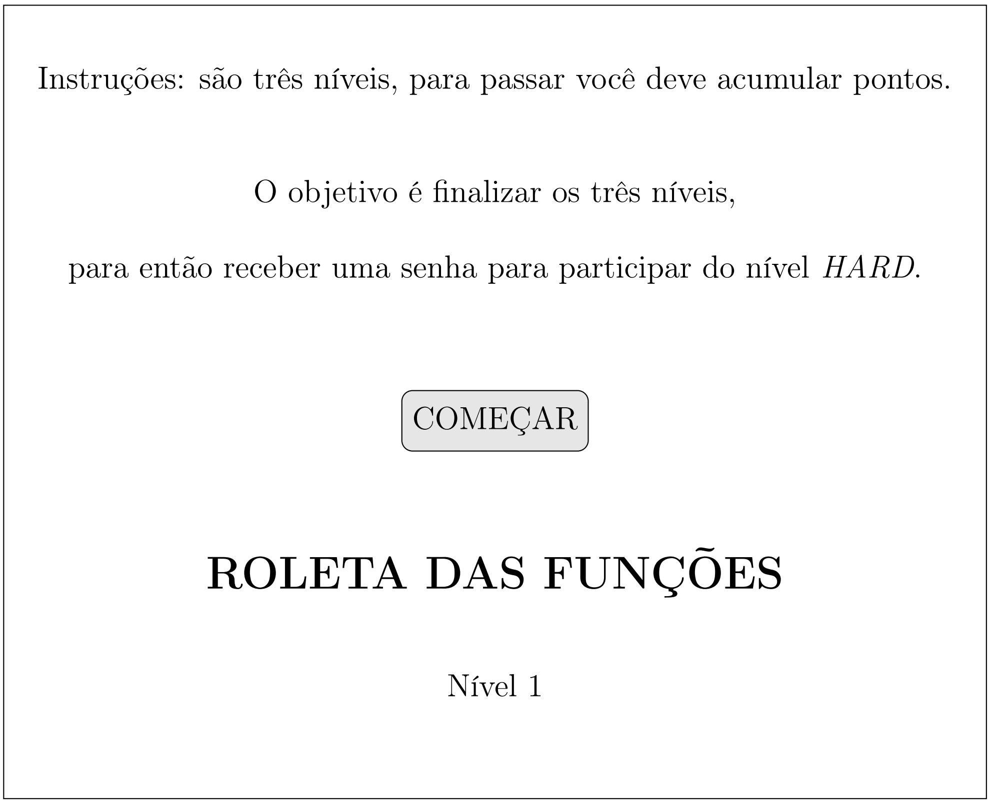
O professor deverá preparar com antecedência o Laboratório de Informática do Colégio com computadores conectados a internet. A turma da primeira série do Ensino

Médio será levada ao Laboratório e os estudantes serão orientados a ocuparem um computador cada um. São iniciadas pelo professor a apresentação da plataforma com suas funcionalidades e como se dará a atividade prática envolvendo uma tarefa gamificada. O objetivo é estimular uma competição onde o conhecimento do conteúdo matemático e a agilidade ao responder os desafios são levados em conta.

São dois blocos, o primeiro com três níveis e que descrevemos o funcionamento a seguir. O segundo é o Nível *HARD*, onde somente após completar o primeiro e receber uma senha, o estudante estárá apto a acessar o nível mais difícil.

O estudante ao acessar um *link* por meio de um *QR code* onde abrirá uma a página da tarefa no site da plataforma *Scratch*. São apresentadas as regras e objetivos da gamificação. Clicando no símbolo de uma bandeira verde abrirá a Tela Inicial (conforme Figura 29). Para dar início aos desafios, o estudante clicará no botão COMEÇAR e será levado à tela do Nível 1 que contém uma roleta com cinco cores, uma seta, um botão GIRAR e um marcador de pontuação do Nível 1.

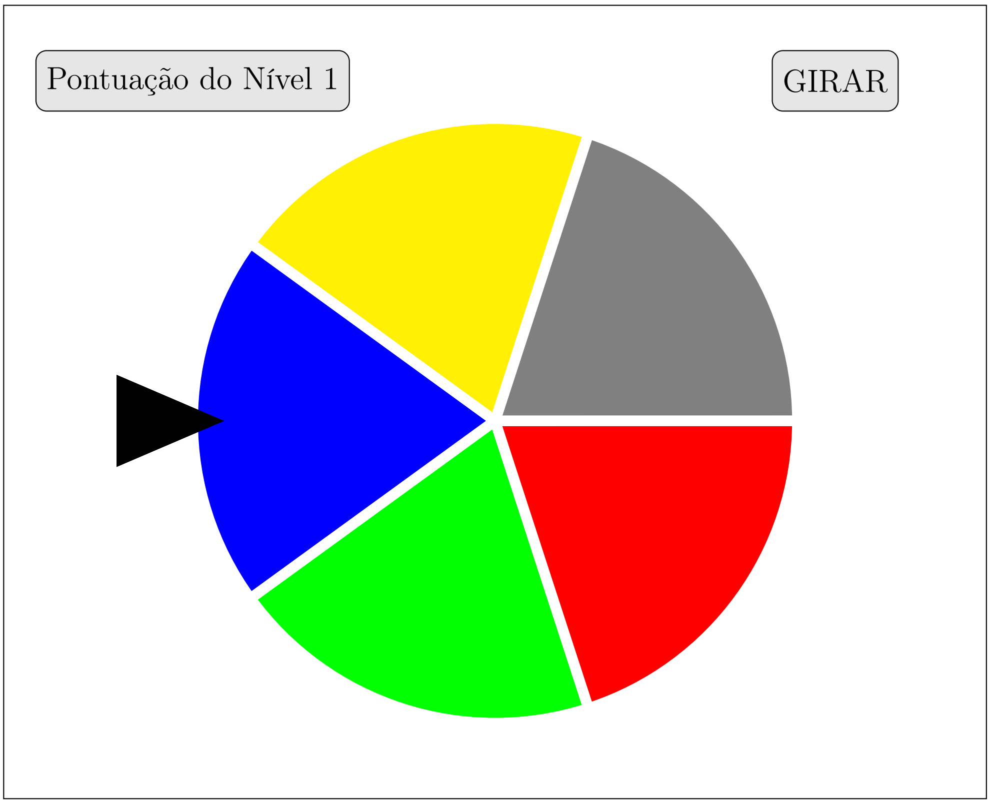
Figura 29: Tela Inicial



Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 30 mostra a roleta e como serão divididas as cores cinza, vermelha, verde, azul e amarela para rolagem aleatória. Ao clicar no botão GIRAR do Nível 1, a roleta das cores irá girar e desacelerará até ser sorteada uma das cores. Em cada cor existem cincos desafios, totalizando 25 desafios. A ideia é, mesmo no caso de ser sorteada uma mesma cor seguida, cada vez o sistema escolherá de forma aleatória um desafio que valerá +1 ponto para o caso de acertar a questão e nenhum ponto no caso de erro. Após, voltará para a tela da roleta e girará a roleta novamente para ser levado a outro desafio. Entre erros e acertos o estudante só prosseguirá para o Nível 2 assim que obtiver uma pontuação mínima de 5 pontos.

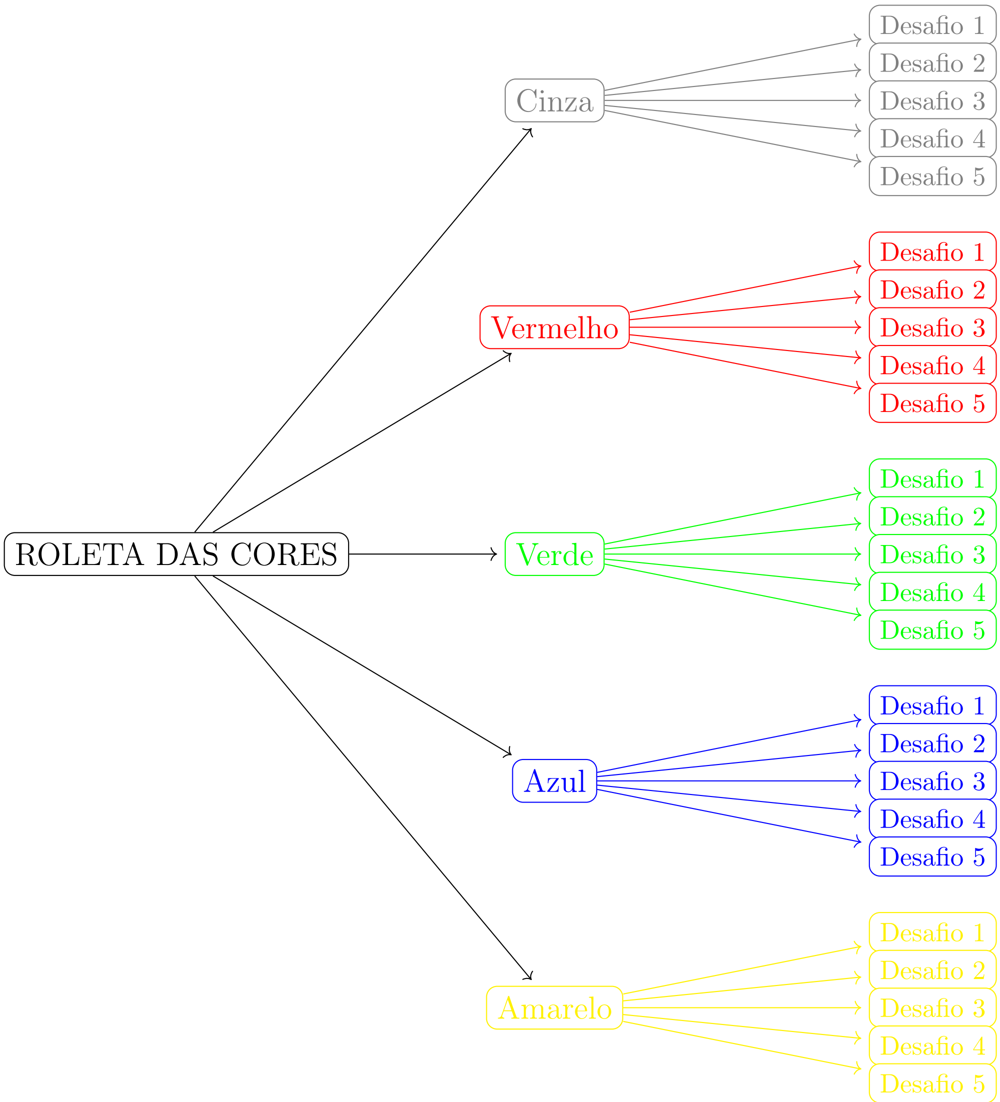
Figura 30: Nível 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme a Figura 31 podemos ver como será a distribuição dos desafios em cada cor.

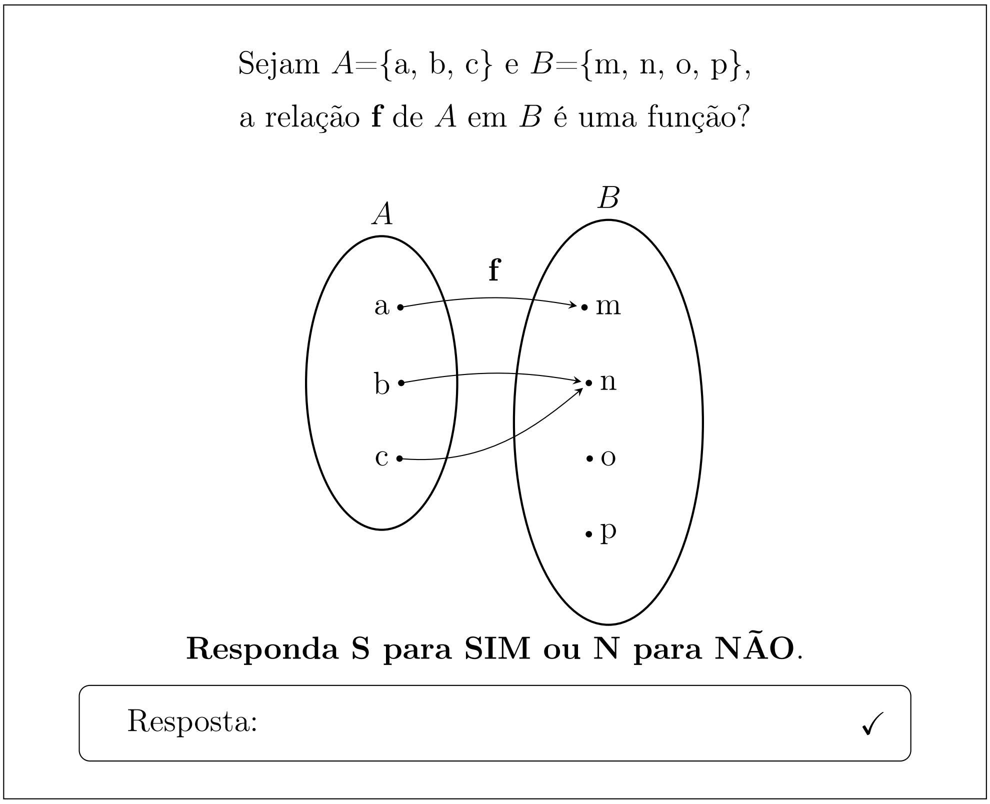
Figura 31: Árvore dos desafios



Fonte: Elaborada pelo autor

Em sequência, os Níveis 2 e 3 seguirão a mesma dinâmica do Nível 1, com cinco cores e cinco desafios em cada cor. Esse caminho será progressivo com graus de dificuldades entre os níveis da tarefa. O primeiro nível corresponderá ao básico, desafios de sobre relações e funções, do tipo que busca verificar se o estudante pode diferenciar funções de somente relações que não são funções. Para o segundo nível temos questões que envolvem o conceito de função e representações. Já o terceiro nível constará do estudo de funções afins e quadráticas. O Nível *HARD* será composto por questões do Enem, de 2009 a 2023, todas elas foram selecionadas de modo a abranger os conteúdos de função afim e quadrática.

Figura 32: Exemplo de desafio



Fonte: Elaborada pelo autor

Depois de passar por todos os níveis do Bloco I, o estudante chegará a etapa final da tarefa, desafiadora. Nela será emitida uma nota final mostrada na tela, juntamente com uma senha que poderar usar para acessar outro bloco com o Nível *HARD*. (Figura 33).

Figura 33: Tela Final

FIM DA PRIMEIRA PARTE DA TAREFA GAMIFICADA

Parabéns! Sua nota foi:

1000

Você está apto a participar da próxima parte, o nível *HARD*.

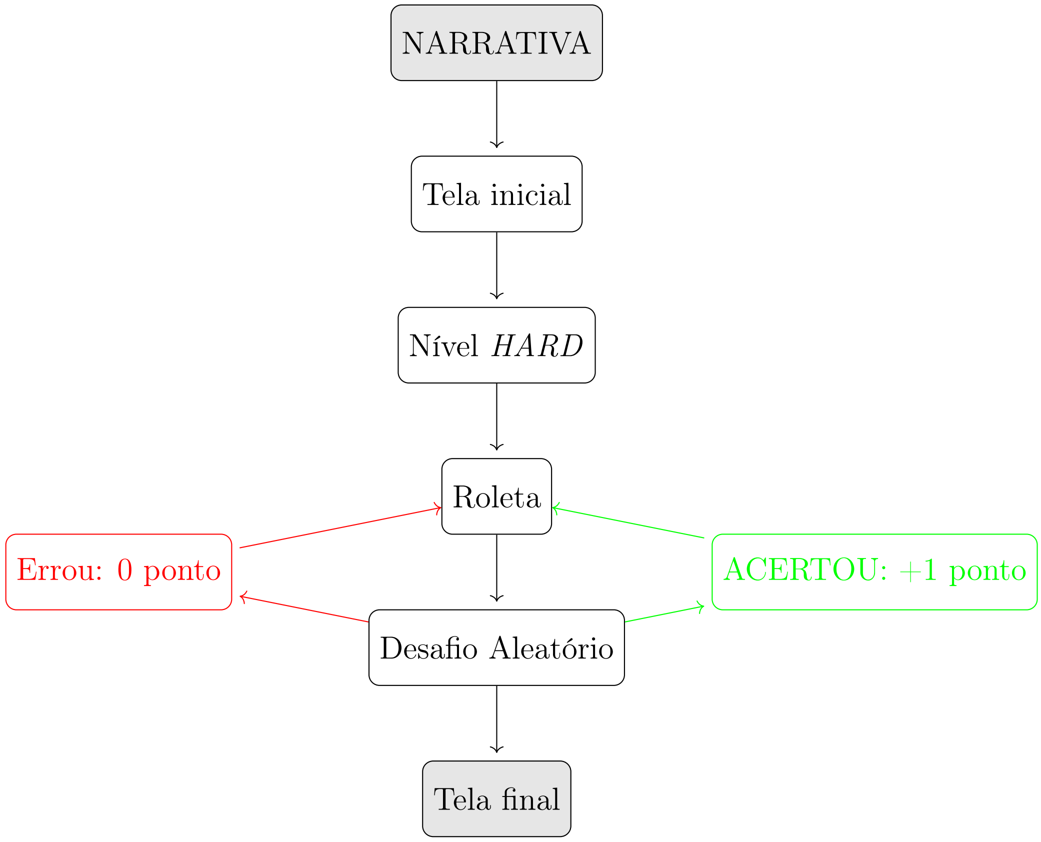
A senha de acesso é:

HARD1000

Fonte: Elaborada pelo autor

Com a ideia de deixar a tarefa mais engajadora o Nível *HARD* será proposto e liberado através de uma senha para aqueles que obtiverem sucesso nos três níveis anteriores. A estrutura e funcionamento é análoga com a Tela Inicial, roleta das cores, desafios e Tela Final. Também com cinco cores e cinco desafios cada cor, o Nível *HARD* contará com 25 desafios aleatórios com valor de $+1$ ponto por acerto e nenhum ponto por erro. Será declarado vencedor o estudante que completar 5 pontos ou mais. Os desafios são questões do Enem dos anos 2009 a 2023 encontradas no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira na seção Provas e Gabaritos em (Brasil, 2024). Selecionamos questões de Matemática que envolviam os conteúdos de Função Afim e Quadrática.

Figura 34: Fluxograma do Nível *HARD*



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, finalizamos a descrição da tarefa gamificada. Acreditamos que da maneira como foi elaborada possa fortalecer um ambiente favorável ao ensino-aprendizagem do conceito de função, função afim e função quadrática.

5 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Foram aplicados dois questionários, a professores e estudantes, nos quais apresentamos questionamentos a respeito do ensino de funções, do conceito de função, de metodologias que usem tecnologias digitais e sobre gamificação. Os questionários foram divididos em duas partes cada. A Parte I é formada por questões que envolvem a parte teórica e conceitual a respeito das abordagens para o ensino de funções, já a Parte II refere-se à perguntas sobre metodologias de ensino com a gamificação.

Buscamos entender a visão dos professores sobre suas práticas e ideias voltadas aos conteúdos sobre funções e novas abordagens de ensino que busquem o uso de tecnologias digitais, visto que a BNCC, na quinta competência geral, conforme já citado, as tecnologias digitais podem ser utilizadas para produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer o protagonismo.

5.1 Parte I

5.1.1 Professores

Perguntas 1 a 3 - Conhecendo os professores

O questionário de professores foi aplicado para 10 professores que atuam na 1ª série do Ensino Médio e todos os professores responderam o questionário. As Perguntas 1, 2 e 3 abordaram a formação dos professores quanto à graduação e pós-graduação e sobre o tempo de experiência em sala de aula. Nove destes têm formação em licenciatura em Matemática e um tem formação em área afim, no caso em Física. Nove possuem algum tipo de pós-graduação, sendo sete com especialização e dois com mestrado. Sete possuem experiência de trabalho de mais de 10 anos, dois de 5 a 10 anos e um menos de 3 anos.

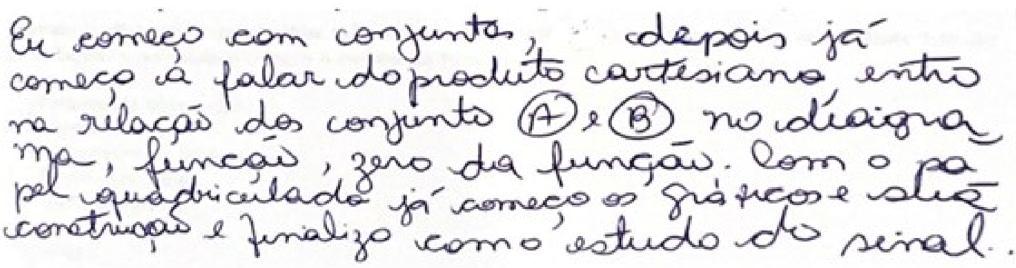
Perguntas 4 a 12 - Sobre o conceito de função

A Pergunta 4 indagava "Qual percurso você utiliza para ensinar funções?", apresentando opções de respostas a serem marcadas. As respostas refletiram 70% das escolhas para a opção "Conjuntos, produto cartesiano, relação, função, zero, gráficos e estudo dos sinais" o que é coerente com nossas concepções do que seria o caminho mais completo para formalizar bem o conceito de função. Um professor marcou "Conjuntos, definição, tabela, gráfico e estudo dos sinais", outro marcou "Definição, zero da função e gráfico" e outro marcou todas as opções. Sobre este último não ficou claro para nós o que reflete a resposta dada, pois imaginávamos que as opções eram excludentes.

Na Pergunta 5, pedimos que o professor escrevesse sobre o percurso utilizado por ele em suas práticas nas aulas sobre funções. Acerca do que foi relatado, percebemos que existe uma preocupação com exemplos contextualizados e que busquem aproximar o ensino ao cotidiano ou dia-a-dia do estudante (palavras mencionadas por alguns professores). Há relatos coerentes com a alternativa assinalada na Pergunta 4 (06 professores) e há casos em que o relato apresentado não condiz completamente com o que o professor marcou na Pergunta 4 (04 professores).

O professor P_5 foi coerente com a resposta da Pergunta 5, veja Fig. 35, porque a opção que considera ser o melhor percurso marcada foi "Conjuntos, Produto cartesiano, relação, função, zero, gráficos e estudo dos sinais". De outro lado o professor P_4 marca a opção "Conjuntos, Definição, tabela, gráfico e estudo dos sinais", no entanto, quando ele vai narrar o seu próprio percurso, ele narra diferente, dizendo "Exemplos concretos; Tabelas; Relações e o gráfico".

Figura 35: Professor P_5, Pergunta 5

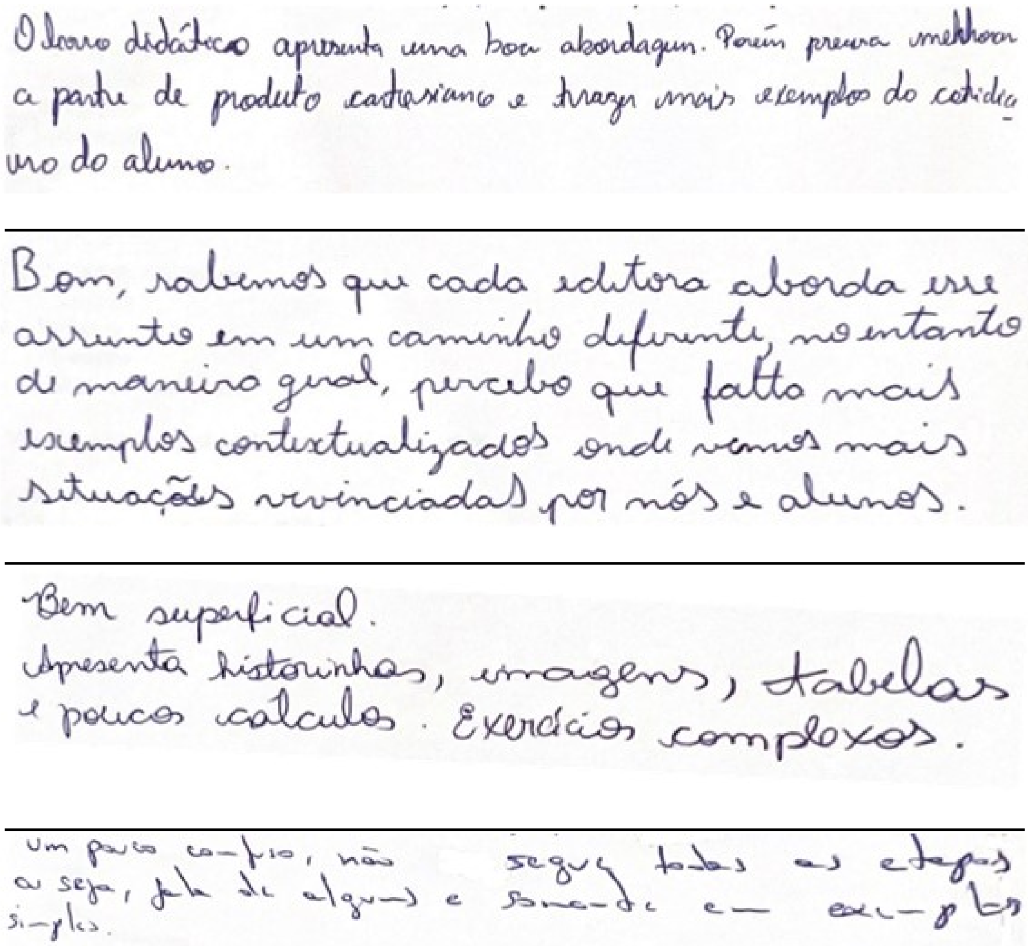

Eu começo com conjuntos, depois já começo à falar do produto cartesiano entro na relação dos conjunto A e B no diagrama, função, zero da função. Com o papel quadriculado já começo os gráficos e sua construção e finalizo com o estudo do sinal.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Alguns dos professores tomam caminhos que fazem o uso de exemplos práticos e "situações contextualizadas" com a intenção de despertar o interesse dos estudantes, para então conceituar função, não passando pelos elementos teóricos, elementos esses que são fundamentais para uma contextualização clara e objetiva. 03 professores não chegam a mencionar conjuntos, produto cartesiano ou relação.

Na Pergunta 6, pedimos aos professores que discorressem sobre o percurso adotado no livro didático ao abordar as funções. Vemos que poucos acreditam que o livro esteja adequado ao estudante. Alguns afirmam que o livro não explora muito bem a parte de produto cartesiano e relação, os exemplos são fracos no sentido de dar suporte ao estudante na compreensão do conteúdo. Evidenciam que o livro traz poucos exercícios e que são exercícios difíceis.

Figura 36: Professores P_2, P_3, P_5 e P_6, Pergunta 6



O livro didático apresenta uma boa abordagem. Porém precisa melhorar a parte de produto cartesiano e trazer mais exemplos do cotidiano do aluno.

Bom, sabemos que cada editora aborda esse assunto em um caminho diferente, no entanto de maneira geral, percebo que falta mais exemplos contextualizados onde vemos mais situações vivenciadas por nós e alunos.

Bem superficial.
Apresenta historinhas, imagens, tabelas e poucos calculos. Exercícios complexos.

Um pouco confuso, não segue todas as etapas ou seja, fala de algumas e somente em exemplos simples.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Com essas respostas, observamos que os professores indicam a necessidade de adequação dos livros didáticos no que se refere a primeira habilidade da primeira competência específica de Matemática da BNCC (EM13MAT101), ou seja, as situações econômicas, sociais e fatos referentes às Ciências da Natureza, são importantes no ensino e, as tecnologias digitais podendo contribuir para o ensino.

Percebemos que em 30% das respostas há trechos que apontam que os livros deveriam passar melhor pelos elementos teóricos, aqueles os quais defendemos para bem compreender o conceito de função: partir da teoria dos conjuntos, passando pelos pares ordenados, produtos cartesianos e relações.

Somente 01 professor disse que o livro didático segue as estapas, mas precisa melhorar a parte de produto cartesiano. Outro professor relatou que não há uso do livro didático, não foi falado motivos, se por não ter ou não achar adequado o livro disponibilizado. 03 professores deixaram a Pergunta 6 sem resposta.

P_2 espõe na resposta da Pergunta 5 a sua utilização de contextualização para um primeiro contato antes da formalização do conceito, contudo na resposta da Pergunta 6, esclarece que o livro didático não explora muito bem a exemplificação. P_5 passa por todos os elementos teóricos na abordagem do ensino de funções, porém o livro didático adotado na parte teórica não explora muito os conceitos e já nos primeiros exercícios o nível de dificuldade é alto. Faltam exercícios para treino.

Com as Perguntas 7 e 8, respectivamente, solicitamos aos professores que nos dessem suas percepções quanto à aprendizagem dos estudantes sobre funções na primeira série do Ensino Médio e que escrevessem sobre as principais dificuldades dos estudantes. Aqui apresentaremos todas as respostas por uma tabela (9), pois acreditamos que as informações sejam relevantes.

Tabela 9: Percepção dos professores sobre a aprendizagem e dificuldades dos estudantes, Perguntas 7 e 8

Prof.	**7. A respeito do conteúdo sobre funções, qual sua percepção quanto a aprendizagem dos estudantes ao final da primeira série do Ensino Médio?**	**8. Escreva, em sua opinião, as principais dificuldades encontradas pelos estudantes no processo de aprendizagem dos conteúdos sobre funções (o conceito, as representações, os exemplos...).**
P_1	Proficiente	O aluno possui dificuldade de processar a abstração do conceito biunívoco, quando sai de um exemplo do cotidiano para uma fórmula utilizando variáveis.
P_2	Básico	Os alunos sentem dificuldade na representação, na interpretação de situações problemas. Em representar matemáticamente a situação problema e em algumas situações em executar operações básicas.
P_3	Básico	Acredito que a interpretação do gráfico, entender o significado dos coeficientes angular e linear, e quão importante o estudo de funções é para nosso dia a dia.
P_4	Básico	Para os alunos, o conceito de função é muito abstrato, não consegue ver a aplicação no dia a dia. Devido a isso há falta de interesse, distração e dificuldades para entender o conteúdo.

Continua na próxima página

P_5	Básico	Compreenção, interpretação, matemática básica.
P_6	Básico	Primeiro na leitura das atividades; Dificuldades com os números; Falta de interesse dos alunos.
P_7	Proficiente	Maior dificuldade dos alunos é a falta de compromisso com sua vida escolar. Mas a maioria apresenta dificuldades nos conceitos.
P_8	Abaixo do básico	A capacidade de abstração; as representações; a conexão do conceito com situações práticas.
P_9	Básico	Conceito, gráfico, aplicação em problemas.
P_{10}	Abaixo do básico	Substituição x em f(x); Conceitos.

Fonte: Relatório de Pesquisa

De um modo geral, os professores percebem que seus estudantes são em maioria nível básico quanto a aprendizagem de funções, Pergunta 7. Destacamos a dificuldade em "processar a abstração do conceito biunívoco" e "a conexão do conceito com situações práticas". Outra questão de suma importância é a "leitura das atividades", acreditamos que realmente muitos estudantes possuem um primeira dificuldade na leitura e interpretação de textos, o que prejudica no entendimento dos conceitos. Chamam a atenção também para problemas com a capacidade de "representação", "interpretação" e "compreenção" dos conteúdos, Pergunta 8.

Ressaltamos a resposta de P_1, onde diz que "O aluno possui dificuldade de processar a abstração do conceito biunívoco, quando sai de um exemplo do cotidiano para uma fórmula utilizando variáveis", principalmente em referência ao conceito biunívoco. Esse é essencial no entendimento do conteúdo de funções, se bem compreendido, acreditamos que consegue-se chegar a de fato ensinar função para o estudante.

Agora, transcrevemos a produção de cada professor em resposta à Pergunta 9, em que gostaríamos de conhecer como ele apresenta o conceito de função. As respostas estão dadas na íntegra.

Tabela 10: O conceito de função segundo o ponto de vista dos professores, Pergunta 9

Prof.	**9. Escreva neste espaço o conceito de função da forma que você acredita ser mais pertinente na primeira série do Ensino Médio.**
P_1	Uma função atribui a cada elemento de entrada um único elemento de saída.
P_2	É uma relação entre dois conjuntos, onde cada elemento de A tem apenas um correspondente em B.
P_3	Os conceitos importantes para essa série seriam: valor numérico no ponto "x", zero da função, identificação dos coeficientes e interpretação do gráfico.
P_4	Função é uma relação entre duas variáveis.
P_5	É uma norma matemática que relaciona as variáveis de uma equação, ou seja, a dependência de um elemento em relação ao outro.
P_6	É uma relação de dois conjuntos, usando o domínio e a imagem.
P_7	Uma função é uma aplicação que relaciona os elementos de dois conjuntos não vazios.
P_8	Função pode ser entendida como uma "relação" de duas quantidades ou grandezas. É uma "máquina" que recebe uma informação e devolve outra.
P_9	Função é uma relação entre duas variáveis, onde uma depende da outra.
P_{10}	É uma relação estabelicida entre 2 variáveis.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Analisando as respostas dadas à Pergunta 9, observamos que 06 professores definiram função como apenas uma relação binária, não impondo as propriedades necessárias. 02 escreveram sobre a unicidade usando os termos "um único elemento" e "tem apenas um correspondente". 01 escreve "Uma função atribui a cada elemento de entrada um único elemento de saída". 01 define função pela regra. P_3 fala sobre conceitos relacionados, mas não define. P_2 é o único que usa o termo relação e inclui as propriedades necessárias.

Quando pedimos para que o professor escrevesse o conceito de função (Pergunta 10), utilizando uma ou mais das palavras ou expressões - conjunto, produto cartesiano, par ordenado, relação, grandeza, lei de formação, domínio, contradomínio, regra - verificamos que somente 04 dos professores escreveram a definição completa. 03 definiram função como uma regra de associação, 02 deles apresentaram a definição com notação de diagramas e 01 deixou de responder ao item.

As respostas dadas à Pergunta 10 revelam a pertinência de nossa preocupação em discutir o conceito formal de funções, investigando não somente a formalização do conceito, mas também como os professores abordam exemplos e representações. Vemos que, ainda que sejamos explícitos ao solicitar o uso de elementos teóricos importantes para esse contexto, a maioria dos professores não se expressou claramente. Uma hipótese, que possivelmente os tenham levado a responder assim pode ser a forma com que os livros didáticos trazem e desenvolvem (ou não) todos esses conceitos.

Sobre a questão se podemos definir função somente por meio de uma lei de formação, com justificativa, Pergunta 11, 03 professores responderam "Sim", 05 "Não" e 02 "Talvez". Dos que responderam "Sim" foi argumentado como justificativa que "ela estabelece como será a relação de A em B". Entre os que disseram "Não" justificaram que "Apenas a lei de formação não garante a unicidade da relação entre os conjunto domínio e contradomínio" e 03 argumentaram que podemos definir função por representações, o que acreditamos ser um engano, pois podemos ter representação de qualquer relação mas que não seja função necessariamente.

Na Pergunta 12 em que questionamos a existência de funções que não possuem lei de formação, 04 responderam "Sim" e 06 "Não".

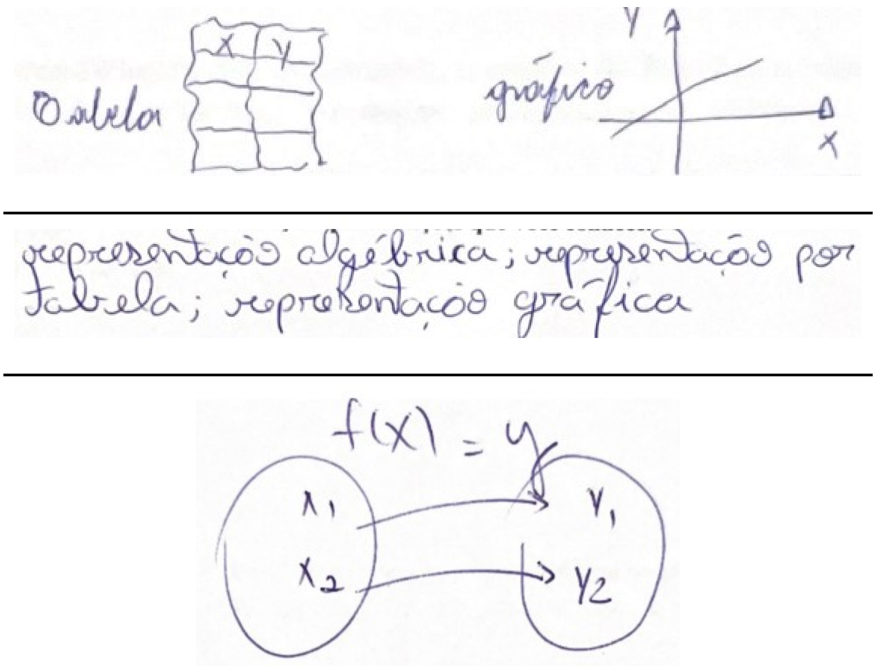
P_8 é coerente na resposta e justificativa da Pergunta 11. Marca a opção "Não" e escreve "Apenas a lei de formação não garante a unicidade da relação entre os conjunto domínio e contradomínio". P_1 marca "Talvez" e justifica, "A validade de uma função vai além disso e envolve garantir que ela atenda aos critérios essenciais de uma relação funcional".

P_{10} respondeu "Sim", que podemos definir função somente por meio de uma lei de formação, porém ao justificar escreve, "Dado 2 conjuntos de forma que cada elemento do 1º possua um único correspondente no 2º". Isso nos dá justamente a possibilidade de estabelecer uma função sem a necessidade de uma lei de formação.

Perguntas 13 e 14 - Sobre representações e exemplos de funções

Quando pedidos para citarem possíveis representações para funções que conhecessem, Pergunta 13, 04 professores de fato colocaram representações de funções tais como diagramas, tabelas e gráficos (por exemplo, veja a Figura 37). 03 colocaram representação algébrica, o que na verdade são notações para função, utilizando "f(x)" e "y". 02 professores escreveram que uma função pode ser representada por uma regra ou fórmulas matemáticas. E 01 professor colocou três exemplos de aplicações.

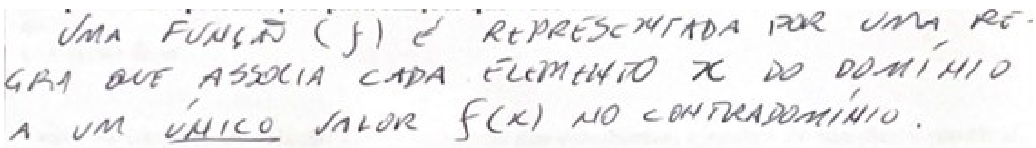
Figura 37: Representações de funções, professores P_4, P_8 e P_{10}



Fonte: Relatório de Pesquisa

Ainda enfatizamos que dois professores trouxeram a conceituação de função em suas respostas (veja a Figura 38).

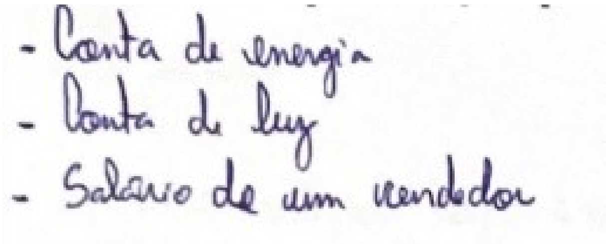
Figura 38: Representações de funções, professor P_1


UMA FUNÇÃO (f) É REPRESENTADA POR UMA REGRA QUE ASSOCIA CADA ELEMENTO x DO DOMÍNIO A UM ÚNICO VALOR f(x) NO CONTRADOMÍNIO.

Fonte: Relatório de Pesquisa.

Também ocorreu de dois professores trazerem exemplos para expressarem as representações, como ilustra a Figura 39.

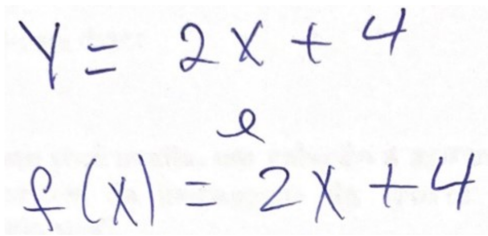
Figura 39: Representações de funções, professor P_1



Fonte: Relatório de Pesquisa

Diante dessas respostas, inferimos possíveis lacunas na formação dos professores quanto ao alcance da compreensão a respeito do conceito e das representações associadas a eles. Para além disso, vemos a utilização de exemplos particulares para apresentar fenômenos que são universais.

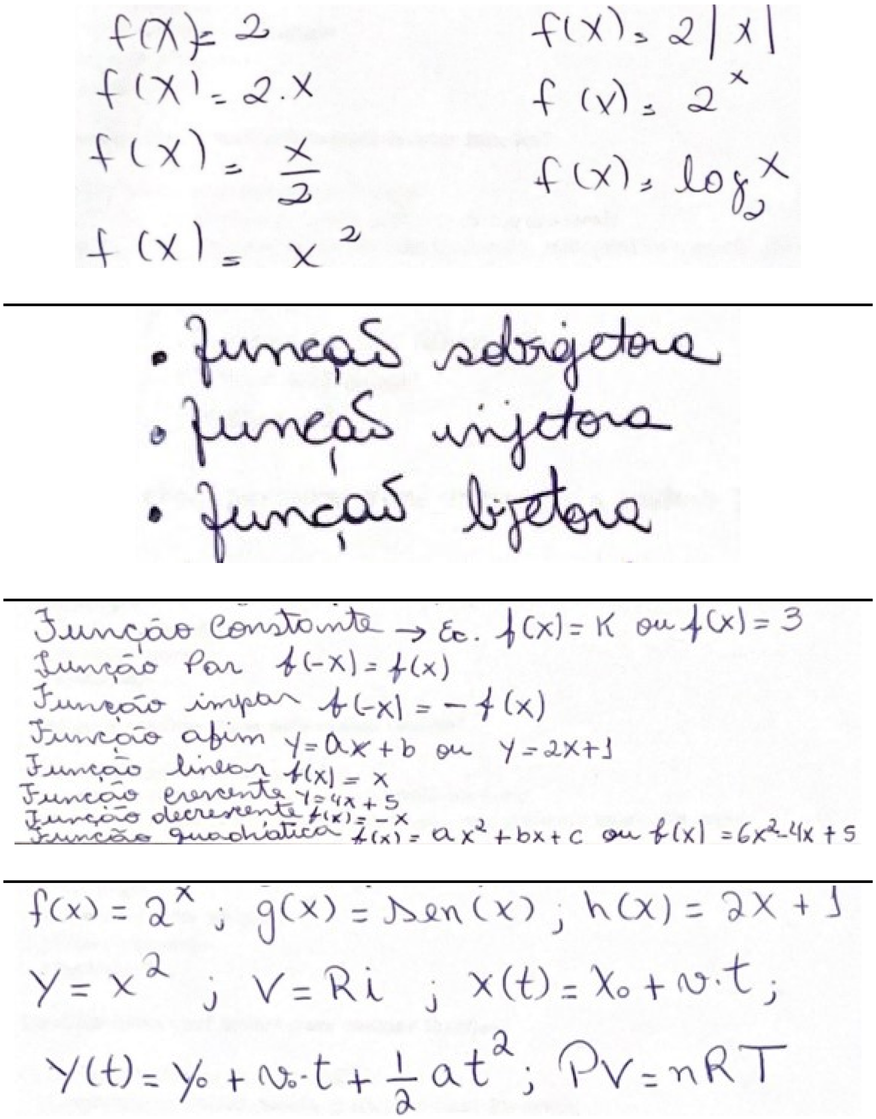
Figura 40: Representações de funções, professor P_9



Fonte: Relatório de Pesquisa

Na Pergunta 14 pedimos que os professores escrevessem formalmente alguns exemplos de funções. Nessa situação, 06 professores fizeram o uso somente de notações de funções. Dois colocaram propriedades de funções, como: injetora, sobrejetora, bijetora, crescente, decrescente, função par e ímpar. Veja as figuras a seguir.

Figura 41: Exemplos de funções, professores P_{10}, P_5, P_7 e P_8, Pergunta 14



$f(x) = 2$ $\quad$ $f(x) = 2|x|$

$f(x) = 2.x$ $\quad$ $f(x) = 2^x$

$f(x) = \frac{x}{2}$ $\quad$ $f(x) = \log_2 x$

$f(x) = x^2$

- funçaõ sobrejetora
- funçaõ injetora
- funçaõ bijetora

Função constante → Ex. $f(x) = K$ ou $f(x) = 3$
Função Par $f(-x) = f(x)$
Função impar $f(-x) = -f(x)$
Função afim $y = ax + b$ ou $y = 2x + 1$
Função linear $f(x) = x$
Função crescente $y = 4x + 5$
Função decrescente $f(x) = -x$
Função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$

$f(x) = 2^x$; $g(x) = sen(x)$; $h(x) = 2x + 1$

$y = x^2$; $V = Ri$; $x(t) = x_0 + v.t$;

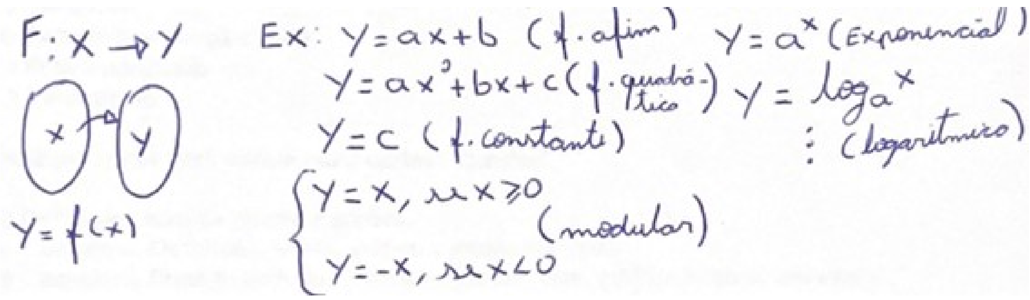
$y(t) = y_0 + v_0.t + \frac{1}{2}at^2$; $PV = nRT$

Fonte: Relatório de Pesquisa

Também houve respostas em que professores apenas escreveram nomes de funções, como "seno", "tangente", não atendendo ao pedido feito no enunciado da pergunta de apresentar os exemplos formalmente.

Destacamos a resposta do professor P_3 referente a resposta da Pergunta 14 (Figura 42). Colocou domínio (conjunto X), contradomínio (conjunto Y) e leis de formação, procurou ser formal na exemplificação. No entanto, observamos o uso de um conjunto "genérico" X como domínio em diferentes tipos de funções exemplificadas (afim, quadrática, constante, modular, exponencial e logarítmica). Entendemos que tal generalidade pode não ser a melhor forma de apresentar uma função específica. A exemplo, um mesmo valor nem sempre está definido para uma função afim e logarítmica. Reafirmamos que possivelmente isso aconteceu pelo modo como os livros didáticos, em maioria, focam o estudo de funções a partir da regra algébrica e, em certo ponto, deixam de explicitar o domínio em cada caso.

Figura 42: Exemplos de funções, professor P_3, Pergunta 14



Fonte: Relatório de Pesquisa

Pergunta 15 e 16 - Perspectivas dos professores de abordagem e importância do ensino do conceito de função

Sobre as perspectivas dos professores em relação à aprendizagem dos estudantes, ao abordar funções a partir de conceitos da linguagem da teoria de conjuntos, como produtos cartesianos e relações entre conjuntos, Pergunta 15, apenas 01 dos professores avalia como plenamente adequado, 04 afirmam ser adequado, 04 razoavelmente adequado e 01 pouco adequado. Seria interessante aprofundar nesse sentido para saber se tais respostas são reflexo das abordagens encontradas pelos professores nos materiais ou livros didáticos por eles acessados ao ensinar, uma vez que observamos que nos livros consultados como possíveis instrumentos adotados nos cursos de licenciatura é frequente o delineamento do tema passando por esses aspectos teóricos.

A Pergunta 16 solicitava que os professores avaliassem em relação a importância do ensino de funções na primeira série do Ensino Médio, 06 dos professores avaliaram como plenamente importante, 03 como importante e 01 como razoavelmente importante.

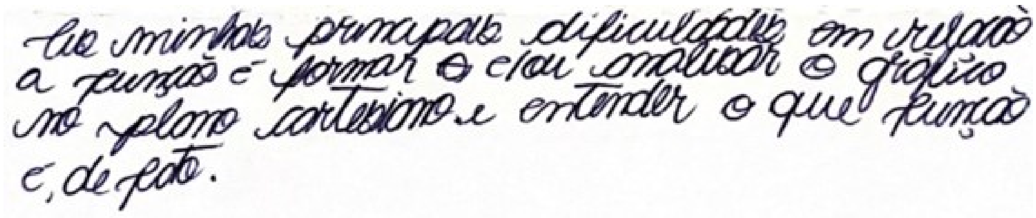
5.1.2 Estudantes

Perguntas 1 e 2 - Percepção quanto ao conhecimento e dificuldades

O questionário de estudantes foi aplicado para 30 estudantes de uma mesma turma da 1ª série do Ensino Médio de um Colégio Público Regular. Perguntamos sobre a percepção que eles têm sobre si mesmos quanto ao conhecimento do conteúdo de funções, o conceito de função, as representações e os exemplos, o ponto de vista em estudar funções, as tecnologias digitais e a metodologia de gamificação. A Parte I é traz as questões sobre a parte teórica e conceitual, já a Parte II refere-se à perguntas sobre gamificação.

A Pergunta 1 foi sobre a percepção dos estudantes quanto ao seu conhecimento de funções. As respostas revelam uma autoavaliação dos estudantes da seguinte forma: 6,7% marcaram “Muito pouco”, 33,3% “Pouco”, 46,7% “Médio” e 13,3% “Bom”. Já a Pergunta 2 pedia que os estudantes escrevessem, caso tivessem, as suas principais dificuldades ao estudar os conteúdos sobre funções. Os relatos revelaram dificuldades em: formar (ou montar) e analizar gráficos; dificuldades com o plano cartesiano; entender o que é função de fato; excesso de cálculos e cálculos muito complexos; identificar raízes; muitos números; dificuldades em efetuar divisões, resolver frações, expressões numéricas; identificar os coeficientes e representar as funções nos gráficos.

Figura 43: Estudante E_1, Pergunta 2

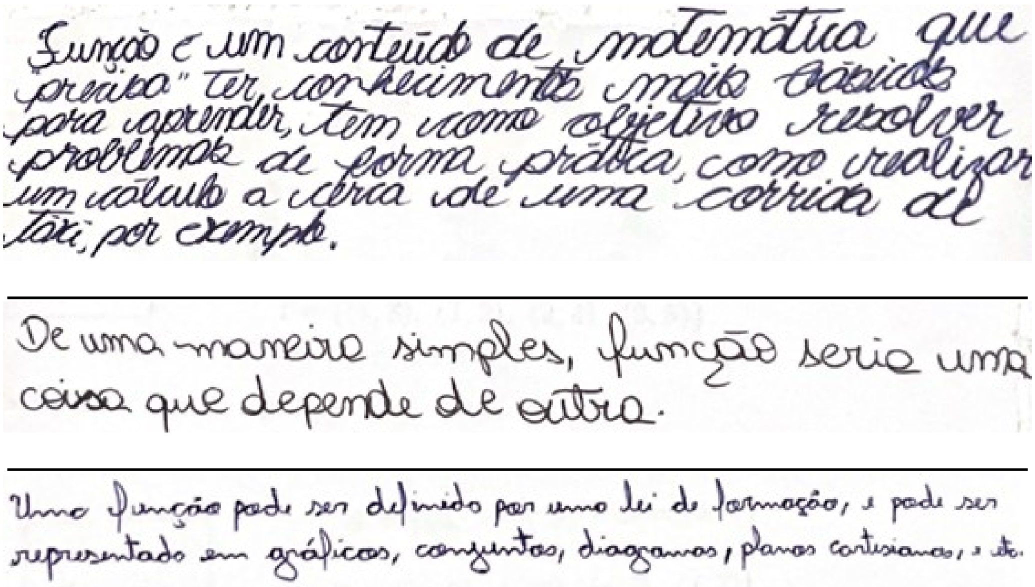

As minhas principais dificuldades em relação a função é formar e/ou analisar o gráfico no plano cartesiano e entender o que função é, de fato.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Perguntas 3 a 6 - Sobre o conceito de função

Na Pergunta 3 pedidos para os estudantes escreverem o conceito de função com suas palavras. Nesse caso, 23,3% disseram não saber, 40% não colocaram respostas. Apenas 16,7% responderam o que é função, cujas respostas trazem opiniões sobre a utilidade das funções, traduzem funções como fórmulas, outras dizem ser conjuntos de números ou qualquer outra coisa e uma delas aponta função como a dependência entre coisas. Uma das respostas nos surpreendeu, não por trazer uma definição formalmente correta, mas por revelar que o estudante conhece o contexto das funções. Veja algumas respostas na Figura 44.

Figura 44: Estudantes E_1, E_{21} e E_{30}, Pergunta 3



Função é um conteúdo de matemática que "precisa" ter conhecimentos mais básicos para aprender, tem como objetivo resolver problemas de forma prática, como realizar um cálculo a cerca de uma corrida de táxi, por exemplo.

De uma maneira simples, função seria uma coisa que depende de outra.

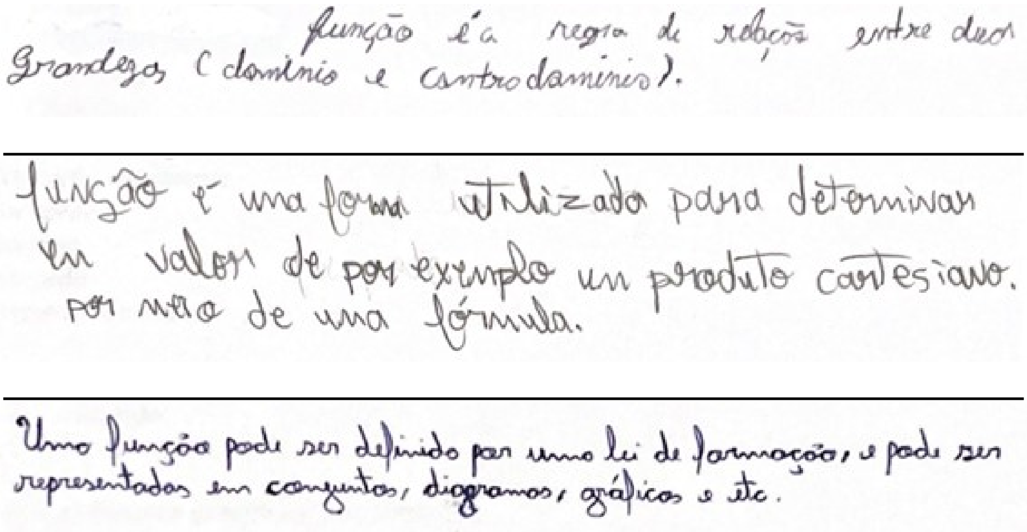
Uma função pode ser definido por uma lei de formação, e pode ser representado em gráficos, conjuntos, diagramas, planos cartesianos, e etc.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Tentamos entender e encontrar possíveis ideias para o que pode estar acontecendo quando apenas poucos estudantes conseguem dizer o conceito de função. Os materiais e aulas podem ser desenvolvidos com metodologias atualizadas e contribuir para uma melhor aprendizagem de conceitos matemáticos?

A Pergunta 4 pedia para os estudantes escreverem novamente o conceito de função, mas agora utilizando uma ou mais das palavras ou expressões: conjunto, produto cartesiano, par ordenado, relação, grandeza, lei de formação, domínio, contradomínio, regra. Apenas 04 apresentaram uma tentativa de escrever o conceito de função estimulados pelas palavras ou expressões propostas, mas sem chegarem a uma definição tida como completamente correta; 02 colocaram notações de funções; 11 disseram não saber; 11 deixaram sem resposta; 02 escreveram as palavras ou expressões enunciadas e/ou a necessidade do estudo prévio desses conceitos. A seguir temos dois exemplos de respostas, veja Figura 45.

Figura 45: Estudantes E_8, E_{23} e E_{30}, Pergunta 4


função é a regra de relações entre duas Grandezas (dominio e contradominio).

função é uma forma utilizada para determinar um valor de por exemplo um produto cartesiano. por meio de uma fórmula.

Uma função pode ser definido por uma lei de formação, e pode ser representadas em conjuntos, diagramas, gráficos e etc.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Ao perguntarmos aos estudantes se, na visão deles, podemos definir função somente por meio de uma lei de formação, Pergunta 5, 20% responderam “Sim”, 36,7% “Talvez” e 43,3% “Não”.

Questionamos na Pergunta 6 sobre a existência de funções que não possuem lei de formação, 23,3% reponderam “Sim”, 46,7% “Não sei dizer” e 30% “Não”.

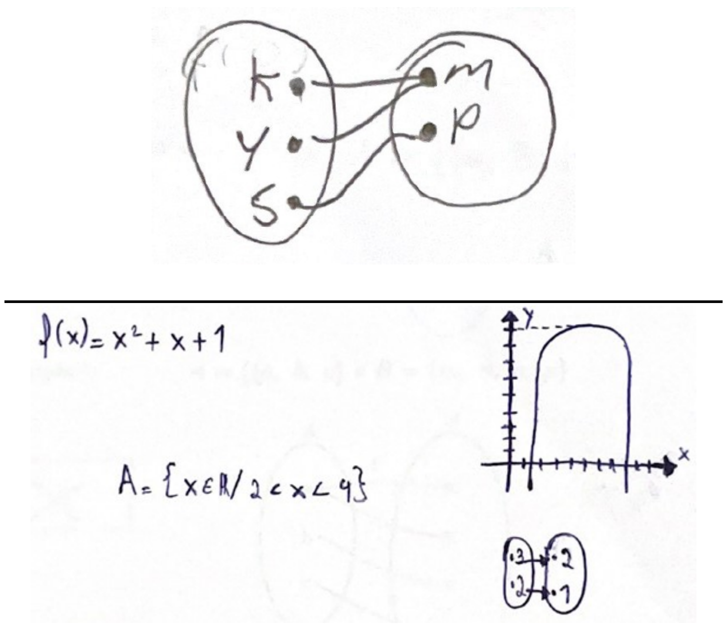
Destacamos que dois dos estudantes responderam “Não” para a existência de funções sem lei de formação e negaram a possibilidade de definir função somente por meio de uma lei de formação.

Perguntas 7 a 9 - Sobre representações e exemplos de funções

Na Pergunta 7, sobre quais representações de funções os estudantes conhecem, com opções para marcarem (mais de uma se assim achassem necessário), tivemos nas respostas 83,3% a opção “Gráficos no plano cartesiano”. A opção “Conjuntos de pares ordenados” apareceu em 33,3% das respostas e “Diagramas de Venn” em 16,7%. Sabemos da importância da linguagem de conjuntos na aprendizagem de funções, entender os conjuntos de pares ordenadosas, as representações por diagramas e gráficos são fundamentais para auxiliar uma boa aprendizagem do conceito de função. As respostas nos dão pistas que o foco das práticas escolares tendem ao estudo de gráficos de funções e que os alunos, de certa forma, estão familiarizados com algumas representações de funções.

Pedimos para os estudantes escreverem exemplos de funções, Pergunta 8. Em 50% das respostas vimos apenas notações de funções. E_{27} fez um exemplo com diagramas e E_{30}, apesar de escrever um exemplo apenas por notação, fez dois exemplos de fato, um por gráfico e outro por diagramas (Figura 46).

Figura 46: Estudantes E_{27} e E_{30}, Pergunta 8



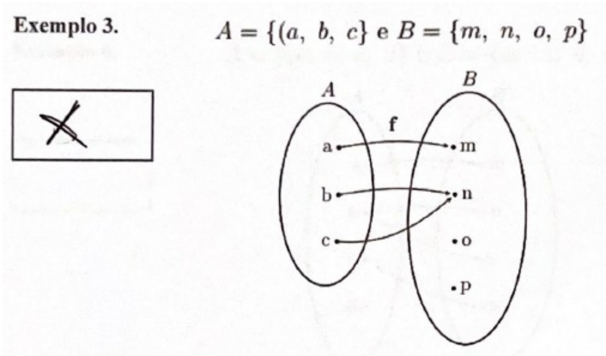
Fonte: Relatório de Pesquisa

Na Pergunta 9, apresentamos algumas situações em exemplos de relações (representadas por conjunto de pares ordenados, diagramas e planos cartesianos) para os quais pedimos que os estudantes marcassem com um "X" aquelas alternativas em estavam descritas funções f do conjunto A no conjunto B. Orientamos que escrevessem "não sei" se fosse o caso.

Houve três exemplos (4, 5 e 6) em que os alunos, predominantemente, deixaram em branco. Esses exemplos foram do tipo diagramas de Venn, onde no exemplo 4 existe um elemento no domínio com duas imagens no contradomínio associadas a ele, no exemplo 5 um elemento no domínio não tem imagem e no exemplo 6 possui um elemento com imagem dupla e outro sem imagem.

O exemplo com mais acertos foi o exemplo 3, com 40% de respostas corretas, como podemos ver uma resposta na Figura 47.

Figura 47: Estudante E_{21}, Pergunta 9, exemplo 3



Fonte: Relatório de Pesquisa

O exemplo que mais se destacou por ter respostas erradas foi o exemplo 1 da Pergunta 9, no qual 60% reponderam ser uma função. A relação f, do conjunto A no conjunto B, foi representada por um conjunto de pares ordenados, como tinha um elemento do conjunto A associado a duas imagens pertencentes ao conjunto B, não é uma função.

Apresentamos os resultados completos de todos os oito exemplos na seguinte Tabela 11.

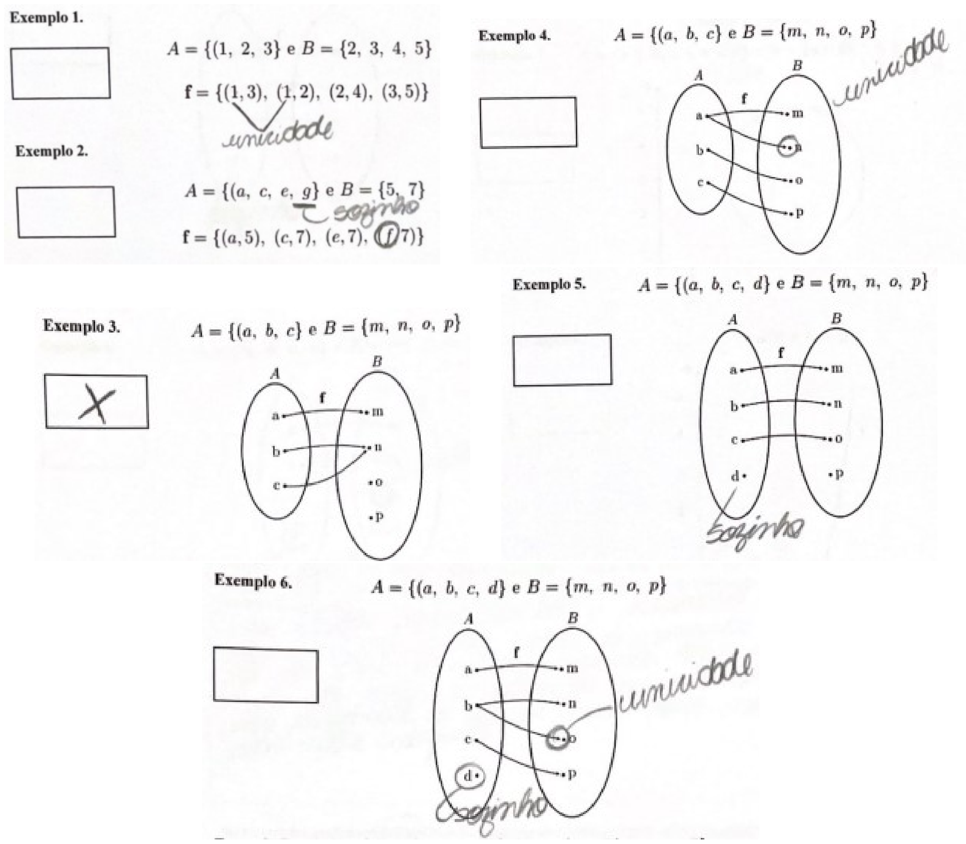
Tabela 11: Respostas dos estudantes, Pergunta 9

Exemplos	X	não sei	em branco
1	60%	23,3%	16,7%
2	26,7%	50%	23,3%
3 (f é função)	40%	20%	40%
4	43,3%	20%	36,7%
5	46,7%	13,3%	40%
6	33,3%	20%	46,7%
7	23,3%	50%	26,7%
8 (f é função)	36,7%	33,3%	26,7%

Fonte: Relatório de Pesquisa

Muito interessante a resposta de E_1, como podemos ver na Figura 48. Nas representações conseguiu perceber e destacar as características principais do conceito de função. No Exemplo 1, viu que $1 \in A$ possui duas imagens, portanto não tem unicidade na relação. No Exemplo 2, grifou que $g \in A$ não tem imagem, ou seja, fica “sozinho”, o mesmo para os Exemplos 5 e 6 com $d \in A$. Destacou que não podem ser funções os Exemplos 4 e 6 também pelo motivo de um elemento do domínio com duas imagens.

Figura 48: Estudante E_1, Pergunta 9



Fonte: Relatório de pesquisa

Pergunta 10 - Ponto de vista sobre estudar funções

Do ponto de vista dos estudantes, quando perguntamos sobre o estudo de funções, 02 acham muito importante, 10 importante, 12 razoavelmente importante, 05 pouco importante e 01 escolhe a opção não é importante. Isso evidencia que a maioria dos estudantes ingressantes no Ensino Médio tem conhecimento e percebe a importância do estudo de funções.

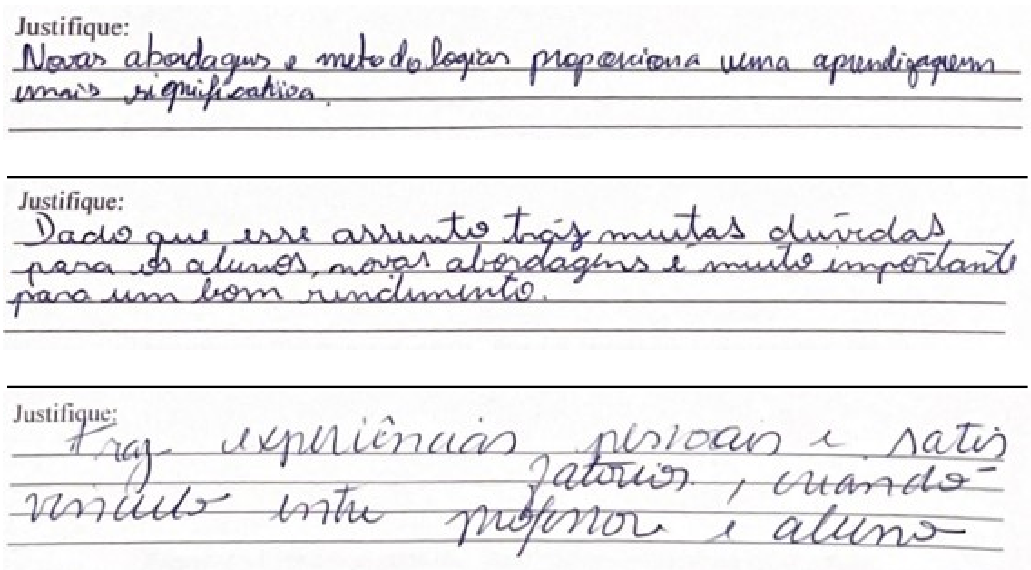
5.2 Parte II

5.2.1 Professores

Perguntas 17 e 18 - Sobre novas abordagens e metodologias no ensino de funções

Na Pergunta 17 pedimos aos professores que marcassem a alternativa que reflete a sua visão quanto a importância da utilização de novas abordagens e metodologias no ensino de função. Com isso, 03 acreditam ser plenamente importante (P_2, P_3 e P_{10}), 04 importante e 03 razoavelmente importante. Em sequência deixamos um espaço para uma justificativa. Interessante saber que, nas respostas de dois dos professores que responderam razoavelmente importante, é observado não haver detrimento dos conteúdos em razão das metodologias e que o mais necessário é uma maior dedicação dos estudantes. Na Figura 49 trazemos as justificativas dos professores P_2, P_3 e P_{10}.

Figura 49: Justificativas dos professores P_2, P_3 e P_{10} para a Pergunta 17



Justifique:
Novas abordagens e metodologias proporciona uma aprendizagem mais significativa.

Justifique:
Dado que esse assunto trás muitas dúvidas para os alunos, novas abordagens é muito importante para um bom rendimento.

Justifique:
Traz experiências pessoais e satisfatórias, criando vínculo entre professor e aluno

Fonte: Relatório de Pesquisa

Já a Pergunta 18 questionava se eles concordam e acreditam que metodologias que usem tecnologias digitais contribuem para o ensino-aprendizagem, 04 concordam totalmente, 05 concordam e 01 é indeciso.

Perguntas 19 a 21 - Sobre a metodologia de gamificação

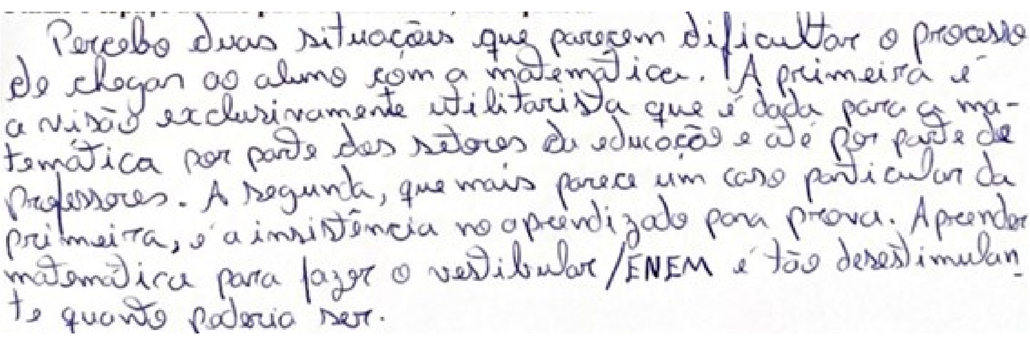
A Pergunta 19 buscava saber se os professorem conheciam a metodologia de gamificação. 09 dos professores sabem o que é a metodologia de gamificação e somente 01 disse desconhecer. Entre os que conhecem, 04 nunca utilizaram, 02 já utilizaram criando novos, 02 já utilizaram recursos prontos e 01 utilizou pelo menos uma vez. A Pergunta 20 era voltada a professores que não conhecem a metodologia de gamificação, nesse caso, teriam interesse em conhecer. O único professor que não conhece marcou que sim, tem interesse em conhecer.

Como última pergunta do questionário dos professores, Pergunta 21, questionamos se acreditam que um professor produzir uma sequência didática com tarefas que visem o ensino de funções associado à gamificação pode ser algo útil para auxiliar outros professores. 03 dos professores acreditam ser altamente relevante a proposta, 04 que é relevante, 01 que é medianamente relevante, 01 não é relevante e 01 não respondeu.

P_5 respondeu que não é relevante um professor produzir uma sequência didática com tarefas gamificadas para auxiliar outros professores e não justificou sua resposta. Não sabemos o porquê, mas pensamos que estudos que buscam contribuir com produtos educacionais podem ser significativos na procura de um ensino de matemática valioso e compartilhado.

Disponibilizamos um espaço no fim do questionário para comentários dos professores, caso quisessem. O professor P_8 deixou um comentário que descamos na Figura 50.

Figura 50: Comentário do professor P_8



Percebo duas situações que parecem dificultar o processo de chegar ao aluno com a matemática. A primeira é a visão exclusivamente utilitarista que é dada para a matemática por parte dos setores da educação e até por parte de professores. A segunda, que mais parece um caso particular da primeira, é a insistência no aprendizado para prova. Aprender matemática para fazer o vestibular/ENEM é tão desestimulante quanto poderia ser.

Fonte: Relatório de Pesquisa

5.2.2 Estudantes

Perguntas 11 e 12 - Sobre novas abordagens e metodologias no ensino de funções

Na Pergunta 11 indagamos, de acordo com a visão dos estudantes, sobre a importância da utilização de novas abordagens e metodologias no ensino de função. 30% acredita ser plenamente importante, 40% importante, 20% razoavelmente importante e 10% pouco importante. Também pedimos para justificarem sua resposta, como tivemos repostas muito interessantes, a seguir na Tabela 12 transcrevemos alguns exemplos. Nesses exemplos vemos estudantes conscientes da importância de novas abordagens e argumentando que o conteúdo de função será base para outros, que é tema de vestibulares e concursos, que mudando a forma de ensinar melhora o aprendizado, que despertam o interesse do aluno, que é bom conhecer novas rotas, entre outras.

Tabela 12: Exemplos de justificativas dos estudantes para a Pergunta 11, favoráveis a importância do uso e novas abordagens e metodologias no ensino de função

Estud.	**JUSTIFICATIVA DA PERGUNTA 11**
E_1	É de extrema importância, pois “funções” será um conteúdo base para outros conteúdos e seu ensino deve ser diversificado para que o aluno tenha uma melhor compreensão.
E_4	Apenas exercícios fica enjoativo e me faz perder o interesse.
E_8	Função ensina muito sobre comércio, relações entre grandezas e gráficos que posteriormente será necessário, logo uma nova abordagem para facilitar o entendimento é sempre bem-vinda.
E_{17}	Isso é importante para pessoas com dificuldade terem novas chances.
E_{21}	As vezes o estudante não consegue compreender da forma tradicional (quadro e pincel), nesse caso pode-se utilizar uma abordagem mais dinâmica referente a esse conteúdo.
E_{24}	Para melhorar o ensino, diferenciar as aulas, as explicações para que não fique uma aula repetitiva e chata. Tendo novos métodos de explicação e atividade talvez estimule mais os alunos a estudar e realizar as atividades.
E_{26}	Importante para se adquirir conhecimento ou até mesmo para prestar um concurso ou passar em um vestibular.
E_{27}	Pois sempre é bom conhecer outras rotas para o resultado.

Continua na próxima página

E_{29}	Pois é de extrema importância que todos tenham uma visão diferente do conhecimento do outro, por que as vezes as pessoas não entendem naquela abordagem mas trazendo nova abordagem essas pessoas entendam melhor.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Na Tabela 13 trazemos exemplos de justificativas de estudantes que ser razoavelmente ou pouco importante o uso de novas abordagens e metodologias no ensino de função.

Tabela 13: Exemplos de justificativas dos estudantes para a Pergunta 11, não totalmente favoráveis a importância do uso e novas abordagens e metodologias no ensino de função

Estud.	**JUSTIFICATIVA DA PERGUNTA 11**
E_{11}	Não usamos muito no dia a dia nosso.
E_{12}	Não é uma coisa que usa na vida adulta.
E_{15}	Não vejo necessidade em aprender função, pois como isso iria me ajudar no futuro? Mas contudo acho que o ideal seria aprender.
E_{25}	Depende, pois não usaremos novas metodologias ao decorrer da vida, apenas em provas, atividades e etc.

Fonte: Relatório de Pesquisa

Na Pergunta 12 sobre se eles concordam e acreditam que metodologias que usem tecnologias digitais contribuiem para o ensino-aprendizagem, 20% concordaram totalmente, 53,3% concordaram, 23,3% foram indecisos e um estudante não respondeu (3,3%). Vemos aí que a maioria, 73,3%, acreditam que sim, metodologias voltadas ao uso de tecnologias digitais ajudam no processo de ensinar e aprender.

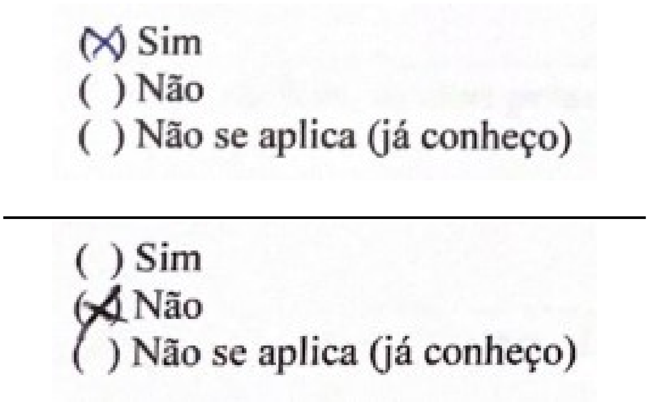
Perguntas 13 a 14 - Sobre a metodologia de gamificação

Em resposta a Pergunta 13, questionando se os estudantes conhecem a metodologia de gamificação, 86,7% disseram desconhecer, 6,7% sabem o que é, mas nunca vivenciaram um experiência, um estudante sabe o que é e vivenciou pelo menos uma esperiência (3,3%) e um estudante não respondeu (3,3%). A vista disso, percebemos que gamificação ainda não está totalmente difundida para o ensino, é uma potencialidade ainda pouco explorada.

Na Pergunta 14, onde queríamos saber o interesse em conhecer a metodologia de gamificação, caso não conhecessem. 88,5% tem o interesse em conhecer e 11,5%, mesmo não conhecendo, não tem o interesse.

E_3 não conhece a gamificação no ensino, mas tem interesse em conhecer. Já E_5, mesmo concordando que metodologias que usem tecnologias digitais contribuem para o ensino-aprendizagem e não conhecendo a metodologia de gamificação, marcou que não tem o interesse em conhecer. Veja Figura 51.

Figura 51: Interesse dos estudantes E_3 e E_5 em conhecer gamificação, Pergunta 14

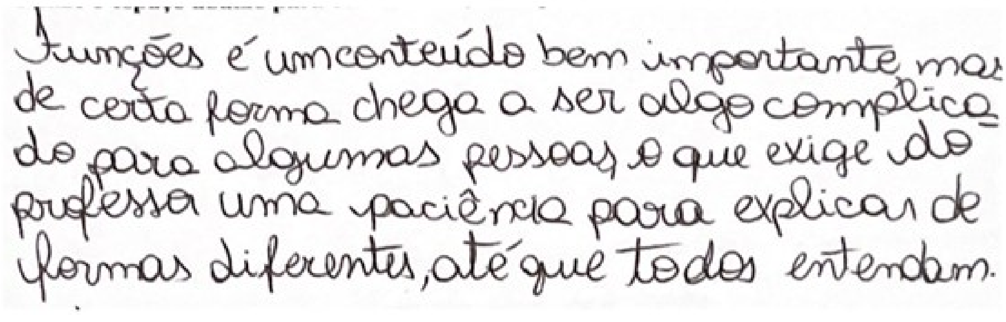

(X) Sim
( ) Não
( ) Não se aplica (já conheço)

( ) Sim
(X) Não
( ) Não se aplica (já conheço)

Fonte: Relatório de Pesquisa

No fim do questionário dos estudantes, também disponibilizamos um espaço para comentários, caso quisessem. O estudante E_{21} deixou um comentário que descamos na Figura 52.

Figura 52: Comentário do estudante E_{21}


Funções é umconteúdo bem importante mas
de certa forma chega a ser algo complica
do para algumas pessoas e que exige do
professor uma paciência para explicar de
formas diferentes, até que todos entendam.

Fonte: Relatório de pesquisa

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A referências consultadas fundamentaram todo o estudo e pesquisa. Com elas foi possível trabalhar o tema, a justificativa, o problema, as hipóteses e os objetivos. Consultamos os documentos curriculares da Educação Básica, primeiramente a BNCC analisando as competências gerais, as competências específicas de matemática e as habilidades ali previstas. Também o Documento Curricular para Goiás anos finais e etapa Ensino Médio trazendo os objetivos de aprendizagem e objetos de conhecimento. Fundamentamos a metodologia de gamificação no ensino, procurando esclarecer a metodologia em contraponto ao uso de jogos basicamente. Houve uma abordagem sobre como o conceito de função foram apresentados nos livros consultados. Foram consultadas e embasaram a construção e análise dos instrumentos de pesquisa elaborados e utilizados neste trabalho. No preparo da sequência didática as referências foram adequadas e nos guiaram em sua construção.

A partir do levantamento bibliográfico que trouxemos, elaboramos como instrumentos dois questionários aplicados a professores e estudantes da 1ª série do Ensino Médio. E elaboramos uma sequência didática como nova abordagem para o ensino do conceito de função, trabalhando uma tarefa gamificada. Refletimos sobre o ensino do conceito de função e possibilidades de abordagens. Exploramos alternativas para estudar funções, suas representações e exemplos em tarefas gamificadas; abordamos as funções afins e quadráticas na tarefa gamificada.

Ao finalizar a pesquisa, tivemos a oportunidade de compreender e aprender sobre o tema do ensino do conceito de funções para estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Conferimos como o tema é abordado antes, no 9º do Ensino Fundamental e depois, no Ensino Superior, nesse último caso, especialmente escolhemos livros comumente utilizados com estudantes em cursos de Licenciatura. Tendo como foco o início do Ensino Médio e, dada a análise da literatura, o estudo do tema e a busca de estratégias, foi possível entender as variações e perspectivas de como o conceito de função é apresentado por diversos autores. Conseguimos observar os pontos positivos e os negativos nos materiais pesquisados e, com isso, foi possível a ampliação do entendimento, dado que foram levantados questionamentos e tratados exemplos com a finalidade de entender o significato de uma função estar bem definida e sua apresentação em livros didáticos. Tivemos a oportunidade de apresentar o caminho metodológico de várias obras.

Do problema de pesquisa proposto, podemos dizer que houve a busca de uma solução ou saída em direção ao uso da metodologia de gamificação por meio de tecnologias digitais. Viabilizando um ambiente de estudo relevante a aprendizagem de funções. Com isso, variando a forma e modos de se ensinar, damos novas chances aos estudantes de aprendizado.

Para a hipótese levantada, esperamos que o material oferecido possa contribuir com sua validação, uma vez que os próprios documentos oficiais da Educação recomendam o uso das tecnologias digitais.

Também foram ouvidos estudantes e professores, que disseram que novas abordagens metodológicas que buscam o uso de tecnologias digitais e tarefas gamificadas podem melhorar o engajamento dos envolvidos e dão oportunidades no contexto do ensino. De fato, podemos ver a capacidade de melhora no ambiente de ensino usando novas abordagens que, sendo bem elaboradas e aplicadas, direcionam a um futuro onde cada vez mais as tecnologias se tornem próximas do ensino de matemática.

Caminhamos a fim de alcançar o objetivo geral proposto, o de abordar o ensino de conceitos relacionados às funções por meio de tarefas gamificadas a fim de promover oportunidades de aprendizagem em Matemática, isso atingido por meio da elaboração de uma sequência didática completa, com etapas estruturadas, onde uma delas é composta por uma tarefa gamificada em dois blocos (com quatro níveis desafiadores) praticada na plataforma digital *Scratch*. A sequência didática foi pensada de forma robusta e completa com estapas diversificadas para promover espaços de aprendizagens procurando atender todos os estudantes diagnosticando, recompondo e ampliando o conhecimento de funções.

Ainda, traçamos uma reflexão do conceito de função e as possibilidades de abordagens, explorados no desenvolvimento da pesquisa. Estudamos as funções, suas representações e exemplos com foco no conceito, utilizando tarefas gamificadas. As funções afim e quadrática foram exploradas em exercícios propostos na tarefa gamificada. Tudo isso foi possível com a formação de um banco de questões da tarefa gamificada, composto por 100 questões que incluíram a elaboração de 75 questões do tipo conceituais, de exemplos de relações ou funções discretas ou contínuas (representandas por meio de conjunto de pares ordenados, diagramas de Venn ou planos cartesianos), de leis descritas por extenso ou por equações, de domínios e contradomínios formados por elementos não numéricos, de monotonicidade e zero de funções afins, de vértice e zeros de funções quadráticas, de interseção entre funções afins e quadráticas e, 25 questões de provas do Enem dos anos de 2009-2023.

Essa pesquisa teve o olhar para as potencialidades das tecnologias digitais, da metodologia de gamificação e do rigor quanto ao conceito de função no Ensino Médio. Acreditamos que foi exitosa de acordo com sua execução e proposta. Defendemos que o cuidado e a precisão com o conceito de função como discutido nesse trabalho seja uma realidade não apenas no Ensino Superior, mas principalmente no Ensino Médio.

Referências

[1] ANDRADE, T. M. (ed.) **Matemática interligada**: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Obra coletiva. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

[2] BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

[3] BARRETO FILHO, B. SILVA, C. X. **Matemática**: Aula por aula. Volume único. São Paulo: FTD, 2000.

[4] BONJORNO, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R. SOUSA, P. R. C. **Matemática**: conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

[5] BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 17 maio. 2023.

[7] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Inep. **Provas e Gabaritos**. Brasília, 2009-2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 12 jul. 2024.

[8] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Inep. **RELATÓRIO DE RESULTADOS DO SAEB 2021**. Vol. 1. Brasília, 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>. Acesso em: 13 jul. 2024.

[9] CAMARGO, I. R. de; FORTUNATO, I. **O Scratch como auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de linguagem de programação**: um balanço da pós-graduação nacional entre 2010 e 2016. Revista on line de Política e Gestão Educacional, Araraquara, v. 22, n. 2, p. 608-626, maio/ago., 2018. ISSN: 1519-9029. DOI: 10.22633/rpge.v22.n2.maio/ago.2018.10754

[10] CEVADA, J. SILVA, D. R. PRADO, G. G. **Matemática nos dias de hoje**: 9º ano. 1. ed. São Paulo: sei, 2022.

[11] CHAVANTE, E. PRESTES, D. **Quadrante matemática e suas tecnologias**: funções. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2020.

[12] DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[13] DANTON, G. **Metodologia Científica**. Pará de Minas: VirtualBooks, 2002.

[14] DETERDING, S., et al. **From Game Design Elements to Gamefulness**: Defining Gamification. Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments, Nova Iorque. 2011.

[15] DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. (2004). **Sequências Didáticas para o oral e a escrita**: apresentação de um procedimento. In: Schneuwly, B; Dolz, J. et. al. Gêneros orais e escritos na escola, trad. Roxane Rojo; Glaís Sales Cordeiro. Campinas: Mercado de Letras.

[16] FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3a ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

[17] ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

[18] ÁVILA, G. **Introdução ao Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

[19] GOIÁS. Secretaria de Estado da Educação. **Documento Curricular para GOIÁS**. Goiânia, 2019. Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/files/documentos/PEDAGOGICO/Vol%20III%20Anos%20Finais.pdf>. Acesso em: 05 outubro. 2023.

[20] GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[21] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**: volume 1. LTC, 2001.

[22] HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. 1 vol. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[23] IEZZI, G. DOLCE, O. MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

[24] IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: conjuntos, funções. Vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

[25] KAHOOT! Plataforma de aprendizagem, 2012. Disponível em: <https://kahoot.com/>. Acesso em: 27 de fev. de 2024.

[26] KAPP, K. M. **The gamification of learning and instruction**: game-based methods and strategies for training and education. San Francisco, CA: Pfeiffer, 2012.

[27] KOSTER, R. **Theory of fun for game design**. "O'Reilly Media, Inc.", 2013.

[28] LIMA, E. L. **Curso de análise**: volume 1. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2022.

[29] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**: 1. vol. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[30] MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

[31] MICRO:BIT Educational Foundation, 2016. Disponível em: <https://microbit.org/>. Acesso em: 27 de fev. de 2024.

[32] MOREIRA, T. M. **Os tipos de pesquisa**. In: WINQUES, K. (Org.). **Nos Caminhos da Iniciação Científica**: guia para pesquisadores em formação. Joinville: Faculdade IELUSC, 2022.

[33] OLIVEIRA, C. N. C. FUGITA, F. **Geração alfa matemática**: 9º ano. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

[34] OLIVEIRA, M.M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

[35] PAIVA, M. R. **Matemática 1**. 2. ed. São Paulo : Moderna, 2010.

[36] PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, n. 15, p. 3-9, 1990.

[37] PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. Editora Senac. São Paulo, 2021.

[38] PROFMAT. **Banco de dissertações**. Rio de Janeiro. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 12 abr. de 2024.

[39] RIVERA, J. E. M. **Cálculo Diferencial & Integral I**. Rio de Janeiro: Petrópolis, 2007.

[40] SAVOYA, F. LALLI, M. RANCAN, G. SILVA, P. S. **Matemática em cena**: 9º ano. 1. ed. São Paulo: Wisdom, 2022.

[41] SCHEINERMAN, E. R. **Matematica discreta**. Tradução: 2 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[42] SCHUYTEMA, P. **Design de games**: uma abordagem prática. Cengage Learning, 2008.

[43] SCRATCH Foundation, 2024. Disponível em: <https://www.scratchfoundation.org/our-story>. Acesso em: 24 de jul. de 2024.

[44] SILVA, M. H. M. REZENDE, W. M. **Análise histórica do conceito de função**. Caderno Dá Licença, v. 2, p. 28-33, 1999.

[45] SILVA, A. R. L. da et al. **Gamificação na educação**. Pimenta Cultural. São Paulo, 2014.

[46] STEWART, J. **Cálculo**. 1. vol. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

[47] TEIXEIRA, L. A. (ed.) **Superação! Matemática**: 9º ano. Obra coletiva. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

[48] TEKINBAS, K. S.; ZIMMERMAN, Eric. **Rules of play**: Game design fundamentals. MIT press, 2003.

[49] THOMAS, G. B. **Cálculo**. 1. vol. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

[50] WERBACH, K.; HUNTER, D. **For the win**: The Power of GAMIFICATION and Game Thinking in Business, Education, Government, and Social Impact. Philadelphia: Wharton Digital Press, 2012.

[51] WINQUES, K. **Pesquisas qualitativas**. In: WINQUES, K. (Org.). **Nos Caminhos da Iniciação Científica**: guia para pesquisadores em formação. Joinville: Faculdade IELUSC, 2022.

[52] ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar, trad de Ernani F. da F. Rosa, Porto Alegre: Artmed, 1998.

[53] ZUFFI, E. M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Educação Matemática em Revista, v. 8, n. 9/10, p. 10-16, 2001.

APÊNDICE A - Instrumentos de coleta de dados

QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES

Professor(a), este questionário tem por objetivo coletar as perspectivas de professores de Matemática que atuam na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio. As perguntas não têm como base respostas certas ou erradas, a ideia é conhecer a realidade e as percepções de quem está atuando no Ensino de Matemática.

PARTE I

---

1. Sua formação é Licenciatura em Matemática?

( ) Sim
( ) Não
( ) Não, mas é área afim. Diga qual:

---

2. Qual seu nível de formação?

( ) Graduação
( ) Especialização
( ) Mestrado
( ) Doutorado

---

3. Quanto tempo você trabalha como professor de Matemática?

( ) menos de 3 anos
( ) de 3 a 5 anos
( ) de 5 a 10 anos
( ) mais de 10 anos

---

4. Qual percurso você utiliza para ensinar funções?

( ) Definição, zero da função e gráfico
( ) Conjuntos, Definição, tabela, gráfico e estudo dos sinais
( ) Conjuntos, Produto cartesiano, relação, função, zero, gráficos e estudo dos sinais
( ) Outro. Diga qual é:

5. Escreva sobre o percurso adotado por você na abordagem do ensino de funções.

6. Como você avalia o percurso apresentado pelo livro didático adotado ao abordar as funções? Avalie como são apresentadas a definição, as representações, os exemplos.

7. A respeito do conteúdo sobre funções, qual sua percepção quanto a aprendizagem dos estudantes ao final da primeira série do Ensino Médio?

( ) Abaixo do básico
( ) Básico
( ) Proficiente
( ) Avançado

8. Escreva, em sua opinião, as principais dificuldades encontradas pelos estudantes no processo de aprendizagem dos conteúdos sobre funções (o conceito, as representações, os exemplos...).

9. Escreva neste espaço o conceito de função da forma que você acredita ser mais pertinente na primeira série do Ensino Médio.

10. Escreva o conceito de função, utilizando uma ou mais das palavras ou expressões: conjunto, produto cartesiano, par ordenado, relação, grandeza, lei de formação, domínio, contradomínio, regra.

11. Na sua visão, podemos definir função somente por meio de uma lei de formação?

( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

Justifique:

12. Na sua visão, existem funções que não possuem lei de formação?

( ) Sim
( ) Não
( ) Não sei dizer

13. Cite possíveis representações para funções que você conhece.

14. Escreva formalmente alguns exemplos de funções.

15. Como você avalia, em relação à aprendizagem dos estudantes, o ensino de funções a partir de conceitos da linguagem da teoria de conjuntos, produtos cartesianos e relações entre conjuntos?

( ) Plenamente adequado
( ) Adequado
( ) Razoavelmente adequado
( ) Pouco adequado
( ) Inadequado

16. Como você avalia a importância do ensino de funções na primeira série do Ensino Médio?

( ) Plenamente importante
( ) Importante
( ) Razoavelmente importante
( ) Pouco importante
( ) Não é importante

PARTE II

---

17. Marque a alternativa que melhor reflete a sua visão sobre a importância de se utilizar novas abordagens e metodologias para o ensino de funções.

( ) Plenamente importante
( ) Importante
( ) Razoavelmente importante
( ) Pouco importante
( ) Não é importante

Justifique:

---

18. Você acredita que metodologias que usem tecnologias digitais contribuem para o ensino-aprendizagem?

( ) Concordo totalmente
( ) Concordo
( ) Indeciso
( ) Discordo
( ) Discordo totalmente

---

19. Você conhece a metodologia de gamificação?

( ) Desconheço
( ) Sei o que é, mas nunca utilizei
( ) Sei e já utilizei pelo menos uma vez
( ) Sei e já utilizei recursos prontos
( ) Sei e já utilizei criando novos

---

20. Caso você não conheça a metodologia de gamificação, tem interesse em conhecer?

( ) Sim
( ) Não
( ) Não se aplica (já conheço)

21. Você acredita que um professor produzir uma sequência didática com tarefas que visem o ensino de funções associado à gamificação pode ser algo útil para auxiliar outros professores?

( ) É altamente relevante.
( ) É relevante.
( ) É medianamente relevante.
( ) É de pouca relevância.
( ) Não é relevante.

Utilize o espaço abaixo para comentários, caso queira.

Chegamos ao fim do questionário. Desde já agradecemos sua colaboração. As respostas são muito importantes para essa pesquisa.

QUESTIONÁRIO PARA ESTUDANTES

Estudante, este questionário tem por objetivo coletar as perspectivas de estudantes do Ensino Médio. As perguntas não têm como base respostas certas ou erradas, a ideia é conhecer a realidade e as percepções de quem está estudando Matemática.

Por gentileza, responda as questões a seguir a partir de suas percepções e seus conhecimentos prévios, sem consulta a nenhum material ou outra pessoa.

PARTE I

---

1. A respeito dos conteúdos sobre funções, qual sua percepção quanto ao seu conhecimento.

( ) Muito pouco
( ) Pouco
( ) Médio
( ) Bom
( ) Muito bom

---

2. Escreva, se tiver, as suas principais dificuldades ao estudar os conteúdos sobre funções.

---

3. Escreva neste espaço, com suas palavras, o conceito de função.

---

4. Escreva o conceito de função, utilizando uma ou mais das palavras ou expressões: conjunto, produto cartesiano, par ordenado, relação, grandeza, lei de formação, domínio, contradomínio, regra.

---

5. Na sua visão, podemos definir função somente por meio de uma lei de formação?

( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

---

6. Na sua visão, existem funções que não possuem lei de formação?

( ) Sim
( ) Não
( ) Não sei dizer

---

7. Quais representações de funções você conhece? Pode marcar mais de uma opção.
( ) Conjuntos de pares ordenados
( ) Diagramas de Venn
( ) Gráficos no plano cartesiano
( ) Outra. Qual?

8. Escreva alguns exemplos de funções.

9. A seguir há alguns exemplos, para os quais pedimos que você marque em quais alternativas f é uma função do conjunto A no conjunto B. Faça um X no quadrinho. Se não souber, escreva "não sei".

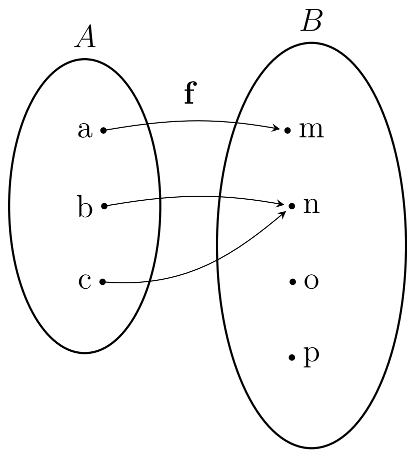
Exemplo 1. $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$$\mathbf{f} = \{(1,3),\ (1,2),\ (2,4),\ (3,5)\}$$

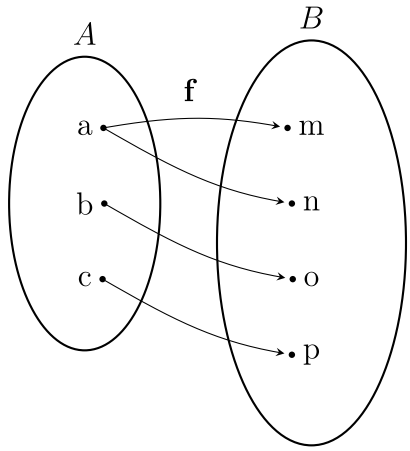
Exemplo 2. $A = \{a,\ c,\ e,\ g\}$ e $B = \{5,\ 7\}$

$$\mathbf{f} = \{(a,5),\ (c,7),\ (e,7),\ (f,7)\}$$

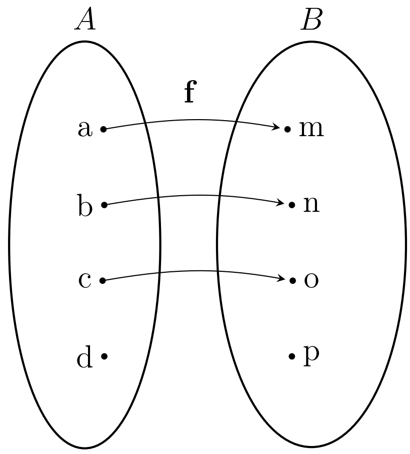
Exemplo 3. A={a, b, c} e B={m, n, o, p}



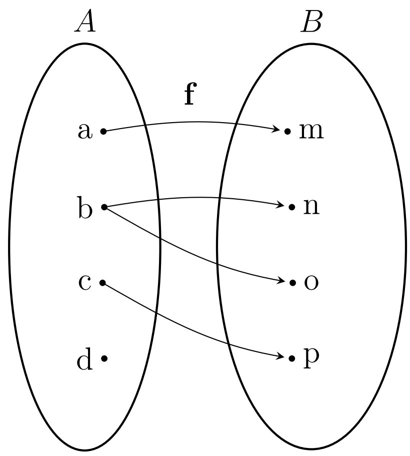
Exemplo 4. A={a, b, c} e B={m, n, o, p}



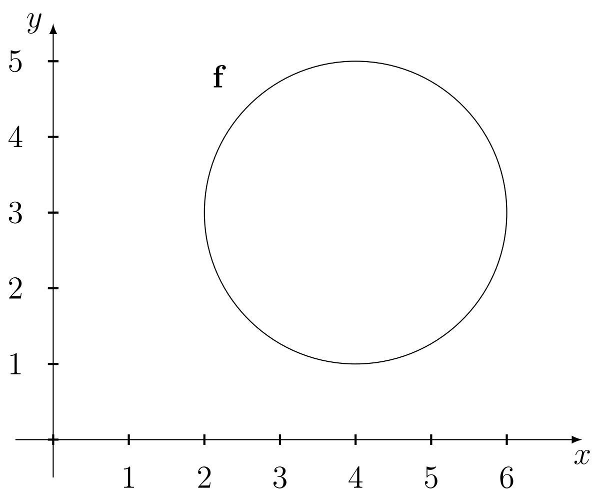
Exemplo 5. A={a, b, c, d} e B={m, n, o, p}



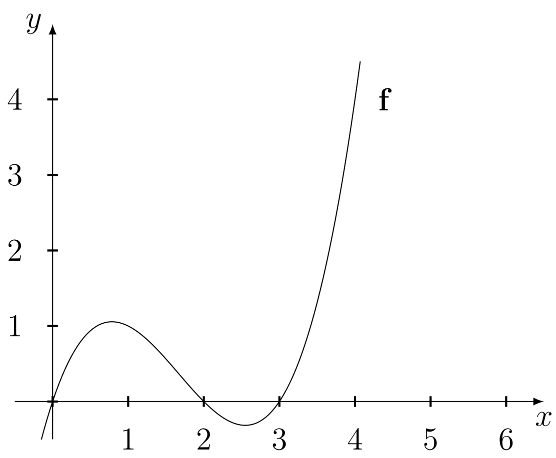
Exemplo 6. A={a, b, c, d} e B={m, n, o, p}



Exemplo 7. $A = \{x \in \mathbb{R} | \ 2 \leqslant x \leqslant 6\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | \ 1 \leqslant y \leqslant 5\}$



Exemplo 8. $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$



---

10. Estudar funções, do seu ponto de vista, é:

( ) Muito importante
( ) Importante
( ) Razoavelmente importante
( ) Pouco importante
( ) Não é importante.

PARTE II

---

11. Marque a alternativa que melhor reflete a sua visão sobre a importância de se utilizar novas abordagens e metodologias para o ensino de funções.
( ) Plenamente importante
( ) Importante
( ) Razoavelmente importante
( ) Pouco importante
( ) Não é importante

Justifique:

---

12. Você acredita que metodologias que usem tecnologias digitais contribuem para o ensino-aprendizagem?
( ) Concordo totalmente
( ) Concordo
( ) Indeciso
( ) Discordo
( ) Discordo totalmente

---

13. Você conhece gamificação no ensino?
( ) Desconheço
( ) Sei o que é, mas nunca vivenciei uma experiência com gamificação.
( ) Sei o que é e já vivenciei pelo menos uma experiência com gamificação.
( ) Sei o que é e já vivenciei várias experiências com gamificação.

---

14. Caso você não conheça a gamificação no ensino, tem interesse em conhecer?
( ) Sim
( ) Não
( ) Não se aplica (já conheço)

Utilize o espaço abaixo para comentários, caso queira.

Chegamos ao fim do questionário. Desde já agradecemos sua colaboração. As respostas são muito importantes para essa pesquisa.

APÊNDICE B - Atividades da sequência didática

Avaliação Diagnóstica

Matemática

BNCC: 2ª e 5ª competências específicas de matemática.

Conteúdos: Conjuntos, subconjuntos, união, intersecção, plano cartesiano, produto cartesiano e relação.

Orientações: essa avaliação tem por objetivo verificar a aprendizagem de conteúdos anteriores para auxiliar o professor no ensino de novos conteúdos. Responda as questões a seguir a partir de seus conhecimentos prévios, sem consulta a nenhum material ou outra pessoa.

1. [24] Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{x|\ x \text{ é letra da palavra matemática}\}$

   (b) $B = \{x|\ x \text{ é cor da bandeira brasileira}\}$

   (c) $C = \{x|\ x \text{ é nome de estado brasileiro que inicia com } a\}$

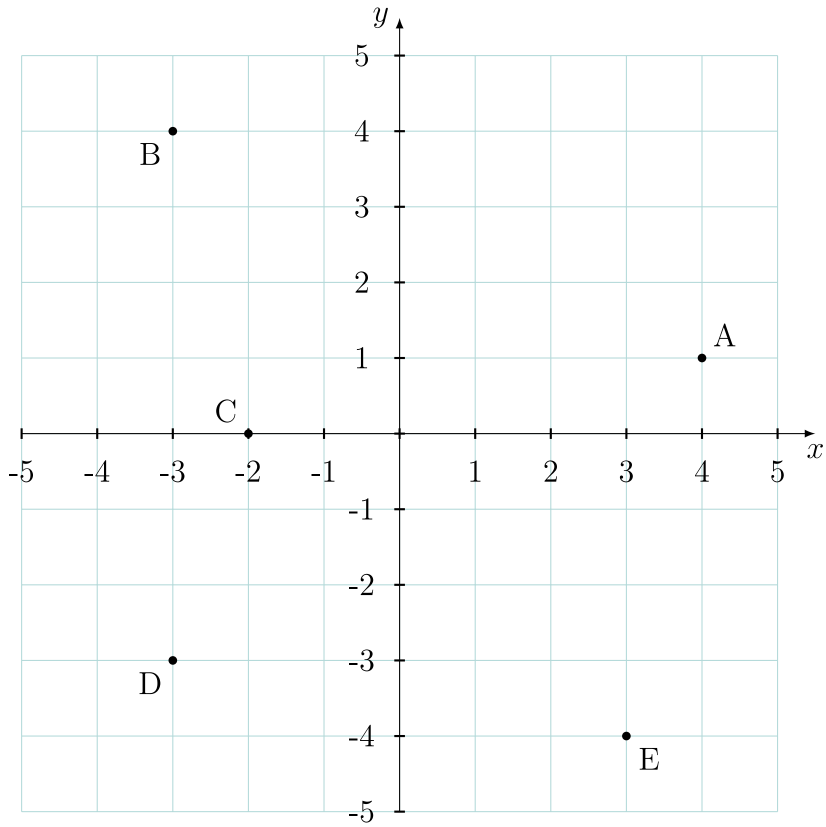
2. [24] Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

   (a) $A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...\}$

   (b) $B = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$

   (c) $C = \{Brasília,\ Rio\ de\ Janeiro,\ Salvador\}$

3. [24] Indique as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano a seguir.



4. [24] Dados os conjuntos

$$A = \{1,\ 3,\ 4\}$$

$$B = \{-2,\ 1\}$$

represente pelos elementos os seguintes produtos cartesianos:

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) A^2

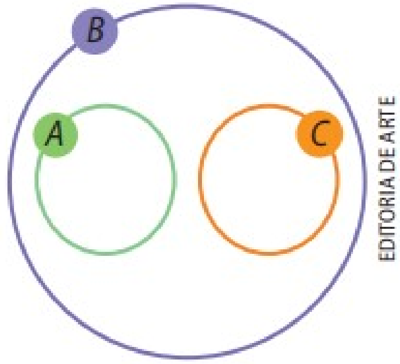
(d) B^2

5. [24] Enumere os pares ordenados e represente por meio de diagramas as relações de $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ em $B = \{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ definidas por:

(a) $x + y = 2$

(b) $x^2 = y$

6. [4] No diagrama a seguir, A, B e C são três conjuntos não vazios.



Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa.

(a) $A \subset B$

(b) $C \subset B$

(c) $B \subset A$

(d) $A \subset C$

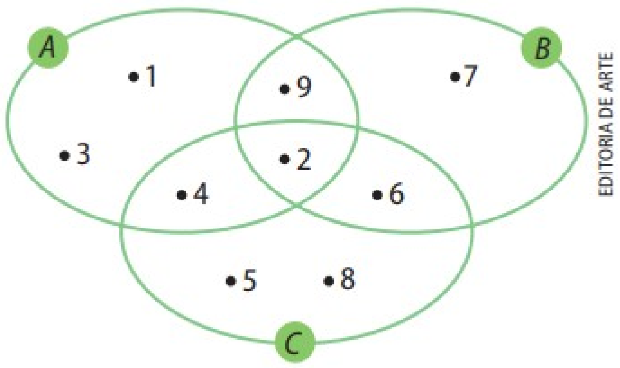
(e) $B \not\subset A$

(f) $A \not\subset C$

(g) $B \supset A$

(h) $A \not\supset B$

7. [4] Considere o diagrama a seguir.



Determine:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cup C$

(c) $A \cup B \cup C$

(d) $B \cap C$

(e) $A \cap B \cap C$

(f) $A - C$

(g) $(A \cap C) - B$

8. [4] (Fuvest-SP) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

   I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

   II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

   III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês; IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

   V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

   VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e

   VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

   A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

   (a) 44
   (b) 46
   (c) 47
   (d) 48
   (e) 49

9. [4] (FGV-SP) Uma pesquisa de mercado sobre determinado eletrodoméstico mostrou que 37% dos entrevistados preferem a marca X, 40% preferem a marca Y, 30% preferem a marca Z, 25% preferem X e Y, 8% preferem Y e Z, 3% preferem X e Z e 1% prefere as três marcas. Considerando que há os que não preferem nenhuma das três marcas, a porcentagem dos que não preferem nem X nem Y é:

   (a) 20%
   (b) 23%
   (c) 30%
   (d) 42%
   (e) 48%

10. [4] (UEG-GO) Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é a

    (a) 124

    (b) 250

    (c) 525

    (d) 527

    (e) 775

Referências

[4] BONJORNO, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R. SOUSA, P. R. C. **Matemática**: conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

[24] IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: conjuntos, funções. Vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

Devolutiva

Avaliação Diagnóstica

1. [24] Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{m,\ a,\ t,\ e,\ i,\ c\}$

   (b) $B = \{verde,\ amarela,\ azul,\ branco\}$

   (c) $C = \{Acre,\ Alagoas,\ Amapá,\ Amazonas\}$

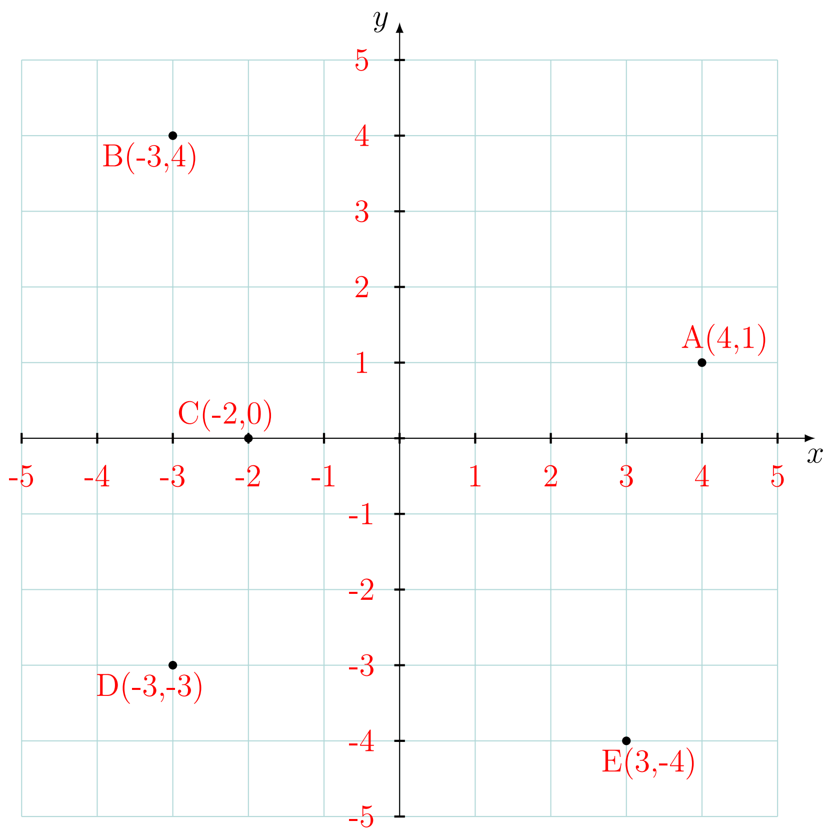
2. [24] Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

   (a) $A = \{x|\ x\ é\ inteiro,\ par\ e\ náo\ negativo\}$

   (b) $B = \{x|\ x\ é\ algarismo\ arábico\}$

   (c) $C = \{x|\ x\ é\ nome\ da\ cidade\ que\ já\ foi\ capital\ do\ Brasil\}$

3. [24] Indique as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano a seguir.



4. [24] Dados os conjuntos

$$A = \{1,\ 3,\ 4\}$$

$$B = \{-2,\ 1\}$$

represente pelos elementos os seguintes produtos cartesianos:

(a) $A \times B = \{(1, -2),\ (1,\ 1),\ (3, -2),\ (3,\ 1),\ (4, -2),\ (4,\ 1)\}$

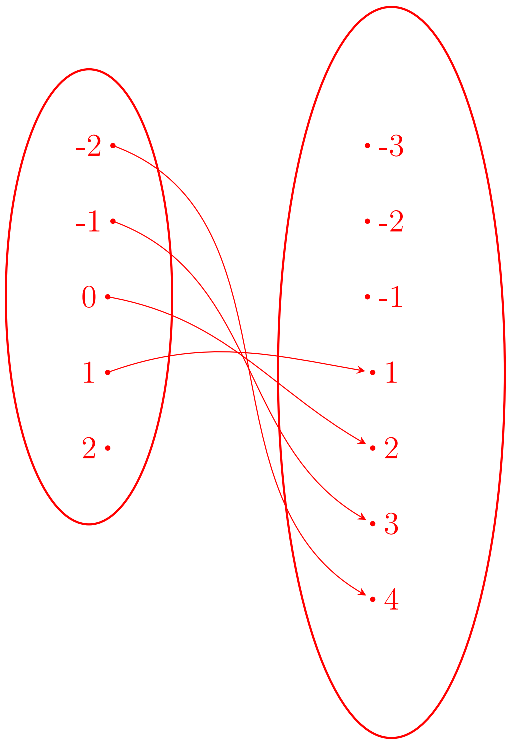
(b) $B \times A = \{(-2,\ 1),\ (-2,\ 3),\ (-2,\ 4),\ (1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4)\}$

(c) $A^2 = \{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\}$

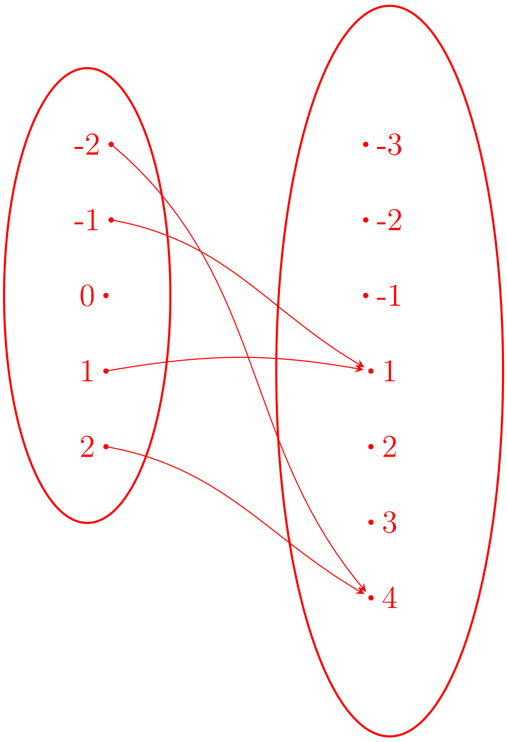
(d) $B^2 = \{(-2, -2),\ (-2,\ 1),\ (1, -2),\ (1,\ 1)\}$

5. [24] Enumere os pares ordenados e represente por meio de diagramas as relações de $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ em $B = \{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ definidas por:

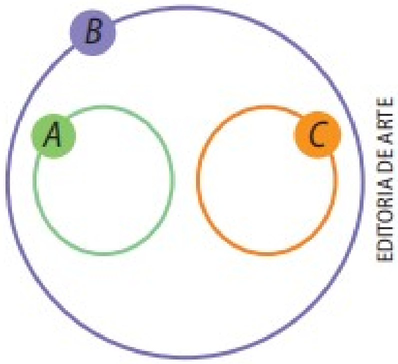
(a) $\{(-2,\ 4),\ (-1,\ 3),\ (0,\ 2),\ (1,\ 1)\}$



(b) $\{(-2,\ 4),\ (2,\ 4),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 1)\}$



6. [4] No diagrama a seguir, A, B e C são três conjuntos não vazios.



Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa.

(a) V

(b) V

(c) F

(d) F

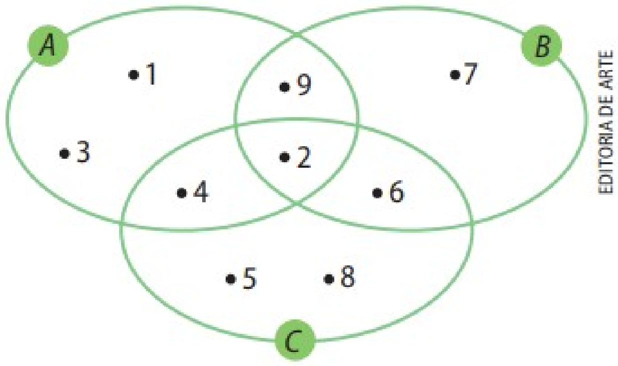
(e) V

(f) V

(g) V

(h) V

7. [4] Considere o diagrama a seguir.



Determine:

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

(b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

(c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(d) $B \cap C = \{2, 6\}$

(e) $A \cap B \cap C = \{2\}$

(f) $A - C = \{1, 3, 9\}$

(g) $(A \cap C) - B = \{4\}$

8. [4] (Fuvest-SP) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;

II. 16 não obtiveram nota mínima em português;

III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês; IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;

V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;

VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e

VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

(a) 44
(b) 46
(c) 47
(d) 48
(e) 49

9. [4] (FGV-SP) Uma pesquisa de mercado sobre determinado eletrodoméstico mostrou que 37% dos entrevistados preferem a marca X, 40% preferem a marca Y, 30% preferem a marca Z, 25% preferem X e Y, 8% preferem Y e Z, 3% preferem X e Z e 1% prefere as três marcas. Considerando que há os que não preferem nenhuma das três marcas, a porcentagem dos que não preferem nem X nem Y é:

   (a) 20%
   (b) 23%
   (c) 30%
   (d) 42%
   (e) 48%

10. [4] (UEG-GO) Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é a

   (a) 124
   (b) 250
   (c) 525
   (d) 527
   (e) 775

Referências

[4] BONJORNO, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R. SOUSA, P. R. C. **Matemática**: conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

[24] IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: conjuntos, funções. Vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

Estudo Dirigido

Revisão

Primeira parte: Leia atentamente os capítulos II e IV sobre Conjuntos e Relações do livro:

[24] IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: conjuntos, funções. Vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

Segunda parte: Resolva os exercícios da lista a seguir.

1. [24] Dados $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{2,\ 4\}$,
   (a) escreva com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:
      i. 3 é elemento de A
      ii. 1 não está em B
      iii. B é parte de A
      iv. B é igual a A
      v. 4 pertence a B
   (b) classifique as sentenças anteriores em falsa ou verdadeira.
2. [24] Sendo $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 3\}$, $C = \{1,\ 3,\ 4\}$ e $D = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, classifique em V ou F cada sentença abaixo e justifique.
   (a) $A \subset D$
   (b) $A \subset B$
   (c) $B \subset C$
   (d) $D \supset B$
   (e) $C = D$
   (f) $A \not\subset C$
3. [24] Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C, D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.
4. [24] Construa o conjunto das partes do conjunto $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$.
5. [24] Dados os conjuntos $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{c,\ d\}$ e $C = \{c,\ e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

6. [24] Dados os conjuntos $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{b,\ c,\ d,\ e\}$ e $C = \{c,\ e,\ f\}$, determine $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

7. [24] Assinale no plano cartesiano os pontos: $A(2, -3)$, $B(0, -4)$, $C(-4, -5)$, $D(-1,\ 0)$, $E(0,\ 5)$, $F(5,\ 4)$, $G(3,\ 0)$, $H(-3,\ 2)$, $I(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

8. [24] Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} |\ -2 \leqslant x \leqslant 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} |\ -4 \leqslant x \leqslant 1\}$$

represente graficamente os seguintes produtos cartesianos:

(a) $A \times B$

(b) $A \times C$

(c) $B \times C$

(d) $C \times B$

(e) A^2

(f) C^2

9. [24] Sejam os conjuntos $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x = y^2.$$

(a) Enumere os pares ordenados de R.

(b) Enumere os elementos do domínio e da imagem de R.

(c) Faça o gráfico cartesiano de R.

10. [24] Se R é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leqslant x \leqslant 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} |\ 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, definida por

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x = 2y$$

forneça:

(a) a representação cartesiana de $A \times B$;

(b) a representação cartesiana de R;

(c) o domínio e a imagem de R.

Plano de aula

Textos

Tema: Contextualização histórica e aplicações de Funções.

Objetivo: Compreender a história do conceito de Função e conhecer possíveis aplicações.

Habilidade: Adquirir um breve repertório sobre a história do conceito de função e suas aplicações.

Conteúdos: Desenvolvimento do conceito de função e aplicações.

Metodologia: Roda de conversa para a leitura, discussão e levantamento de questões.

Recurso: Material impresso.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Avaliações: Realização das tarefas propostas e participação contínua em sala de aula.

Texto 1

Evolução de alguns conceitos básicos

[...]

A história do termo função proporciona outro exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos. A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Esta última ideia corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de matemática tem. O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação: Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é umafunção (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função.

[...]

O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Editora da UNICAMP, 2008, p. 659-661.

1. De forma geral, como foi a construção do conceito de Função?

2. Segundo o texto, qual a importância do estudo do conceito de Função para a formação de estudantes?

Texto 2

Funções: Uma visão geral.

A necessidade de relacionar dados, descrever fenômenos da natureza, fenômenos físicos, dentre outros, despertou no ser humano ao longo dos anos o interesse pelo estudo de alguma ferramenta que possibilitasse a compreensão desses acontecimentos.

O estudo das funções é de grande importância na Matemática e em várias outras áreas, pois as funções são usadas para descrever e modelar muitos fenômenos e processos em diversas áreas, incluindo Física, Engenharia, Economia, Biologia, Química, Ciência da Computação e outras. As funções são essenciais para a compreensão da Matemática em geral, pois elas fornecem uma estrutura para analisar relações entre variáveis, tendo inúmeras aplicações práticas em muitas áreas do conhecimento, como as que seguem.

Modelagem: As funções são frequentemente usadas para modelar fenômenos do mundo real, como o movimento de objetos, a evolução de populações, o crescimento de culturas bacterianas e muitos outros. O estudo das funções permite que os pesquisadores desenvolvam modelos matemáticos precisos que podem ser usados para prever e entender melhor esses fenômenos.

Análise de dados: O estudo das funções é essencial para a análise de dados em muitas áreas, como Estatística e Ciência de Dados. As funções são usadas para descrever relações entre variáveis e para identificar padrões em conjuntos de dados.

Cálculo: As funções são fundamentais para o Cálculo, que é uma das áreas mais importantes da Matemática. O Cálculo é usado para estudar as propriedades das funções e para resolver problemas relacionados a limites, derivadas e integrais.

Engenharia: As funções são usadas em muitas áreas da Engenharia, incluindo Engenharia Mecânica, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil. As funções são usadas para modelar sistemas físicos e para analisar dados de experimentos e simulações.

Programação de computadores: As funções são usadas na programação de computadores para criar algoritmos e para desenvolver programas que realizam tarefas específicas. As funções são fundamentais para a estruturação do código e para a criação de programas.

FUNÇÕES: uma visão geral. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-funcoes-uma-visao-geral/>. Acesso em: 26 de ago de 2024.

1. De acordo com o texto, quais são as utilidades do estudo de Funções?
2. Cite exemplos de aplicações do conceito de Funções.

Plano de aulas

Teórica

Tema: Noção e conceito de Função

OBJETOS DE CONHECIMENTO: Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas; Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas; Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc; Análise e construção de gráficos.

HABILIDADES DA BNCC: (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: (GO-EMMAT101A) Interpretar dados e informações (econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza) que envolvam a variação entre grandezas, pesquisando e analisando gráficos (funções e/ou taxas de variação) para avaliar situações gerais relativas ao cotidiano. (GO-EMMAT101B) Resolver situações problemas que envolvam a matemática (econômicos, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza), sintetizando conhecimentos, situações apresentadas em jornais, revistas, sites de notícia etc. para modelar/propor soluções/alternativas relacionadas com as políticas e estratégias sociais direitos sociais, riscos, contingências e necessidades. (GO-EMMAT101C) Analisar gráficos (velocidade x tempo; espaço x tempo; aceleração x velocidade), utilizando gráficos da Mecânica (Física) para compreender situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza. (GO-EMMAT510A) Pesquisar situações relacionadas às leis de formação ou funções em temas voltados a natureza socioeconômicas, técnico científica etc. registrando os dados relativos ao comportamento das variáveis investigadas para construir gráficos que possibilitem tomadas de decisões posteriores. (GO-EMMAT510B) Construir gráficos de funções diversas de- finidas pela relação entre duas grandezas, utilizando dados apresentados em tabelas para inferir sobre a natureza das grandezas envolvidas. (GO-EMMAT510C) Investigar (com ou sem o apoio de tecnologias) dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, analisando as relações e variações estabelecidas entre as mesmas para descrever (oralmente ou por meio de textos - verbais, gráficos, esquemáticos entre outros) a relação observada.

Metodologias: Aula expositiva e dialogada, resolução de lista de exercícios e caminhada pedagógica. Professor intinerante ajudando com dicas e tirando dúvidas.

Recursos: Quadro e pincéis, material impresso.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Avaliações: Realização das tarefas propostas e participação contínua em sala de aula.

Plano de aulas

Teórica

Tema: Função Afim

OBJETOS DE CONHECIMENTO: Funções polinomiais do 1º grau (função afim, função linear, função constante, função identidade); Gráficos de funções; Taxa de variação de funções polinomiais do 1º grau.

HABILIDADES DA BNCC: (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: (GO-EMMAT501A) Compreender o conceito de função polinomial do 1º grau, identificando a relação entre duas variáveis apresentadas em textos de origem socioeconômicas e/ou de natureza técnico ou científica, entre outros para resolver situações problemas do cotidiano. (GO-EMMAT501B) Identificar possíveis leis de formação que se estabelecem da relação entre duas grandezas, analisando conjecturas apresentadas em quadros e/ou tabelas para expressar algebricamente as generalizações que se definem da relação entre duas grandezas. (GO-EMMAT501C) Modelar situações relacionadas as leis de formação definidas no campo das funções polinomiais do 1º grau, representando no plano cartesiano os dados apresentados em quadros e/ou tabelas para analisar situações que possibilitem a tomada de decisões. (GO-EMMAT501D) Compreender as relações estabelecidas entre duas grandezas, analisando os dados e informações apresentadas em quadros e tabelas para construir gráficos de funções polinomiais do 1º grau. (GO-EMMAT501E) Investigar relações entre números expressos em tabelas simples, identificando padrões e criando conjecturas para representar pontos no plano cartesiano.

Metodologias: Aula expositiva e dialogada, resolução de lista de exercícios e caminhada pedagógica. Professor intinerante ajudando com dicas e tirando dúvidas.

Recursos: Quadro e pincéis, material impresso.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Avaliações: Realização das tarefas propostas e participação contínua em sala de aula.

Plano de aulas

Teórica

Tema: Função Quadrática

OBJETOS DE CONHECIMENTO: Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática): gráfico, raízes, pontos de máximo mínimo, crescimento decrescimento, concavidade Gráficos de funções.

HABILIDADES DA BNCC: (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: (GO-EMMAT502A) Reconhecer as relações existentes entre duas grandezas, diretamente proporcional ao quadrado da outra dentro de textos técnicos e/ou científicos, relacionando gráficos para resolver problemas do cotidiano. GOEMMAT502B) Modelar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas quadráticas, observando dados numa tabela para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT502C) Selecionar números expressos em tabelas, identificando padrões para expressar graficamente essa generalização no plano cartesiano. (GO-EMMAT502D) Identificar padrões e criar conjecturas, utilizando dados de tabelas e gráficos para expressar algebricamente uma função polinomial do 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Metodologias: Aula expositiva e dialogada, resolução de lista de exercícios e caminhada pedagógica. Professor intinerante ajudando com dicas e tirando dúvidas.

Recursos: Quadro e pincéis, material impresso.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Avaliações: Realização das tarefas propostas e participação contínua em sala de aula.

Plano de aula

Prática

Tema: O conceito de função, função afim e quadrática.

Objetivo: Treinar os conteúdos estudados nas aulas teóricas.

HABILIDADES DA BNCC: (EM13MAT101), (EM13MAT510), (EM13MAT501) e (EM13MAT502).

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: (GO-EM13MAT101), (GO-EM13MAT510), (GO-EM13MAT501) e (GO-EM13MAT502).

Metodologias: Aula prática com o uso de computador e tarefa gamificada.

Recursos: Computadores conectados a internet.

Duração: 1 aulas de 50 minutos.

Avaliações: Participação e realização da tarefa proposta.

Plano de aula

Aprofundamento

Tema: O conceito de função, função afim e quadrática.

Objetivo: Fixar os conteúdos estudados durante as aulas.

HABILIDADES DA BNCC: (EM13MAT101), (EM13MAT510), (EM13MAT501) e (EM13MAT502).

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: (GO-EM13MAT101), (GO-EM13MAT510), (GO-EM13MAT501) e (GO-EM13MAT502).

Metodologias: Aula expositiva e dialogada, resolução de exercícios.

Recursos: Quadro e pincéis.

Duração: 1 aulas de 50 minutos.

Avaliações: Participação e realização da tarefa proposta.

Avaliação Final

Matemática

BNCC: 1ª e 5ª competências específicas de matemática.

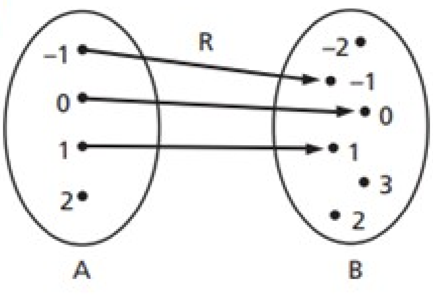
Conteúdos: O conceito de função, função afim e quadrática.

Orientações: essa avaliação tem por objetivo verificar a aprendizagem dos conteúdos estudados durante a sequência de aulas. Responda as questões a seguir a partir de seus conhecimentos prévios, sem consulta a nenhum material ou outra pessoa.

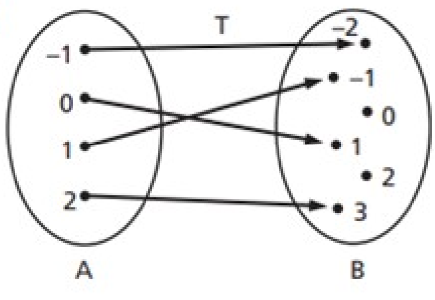
1. [24] Escreva a definição de função.

2. [24] Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de A = {-1, 0, 1, 2} em B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3}. Justifique.

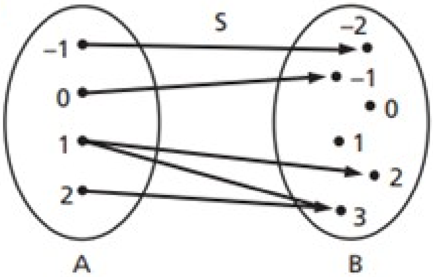
a)



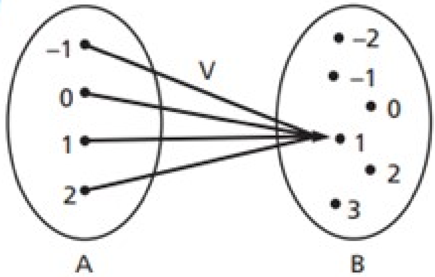
c)



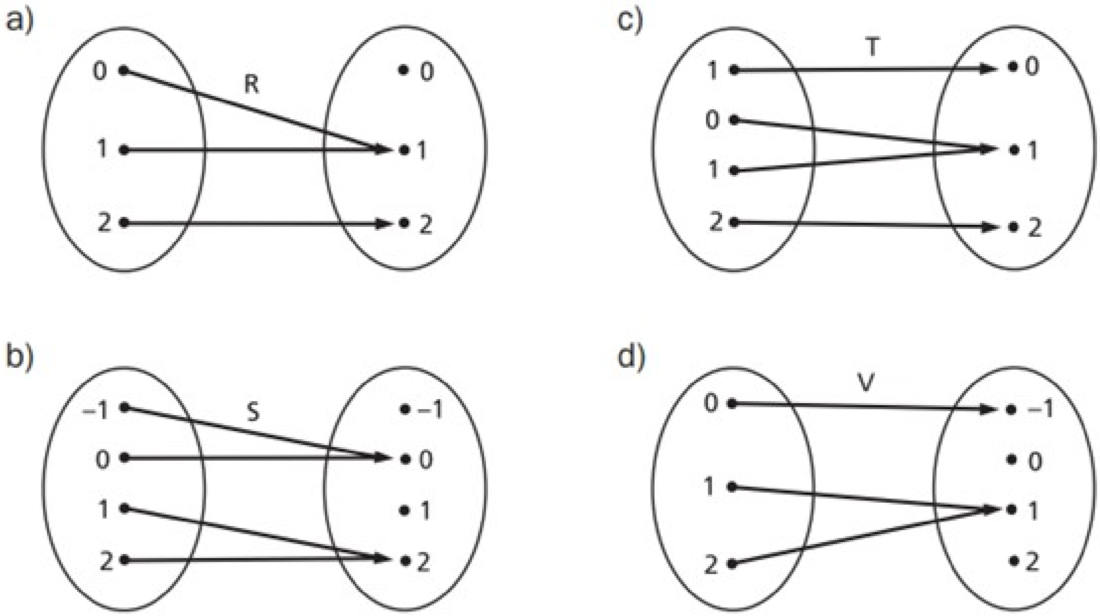
b)



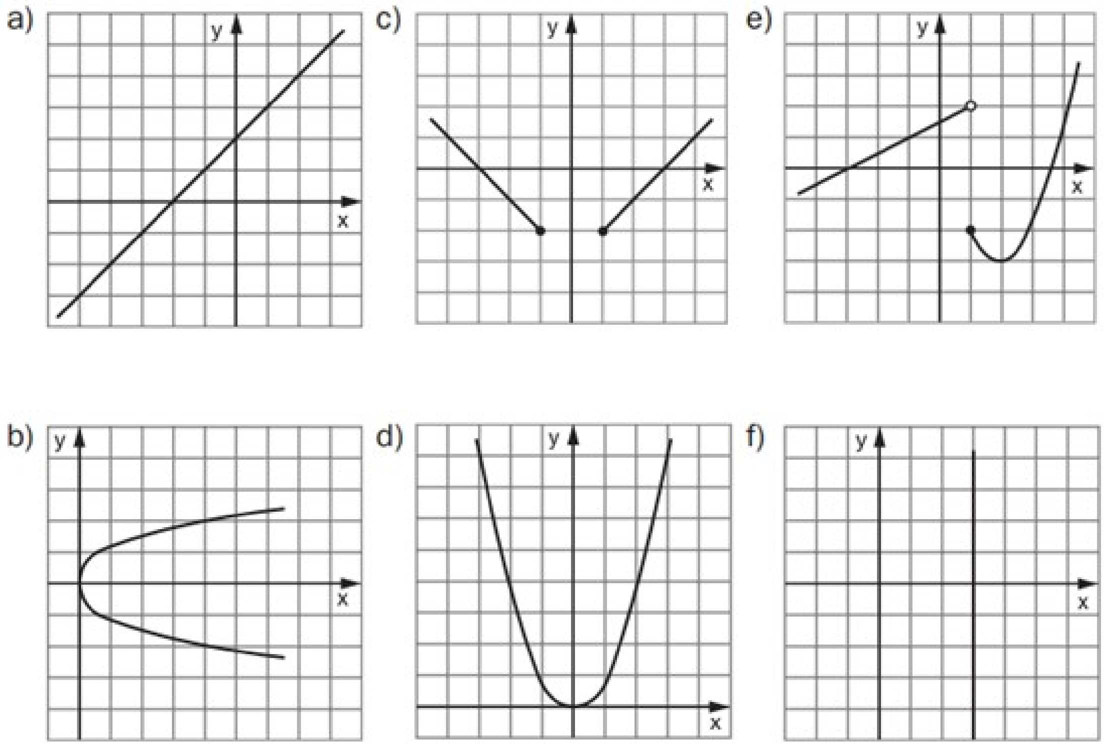
d)



3. [24] Quais dos esquemas abaixo definem uma função de A = {0, 1, 2} em B = {-1, 0, 1, 2}?

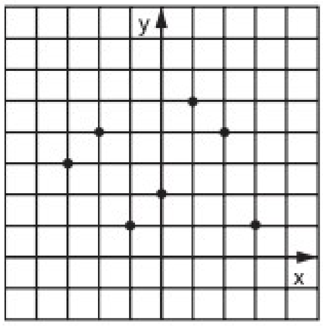


4. [24] Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

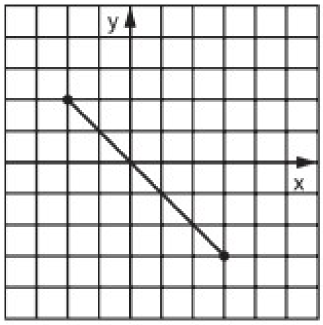


5. [24] . Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabeleça o domínio e a imagem.

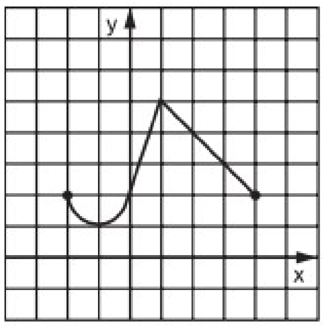
a)



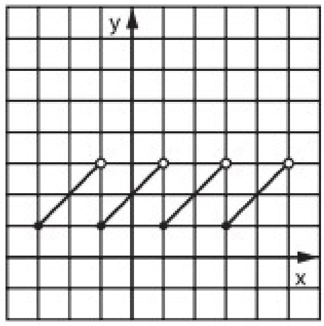
b)



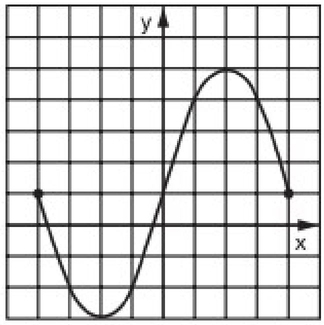
c)



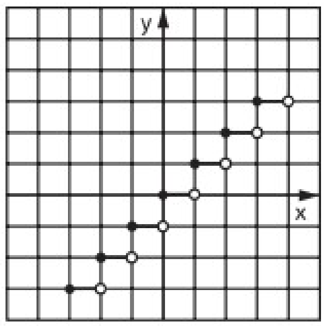
d)



e)



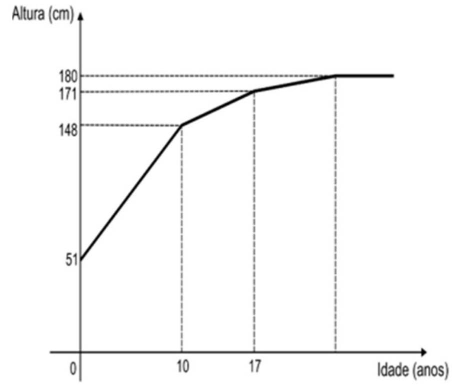
f)



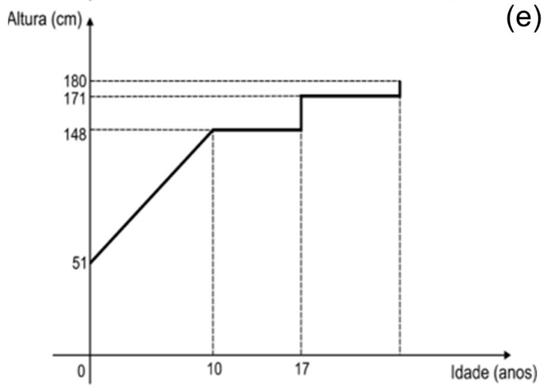
6. [7] **(Enem 2010, prova rosa, questão 142)** Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

   Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

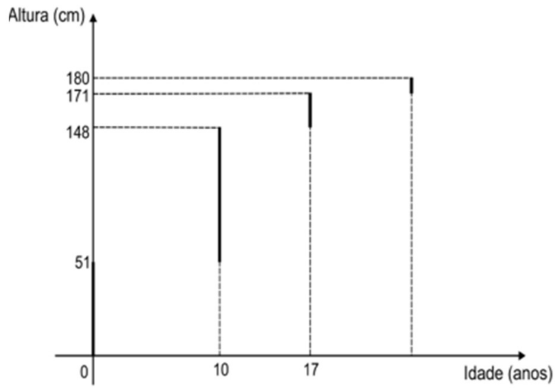
(a)



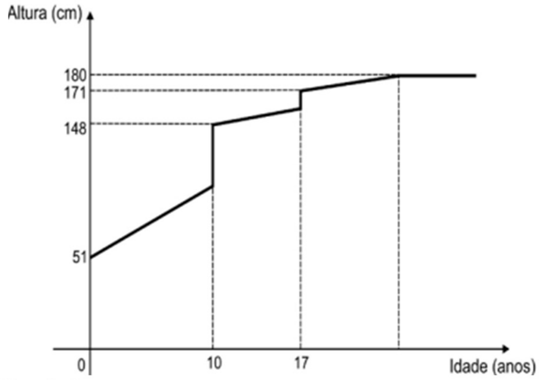
(b)



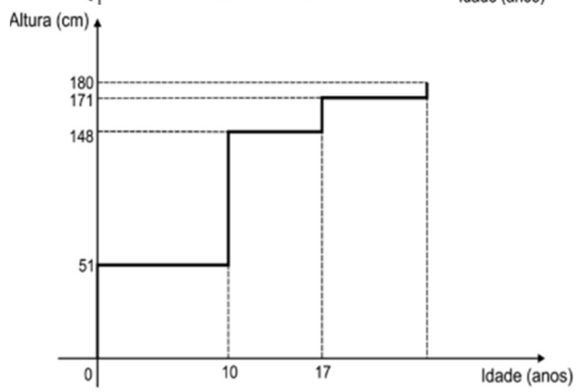
(c)



(d)

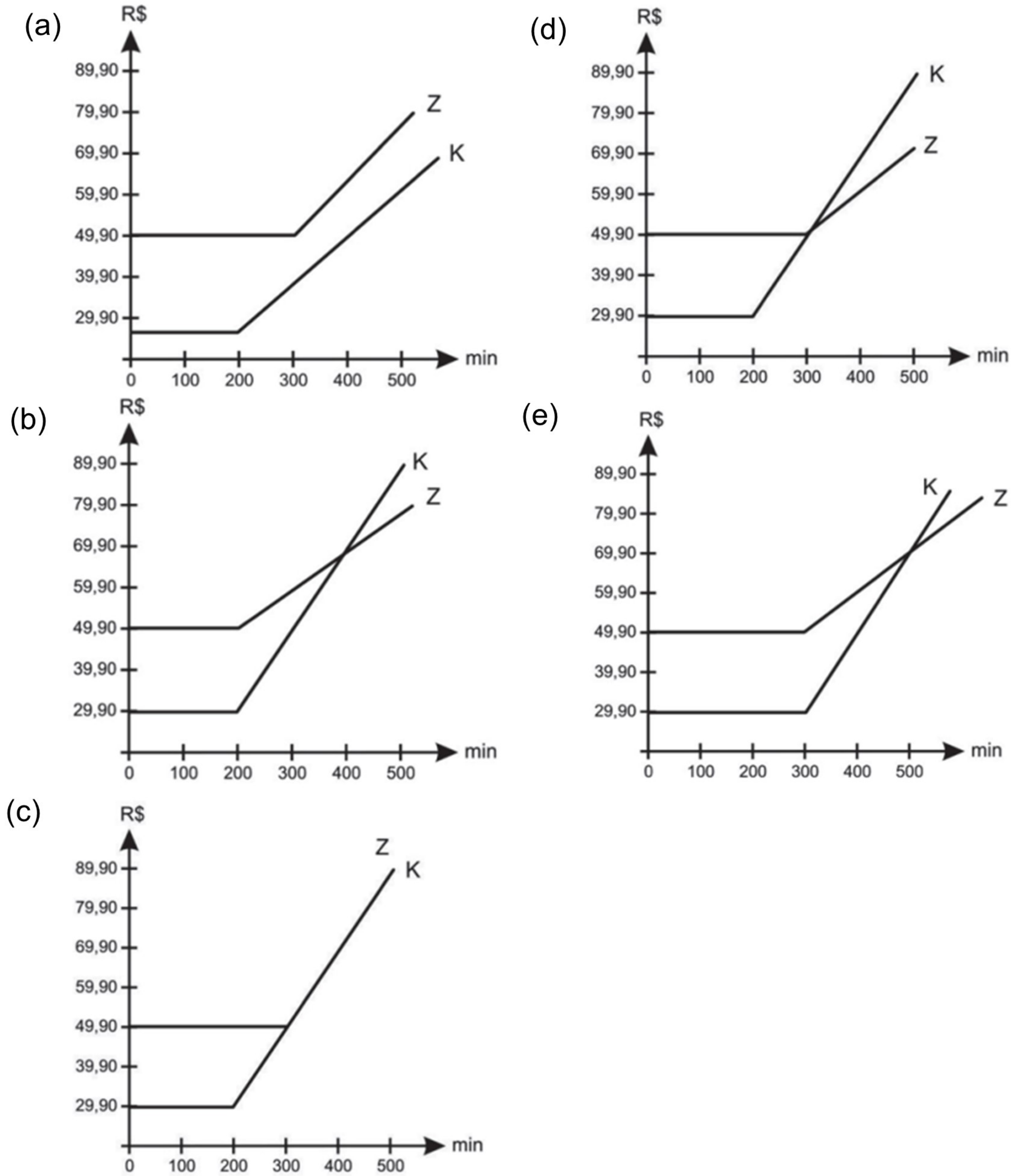


(e)



7. [7] **(Enem 2011, prova rosa, questão 174)** Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

   O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é



8. [7] **(Enem 2011, prova rosa, questão 164)** O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

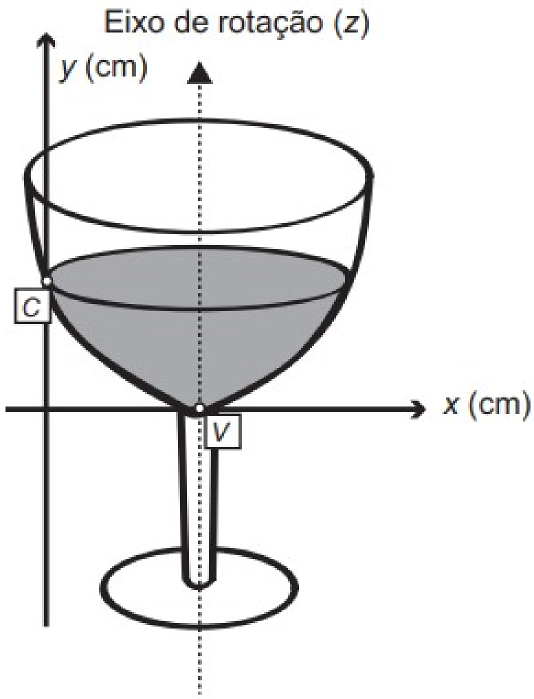
   Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

   Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

   Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

   (a) y = 4 300x
   (b) y = 884 905x
   (c) y = 872 005 + 4 300x
   (d) y = 876 305 + 4 300x
   (e) y = 880 605 + 4 300x

9. [7] **(Enem 2013, prova rosa, questão 158)** A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

(a) 1

(b) 2

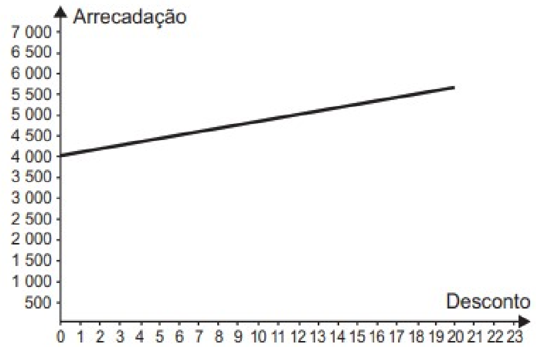
(c) 4

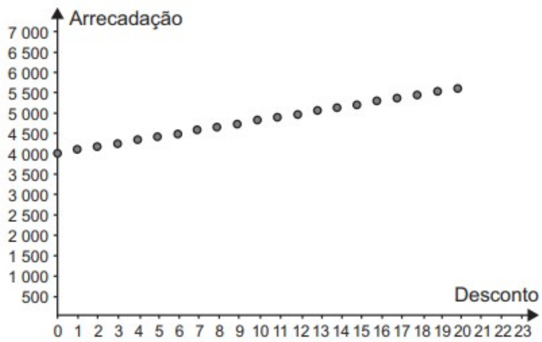
(d) 5

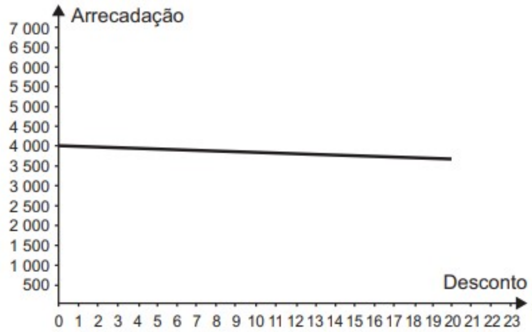
(e) 6

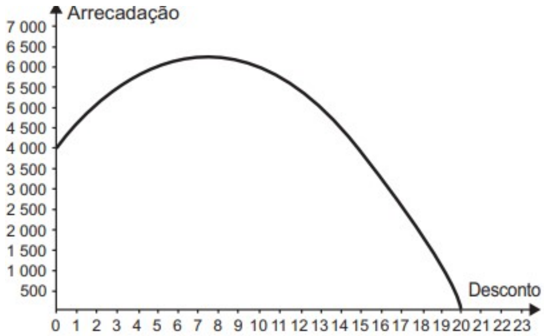
10. [7] **(Enem 2021, prova rosa, questão 156)** O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

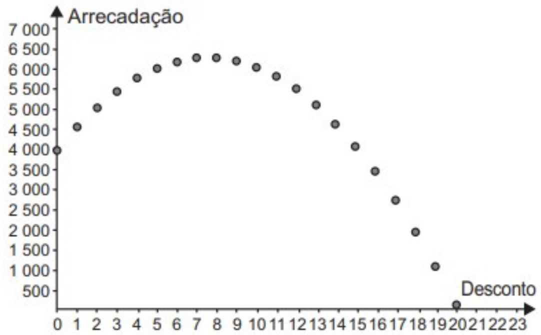
O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

Referências

[24] IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**: conjuntos, funções. Vol. 1, São Paulo: Atual, 2004.

[7] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Inep. **Provas e Gabaritos**. Brasília, 2009-2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 12 jul. 2024.

Banco de questões da tarefa gamificada

Nessa parte do apêndice trazemos todas as questões utilizadas nos quatro níveis da tarefa gamificada da sequência didática. São cinco questões e cada uma das cinco cores, totalizando 100 desafios.

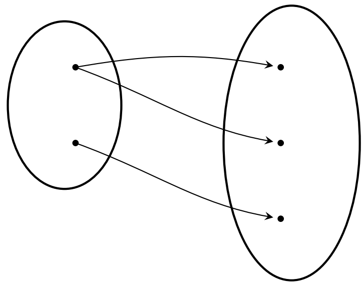
Tabela 14: Questões do Nível 1 - cinza

Sejam $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, a relação **f** de A em B é uma função? $$\mathbf{f} = \{(1,3),\ (1,2),\ (2,4),\ (3,5)\}$$ **Responda S para SIM ou N para NÃO**.
Sejam $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, a relação **g** de A em B é uma função? $$\mathbf{g} = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)\}$$ **Responda S para SIM ou N para NÃO**.
Sejam $A = \{a,\ c,\ e,\ g\}$ e $B = \{5,\ 7\}$, a relação **f** de A em B é uma função? $$\mathbf{f} = \{(a,5),\ (c,7),\ (e,7),\ (f,7)\}$$ **Responda S para SIM ou N para NÃO**.
Sejam $A = \{a,\ c,\ e,\ g\}$ e $B = \{5,\ 7\}$, a relação **g** de A em B é uma função? $$\mathbf{g} = \{(c,5),\ (e,5),\ (f,5)\}$$ **Responda S para SIM ou N para NÃO**.
Sejam $A = \{k,\ l,\ m,\ n\}$ e $B = \{r\}$, a relação **h** de A em B é uma função? $$\mathbf{h} = \{(k,r),\ (l,r),\ (m,r),\ (n,r)\}$$ **Responda S para SIM ou N para NÃO**.

Fonte: Elaborada pelo autor

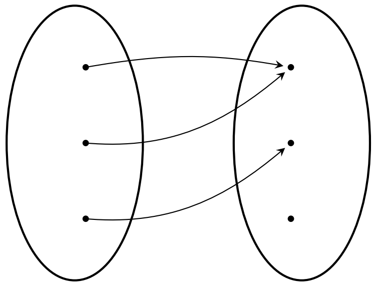
Tabela 15: Questões do Nível 1 - vermelho

A relação esboçada entre os dois conjuntos abaixo é uma função?



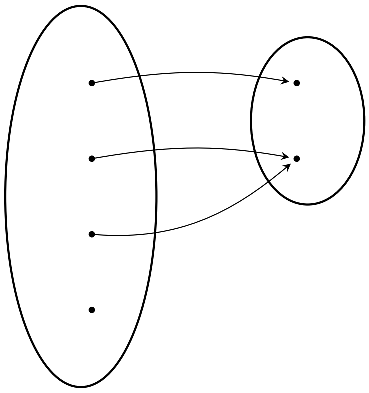
Responda S para SIM ou N para NÃO.

A relação esboçada entre os dois conjuntos abaixo é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

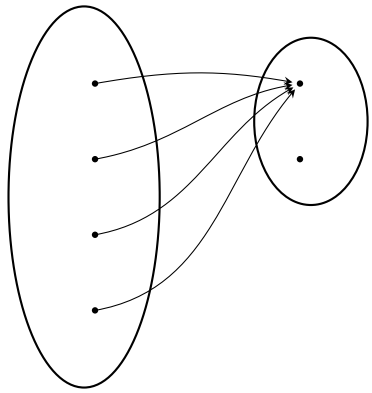
A relação esboçada entre os dois conjuntos abaixo é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

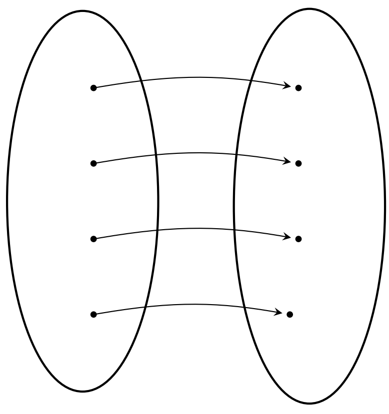
Continua na próxima página

A relação esboçada entre os dois conjuntos abaixo é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

A relação esboçada entre os dois conjuntos abaixo é uma função?

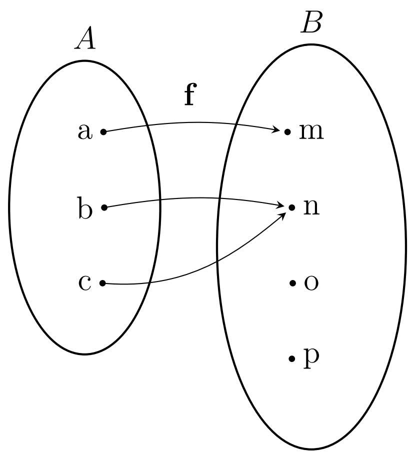


Responda S para SIM ou N para NÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor

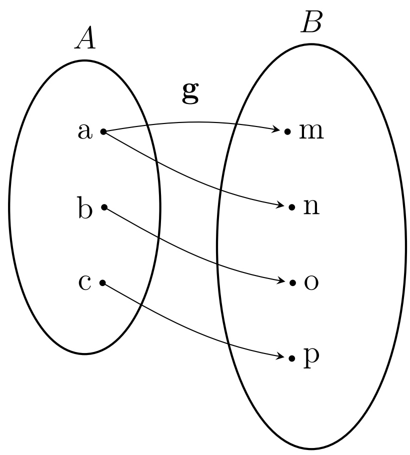
Tabela 16: Questões do Nível 1 - verde

Sejam A={a, b, c} e B={m, n, o, p}, a relação **f** de A em B é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

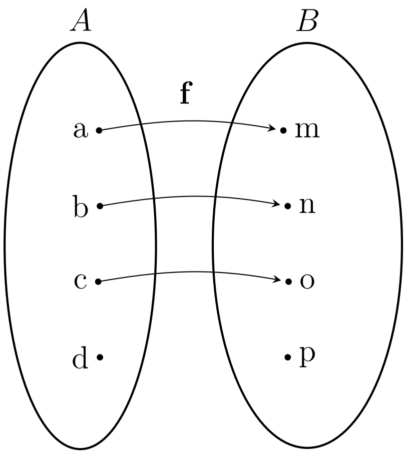
Sejam A={a, b, c} e B={m, n, o, p}, a relação **g** de A em B é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

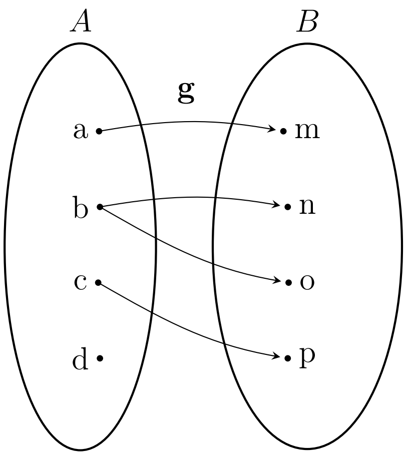
Continua na próxima página

Sejam A={a, b, c, d} e B={m, n, o, p}, a relação **f** de A em B é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

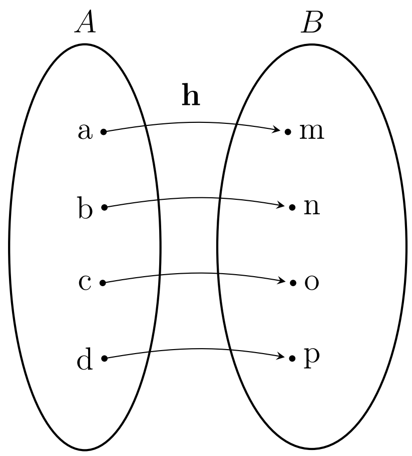
Sejam A={a, b, c, d} e B={m, n, o, p}, a relação **g** de A em B é uma função?



Responda S para SIM ou N para NÃO.

Continua na próxima página

Sejam A={a, b, c, d} e B={m, n, o, p}, a relação **h** de A em B é uma função?

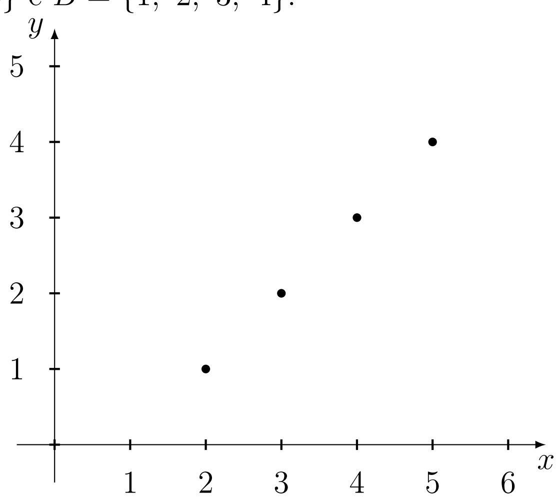


Responda S para SIM ou N para NÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 17: Questões do Nível 1 - azul

Sejam $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

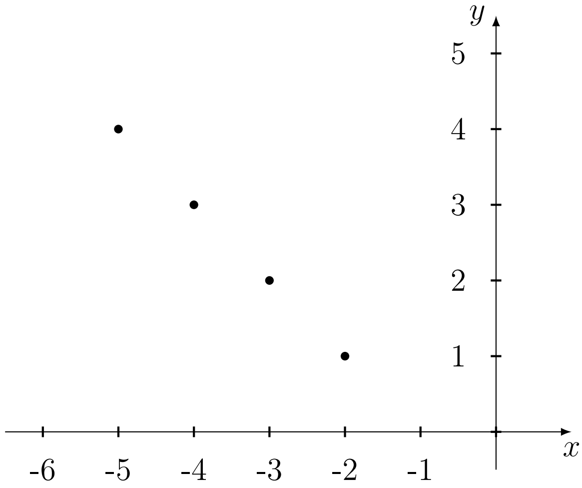


A relação representada pelos pontos no plano cartesiano é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

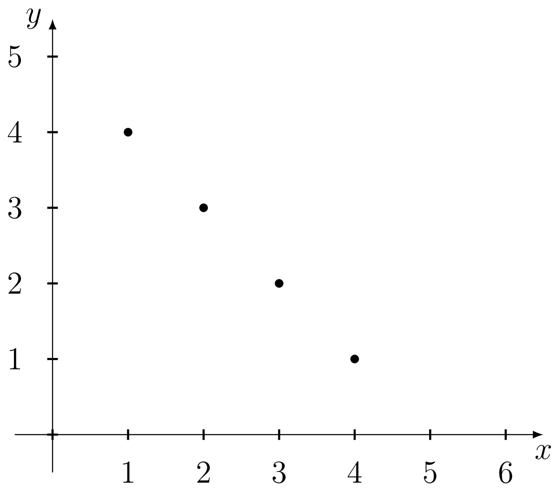
Continua na próxima página

Sejam $A = \{-2,\ -3,\ -4,\ -5\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.



A relação representada pelos pontos no plano cartesiano é uma função?
Responda S para SIM ou N para NÃO.

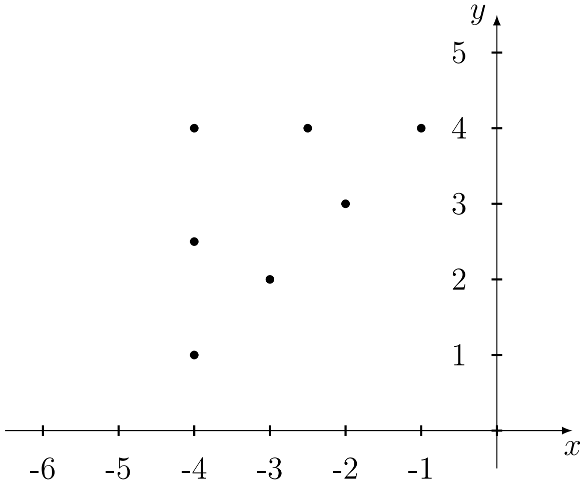
Sejam $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.



A relação representada pelos pontos no plano cartesiano é uma função?
Responda S para SIM ou N para NÃO.

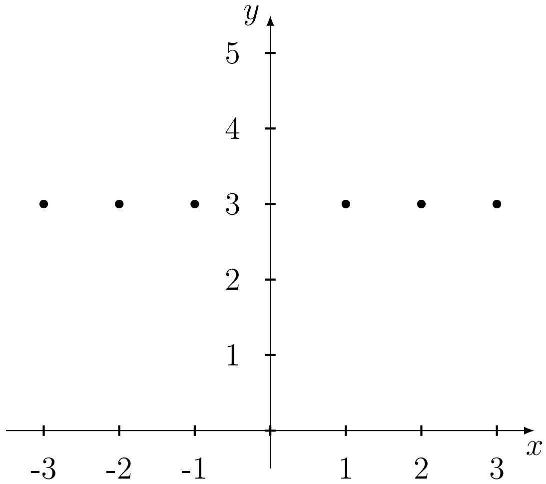
Continua na próxima página

Sejam $A = \{-1;\ -2;\ -2,5;\ -3;\ -4\}$ e $B = \{1;\ 2;\ 2,5;\ 3;\ 4\}$.



A relação representada pelos pontos no plano cartesiano é uma função?
Responda S para SIM ou N para NÃO.

Sejam $A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{3\}$.

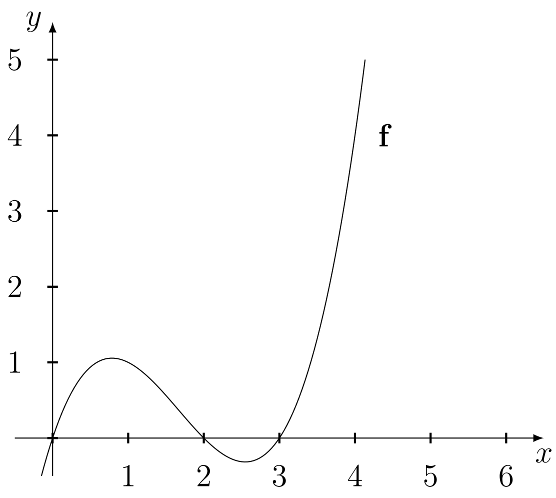


A relação representada pelos pontos no plano cartesiano é uma função?
Responda S para SIM ou N para NÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 18: Questões do Nível 1 - amarelo

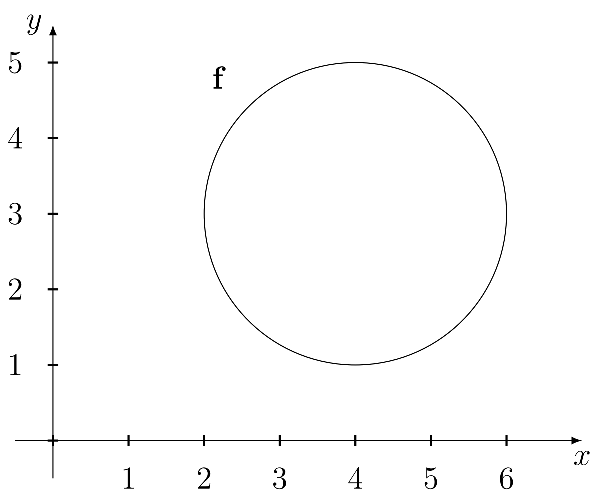
Sejam $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.



A relação **f** de A em B é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} |\ 2 \leqslant x \leqslant 6\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} |\ 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

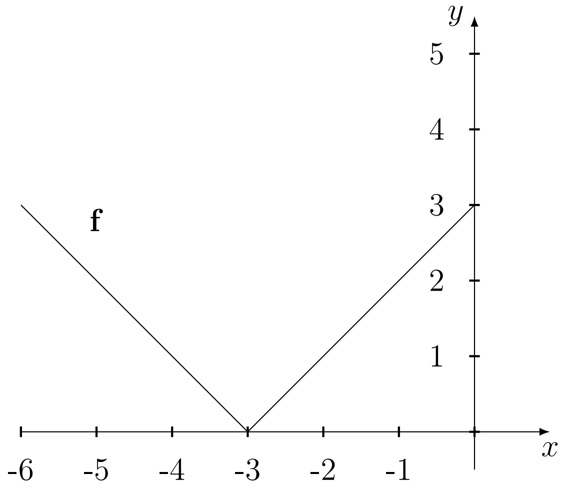


A relação **f** de A em B é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

Continua na próxima página

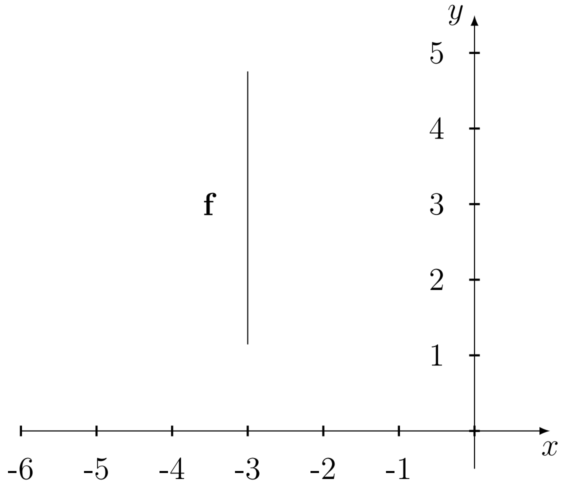
Sejam $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.



A relação **f** de A em B é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

Sejam $A = \{-3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R}|\ 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

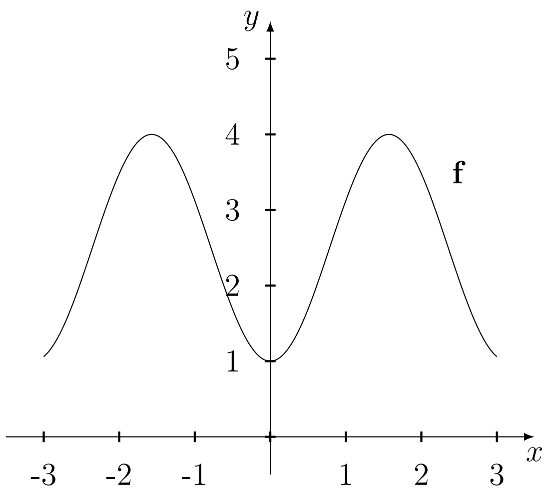


A relação **f** de A em B é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

Continua na próxima página

Sejam $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.



A relação **f** de A em B é uma função?

Responda S para SIM ou N para NÃO.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 19: Questões do Nível 2 - cinza

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Podemos definir função somente por meio de uma lei de formação.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Existem funções que não possuem lei de formação.

Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:

Toda relação binária é Função.

Quais das alternativas apresenta elementos suficientes para se definir uma Função em Matemática?

(a) Uma tabela de pares ordenados.

(b) Produto cartesiano e uma lei de formação.

(c) Uma relação entres os conjuntos A e B de tal modo que para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$.

Na definição de função apresentada marque a alternativa que completa a lacuna.

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de função de A em B, definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ ________________ $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

(a) existe um só

(b) existe mais de um

(c) seja possível encontrar um

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 20: Questões do Nível 2 - vermelho

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ e $B = \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o seu dobro em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-1,\ -3,\ -5\}$ e $B = \{3,\ 9,\ 10,\ 15,\ 20\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o oposto do seu triplo em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ e $B = \{5,\ 7,\ 9,\ 12\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o sucessor do seu dobro em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-1,\ -3,\ -5\}$ e $B = \{-\frac{1}{3},\ -1,\ -\frac{5}{3},\ -\frac{7}{3}\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe a sua terça parte em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0\ 1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o seu sucessor em B" define uma função de A em B.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 21: Questões do Nível 2 - verde

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{8,\ 18,\ 32,\ 50,\ 72,\ 98\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o dobro do seu quadrado em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-1,\ -2,\ -3\}$ e $B = \{3,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o oposto do seu cubo em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{5,\ 10,\ 18,\ 28\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o sucessor do seu quadrado em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-1,\ -2,\ -3\}$ e $B = \{-\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{9}{2}\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe a metade do seu quadrado em B" define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0\ 1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{8,\ 3,\ 0,\ -1\}$, a relação representada pela lei "para todo elemento em A existe o antecessor seu quadrado em B" define uma função de A em B.

Fonte: Elaborada pelo autor

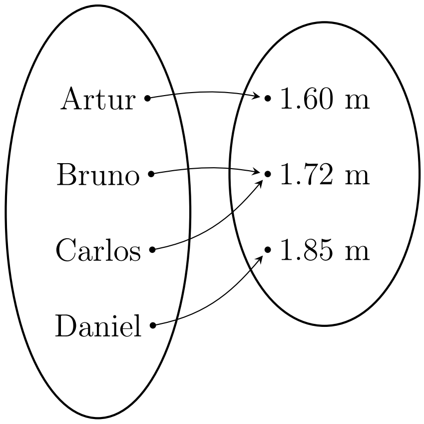
Tabela 22: Questões do Nível 2 - azul

Seja o conjunto A formado pela Ana e o conjunto B formado pelos filhos da Ana. Nessa situação, qual das relações a seguir define uma função? (a) O conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a $\in A$ e b $\in B$ é uma relação de A em B. (b) O conjunto dos pares ordenados (b, a) onde b $\in B$ e a $\in A$ é uma relação de B em A.
Seja o conjunto A formado pelo país Brasil e o conjunto B formado pelos Estados do Brasil. Nessa situação, qual das relações a seguir define uma função? (a) O conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a $\in A$ e b $\in B$ é uma relação de A em B. (b) O conjunto dos pares ordenados (b, a) onde b $\in B$ e a $\in A$ é uma relação de B em A.
Seja o conjunto A formado por cinco pessoas e o conjunto B formado pelos números dos CPF (cadastro de pessoa física) dessas cinco pessoas. As situações abaixo definem funções? Sim ou Não? • O conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a $\in A$ e b $\in B$ é uma relação de A em B. • O conjunto dos pares ordenados (b, a) onde b $\in B$ e a $\in A$ é uma relação de B em A.
Seja o conjunto A formado por um professor e o conjunto B formado pelos estudantes desse professor. Nessa situação, qual das relações a seguir define uma função? (a) O conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a $\in A$ e b $\in B$ é uma relação de A em B. (b) O conjunto dos pares ordenados (b, a) onde b $\in B$ e a $\in A$ é uma relação de B em A.

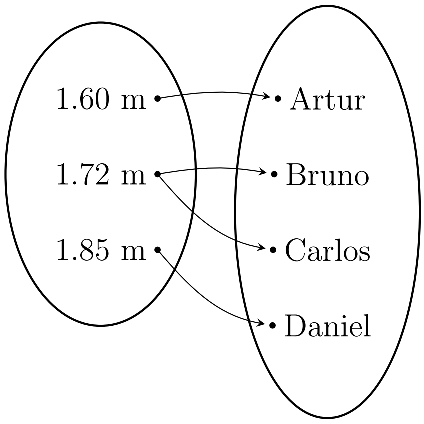
Continua na próxima página

Seja o conjunto de pessoas A={Artur, Bruno, Carlos, Daniel} e o conjunto B={1.60 m, 1.72 m, 1.85 m} formado pelas medidas das alturas de Artur, Bruno, Carlos e Daniel. Nessa situação, qual das relações a seguir define uma função?

(a) O conjunto dos pares ordenados (a, b) onde a $\in A$ e b $\in B$ é uma relação de A em B representada abaixo.



(b) O conjunto dos pares ordenados (b, a) onde b $\in B$ e a $\in A$ é uma relação de B em A representada abaixo.



Fonte: Elaborada pelo autor

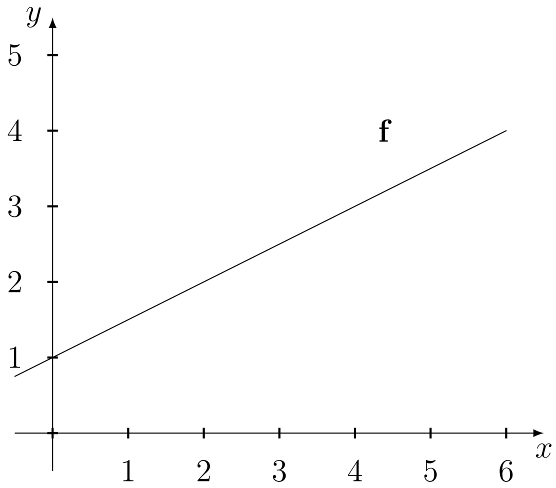
Tabela 23: Questões do Nível 2 - amarelo

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ e $B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24\}$, a relação representada pela lei $y = 4x$ com $x \in A$ e $y \in B$ define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{0,\ -1,\ -2,\ -3\}$ e $B = \{0,\ -0.1,\ -0.2,\ -0.3\}$, a relação representada pela lei $y = -0.1x$ com $x \in A$ e $y \in B$ define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ e $B = \{-5,\ -15,\ -25,\ -35\}$, a relação representada pela lei $y = -5x$ com $x \in A$ e $y \in B$ define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{-10,\ -15,\ -30\}$ e $B = \{-5,\ -7.5,\ -15,\ -20\}$, a relação representada pela lei $y = \frac{1}{2}x$ com $x \in A$ e $y \in B$ define uma função de A em B.
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO: Dados os conjuntos $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{0\}$, a relação representada pela lei $y = 0$ com $x \in A$ e $y \in B$ define uma função de A em B.

Fonte: Elaborada pelo autor

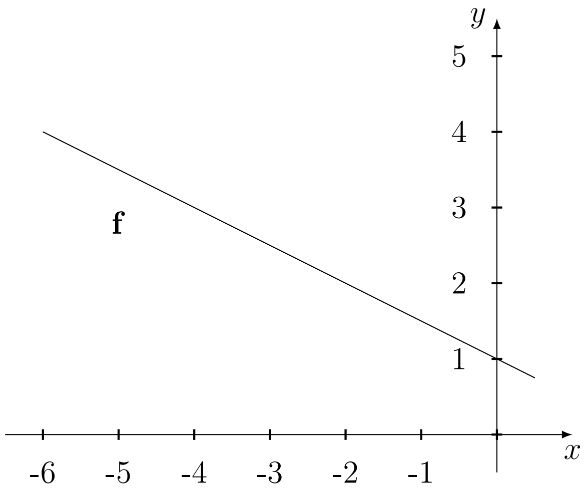
Tabela 24: Questões do Nível 3 - cinza

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, representada no plano cartesiano acima, é crescente.

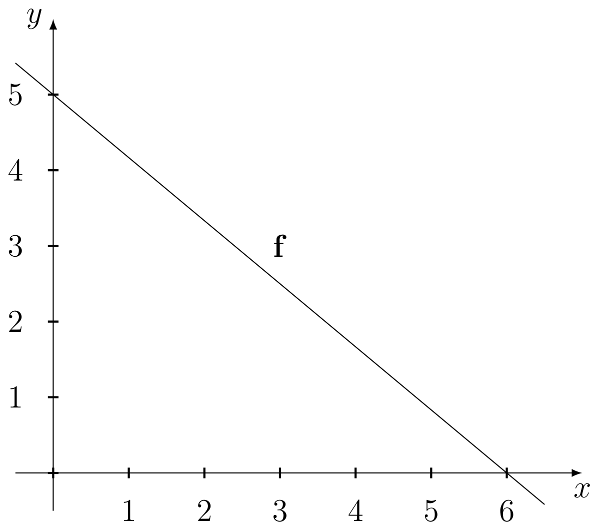
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$, representada no plano cartesiano acima, é decrescente.

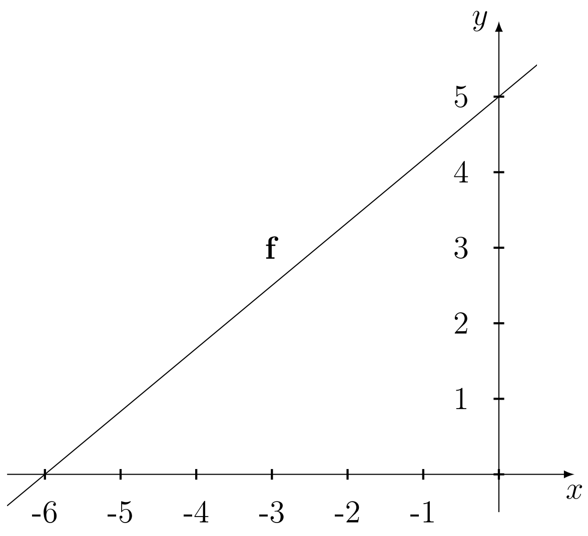
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = -\frac{5x}{6} + 5$, representada no plano cartesiano acima, é crescente.

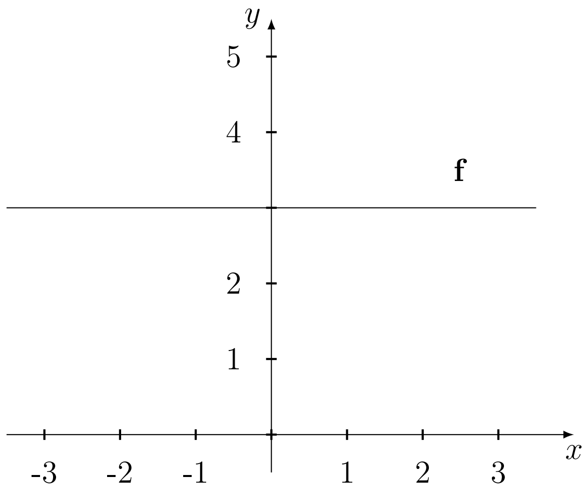
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = \frac{5x}{6} + 5$, representada no plano cartesiano acima, é decrescente.

Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:

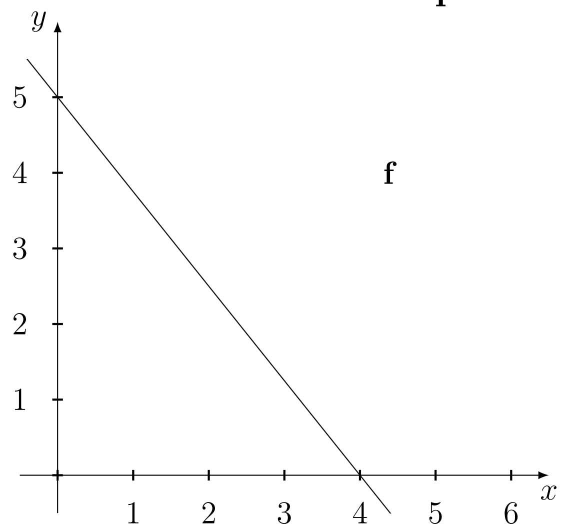


A função afim com lei de formação $f(x) = 3$, representada no plano cartesiano acima, é constante.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 25: Questões do Nível 3 - vermelho

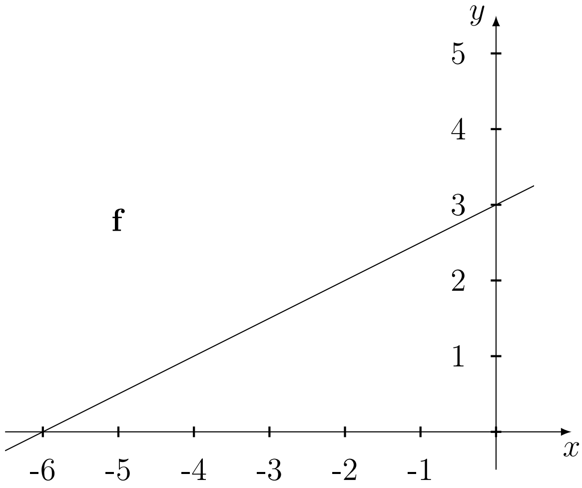
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = -1.25x+5$, representada no plano cartesiano acima, possui zero igual a 4.

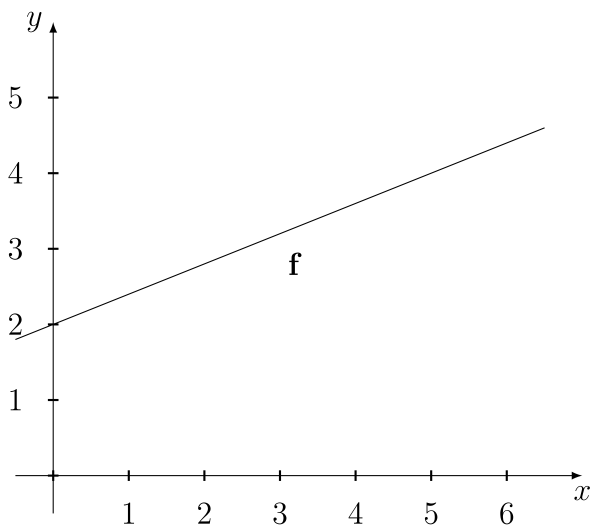
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = \frac{x}{2} + 3$, representada no plano cartesiano acima, tem zero igual a -6.

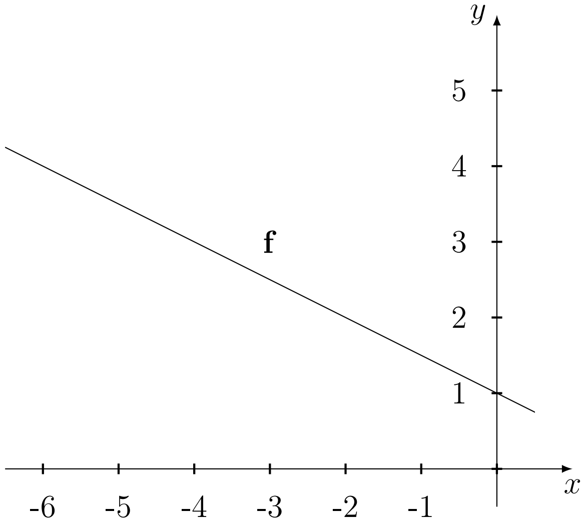
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = 0.4x + 2$, representada no plano cartesiano acima, tem zero igual a 2.

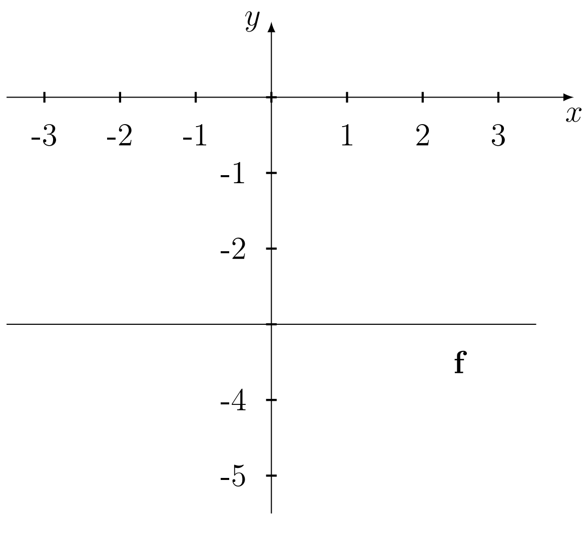
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função afim com lei de formação $f(x) = -0.5x + 1$, representada no plano cartesiano acima, tem zero igual a 1.

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:

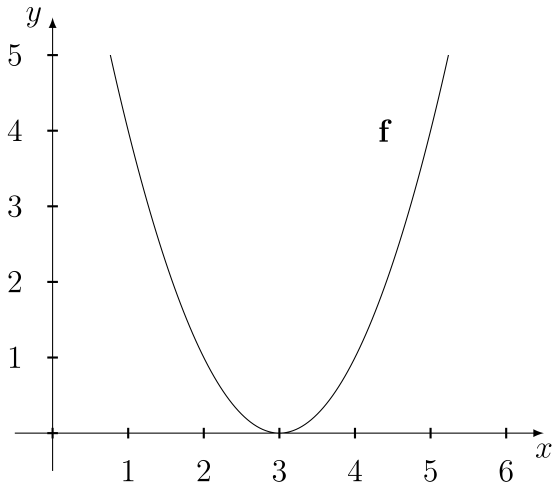


A função afim com lei de formação $f(x) = -3$, representada no plano cartesiano acima, não tem zero.

Fonte: Elaborada pelo autor

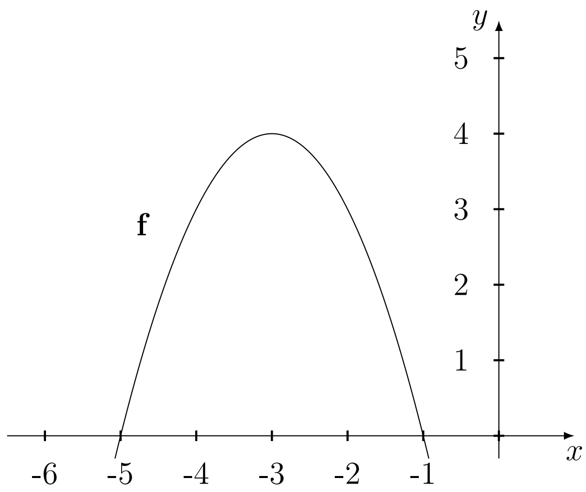
Tabela 26: Questões do Nível 3 - verde

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola representada no plano cartesiano acima são $x_v = 3$ e $y_v = 0$.

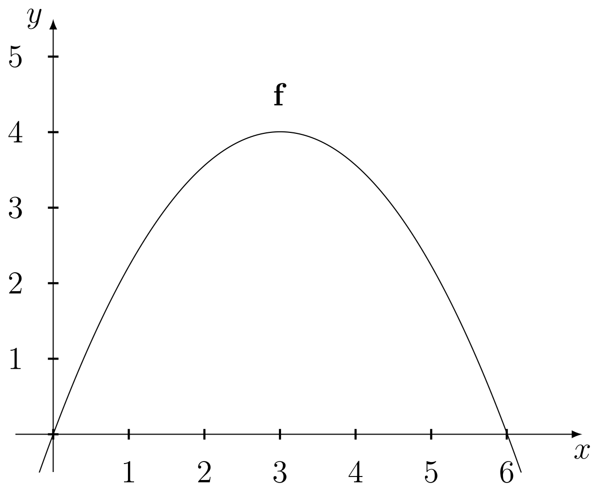
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola representada no plano cartesiano acima são $x_v = -3$ e $y_v = 4$.

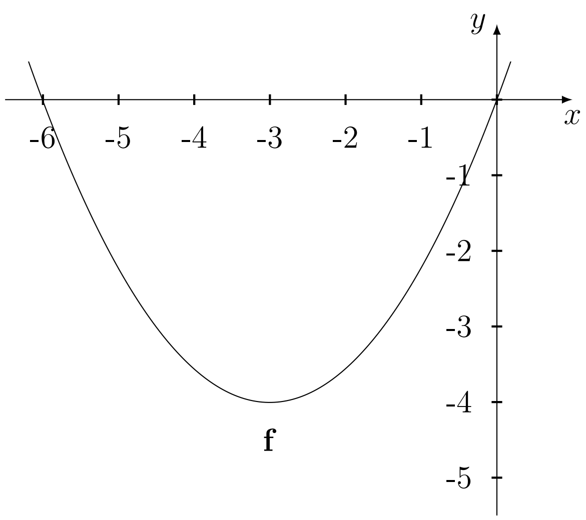
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola representada no plano cartesiano acima são $x_v = 4$ e $y_v = 3$.

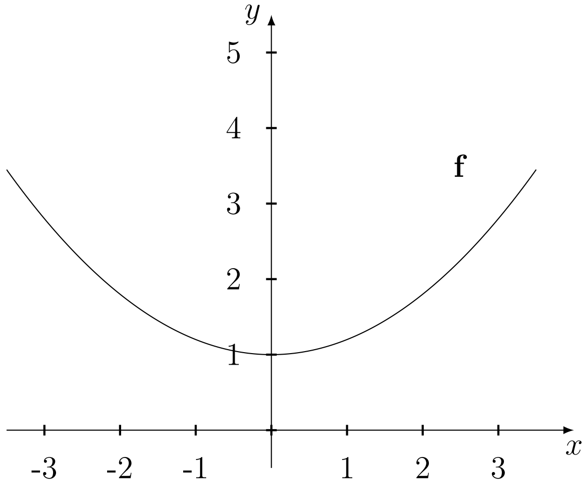
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola representada no plano cartesiano acima são $x_v = -3$ e $y_v = -4$.

Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:

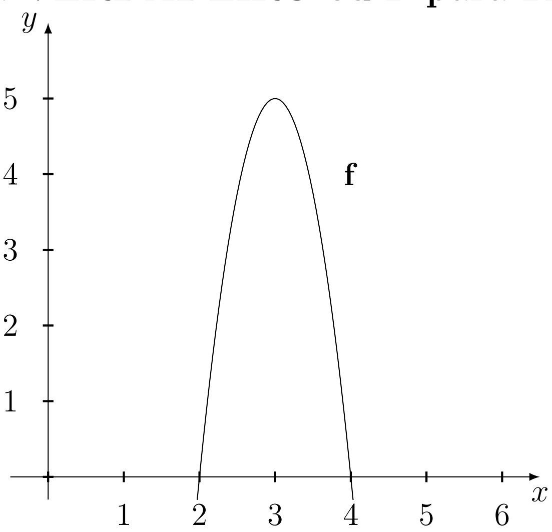


A parábola representada no plano cartesiano acima não possui vértice $V = (x_v, y_v)$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 27: Questões do Nível 3 - azul

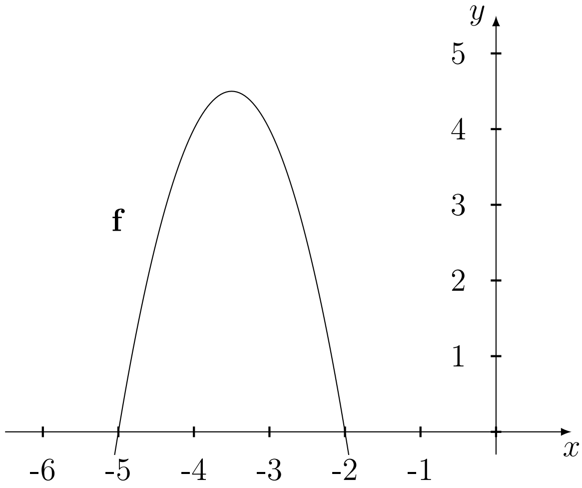
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função quadrática com lei de formação $f(x) = -5x^2 + 30x - 40$, representada no plano cartesiano acima, tem dois zeros reais distintos, $x' = 2$ e $x'' = 4$.

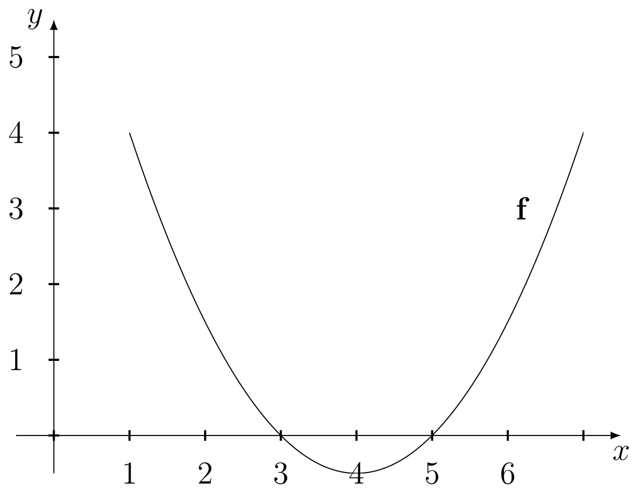
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função quadrática com lei de formação $f(x) = -2x^2 - 14x - 20$, representada no plano cartesiano acima, tem dois zeros reais distintos, $x' = 2$ e $x'' = -5$.

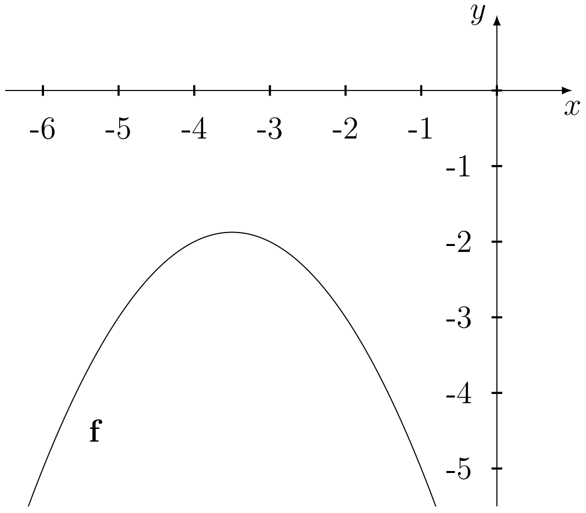
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função quadrática com lei de formação $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{15}{2}$, representada no plano cartesiano acima, tem dois zeros reais distintos, $x' = -3$ e $x'' = -5$.

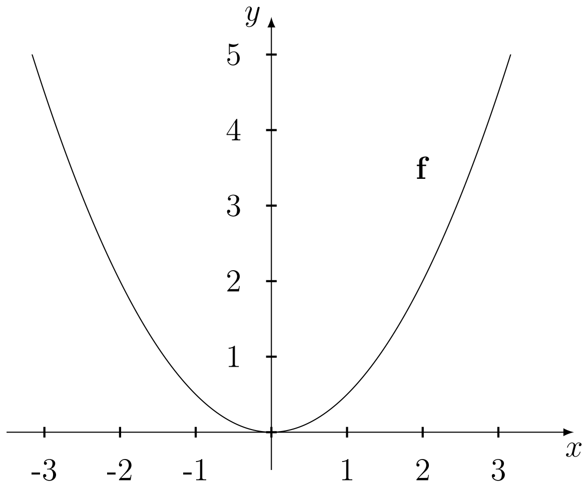
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



A função quadrática com lei de formação $f(x) = -0.5x^2 - 3.5x - 8$, representada no plano cartesiano acima, não tem zeros reais.

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:

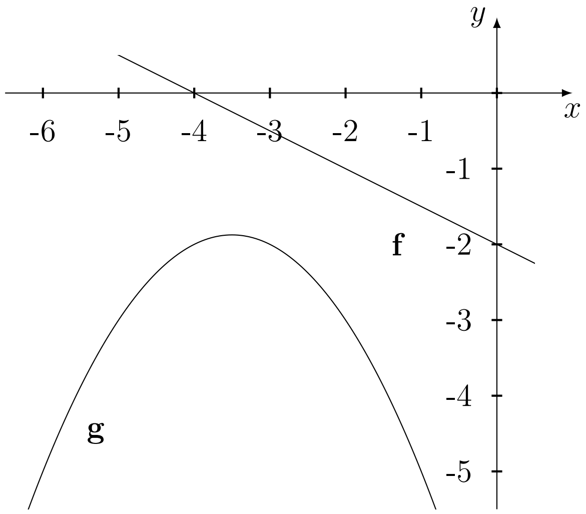


A função quadrática com lei de formação $f(x) = 0.5x^2$, representada no plano cartesiano acima, tem zeros reais iguais a 0.

Fonte: Elaborada pelo autor

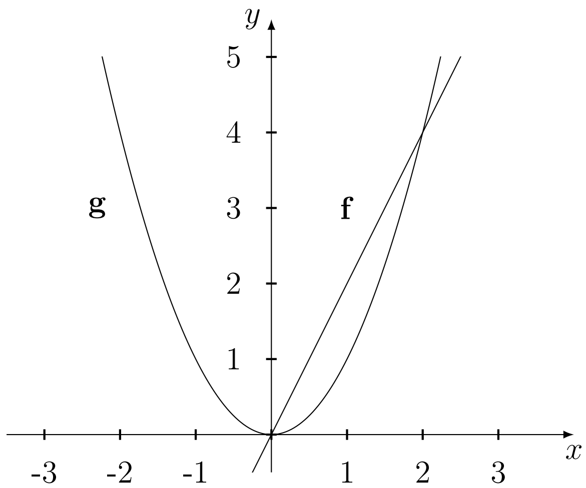
Tabela 28: Questões do Nível 3 - amarelo

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



As funções afim e quadrática representadas no plano cartesiano acima não possuem pontos de interseção.

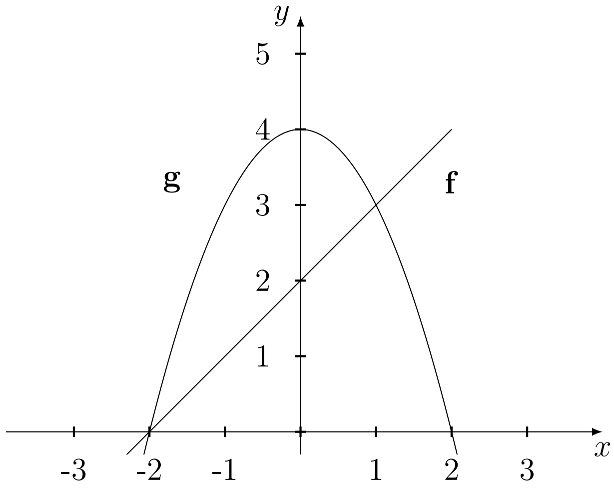
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



As funções afim e quadrática com leis de formação $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, representadas no plano cartesiano acima, tem como pontos de interseção $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

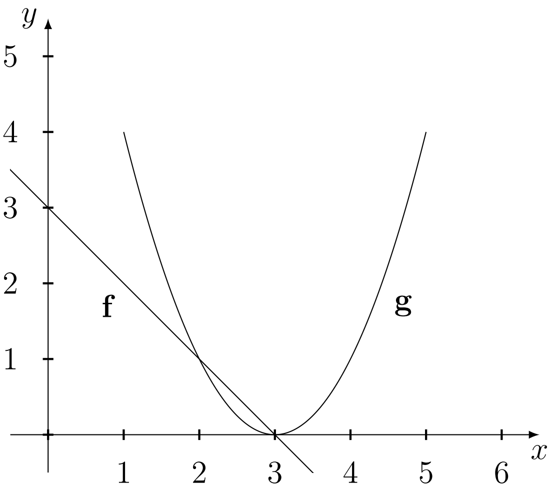
Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



As funções afim e quadrática com leis de formação $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x^2 + 4$, representadas no plano cartesiano acima, tem como pontos de interseção $(0, -2)$ e $(3, 1)$.

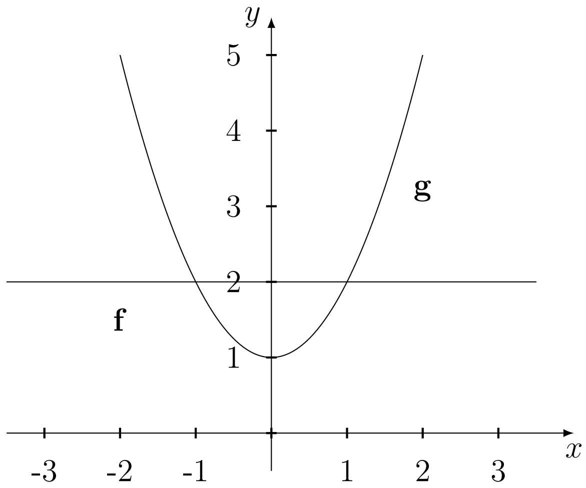
Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



As funções afim e quadrática com leis de formação $f(x) = -x+3$ e $g(x) = -x^2-6x+9$, representadas no plano cartesiano acima, tem como pontos de interseção $(0, 3)$ e $(1, 2)$.

Continua na próxima página

Responda V para VERDADEIRO ou F para FALSO:



As funções afim e quadrática com leis de formação $f(x) = 2$ e $g(x) = x^2 + 1$, representadas no plano cartesiano acima, tem como pontos de interseção $(1, 2)$ e $(-1, 2)$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 29: Questões do Nível *HARD* - cinza

(Enem 2023, prova rosa, questão 153) Dirigir após ingerir bebidas alcoólicas é uma atitude extremamente perigosa, uma vez que, a partir da primeira dose, a pessoa já começa a ter perda de sensibilidade de movimentos e de reflexos. Apesar de a eliminação e absorção do álcool depender de cada pessoa e de como o organismo consegue metabolizar a substância, ao final da primeira hora após a ingestão, a concentração de álcool (C) no sangue corresponde a aproximadamente 90% da quantidade (q) de álcool ingerida, e a eliminação total dessa concentração pode demorar até 12 horas.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 1 dez. 2018 (adaptado).

Nessas condições, ao final da primeira hora após a ingestão da quantidade q de álcool, a concentração C dessa substância no sangue é expressa algebricamente por

(a) $C = 0,9q$

(b) $C = 0,1q$

(c) $C = 1 - 0,1q$

(d) $C = 1 - 0,9q$

(e) $C = q - 10$

Continua na próxima página

(Enem 2023, prova rosa, questão 145) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento, e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa R$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de R$ 250,00. A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é

(a) $y = 250x$

(b) $y = 500x$

(c) $y = 750x$

(d) $y = 250x + 500$

(e) $y = 500x + 250$

(Enem 2022, prova rosa, questão 141) O funcionário de uma loja tem seu salário mensal formado por uma parcela fixa de 675 reais mais uma comissão que depende da quantidade de peças vendidas por ele no mês. O cálculo do valor dessa comissão é feito de acordo com estes critérios:

- até a quinquagésima peça vendida, paga-se 5 reais por peça;
- a partir da quinquagésima primeira peça vendida, o valor pago é de 7 reais por peça.

Represente por q a quantidade de peças vendidas no mês por esse funcionário, e por $S(q)$ o seu salário mensal, em real, nesse mês. A expressão algébrica que descreve $S(q)$ em função de q é

(a) $S(q) = 675 + 12q$

(b) $S(q) = 325 + 12q$

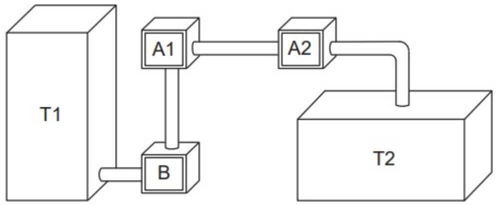
(c) $S(q) = 675 + 7q$

(d) $S(q) = \begin{cases} 625 + 5q, & se\ q \leq 50 \\ 925 + 7q, & se\ q > 50 \end{cases}$

(e) $S(q) = \begin{cases} 625 + 5q, & se\ q \leq 50 \\ 575 + 7q, & se\ q > 50 \end{cases}$

Continua na próxima página

(Enem 2020, prova rosa, questão 169) Um processo de aeração, que consiste na introdução de ar num líquido, acontece do seguinte modo: uma bomba B retira o líquido de um tanque T1 e o faz passar pelo aerador A1, que aumenta o volume do líquido em 15%, e em seguida pelo aerador A2, ganhando novo aumento de volume de 10%. Ao final, ele fica armazenado num tanque T2, de acordo com a figura.



Os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares, sendo que a base de T1 tem comprimento c e largura L, e a base de T2 tem comprimento $\frac{C}{2}$ e largura 2L. Para finalizar o processo de aeração sem derramamento do líquido em T2, o responsável deve saber a relação entre a altura da coluna de líquido que já saiu de T1, denotada por X, e a altura da coluna de líquido que chegou a T2, denotada por y.

Disponível em: www.dec.ufcg.edu.br. Acesso em: 21 abr. 2015.

A equação que relaciona as medidas das alturas y e x é dada por

(a) $y = 1,265x$

(b) $y = 1,250x$

(c) $y = 1,150x$

(d) $y = 1,125x$

(e) $y = x$

(Enem 2019, prova rosa, questão 179) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

(a) $y = 80x + 920.$

(b) $y = 80x + 1000.$

(c) $y = 80x + 1080.$

(d) $y = 160x + 840.$

(e) $y = 160x + 1000.$

Fonte: Provas e Gabaritos, Inep (2009-2023)

Tabela 30: Questões do Nível *HARD* - vermelho

(Enem 2016, prova rosa, questão 171) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

(a) 18 (b) 20 (c) 36 (d) 45 (e) 54

(Enem 2015, prova rosa, questão 147) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

(a) muito baixa. (b) baixa. (c) média. (d) alta. (e) muito alta.

Continua na próxima página

(Enem 2014, prova rosa, questão 149) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

(a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

(b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

(c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

(d) $y = \frac{4}{5}x^2 + 2$

(e) $y = x$

(Enem 2013, prova rosa, questão 178) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = \frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 ºC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

(a) 19,0

(b) 19,8

(c) 20,0

(d) 38,0

(e) 39,0

Continua na próxima página

(Enem 2010, prova rosa, questão 163) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \ para \ 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \ para \ t \geq 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C. O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

(a) 100.

(b) 108.

(c) 128.

(d) 130.

(e) 150.

Fonte: Provas e Gabaritos, Inep (2009-2023)

Tabela 31: Questões do Nível *HARD* - verde

(Enem 2012, prova rosa, questão 162) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$

$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

(a) 5 (b) 11 (c) 13 (d) 23 (e) 33

(Enem 2011, prova rosa, questão 156) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

(a) $100n + 350 = 120n + 150$

(b) $100n + 150 = 120n + 350$

(c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

(d) $100(n + 350000) = 120(n + 150000)$

(e) $350(n + 100000) = 150(n + 120000)$

Continua na próxima página

(Enem 2011, prova rosa, questão 164) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

(a) $y = 4300x$

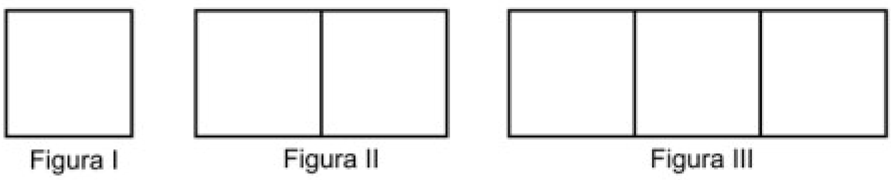
(b) $y = 884905x$

(c) $y = 872005 + 4300x$

(d) $y = 876305 + 4300x$

(e) $y = 880605 + 4300x$

(Enem 2010, prova rosa, questão 149) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos derefrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

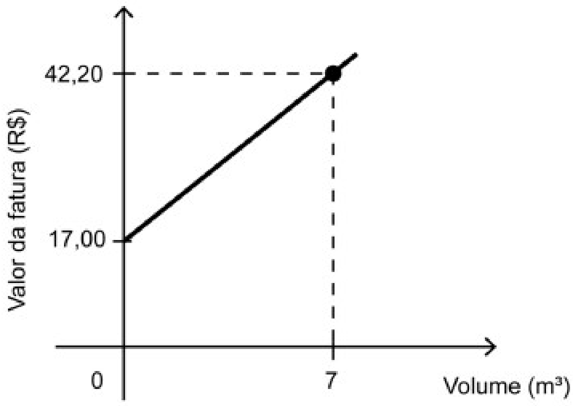


Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

(a) $C = 4Q$ (b) $C = 3Q + 1$ (c) $C = 4Q - 1$ (d) $C = Q + 3$ (e) $C = 4Q - 2$

Continua na próxima página

(Enem 2020 digital, prova rosa, questão 142) Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.



Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de $7m^3$ de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior. O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

(a) superior a R$ 65,00 e inferior a R$ 70,00.

(b) superior a R$ 80,00 e inferior a R$ 85,00.

(c) superior a R$ 90,00 e inferior a R$ 95,00.

(d) superior a R$ 95,00.

(e) inferior a R$ 55,00.

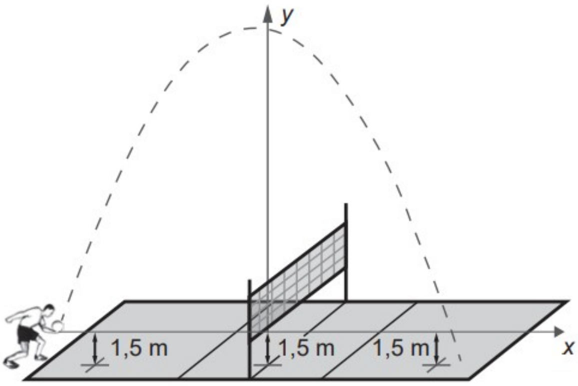
Fonte: Provas e Gabaritos, Inep (2009-2023)

Tabela 32: Questões do Nível *HARD* - azul

(Enem 2023, prova rosa, questão 158) Analisando as vendas de uma empresa, o gerente concluiu que o montante diário arrecadado, em milhar de real, poderia ser calculado pela expressão $V(x) = \frac{x^2}{4} - 10x + 105$, em que os valores de x representam os dias do mês, variando de 1 a 30. Um dos fatores para avaliar o desempenho mensal da empresa é verificar qual é o menor montante diário V_0 arrecadado ao longo do mês e classificar o desempenho conforme as categorias apresentadas a seguir, em que as quantidades estão expressas em milhar de real. • Ótmo: $V_0 \geq 24$ • Bom: $20 \leq V_0 < 24$ • Normal: $10 \leq V_0 < 20$ • Ruim: $4 \leq V_0 < 10$ • Péssimo: $V_0 < 4$ No caso analisado, qual seria a classificação do desempenho da empresa? (a) Ótmo (b) Bom (c) Normal (d) Ruim (e) Péssimo
(Enem 2022, prova rosa, questão 142) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e p(t) a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas: • $I : 1 \leq t \leq 2$; • $II : 3 \leq t \leq 4$; • $III : 5 \leq t \leq 6$; • $IV : 7 \leq t \leq 9$; • $V : 10 \leq t \leq 12$; A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita. A proposta escolhida foi a (a) *I* (b) *II* (c) *III* (d) *IV* (e) *V*

Continua na próxima página

(Enem 2022, prova rosa, questão 156) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m;

O saque desse atleta foi invalidado

(a) apenas no ginásio I.

(b) apenas nos ginásios I e II.

(c) apenas nos ginásios I, II e III.

(d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

(e) em todos os ginásios.

Continua na próxima página

(Enem 2017, prova rosa, questão 167) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

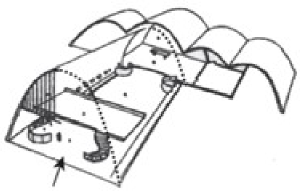


Figura 1

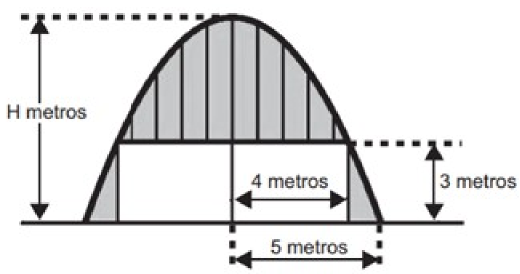
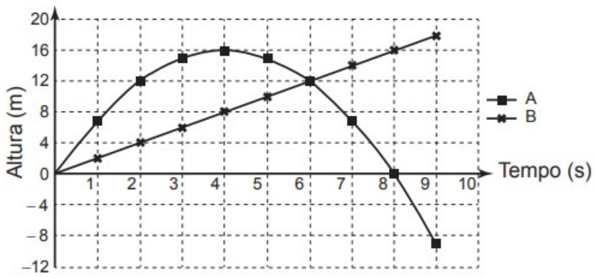


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

(a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{31}{5}$ (c) $\frac{25}{4}$ (d) $\frac{25}{3}$ (e) $\frac{75}{2}$

(Enem 2016, prova rosa, questão 165) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

(a) diminuir em 2 unidades. (b) diminuir em 4 unidades. (c) aumentar em 2 unidades. (d) aumentar em 4 unidades. (e) aumentar em 8 unidades.

Fonte: Provas e Gabaritos, Inep (2009-2023)

Tabela 33: Questões do Nível *HARD* - amarelo

(Enem 2020 digital, prova rosa, questão 143) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

(a) $L(x) = 50x - 1200$

(b) $L(x) = 50x - 12000$

(c) $L(x) = 50x + 12000$

(d) $L(x) = 500x - 1200$

(e) $L(x) = 1200x - 500$

(Enem 2020 digital, prova rosa, questão 141) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola y = T(x), com x sendo o número correspondente ao mês e T(x), em milhar de real. A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

(a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

(b) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

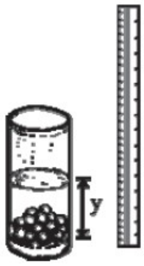
(c) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

(d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

(e) $T(x) = \frac{11}{16}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Continua na próxima página

(Enem 2009, prova rosa, questão 159) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

(a) $y = 30x$. (b) $y = 25x + 20,2$. (c) $y = 1,27x$. (d) $y = 0,7x$. (e) $y = 0,07x + 6$.

(Enem 2009, prova rosa, questão 156) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

(a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.

(b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.

(c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

(d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.

(e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

Continua na próxima página

(Enem 2020 digital, prova rosa, questão 175) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) V

Fonte: Provas e Gabaritos, Inep (2009-2023)

ANEXO I - Habilidades da BNCC

Abaixo seguem tabelas com as habilidades das competências específicas de matemática da BNCC.

Tabela 34: Habilidades da competência específica 1

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Fonte: BRASIL, 2018, p. 533

Tabela 35: Habilidades da competência específica 2

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Fonte: BRASIL, 2018, p. 534

Tabela 36: Habilidades da competência específica 3

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Continua na próxima página

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte: BRASIL, 2018, p. 536-537

Tabela 37: Habilidades da competência específica 4

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Fonte: BRASIL, 2018, p. 539

Tabela 38: Habilidades da competência específica 5

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: BRASIL, 2018, p. 541

ANEXO II - ESCALA DE PROFICIÊNCIA DO SAEB

"O Saeb não especifica as habilidades desenvolvidas no nível 0 da escala".

Tabela 39: Escala de Proeficiência para Interpretação dos Resultados da 3ª Série do Ensino Médio, em Matemática, no Saeb

Nível e intervalo de escala	**Descrição das habilidades desenvolvidas**
Nível 1 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	Os estudantes provavelmente são capazes de: **Tratamento da informação** - O estudante pode ser capaz de associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em um gráfico de barras ou de linhas.
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** - O estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados no primeiro quadrante. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer os zeros de uma função dada graficamente. Também é bem provável que os alunos determinem: o valor de uma função afim, dada sua lei de formação; um resultado utilizando o conceito de progressão aritmética. **Tratamento da informação** - O estudante pode ser capaz de associar um gráfico de setores a dados percentuais apresentados textualmente ou em uma tabela.

Continua na próxima página

Nível 3 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer: o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente; em um gráfico, o intervalo no qual a função assume valor máximo. Também pode ser capaz de determinar: por meio de proporcionalidade, o gráfico de setores que representa uma situação com dados fornecidos textualmente; o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta com base em três valores fornecidos em uma situação do cotidiano; um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste. Além disso, é provável que resolva problemas utilizando operações fundamentais com números naturais.
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos, com base em medidas fornecidas em texto e figura. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função considerando valores fornecidos em um texto. Além disso, pode ser capaz de determinar: a lei de formação de uma função linear a partir de dados fornecidos em uma tabela; a solução de um sistema de duas equações lineares; um termo de progressão aritmética, dada sua forma geral; a probabilidade da ocorrência de um evento simples. Também é provável que resolva: problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples; problemas de contagem usando princípio multiplicativo.

Continua na próxima página

Nível 5 Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de determinar medidas de segmentos por meio da semelhança entre dois polígonos. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de determinar: o valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; o percentual que representa um valor em relação a outro; o valor de uma expressão algébrica; a solução de um sistema de três equações sendo uma com uma incógnita, outra com duas e a terceira com três incógnitas. Também é provável que seja capaz de resolver problema envolvendo: divisão proporcional do lucro em relação a dois investimentos iniciais diferentes; operações, além das fundamentais, com números naturais; relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas; probabilidade de união de eventos. Além disso, é provável que os alunos sejam capazes de avaliar o comportamento de uma função, representada graficamente, quanto ao seu crescimento.
Nível 6 Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** - O estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados em quadrantes que não sejam o primeiro. É provável também que consiga associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada. Além disso, há uma grande probabilidade de resolver problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura. **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de determinar: a razão de semelhança entre as imagens de um mesmo objeto em escalas diferentes; o volume de um paralelepípedo retângulo, dada sua representação espacial. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de determinar os zeros de uma função quadrática, a partir de sua expressão algébrica. Além disso, é provável que resolva problemas de porcentagem envolvendo números racionais não inteiros.

Continua na próxima página

Nível 7 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** - O estudante pode ser capaz de determinar: a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas, sendo fornecidas ou não as fórmulas; com o uso do teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico. **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de determinar a área de um polígono não convexo composto por retângulos e triângulos, a partir de informações fornecidas na figura. Além disso, é provável que consiga resolver problemas: por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura; envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função a partir de informações sobre sua variação descritas em um texto; os zeros de uma função quadrática em sua forma fatorada; gráfico de função afim a partir de sua representação algébrica; a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos; as raízes de um polinômio apresentado na sua forma fatorada. Além disso, é provável também que os alunos sejam capazes de determinar os pontos de máximo ou mínimo a partir do gráfico de uma função; o valor de uma expressão algébrica envolvendo módulo; o ponto de interseção de duas retas; a expressão algébrica que relaciona duas variáveis com valores dados em tabela ou gráfico; a maior raiz de um polinômio de 2º grau. Também é provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas: para obter valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; envolvendo uma equação de 1º grau que requeira manipulação algébrica; envolvendo um sistema linear, dadas duas equações a duas incógnitas; usando permutação; utilizando probabilidade, envolvendo eventos independentes.

Continua na próxima página

Nível 8 Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** - O estudante pode ser capaz de reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. Também é provável que seja capaz de determinar: uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras; a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio; a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com apoio de figura. Podem também ser capazes de associar um prisma a uma planificação usual dada. **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de determinar a área da superfície de uma pirâmide regular; o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões em unidades diferentes; o volume de cilindros. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer: o gráfico de uma função trigonométrica na forma $y = sen(x)$; um sistema de equações associado a uma matriz. Também é provável que seja capaz de determinar: a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes; o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice; a distância entre dois pontos no plano cartesiano. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema: usando arranjo; envolvendo a resolução de uma equação do 2º grau cujos dados são seus coeficientes. Além disso, existe uma grande probabilidade de que sejam capazes de interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta, a partir de sua forma reduzida.

Continua na próxima página

Nível 9 Desempenho maior ou igual a 425 e menor que 450	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Espaço e forma** - O estudante pode ser capaz de reconhecer a equação que representa uma circunferência, entre diversas equações dadas. Também é provável que seja capaz de determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo relações métricas em um triângulo retângulo que é parte de uma figura plana dada. **Grandezas e medidas** - O estudante pode ser capaz de determinar o volume de pirâmides regulares. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo: áreas de círculos e polígonos; semelhança de triângulos com apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelos vértices; envolvendo cálculo de volume de cilindro. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x) = 10^{x+1}$; o gráfico de uma função logarítmica, dada a expressão algébrica da sua função inversa e seu gráfico. Também é provável que seja capaz de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, com base em dados fornecidos em texto ou gráfico; a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano; inclinação ou coeficiente angular de retas a partir de suas equações; um polinômio na forma fatorada, dadas as suas raízes.
Nível 10 Desempenho maior ou igual a 450	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **Grandezas e medidas** - Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** - O estudante pode ser capaz de determinar a solução de um sistema de três equações lineares, a três incógnitas, apresentado na forma matricial escalonada.

Fonte: BRASIL, 2023, p. 202-204