

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



**PROPRIEDADES INTRÍNSECAS DE SUPERFÍCIES  
REGULARES: EXPLORANDO GEOMETRIAS NÃO  
EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES DIDÁTICAS  
NO ENSINO MÉDIO**

Fábio Henrique Almeida Santos

Feira de Santana  
Dezembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



**PROPRIEDADES INTRÍNSECAS DE SUPERFÍCIES  
REGULARES: EXPLORANDO GEOMETRIAS NÃO  
EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES DIDÁTICAS  
NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Msc. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas**

Feira de Santana  
Dezembro de 2024

Propriedades Intrínsecas de Superfícies Regulares:  
Explorando Geometrias Não Euclidianas com  
Aplicações Didáticas no Ensino Médio

Fábio Henrique Almeida Santos  
Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas

8 de janeiro de 2025

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Santos, Fábio Henrique Almeida  
S235p Propriedades intrínsecas de superfícies regulares: explorando geometrias não euclidianas com aplicações didáticas no Ensino Médio./ Fábio Henrique Almeida Santos. – 2024.  
133 f.: il.

Orientador: Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Feira de Santana, 2024.

1.Geometria não euclidianas – Ensino Médio. 2.Sequência didática. 3.Superfícies regulares. 4.Propriedades intrínsecas de superfícies. I.Mascarenhas, Cristiano Henrique de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 513.8

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120



**Universidade Estadual de Feira de Santana**  
**Departamento de Ciências Exatas**  
**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**



**Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Fabio Henrique Almeida Santos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana**

Aos dezoito dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 14 horas, no LEMA - Laboratório de Ensino de Matemática, ocorreu a defesa pública da dissertação apresentada sob o título **"PROPRIEDADES INTRÍNSECAS DE SUPERFÍCIES REGULARES: EXPLORANDO GEOMETRIAS NAO EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES DIDÁTICAS NO ENSINO MÉDIO"**, do discente **Fabio Henrique Almeida Santos** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Cristiano Henrique Mascarenhas (Orientador,UEFS), Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS) e Ana Carolina Moura Teixeira (IFBA) A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito APROVADO. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 18 de dezembro de 2024.

Prof. Msc. Cristiano Henrique Mascarenhas (Orientador, UEFS)

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Prof<sup>a</sup>. Msc<sup>a</sup>. Ana Carolina Moura Teixeira (IFBA)

Visto do Coordenador:

## Resumo

Nesse trabalho, aplicamos um plano de aula de matemática, em uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma Escola Pública da Rede Estadual da Bahia. Onde os estudantes trabalharam tópicos de geometrias não euclidianas. No desenvolvimento do plano de aula aproveitamos o ambiente dinâmico oferecido pelo software GeoGebra e fizemos uso de matérias manipuláveis. A primeira etapa da proposta foi realizada em sala de aula, através de questionamentos construímos junto aos estudantes o conceito de geodésica. A segunda etapa foi realizada no Laboratório de Informática da Escola, os estudantes tiveram a oportunidade de verificar a soma dos ângulos de um triângulo em modelos de Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica. Também, fizemos um breve resumo das tentativas de demonstrar o postulado das paralelas de Euclides e o surgimento de geometrias não euclidianas. Além disso, realizamos um estudo sobre conteúdos que geralmente são trabalhados em um curso de Geometria Diferencial, tais como, estudamos sobre curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, superfícies regulares, curvaturas e geometria intrínseca das superfícies. Por fim, os estudantes responderam uma pesquisa onde registraram o nível de satisfação de aprendizagem a respeito dos seguintes tópicos: conceito de geodésica, soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico e esférico, superfície com curvatura positiva e superfície com curvatura negativa.

**Palavras-chaves:** sequência didática, geometrias não euclidianas, geometrias não euclidianas no ensino médio, superfícies regulares, propriedades intrínsecas de superfícies.

## Abstract

In this work, we applied a math lesson plan to a second grade high school class at a public school in the state of Bahia. The students worked on non-Euclidean geometry topics. In developing the lesson plan, we took advantage of the dynamic environment offered by the GeoGebra software and made use of manipulatives. The first stage of the proposal was carried out in the classroom, through questioning we built up the concept of geodesics with the students. The second stage took place in the school's computer lab, where the students had the opportunity to check the sum of the angles of a triangle in Hyperbolic Geometry and Spherical Geometry models. We also gave a brief summary of the attempts to demonstrate Euclid's parallel postulate and the emergence of non-Euclidean geometries. In addition, we studied content that is usually covered in a Differential Geometry course, such as regular curves parametrized by arc length, regular surfaces, curvatures and the intrinsic geometry of surfaces. Finally, the students completed a survey in which they recorded their level of satisfaction with learning the following topics: the concept of geodesics, the sum of the internal angles of hyperbolic and spherical triangles, surfaces with positive curvature and surfaces with negative curvature.

**Keywords:** didactic sequence, non-Euclidean geometries, non-Euclidean geometries in secondary school, regular surfaces, intrinsic properties of surfaces.

## Agradecimentos

Agradeço:

a DEUS por ter me concedido saúde e força para concluir mais uma etapa importante da minha vida.

aos meus pais, Dona Maria Francisca Almeida Santos e Seu Natan Santos responsáveis pelos principais ensinamentos que tive até esse momento da vida.

a minha esposa Mari, pelo incentivo e pelo apoio incondicional para que eu pudesse almejar os meus sonhos e nunca desistir.

a minhas filhas Luma Flávia e Lara Fábria, por serem a minha maior fonte de motivação.

ao Professor Msc. Cristiano, pela dedicação, paciência, orientação, ensinamentos, pelos belos textos inspiradores e motivadores, por ter conquistado minha admiração, por fim, pela “dívida impagável” que carregarei a partir de agora.

aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEFS.

aos meus colegas de turma, em especial a Lucas, Patrícia, Francis e Fabíola que estiveram presentes comigo até o final dessa jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
1.1	Estrutura do Trabalho . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Um pouco de História</b>	<b>12</b>
2.1	Modelo de Disco de Poincaré . . . . .	16
2.2	Pseudoesfera de Beltrami . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Curvas no Espaço</b>	<b>20</b>
3.1	Curva Parametrizada Diferenciável em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
3.2	Vetor Tangente . . . . .	22
3.3	Curva Parametrizada Regular . . . . .	23
3.4	Mudança de Parâmetro . . . . .	23
3.5	Parametrização Pelo Comprimento de Arco . . . . .	24
3.6	Teoria Local das Curvas e Triedo de Frenet . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Superfícies Regulares</b>	<b>36</b>
4.1	Superfície Parametrizada Regular . . . . .	36
4.2	Mudança de Parâmetros . . . . .	44
4.3	Espaço Tangente . . . . .	46
4.4	Primeira Forma Fundamental . . . . .	50
4.5	Área de Regiões de Superfícies . . . . .	54
4.6	Segunda Forma Fundamental . . . . .	55
4.7	Curvatura Normal . . . . .	60
4.8	Curvaturas Principais, Gaussiana e Média . . . . .	65
4.9	Classificação dos Pontos de uma Superfície . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Geometria Intrínseca das Superfícies</b>	<b>78</b>
5.1	Isometrias . . . . .	78
5.2	Símbolos de Christoffel . . . . .	82
5.3	Teorema Egregium de Gauss . . . . .	86
5.4	Derivada Covariante . . . . .	89
5.5	Geodésicas . . . . .	94

5.6	Curvatura Geodésica . . . . .	101
5.7	Versão Local do Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	107
5.8	Versão Global do Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Atividade Aplicada no Ensino Médio</b>	<b>118</b>
6.1	Introdução do conceito de Geodésica . . . . .	118
6.2	Superfícies com Curvaturas Positiva e Negativa . . . . .	122
6.2.1	Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera . . . . .	123
6.2.2	Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico . . . . .	123
6.2.3	Triângulo Geodésico em uma Esfera . . . . .	125
6.3	Construindo Superfícies de Curvatura não Nula . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>128</b>
<b>A</b>	<b>Espaço esférico de curvatura positiva</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Espaço hiperbólico de curvatura negativa</b>	<b>132</b>
<b>C</b>	<b>O que aprendi?</b>	<b>133</b>

# Lista de Figuras

1	Postulado de Wallis . . . . .	13
2	Quadrilátero de Saccheri . . . . .	14
3	Quadrilátero de Lambert . . . . .	15
4	Circunferências Ortogonais. . . . .	17
5	H-Reta. . . . .	18
6	Reta Hiperbólica. . . . .	18
7	Pseudoesfera. . . . .	19
8	Tractrix. . . . .	19
9	Curva Parametrizada Diferenciável . . . . .	20
10	Traço de $\beta(t) = \left( 8\left(\frac{3}{4}\right)^t \cos(2t), 8\left(\frac{3}{4}\right)^t \text{sen}(2t), 2t \right)$ . . . . .	21
11	Parábola . . . . .	21
12	Parábola de Neil . . . . .	22
13	Triedo de Frenet . . . . .	30
14	Vetores tangentes as curvas coordenadas. . . . .	37
15	Superfície regular. . . . .	38
16	$X(u, v) = p_0 + ua + vb$ . . . . .	39
17	Cone Circular. . . . .	42
18	$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - \bar{u}^2})$ . . . . .	46
19	Plano tangente a superfície. . . . .	47
20	Vetor normal a superfície. . . . .	48
21	Aplicação de Gauss . . . . .	49
22	Ângulo formado por $n(t_0)$ e $N(u(t_0), v(t_0))$ . . . . .	62
23	Seção Normal. . . . .	63
24	Sela de macaco. . . . .	74
25	Curvatura Gaussiana no toro. . . . .	76
26	Transformação do helicóide no catenóide. . . . .	81
27	Valor absoluto de $k_g$ . . . . .	102
28	Ângulos entre os vetores $u, v$ e $N \times v$ . . . . .	103
29	Região $\Omega$ limitada pela curva $\alpha$ regular por partes. . . . .	108

30	Vértices e arcos regulares de $\alpha$ . . . . .	108
31	Sinal do ângulo externo quando o vértice não é uma cúspide. . . . .	109
32	Sinal do ângulo externo quando o vértice é uma cúspide. . . . .	109
33	Curva $\alpha$ orientada positivamente. . . . .	110
34	Característica de Euler-Poincaré da esfera e toro. . . . .	114
35	Soma dos ângulos internos do triângulo. . . . .	117
36	Unindo as extremidades da folha de papel A4. . . . .	121
37	Estudantes no Laboratório de Informática. . . . .	122
38	Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera. . . . .	123
39	Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico. . . . .	124
40	Ferramentas Point, Hyperbolic Segment e Angle Measure. . . . .	124
41	Triângulo Geodésico em uma Esfera. . . . .	125
42	Ferramenta Exibir ângulos. . . . .	126

# Capítulo 1

## Introdução

A motivação inicial para a realização deste trabalho foi trazer para a sala de aula do Ensino Médio tópicos de Geometrias Não Euclidianas, uma abordagem pouco comum no Brasil. No entanto, o Estado do Paraná representa uma exceção, uma vez que as Diretrizes Curriculares Estaduais (2008-2019) incluíram, de acordo com Caldato e Pavanello (2014, p. 4), “elementos de geometrias não euclidianas no rol de conteúdos a serem ensinados nos níveis de ensino fundamental e médio”.

Nosso objetivo foi elaborar e aplicar uma sequência didática para que estudantes do Ensino Médio explorassem tópicos de Geometrias Não Euclidianas. A proposta permitiu que os alunos trabalhassem o conceito de geodésica, verificassem a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico em dois modelos de espaços — um da Geometria Hiperbólica e outro da Geometria Esférica — e compreendessem a existência de superfícies com curvaturas positiva e negativa. Essa sequência didática foi implementada em uma turma da segunda série da Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio, no curso Técnico em Informática, em uma Escola Pública da Rede Estadual da Bahia, localizada no município de Serrinha.

Devido à complexidade dos conceitos matemáticos subjacentes às geometrias não euclidianas, percebemos a necessidade de fundamentar nosso trabalho teoricamente. Assim, outro objetivo deste trabalho foi realizar um estudo aprofundado sobre tópicos que geralmente compõem um curso de Geometria Diferencial, além de compreender o surgimento das Geometrias Não Euclidianas, mas especificamente a Geometria Hiperbólica.

### 1.1 Estrutura do Trabalho

No Capítulo 2, apresentamos um breve relato histórico sobre o surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Partimos das tentativas de demonstrar o postulado das paralelas de Euclides, utilizando o método da redução ao absurdo, até a adoção da negação do quinto postulado como hipótese, culminando na Geometria Hiperbólica. Além disso, apresentamos os modelos do Disco de Poincaré e Pseudoesfera de Beltrami.

No Capítulo 3, abordamos conceitos fundamentais sobre curvas no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Definimos curva parametrizada diferenciável, vetor tangente, curva parametrizada regular e mudanças de parâmetro, com ênfase na parametrização pelo comprimento de arco. Além disso, discutimos curvatura, torção e o referencial ortonormal conhecido como Triado de Frenet.

No Capítulo 4, tratamos de superfícies regulares, explorando conceitos como mudança de parâmetros, plano tangente, primeira e segunda formas fundamentais, área de regiões de superfícies, curvatura normal, curvaturas principais, curvatura gaussiana e curvatura média. Classificamos os pontos de uma superfície com base nos sinais das curvaturas gaussiana e média.

No Capítulo 5, introduzimos conceitos da geometria intrínseca das superfícies. Trabalhamos com uma superfície regular parametrizada  $X(u, v)$  e utilizamos o triado  $\{X_u, X_v, N\}$  como base no espaço  $\mathbb{R}^3$ , descrevendo combinações lineares de  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vv}$ ,  $N_u$  e  $N_v$ . A partir disso, definimos os Símbolos de Christoffel e apresentamos o Teorema Egregium de Gauss, que demonstra que a curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca da superfície. Também abordamos as geodésicas, a curvatura geodésica e concluimos com o Teorema de Gauss-Bonnet.

No capítulo 6, aplicamos uma proposta de estudo dedicada à exploração de resultados de geometrias não euclidianas no Ensino Médio, visando estimular uma compreensão intuitiva das geometrias esférica e hiperbólica entre os estudantes. Para alcançar esse objetivo, desenvolvemos atividades que abordam conceitos da geometria euclidiana em superfícies não planas. A introdução dos conceitos de ponto, reta e plano serviram como ponto de partida para a exploração dessas novas geometrias, enquanto materiais manipuláveis foram empregados para facilitar a compreensão de superfícies com curvaturas não nulas. Além disso, aproveitamos o ambiente dinâmico oferecido pelo software GeoGebra para realizar construções simultâneas nos espaços hiperbólico e esférico, enriquecendo ainda mais a experiência de aprendizado dos estudantes.

# Capítulo 2

## Um pouco de História

Entre as diversas áreas de estudo da matemática, a geometria sempre se destacou de maneira especial. Sua importância no desenvolvimento da humanidade é indiscutível, pois ao longo da história, desde as civilizações mais antigas, o ser humano tem utilizado conceitos, teorias, técnicas e instrumentos geométricos em uma ampla gama de situações. Desde a construção das grandiosas pirâmides do Egito até tarefas cotidianas, como demarcar terras ou medir distâncias, a geometria desempenha um papel fundamental. Suas aplicações abrangem desde os desafios mais complexos até os problemas mais simples, que se tornaram mais acessíveis com o avanço da geometria e das tecnologias associadas. Nesse sentido Piaseski (2010), destaca:

A Geometria é parte essencial da Matemática, sua importância é inquestionável tanto pelo ponto de vista prático quanto pelo aspecto instrumental na organização do e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se aprimorar pensamento lógico, na construção da cidadania, na medida em que a sociedade cada vez mais se utiliza de 14 conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se aprimorar (PIASESKI, 2010, p.16).

As origens precisas do estudo sistemático da geometria não são totalmente claras, mas evidências como o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras sugerem que, pelo menos na Grécia Antiga do século VI a.C., pensadores como Tales de Mileto já buscavam argumentar de forma organizada e lógica, estabelecendo os fundamentos da geometria como uma teoria dedutiva.

No entanto, foi com o tratado matemático e geométrico conhecido como "Os Elementos", composto por treze livros e escrito por Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C., que a ideia de uma geometria como ciência axiomática e dedutiva foi formalmente estabelecida. Este trabalho incluiu a apresentação dos "cinco postulados de Euclides", que serviram como base para a Geometria Euclidiana. Devido à influência duradoura desta obra, a geometria plana é frequentemente referida como Geometria Euclidiana, e

Euclides é reconhecido como o Pai da Geometria.

No primeiro livro de "Os Elementos", Euclides aborda principalmente a geometria plana, apresentando proposições, axiomas, termos definidos e os cinco postulados fundamentais. Dentre esses postulados, destaca-se especialmente o quinto postulado de Euclides, que recebeu uma atenção especial em nosso trabalho. Em seguida apresentaremos uma versão dos cinco postulados de Euclides segundo Bicudo (2009, p. 98).

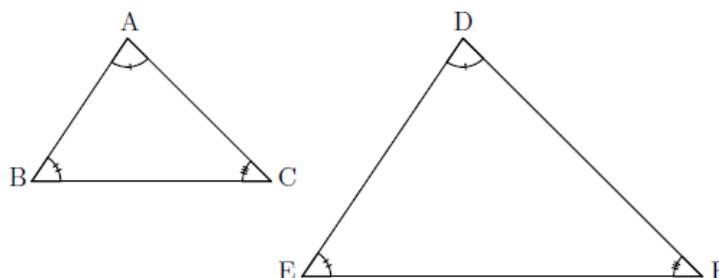
- I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

A obra de Euclides não apresenta uma prova do quinto postulado, conhecido como o postulado das paralelas, no entanto, durante séculos houveram inúmeras tentativas de demonstrar este postulado ou apresentar uma proposição equivalente ao mesmo admitindo como hipótese a veracidade dos outros postulados da Geometria Euclidiana.

Por exemplo, o matemático inglês John Wallis (1616-1703) propôs o seguinte postulado:

**Postulado de Wallis.** Dado qualquer triângulo  $\triangle ABC$  e dado qualquer segmento  $\overline{DE}$ . Existe um  $\triangle DEF$  (tendo  $\overline{DE}$  como um dos seus lados) que é semelhante ao  $\triangle ABC$ , pelo caso de semelhança AAA, denotado  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ .

Figura 1: Postulado de Wallis



Fonte: Autor (2024)

John Wallis provou o quinto postulado utilizando o seu axioma, que se mostrou logicamente equivalente ao postulado de Euclides, e os outros axiomas da geometria neutra. A geometria neutra é uma área da matemática que não admite o quinto postulado

de Euclides.

Outros matemáticos que apresentaram versões equivalentes ao postulado das paralelas de Euclides foram John Playfair (1748-1819) e David Hilbert (1862-1943). Os livros didáticos costumam utilizar uma escrita similar a redação do postulado das paralelas de Playfair. A seguir os axiomas atribuídos a Playfair e Hilbert, respectivamente.

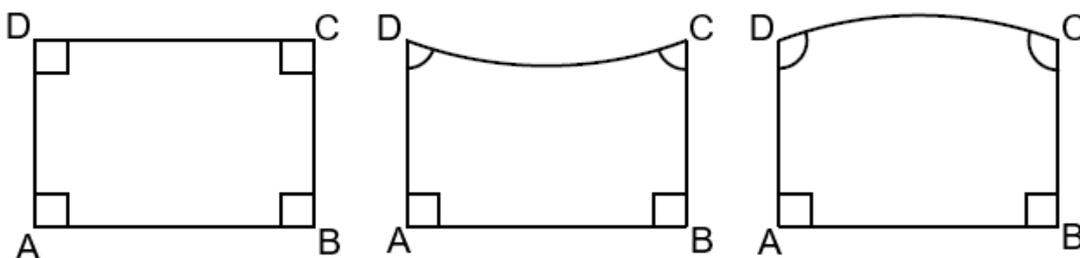
**Postulado das paralelas de Playfair.** Dada uma reta e um ponto exterior, existe uma e uma só reta contendo o ponto e paralela à reta dada.

**Postulado das paralelas de Hilbert.** Sejam dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$  que não pertence a  $r$ . Então existe, no máximo, uma reta que passa por  $P$  e não intersecta  $r$ . Chama-se essa única reta de paralela a  $r$  passando por  $P$ .

O padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733) publicou um livro intitulado Euclides “ab omni naevo vindicatus” (Todas as falhas de Euclides). Na tentativa de provar o postulado das paralelas, Saccheri usou o método da redução ao absurdo<sup>1</sup>, ele tomou como hipótese a negação do quinto postulado e tentou deduzir uma contradição. Na busca pelo absurdo ele estudou os quadriláteros que se tornaram conhecidos como Quadriláteros de Saccheri, que apresentam por características ângulos retos e adjacentes na base, e três hipóteses para os ângulos superiores:

**Definição 2.0.1.** Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é dito Quadrilátero de Saccheri de base  $AB$ , topo  $DC$  e laterais  $AD$  e  $BC$  quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado base, ou seja,  $AD \equiv BC$ ,  $AD \perp AB$  e  $BC \perp AB$ .

Figura 2: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Autor (2024)

- I. **Hipótese do ângulo agudo:** os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos.
- II. **Hipótese do ângulo reto:** os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são retos.

<sup>1</sup>Segundo Garbi (2010, p.17), neste método, supõe-se que a proposição que se deseja demonstrar seja falsa.

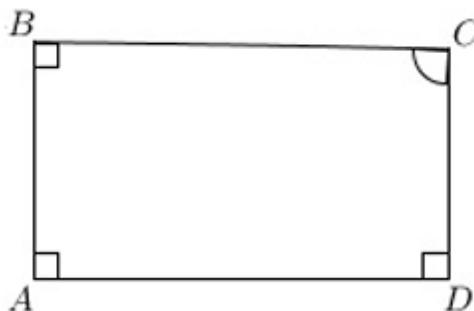
III. **Hipótese do ângulo obtuso:** os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são obtusos.

Saccheri tentou provar que o único caso possível seria a hipótese do ângulo reto. Ele conseguiu mostrar que hipótese do ângulo obtuso levava a uma contradição. No entanto, não obteve sucesso em encontrar uma contradição ao negar o quinto postulado de Euclides, admitindo hipótese do ângulo agudo. Girolamo Saccheri não identificou em seus estudos que a primeira hipótese estava obtendo diversos resultados em geometrias não euclidianas.

Outro matemático que tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides foi Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Em sua tentativa de provar o postulado das paralelas, Lambert direcionou seus estudos aos chamados quadriláteros de Lambert, que se caracterizam por possuírem pelo menos três ângulos retos.

**Definição 2.0.2.** Um quadrilátero é dito Quadrilátero de Lambert quando possuir três ângulos internos retos.

Figura 3: Quadrilátero de Lambert



Fonte: Autor (2024)

Assim como Saccheri, Lambert também não identificou a existência de geometrias não euclidianas. Porém, segundo Santos (2016, p. 31) “*Lambert mostrou que a hipótese do ângulo agudo implica que a área do triângulo é proporcional ao seu defeito, e ele especulou que esta hipótese correspondia à geometria em uma esfera de raio imaginário*”. Lambert e Saccheri não tiveram a percepção de que não havia contradição a se chegar, pois a negação do quinto postulado configurava o surgimento de geometrias não euclidianas. A partir dos trabalhos independentes de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), onde eles passaram a admitir a negação do postulado das paralelas, chamaram a atenção para uma nova geometria.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também utilizou o método da redução ao absurdo, admitindo como hipótese “*a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$* ” (equivalentemente a negar o Quinto Postulado), produzindo resultados importantes, como descrito por Viera (2018, p.76), “*Gauss provou que para superfícies de*

*curvatura negativa constante, a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é proporcional a área do triângulo*” (Teorema de Gauss-Bonnet).

Dentro desta perspectiva de que admitir a negação do quinto postulado de Euclides implicava em produzir resultados consistentes de geometrias não euclidianas, apresenta-se o trabalho de János Bolyai, publicado no apêndice do livro “*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo, evidenciisque huic propria, introduzndi*” (Uma tentativa de introduzir jovens estudiosos aos elementos da matemática pura; 1832) de seu pai Farkas Bolyai (1775-1856). Ainda segundo Vieira (2018):

János Bolyai concluiu que era impossível demonstrar o quinto postulado. János negou o quinto postulado, considerando que por um ponto, fora de uma reta dada, era possível traçar mais de uma reta paralela à reta dada. Ele obteve vários resultados que não contradiziam os quatro primeiros postulados (VIEIRA, 2018, p.77)

Finalmente, Lobachevsky apresenta a geometria não euclidiana, mais especificamente a Geometria Hiperbólica, através de seu artigo “*Sobre os Fundamentos da Geometria*”, como demonstra Samuco (2005):

O Mensageiro de Kazan de 1829 contém o artigo “Sobre os Fundamentos da Geometria” de Lobachevsky, o primeiro trabalho publicado que apresenta a geometrias não euclidianas (a Geometria Hiperbólica). Este monumental documento foi escrito em russo e teve pouco impacto, embora contenha o desenvolvimento completo da Geometria Hiperbólica, que Lobachevsky infelizmente designou de Geometria Imaginária (SAMUCO et al., 2005, p.23).

A Geometria Hiperbólica é conhecida como geometria lobachevskiana ou geometria de Bolyai - Lobachevsky, é uma das geometrias não euclidiana, que admite os postulados de Euclides mas substituindo o quinto postulado pelo axioma denotado por postulado de Lobachesvky.

**Postulado de Lobachesvky.** Dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.

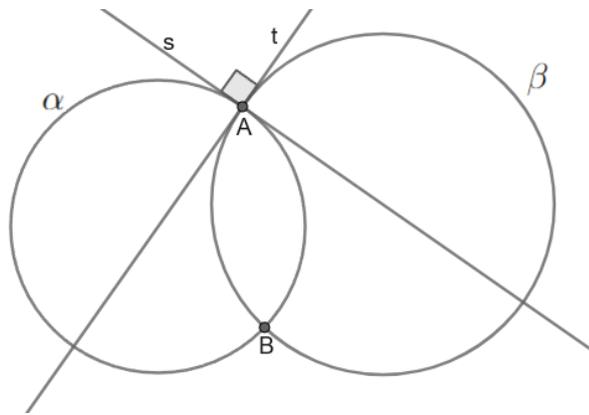
## 2.1 Modelo de Disco de Poincaré

Nessa seção apresentaremos, de forma breve, um modelo que proporciona uma representação visual para a Geometria Hiperbólica chamado de modelo de Disco de Poincaré. Esse modelo para Geometria Hiperbólica foi criado por Jules Henri Poincaré (1854–1912)

e satisfaz o postulado de Lobachesvky. Para compreensão do Disco de Poincaré, que foi utilizado em uma atividade relatada no Capítulo 6, será necessário entender as definições de circunferências ortogonais e plano hiperbólico, e como o ponto e a reta estão definidos no plano hiperbólico.

**Definição 2.1.1.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas circunferências que se intersectam em dois pontos  $A$  e  $B$ . Traçamos uma reta  $s$  tangente a  $\alpha$  no ponto  $A$  e a reta  $t$  tangente a  $\beta$  no ponto  $A$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma circunferência ortogonal à  $\beta$  se a reta  $s$  for perpendicular a reta  $t$ .

Figura 4: Circunferências Ortogonais.



Fonte: Autor (2024)

**Definição 2.1.2.** Definimos o Disco de Poincaré  $\mathbb{D}$  como um modelo da Geometria Hiperbólica que representa o espaço hiperbólico em duas dimensões dentro de um disco aberto de raio  $r > 0$  e centro  $O$  no plano euclidiano  $\mathbb{E}$ . Nesse modelo, a distância hiperbólica  $d(p, q)$  entre dois pontos  $p, q \in \mathbb{R}^2$  no disco de raio  $r$  é dada por:

$$d(p, q) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{2r^2 \|p - q\|^2}{(r^2 - \|p\|^2)(r^2 - \|q\|^2)} \right),$$

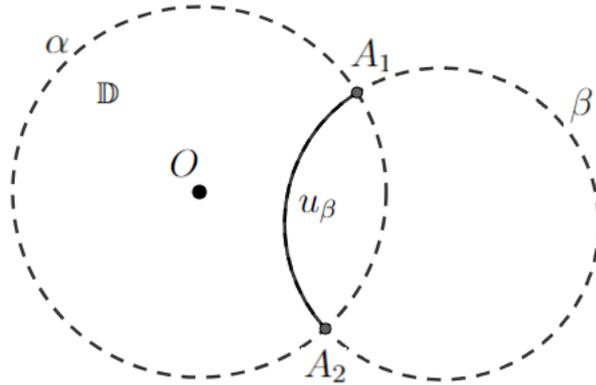
onde:

- $\|p - q\|$  é a distância euclidiana entre os pontos  $p$  e  $q$ .
- $\|p\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  e  $\|q\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$  são as normas euclidianas dos pontos  $p$  e  $q$ .
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  para  $x \geq 1$  é a função arco-cosseno hiperbólico.

Os pontos pertencentes a  $\mathbb{D}$  são chamados de pontos hiperbólicos ou h-pontos, já os pontos pertencentes a  $\alpha$  (circunferência de raio  $r$  e centro  $O$ ) são chamados de pontos ideais. O centro de  $\alpha$  também é um h-ponto, pois  $d(O, O) = 0 < r$ . Os pontos fora de  $\alpha$  não possuem denominação no Disco de Poincaré.

**Definição 2.1.3.** Sejam, em  $\mathbb{E}$ ,  $\beta$  uma circunferência ortogonal a  $\alpha$ , os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$  e o arco  $u_\beta$  formado por todos os pontos de  $\beta$  que estão a uma distância euclidiana menor que  $r$  do ponto  $O$ . Em  $\mathbb{D}$ ,  $u_\beta$  é uma h-reta com pontos ideais  $A_1$  e  $A_2$ . Dizemos que a h-reta  $u_\beta$  é gerada pela circunferência  $\beta$ .

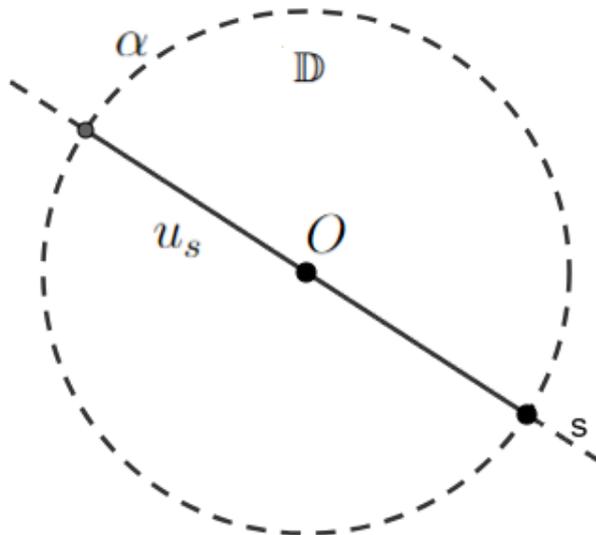
Figura 5: H-Reta.



Fonte: Autor (2024)

**Definição 2.1.4.** Considere, em  $\mathbb{E}$ , a reta  $s$  que incide no ponto  $O$ , os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , interseção entre  $\alpha$  e  $s$  e o segmento de reta  $u_s$  formado por todos os pontos de  $s$  que estão a uma distância menor que  $r$  do ponto  $O$ . Em  $\mathbb{D}$ ,  $u_s$  é uma h-reta com pontos ideais  $A_1$  e  $A_2$ . Dizemos que a h-reta  $u_s$  é gerada pela reta  $s$ .

Figura 6: Reta Hiperbólica.



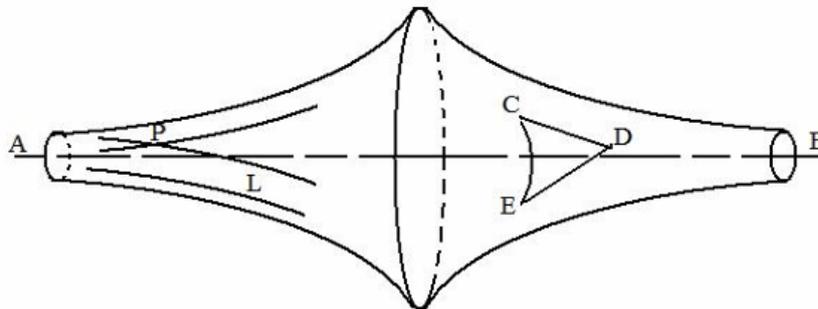
Fonte: Autor (2024)

## 2.2 Pseudoesfera de Beltrami

Nessa seção apresentaremos, sem muitos detalhes, o modelo da Pseudoesfera de Beltrami com o objetivo de obter uma representação visual para triangulo geodésico que exploramos através de uma atividade relatada no Capítulo 6.

O matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), no ano de 1868 apresentou um modelo para Geometria Hiperbólica que era contido no  $\mathbb{R}^3$  conhecido como Pseudoesfera.

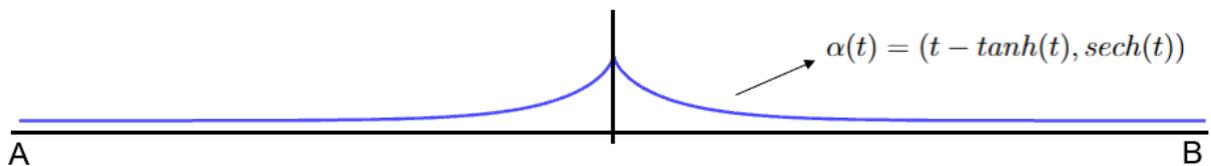
Figura 7: Pseudoesfera.



Fonte: Autor (2024)

A Pseudoesfera é uma superfície que pode ser obtida através da revolução da curva *tractrix* em relação ao eixo  $AB$ . Mas detalhes sobre esta superfície foram apresentados no Capítulo 4, mas especificamente no exemplo 4.9.7. Nos próximos capítulos apresentaremos resultados importantes sobre curvas e superfícies parametrizáveis, por exemplo, para o cálculo de h-retas.

Figura 8: Tractrix.



Fonte: Autor (2024)

# Capítulo 3

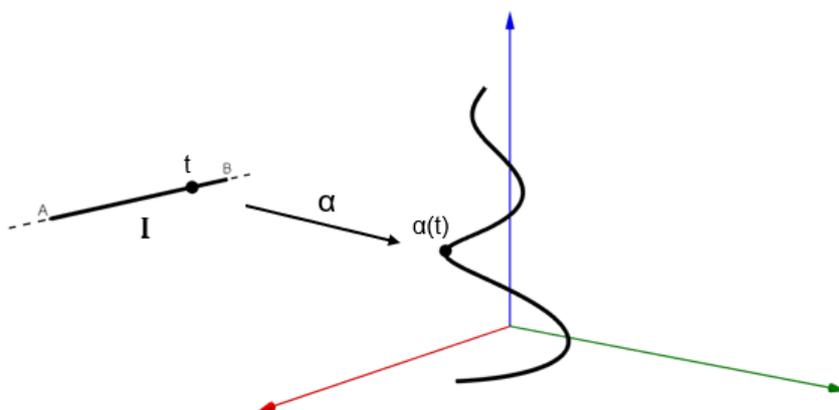
## Curvas no Espaço

Neste capítulo, faremos uma abordagem, através de definições, proposições e exemplos de aplicações sobre curva parametrizada diferenciável, vetor tangente, curva regular, comprimento de arco e as fórmulas de Frenet, conceitos fundamentais no desenvolvimento da teoria local de curvas e das superfícies regulares no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.1 Curva Parametrizada Diferenciável em $\mathbb{R}^3$

**Definição 3.1.1.** Uma curva parametrizada diferenciável do  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ <sup>1</sup>, de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in I$  é o parâmetro da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formados pelos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , é o traço da curva.

Figura 9: Curva Parametrizada Diferenciável



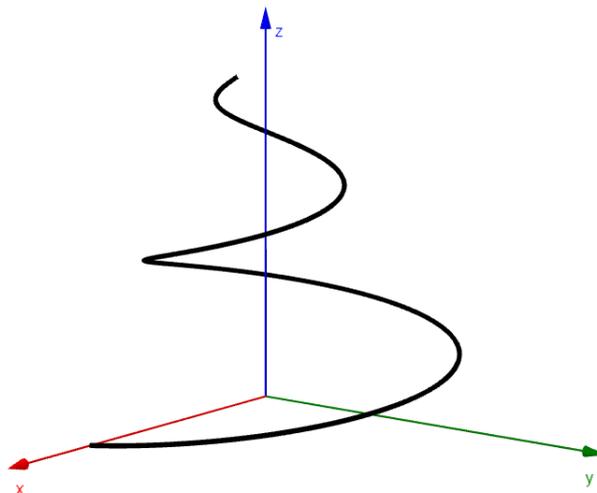
Fonte: Autor (2024)

<sup>1</sup>Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}$  para  $k \geq 1$  se  $f$  tem suas  $k$ -derivadas contínuas. No caso especial  $k = \infty$  dizemos que  $f$  tem derivadas de todas as ordens contínuas.

**Observação 3.1.2.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $t \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , onde  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 3.1.3.** A aplicação  $\beta(t) = \left(8\left(\frac{3}{4}\right)^t \cos(2t), 8\left(\frac{3}{4}\right)^t \operatorname{sen}(2t), 2t\right)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$  é uma curva diferenciável, que tem o traço da Figura 10.

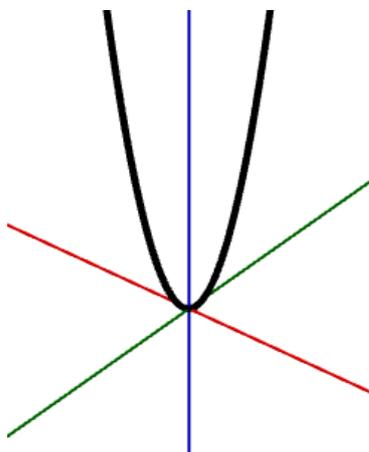
Figura 10: Traço de  $\beta(t) = \left(8\left(\frac{3}{4}\right)^t \cos(2t), 8\left(\frac{3}{4}\right)^t \operatorname{sen}(2t), 2t\right)$



Fonte: Autor (2024)

**Exemplo 3.1.4.** A aplicação  $\alpha(t) = (t, t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é uma curva parametrizada diferenciável. A parábola descrita na da Figura 11 representa o traço de  $\alpha(t)$ .

Figura 11: Parábola



Fonte: Autor (2024)

**Definição 3.1.5.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita plana se existe um plano de  $\mathbb{R}^3$  que contenha  $\alpha(I)$ . Ou seja, uma curva é plana se estiver totalmente contida num plano.

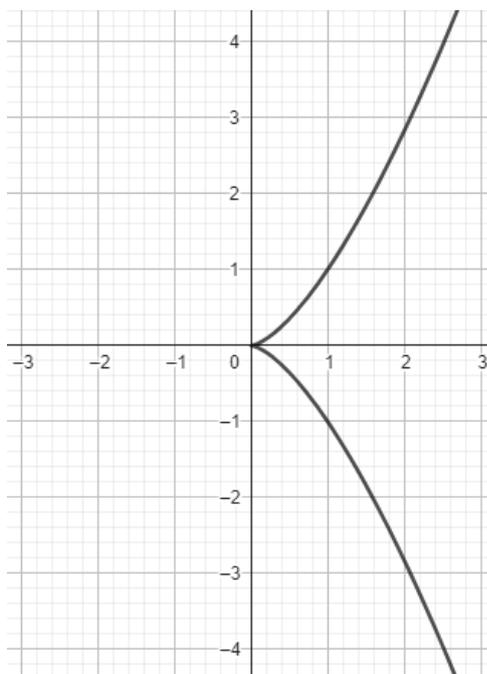
**Exemplo 3.1.6.** A aplicação  $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R}$ , onde  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e paralela ao vetor de coordenadas  $(a, b, c)$  está contida no plano determinado por  $\alpha$  e pelo ponto  $(a, b, c)$ .

## 3.2 Vetor Tangente

**Definição 3.2.1.** Seja  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a  $\alpha$  em  $t \in I$  é o vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .

**Exemplo 3.2.2.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável cujo traço está esboçado na figura 12.

Figura 12: Parábola de Neil



Fonte: Autor (2024)

Calculando  $\alpha'$  obtemos,  $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ . Observe que  $\alpha'(0) = (0, 0)$ , isso implica que o vetor tangente é nulo para  $t = 0$ .

### 3.3 Curva Parametrizada Regular

**Definição 3.3.1.** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita regular se, para todo  $t \in I$ ,  $\alpha'(t) \neq 0$ . Quando ocorrer  $\alpha'(t_0) = 0$ , para algum ponto  $t_0 \in I$ , chamamos esse ponto de singular.

Observe que no exemplo 3.2.2  $\alpha$  não é uma curva parametrizada regular, tendo  $t = 0$  como ponto singular, pois  $\alpha'(0) = (0, 0)$ . Caracterizando uma cúspide no traço de  $\alpha$ .

**Exemplo 3.3.2.** Verifique se a aplicação  $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  é uma curva parametrizada regular.

**Solução.** Calculando  $\alpha'$  obtemos,  $\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$ . Note que  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , pois por definição  $b \neq 0$ . Portanto  $\alpha(t)$  é uma curva parametrizada regular. Esta definição de curva regular impede que haja autointersecção ao traço da curva.

### 3.4 Mudança de Parâmetro

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função de classe  $C^\infty$ , cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de  $J$  e tal que  $h(J) = I$ . Então a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que  $\alpha$ , chamada de reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ . A função  $h$  é a mudança de parâmetro.

Se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ , então  $\alpha$  é uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1}$ . Uma reparametrização  $\beta$  de  $\alpha$  tem orientação igual à de  $\alpha$  se a mudança de parâmetro é estritamente crescente. Uma reparametrização  $\beta$  de  $\alpha$  tem orientação oposta à de  $\alpha$  se a mudança de parâmetro é estritamente decrescente.

**Exemplo 3.4.1.** A curva  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  tem uma reparametrização  $\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , pela mudança de parâmetro

$$t = h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, s \in \mathbb{R}.$$

### 3.5 Parametrização Pelo Comprimento de Arco

**Definição 3.5.1** (Comprimento de Arco). Sejam  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\alpha(t), t \in I$ , uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$ . O comprimento do arco da curva,  $l(\alpha)$  de  $t_0$  a  $t_1$  é dado por

$$s = l(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$$

e a função comprimento de arco da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$  é

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

**Definição 3.5.2.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco se para cada  $t_0, t \in I, t_0 \leq t$ ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0.$$

Dizemos que a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é unitária ou normalizada se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ .

**Proposição 3.5.3.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1$ .

**Prova.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é unitária, ou seja,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , então

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0.$$

Reciprocamente, se  $s(t) = t - t_0$  temos que

$$\frac{ds}{dt} = 1$$

mas pelo teorema fundamental do cálculo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = 1,$$

então

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \|\alpha'(t)\|.$$

Portanto,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . ■

**Proposição 3.5.4.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular,  $s(t) : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0 \in I$  e a sua inversa  $g(s) = s^{-1}(t) : J \rightarrow I$ . Então

$\|\alpha'(s)\| = 1$  onde  $\alpha(s) = \alpha(g(s))$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\alpha(s) = \alpha(g(s))$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Prova.** Derivando  $\alpha(s)$  temos que (usando a regra da cadeia)

$$\alpha'(s) = \frac{d}{ds}\alpha \cdot \frac{d}{ds}g.$$

Por outro lado, note que

$$t = g(s(t))$$

e derivando em relação a  $t$ ,

$$\frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1.$$

Assim, como  $\alpha$  é regular e, conseqüentemente,  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$  então

$$\frac{dg}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Dessa forma concluímos que

$$\|\alpha'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dg}{ds} \right\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1. \blacksquare$$

**Exemplo 3.5.5.** Obtenha uma reparametrização pelo comprimento de arco da curva  $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), t \in \mathbb{R}$ .

**Solução.** Calculando  $\alpha'(t)$  obtemos

$$\alpha'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \cos(t) + e^t \sin(t), e^t).$$

Segue então que

$$\|\alpha'(t)\| = e^t \sqrt{3}.$$

Daí

$$s(t) = \int_{t_0}^t e^t \sqrt{3} dt = e^t \sqrt{3} + C.$$

Sem perda de generalidade podemos tomar o  $C = 0$ , calculando a inversa de  $s(t)$ , obtemos:

$$s^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), s \in \mathbb{R}_+^*.$$

Calculando  $\alpha(s^{-1})$ ,

$$\alpha(s^{-1}) = \left( \frac{t}{\sqrt{3}} \cos\left(\ln\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right), \frac{t}{\sqrt{3}} \sin\left(\ln\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right), \frac{t}{\sqrt{3}} \right).$$

Calculando  $\alpha'(s^{-1})$ ,

$$\alpha'(s^{-1}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) \right], \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) \right], \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Por fim, calculando  $\|\alpha'(s^{-1})\|$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s^{-1})\|^2 &= \frac{1}{3} \left( \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) \right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ \|\alpha'(s^{-1})\| &= 1. \end{aligned}$$

Portanto  $\alpha(s^{-1})$  é uma reparametrização de  $\alpha(t)$  pelo comprimento de arco.

**Proposição 3.5.6.** *Toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

**Prova.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular de classe  $C^k$ , considere a função comprimento de arco  $s : I \rightarrow J$  de  $\alpha$  a partir de  $t_0$  com  $J = s(I)$ . Afirmamos que sua inversa  $s^{-1} : J \rightarrow I$  está bem definida e é uma função de classe  $C^k$ . De fato, como

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0,$$

a função  $s$  é estritamente crescente, logo a sua inversa está bem definida. Além disso,  $s$  é uma função de classe  $C^k$ , pois

$$\begin{aligned} s'(t) &= \|\alpha'(t)\| = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{\frac{1}{2}}, \\ s''(t) &= \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}, \\ s'''(t) &= \frac{\langle \alpha'''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle^2}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ &\vdots \\ s^{(k)}(t) &= \frac{F(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(k)}(t))}{\|\alpha'(t)\|^p}, \end{aligned}$$

para algum inteiro  $p$  e para uma função de classe  $C^\infty$ ,  $F : (\mathbb{R}^3)^k \rightarrow \mathbb{R}$ , combinação de produtos internos; segue também do teorema da função inversa que sua inversa  $s^{-1}$  também é uma função de classe  $C^k$ .

Portanto podemos definir uma reparametrização de classe  $C^k$

$$\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de  $\alpha$  por

$$\beta = \alpha \circ s^{-1}.$$

Segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \beta'(r) &= \alpha'(s^{-1}(r))(s^{-1})'(r) \\ &= \alpha'(s^{-1}(r)) \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} \\ &= \frac{\alpha'(s^{-1}(r))}{\|\alpha'(s^{-1}(r))\|}, \end{aligned}$$

donde

$$\|\beta'(r)\| = 1. \blacksquare$$

### 3.6 Teoria Local das Curvas e Triado de Frenet

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominada curvatura de  $\alpha$ .

**Definição 3.6.1** (Vetor Tangente Unitário). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Denotamos o vetor tangente unitário à curva no ponto  $\alpha(s)$  por

$$t(s) = \alpha'(s).$$

**Definição 3.6.2** (Curvatura). Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  é o número real

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|.$$

Ou equivalentemente

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

**Exemplo 3.6.3.** Considere a aplicação  $\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right), 0 \right)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Note que  $\alpha(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco,

$$\int \|\alpha'(s)\| ds = \int \left\| \left( -\sin\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right), 0 \right) \right\| ds = \int \|1\| ds = 1.$$

A curvatura de  $\alpha(s)$  é

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \left\| \left( -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right), -\frac{1}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right), 0 \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.6.4.** Reparametrize a curva  $\alpha(t) = (4\cos(t), 5 - 5\operatorname{sen}(t), -3\cos(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  por comprimento de arco e obtenha a curvatura.

**Solução.** Calculando a função  $s(t)$  comprimento de arco

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \|\alpha'(t)\| dt = \int \|-4\operatorname{sen}(t), -5\cos(t), 3\operatorname{sen}(t)\| dt = \\ &= \int \sqrt{16\operatorname{sen}^2(t) + 25\cos^2(t) + 9\operatorname{sen}^2(t)} dt = \int 5 dt = 5t + C. \end{aligned}$$

Considerando  $C = 0$ , temos que  $s(t) = 5t$ , onde pela mudança de parâmetro  $t = \frac{s}{5}$ ,  $s \in \mathbb{R}$

$$\alpha(s) = \left( 4\cos\left(\frac{s}{5}\right), 5 - 5\operatorname{sen}\left(\frac{s}{5}\right), -3\cos\left(\frac{s}{5}\right) \right)$$

é uma reparametrização de  $\alpha(t)$  por comprimento de arco. Calculando a curvatura,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left( -\frac{4}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{5}\right), -\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{5}\right) \right) \\ \alpha''(s) &= \left( -\frac{4}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right) \right) \\ \kappa(s) &= \|\alpha''(s)\| \\ &= \sqrt{\frac{16}{625}\cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + \frac{1}{25}\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{5}\right) + \frac{9}{625}\cos^2\left(\frac{s}{5}\right)} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

**Proposição 3.6.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então  $\alpha(I)$  é um segmento de reta se, e somente se,  $\kappa(s) = 0, \forall s \in I$ .*

**Prova.** Suponha que  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, então  $\alpha(s) = p + vs$  onde  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $v$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\forall s \in I$ ,  $\alpha'(s) = v$  e  $\alpha''(s) = 0$ , donde  $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ . Reciprocamente, se  $\|\alpha''(s)\| = 0, \forall s \in I$ , então  $\alpha''(s) = 0$ . Integrando, temos que  $\alpha'(s) = v$  e  $\|v\| = 1$ . Integrando novamente, obtemos  $\alpha(s) = p + vs$ , cujo traço é um segmento de reta.

**Proposição 3.6.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então o vetor  $t'(s)$  é ortogonal ao vetor tangente  $t(s)$ , isto é, para todo  $s$  temos que*

$$\langle t(s), t'(s) \rangle = 0.$$

**Prova.** Derivando

$$\langle t(s), t(s) \rangle = \|t(s)\|^2 = 1.$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|t(s)\|^2 &= \frac{d}{ds} 1 \\ \frac{\langle t(s), t'(s) \rangle}{\|t(s)\|} &= 0 \\ \langle t'(s), t(s) \rangle &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Definição 3.6.7** (Vetor Normal). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Se  $\kappa(s) \neq 0$ , definimos o vetor normal principal  $n(s)$  à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(s)$  da seguinte forma:

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}.$$

O vetor normal principal é um vetor unitário na direção de  $t'(s)$ , ou seja,

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{t'(s)}{k(s)}.$$

Em outros termos

$$t'(s) = \kappa(s)n(s).$$

Ou seja,  $t'(s)$  e  $n(s)$  são linearmente dependentes.

Observe que  $n(s)$  assim definido fica restringido às curvas parametrizadas por comprimento de arco em que  $\|\alpha''(s)\| \neq 0$  para todo  $s \in I$ , pois, nos pontos onde  $\kappa(s) = 0$  o vetor  $n(s)$  não está definido.

**Proposição 3.6.8.**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então o vetor normal  $n(s)$  é ortogonal ao vetor tangente  $t(s)$ , isto é, para todo  $s$  temos que

$$\langle n(s), t(s) \rangle = 0.$$

**Prova.**

$$\langle n(s), t(s) \rangle = \left\langle \frac{t'(s)}{\kappa(s)}, t(s) \right\rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \langle t'(s), t(s) \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

**Definição 3.6.9** (Vetor Binormal). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\kappa(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

**Proposição 3.6.10.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\kappa(s) > 0$ , então  $b(s)$  é um vetor unitário, ou seja  $\|b(s)\| = 1$ .

**Prova.**

$$\|b(s)\| = \|t(s) \times n(s)\| = \|t(s)\| \cdot \|n(s)\| \cdot \text{sen}(90^\circ) = 1.$$

Observe que, usando as propriedades do produto vetorial, temos que  $\langle b(s), t(s) \rangle = \langle b(s), n(s) \rangle = 0$ , de fato:

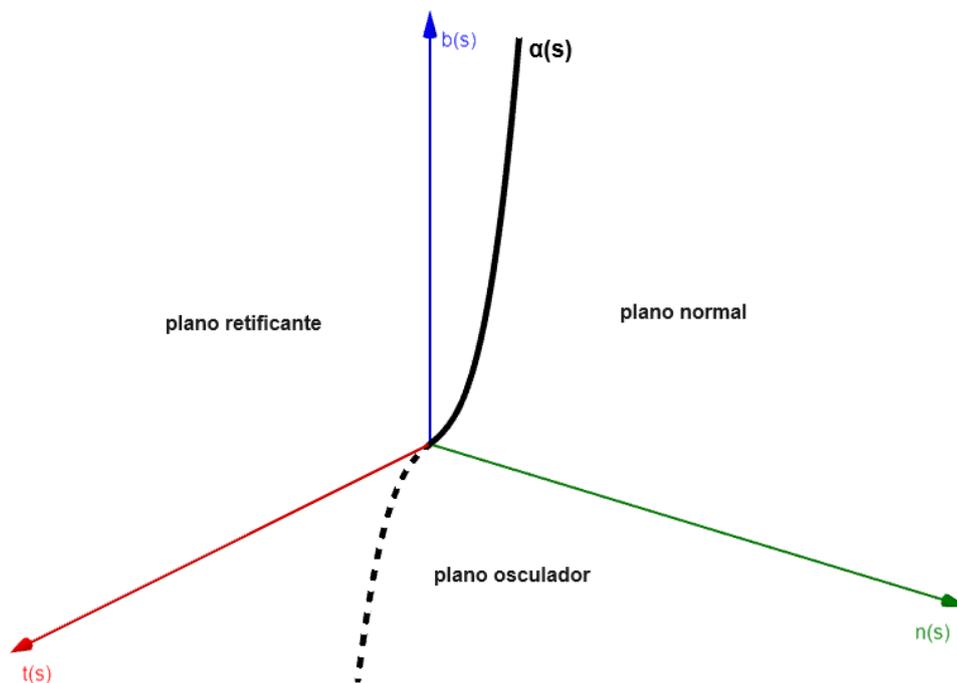
$$\langle b(s), t(s) \rangle = \langle t(s) \times n(s), t(s) \rangle = \langle t(s) \times n(s), n(s) \rangle = \langle b(s), n(s) \rangle = 0.$$

Portanto  $t(s)$ ,  $n(s)$ ,  $b(s)$  são ortogonais dois a dois entre si, assim formam uma base ortonormal para o  $\mathbb{R}^3$ .

**Observação 3.6.11** (Triedo de Frenet). O referencial ortonormal  $t(s)$ ,  $n(s)$ ,  $b(s)$  é conhecido como triedo de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Os vetores do triedo de Frenet, dois a dois, determinam um plano. O plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(s)$  e é normal ao vetor  $t(s)$  é o plano normal à curva  $\alpha$  em  $s$ . O plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $b(s)$  é denominado plano osculador, e o plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $n(s)$  é o plano retificante da curva  $\alpha$  em  $s$  (ver figura 13).

Figura 13: Triedo de Frenet



Fonte: Autor (2024)

A resposta a alguns problemas da teoria das curvas depende das propriedades locais destas e assim necessitaremos derivar nosso triedo de Frenet para que possamos estudar localmente as curvas e posteriormente os análogos à superfície. Escreveremos um conjunto de três equações diferenciais relacionando as propriedades principais das

curvas, semelhante a uma já obtida anteriormente, isto é  $t'(s) = k(s)n(s)$ . Este conjunto de equações recebe o nome de fórmulas de Frenet-Serret que possui várias propriedades que faremos uso nos próximos tópicos onde informações locais de curvas regulares serão necessárias. Daremos início calculando  $b'(s)$ .

Como  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , segue então que

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s) \end{aligned}$$

Portanto  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$ . Além disso  $b'(s)$  é ortogonal a  $b(s)$ , de fato

$$\begin{aligned} \langle b(s), b(s) \rangle &= \|b(s)\|^2 = 1 \\ \frac{d}{ds} \|b(s)\|^2 &= \frac{d}{ds} 1 \\ \frac{\langle b(s), b'(s) \rangle}{\|b(s)\|} &= 0 \\ \langle b'(s), b(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Donde concluímos que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ , pois,  $n(s) = t(s) \times b(s)$ . Isso significa que  $b'(s)$  é igual ao produto de  $n(s)$  por um número real.

**Definição 3.6.12** (Torção). O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva em  $s$ .

**Exemplo 3.6.13.** Obtenha a curvatura e torção da aplicação

$$\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{3}}{4}s, \cos\left(\frac{s}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right), s \in \mathbb{R}.$$

**Solução.** Calculando a curvatura

$$\begin{aligned} t(s) &= \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right) \right). \\ \int \|t(s)\| ds &= \int \left\| \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right\| ds \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{s}{2}\right)} \\ &= \int \|1\| ds = 1. \end{aligned}$$

$\alpha(s)$  assim definida está parametrizada pelo comprimento de arco, e a curvatura de  $\alpha(s)$

é

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \|t'(s)\| = \left\| \left( 0, -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right\| \\ &= \sqrt{0 + \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{16}\text{sen}^2\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{4}, \forall s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Calculando a torção

$$n(s) = \frac{t'(s)}{k(s)} = \frac{\left( 0, -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right)}{\frac{1}{4}} = \left( 0, -\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right).$$

$$\begin{aligned}b(s) &= t(s) \times n(s) \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right), \frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \times \left( 0, -\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

$$b'(s) = \left( 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{8}\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \langle b'(s), n(s) \rangle \\ &= \left\langle \left( 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{8}\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right), \left( 0, -\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right) \right\rangle\end{aligned}$$

$$\tau(s) = -\frac{\sqrt{3}}{8}\text{sen}^2\left(\frac{s}{2}\right)$$

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e tal que  $\kappa(s) > 0$ ,  $\forall s \in I$ , então o triedo de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$  é um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, podemos obter os vetores  $t'(s)$ ,  $n'(s)$  e  $b'(s)$  como combinação linear de  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$ . Já calculamos  $t'(s)$  e  $b'(s)$ , vamos obter uma expressão para  $n'(s)$ . Tomaremos como ponto de partida o fato que

$$n(s) = b(s) \times t(s).$$

Derivando essa expressão, obtemos

$$\begin{aligned}n'(s) &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) = (\tau(s)n(s)) \times t(s) + b(s) \times (k(s)n(s)) \\ &= \tau(s)(n(s) \times t(s)) + k(s)(b(s) \times n(s)) = -\tau(s)(t(s) \times n(s)) - k(s)(n(s) \times b(s)) \\ n'(s) &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s).\end{aligned}$$

Resumindo, se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , e tal que  $\kappa(s) > 0$ ,  $\forall s \in I$ , então o triedo de Frenet definido por  $t(s) = \alpha'(s)$ ,

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \text{ e } b(s) = t(s) \times n(s) \text{ satisfaz as equações } \begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s), \\ b'(s) = \tau(s)n(s). \end{cases}$$

que são denominadas fórmulas de Frenet.

Este é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem o qual podemos colocar na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Daremos agora formas mais diretas do cálculo da curvatura e torção de uma dada curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Proposição 3.6.14.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ ,  $\forall t \in I$ . Sejam  $\kappa(s) > 0$  e  $\tau(s)$  a curvatura e torção de  $\beta$  em  $s \in J$ , então*

$$\begin{aligned} \kappa(s(t)) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ \tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

**Prova.** Derivando em relação  $t$  a expressão  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , obtemos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t) \tag{3.6.1}$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha''(t). \tag{3.6.2}$$

Como

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|. \tag{3.6.3}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\| \\ \frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{\langle \alpha''(t) \times \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}. \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Segue de (3.6.1) e (3.6.2) que

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2}.$$

Portanto,

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \left\| \frac{ds}{dt} \right\|^3 \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\|,$$

onde usamos o fato de que  $\beta$  está parametrizado pelo comprimento de arco e, portanto,  $\frac{d\beta}{ds}$  é ortogonal a  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$ . Concluimos, usando (3.6.3), que

$$\kappa(s(t)) = \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Para obter a expressão da torção, vamos utilizar os vetores normal e binormal de  $\beta$ , que são dados por

$$\begin{aligned} n(s(t)) &= \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2}, \\ b(s(t)) &= \frac{d\beta}{ds} \times n(s(t)). \end{aligned}$$

Substituindo (3.6.3) e (3.6.4) em (3.6.1) e (3.6.2) e usando a expressão de  $\kappa(s(t))$ , obtemos

$$\begin{aligned} n(s(t)) &= \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle\alpha''(t), \alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \\ b(s(t)) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Derivando a última igualdade em relação a  $t$ , temos

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha' \times \alpha'''}{\|\alpha'\|\|\alpha' \times \alpha'''\|} - \frac{\langle\alpha' \times \alpha''', \alpha' \times \alpha''\rangle\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'\|\|\alpha' \times \alpha'''\|^3}.$$

Como

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle.$$

Concluimos que

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle\alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \blacksquare$$

As expressões  $\kappa(s(t))$  e  $\tau(s(t))$  obtidas na proposição 3.6.14 representam, respectivamente, a curvatura e torção de  $\alpha$  em  $t$ . Isto é, para uma curva  $\alpha$  não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

**Exemplo 3.6.15.** A curva

$$\beta(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{a\sqrt{a^2+1}}\right), \frac{s}{\sqrt{a^2+1}}, a \sin\left(\frac{s}{a\sqrt{a^2+1}}\right) \right), s \in \mathbb{R}, a > 0,$$

é uma reparametrização pelo comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = \left( a \cos\left(\frac{t}{a}\right), at, a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right) \right), t \in \mathbb{R}, a > 0,$$

pela mudança de parâmetro  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + 1}}$ . Isto é,  $\beta(s(t)) = \alpha(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Encontre a curvatura e a torção de  $\alpha$  em  $t$ .

**Solução.** Pela proposição 3.6.14 a curvatura e a torção de  $\alpha$  em  $t$  são, respectivamente,  $\kappa(s(t))$  e  $\tau(s(t))$ .

$$\begin{aligned} \kappa(s(t)) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ &= \frac{\left\| \left( -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right), a, \cos\left(\frac{t}{a}\right) \right) \times \left( -\cos\left(\frac{t}{a}\right), 0, -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right) \right) \right\|}{(\sqrt{a^2 + 1})^3} \\ &= \frac{\left\| \left( -a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right), -1, a \cos\left(\frac{t}{a}\right) \right) \right\|}{(\sqrt{a^2 + 1})^3} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{(\sqrt{a^2 + 1})^3} = \frac{1}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \left( -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right), a, \cos\left(\frac{t}{a}\right) \right) \times \left( \operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right), 0, -\cos\left(\frac{t}{a}\right) \right), \alpha''(t) \right\rangle}{\left\| \left( -a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right), -1, a \cos\left(\frac{t}{a}\right) \right) \right\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \left( a \cos\left(\frac{t}{a}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2t}{a}\right), a \cos\left(\frac{t}{a}\right) \right), \left( -\cos\left(\frac{t}{a}\right), 0, -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{a}\right) \right) \right\rangle}{(\sqrt{a^2 + 1})^2} \\ &= -\frac{a}{(\sqrt{a^2 + 1})^2} \\ &= -\frac{a}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Superfícies Regulares

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre superfícies regulares parametrizadas, assumimos que temos um sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  em  $\mathbb{R}^3$  e consideramos uma função  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = S \subset \mathbb{R}^3$  de duas variáveis  $u, v$  que variam no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Para cada ponto  $(u, v) \in U$ ,  $X(u, v)$  determina um ponto do  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.1 Superfície Parametrizada Regular

**Definição 4.1.1.** Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto do  $\mathbb{R}^2$ , tal que:

- I.  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ , isto é, possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ ;
- II. Para todo  $q = (u, v) \in U$  a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q$  é injetora.

As variáveis  $u$  e  $v$  são parâmetros da superfície. O subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  obtido pela imagem da aplicação  $X$  é denominado traço de  $X$ .

**Observação 4.1.2** (Matriz Jacobiana). Sejam  $e_1, e_2$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Para cada  $q = (u_0, v_0) \in U$ , a matriz associada a  $dX_q$  nas bases canônicas é a matriz jacobiana

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

pois

$$X_u(u_0, v_0) = dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$X_v(u_0, v_0) = dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

As seguintes afirmações - que caracterizam a regularidade  $X$  - são equivalentes:

- I.  $dX_q$  é injetora;
- II. A matriz  $J(u_0, v_0)$  tem posto 2;
- III. Os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são linearmente independentes;
- IV.  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$ .

As superfícies são também estudadas via curvas contidas nela. Existem duas curvas especiais, além de outras que estudaremos nas próximas, que são as curvas coordenadas. Se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada, então, fixado um ponto  $(u_0, v_0) \in U$ , as curvas

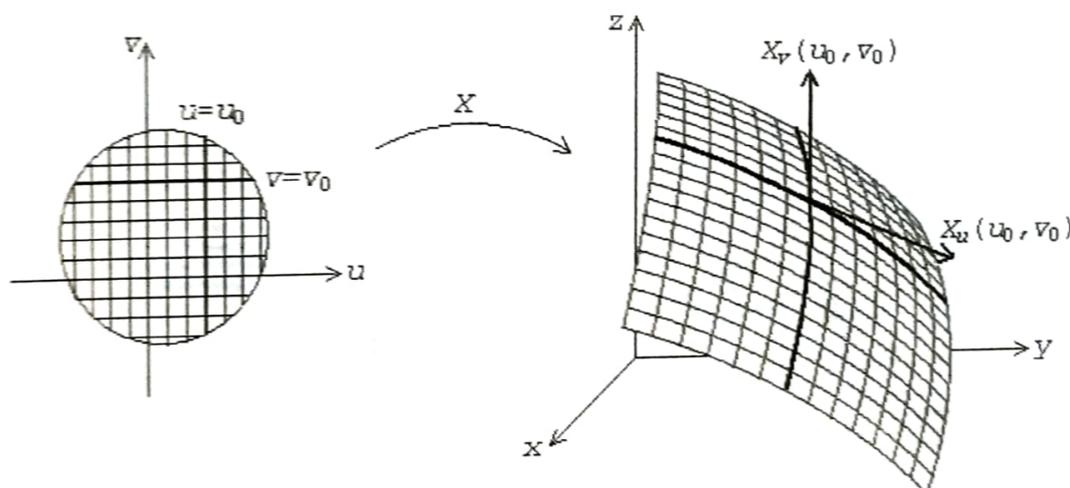
$$u \mapsto \alpha(u) = X(u, v_0),$$

$$v \mapsto \beta(v) = X(u_0, v),$$

são chamadas de curvas coordenadas de  $X$  em  $(u_0, v_0)$ .

Os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são os vetores tangentes às curvas coordenadas.

Figura 14: Vetores tangentes as curvas coordenadas.



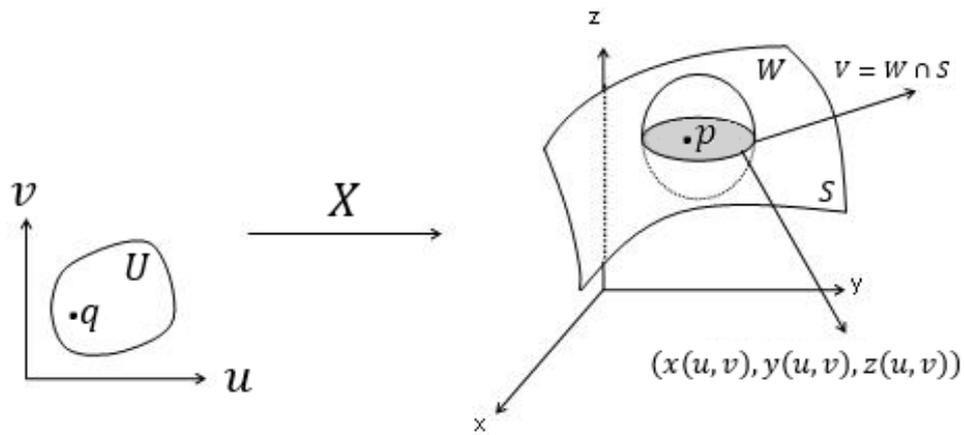
Fonte: (TENENBLAT, 2008, p.111)

Uma noção mais restrita que a de superfície parametrizada regular é a de superfície regular. Como veremos a definição seguinte acrescenta-se ao aparato diferencial conceitos topológicos como vizinhança e homeomorfismo.

**Definição 4.1.3** (Superfície Regular). Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é dito uma superfície regular de classe  $C^k$  se para cada  $p \in S$  existe um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , uma vizinhança  $W$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V$ , onde  $V = W \cap S$ , em que

- I.  $X$  é diferenciável de classe  $C^k$ , isto é, possui derivadas parciais contínuas de ordem  $k$  em  $U$ ;
- II.  $X$  é um homeomorfismo, isto é  $X$  é uma bijeção contínua e  $X^{-1}$  também é contínua, ou seja, existe uma vizinhança  $W \subset \mathbb{R}^3$  de  $V$  tal que  $X^{-1} : W \rightarrow U$  é contínua.
- III. Para todo  $q = (u, v) \in U$  a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q$  é injetora.

Figura 15: Superfície regular.



Fonte: Autor (2024)

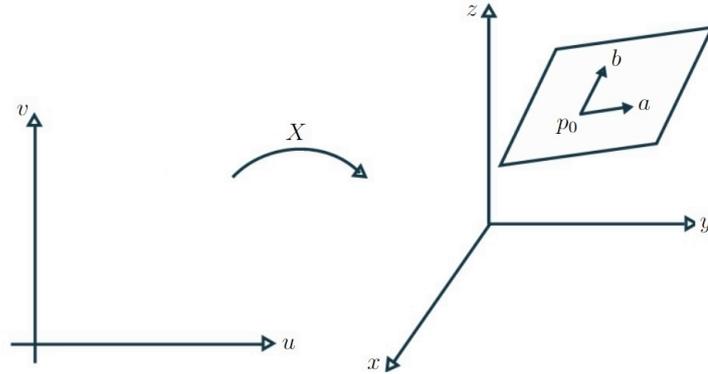
A aplicação  $X$  é chamada uma carta ou sistema de coordenadas local, a vizinhança  $V$  é chamada uma vizinhança coordenada e  $(u, v) \in U$  são as coordenadas locais. Um conjunto de parametrizações cujas imagens cobrem  $S$  é chamado um atlas.

**Exemplo 4.1.4** (Plano). Sejam  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $\mathbb{R}^3$ ,  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^3$ . Considere a aplicação  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que, para cada  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , associa  $X(u, v) = p_0 + ua + vb$ , isto é,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= p_0 + ua + vb \\ &= (x_0, y_0, z_0) + u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3) \\ X(u, v) &= (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3). \end{aligned}$$

Note que  $X$  é diferenciável, e  $X_u \equiv a$  e  $X_v \equiv b$  são linearmente independentes, então  $X$  é uma superfície parametrizada regular que descreve um plano no  $\mathbb{R}^3$ , que passa pelo ponto  $p_0$ , ortogonal ao vetor  $a \times b$ , cujas curvas coordenadas de  $X$  descrevem retas do plano paralelas aos vetores  $a$  e  $b$ , respectivamente.

Figura 16:  $X(u, v) = p_0 + ua + vb$ .



Fonte: Autor (2024)

**Exemplo 4.1.5** (Superfícies de revolução). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(v) = (f(v), g(v))$  uma curva parametrizada regular tal que  $f(v) > 0$  para todo  $v \in I$ , podemos imaginar  $\alpha$  contida no plano  $yz$  definido

$$\alpha(v) = (0, f(v), g(v)).$$

Se girarmos esta curva ao redor do eixo  $z$  obteremos uma superfície parametrizada regular, chamada uma superfície de revolução. Uma parametrização para a superfície de revolução gerada por  $\alpha$  é  $X : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) &= (-f(v)\sen(u), f(v)\cos(u), 0), \\ \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) &= (f'(v)\cos(u), f'(v)\sen(u), g'(v)), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\| &= \|(f(v)g'(v)\cos(u), f(v)g'(v)\sen(u), -f(v)f'(v))\| \\ &= f(v)\sqrt{[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2} > 0. \end{aligned}$$

para todos  $(u, v) \in \mathbb{R} \times I$ . Nesta parametrização, as curvas coordenadas  $u \equiv \text{constante}$  são chamadas de meridianos, enquanto as curvas coordenadas  $v \equiv \text{constantes}$  são chamados paralelos.

**Exemplo 4.1.6** (Esfera). Considere a esfera  $\mathbb{S}_r^2$ , com centro na origem e raio  $r^1$ , cuja

<sup>1</sup>Para  $r = 1$  temos o caso especial da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ .

equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

A esfera é uma superfície regular mas não é uma superfície regular parametrizada, isto é, não existe uma única parametrização que cobre toda a esfera. Vejamos um atlas para a esfera.

Na projeção estereográfica a partir do polo norte  $N = (0, 0, r)$ , a reta a partir de  $N$  que intercepta o plano  $z = 0$  em um ponto  $\tilde{p} = (u, v, 0)$ , intercepta a esfera em um ponto  $p = X_1(u, v)$ . Portanto a parametrização da projeção estereográfica a partir do polo norte  $X_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2 \setminus \{N\}$  é definida por

$$X_1(u, v) = N + a(\tilde{p} - N) = (au, av, (1 - a)r).$$

Onde  $a > 0$  é tal que  $\|X_1(u, v)\| = r$ . Ou seja,  $a$  é tal que

$$a^2(u^2 + v^2) + (1 - a)^2r^2 = r^2,$$

donde

$$a = \frac{2r^2}{r^2 + u^2 + v^2}.$$

Portanto,

$$X_1(u, v) = \left( \frac{2r^2u}{r^2 + u^2 + v^2}, \frac{2r^2v}{r^2 + u^2 + v^2}, r \frac{u^2 + v^2 - r^2}{r^2 + u^2 + v^2} \right).$$

Uma parametrização para a esfera menos o polo sul é dada pela projeção estereográfica a partir do polo sul  $S = (0, 0, -r)$ . De forma análoga acima, obtemos  $X_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2 \setminus \{S\}$  definida por

$$X_2(u, v) = \left( \frac{2r^2u}{r^2 + u^2 + v^2}, \frac{2r^2v}{r^2 + u^2 + v^2}, -r \frac{u^2 + v^2 - r^2}{r^2 + u^2 + v^2} \right).$$

Juntas, as cartas  $X_1(u, v)$  e  $X_2(u, v)$  formam um atlas para uma esfera. De fato, cada projeção estereográfica é um homeomorfismo. Para calcular a inversa da projeção estereográfica  $X_1$ , por exemplo, dado  $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}_r^2 \setminus \{N\}$ , para determinar  $X_1^{-1}(p)$  basta encontrar o ponto de intersecção da reta

$$N + a(p - N) = (ax, ay, r + a(z - r)).$$

Com o plano  $z = 0$ ; isso ocorre quando

$$a = \frac{r}{r - z},$$

de modo que

$$X_1^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{rx}{r-z}, \frac{ry}{r-z} \right)$$

e esta função é claramente contínua, já que  $z < r$ .

**Proposição 4.1.7.** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real diferenciável, e o gráfico da função  $f$  é o subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  definido pelos pontos  $(x, y, f(x, y))$ , com  $(x, y) \in U$ . Então a reparametrização do gráfico de  $f$  pela aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$  é uma superfície parametrizada regular que descreve o gráfico da função  $f$ . Esta aplicação é conhecida como parametrização de Monge (Gaspard Monge(1746-1818)).*

**Prova.** Por hipótese  $f$  é diferenciável, logo a aplicação  $X(u, v)$  é diferenciável.

A matriz jacobiana de  $X$  é igual a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}.$$

Observe que  $J$  tem posto 2 para todo  $(u, v) \in U$ , pois as colunas de  $J$  são linearmente independentes. ■

**Exemplo 4.1.8** (Paraboloide Elíptico). A aplicação  $X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  com  $a, b$  constantes não nulas, representa uma parametrização da equação cartesiana  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , cujo traço descreve o parabolóide elíptico. Pela proposição 4.1.7,  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular.

**Exemplo 4.1.9** (Paraboloide Hiperbólico). A aplicação  $X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  com  $a, b$  constantes não nulas, representa uma parametrização da equação cartesiana  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , cujo traço descreve o parabolóide hiperbólico. Pela proposição 4.1.7,  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular.

Dois teoremas importantes no estudo da superfície são o teorema da função inversa, o qual garante a existência de abertos no domínio e na imagem onde a função e sua inversa são bijeções cujo as matrizes das derivadas parciais (matriz jacobiana) são inversas uma da outra; como também o teorema da função implícita o qual revela a relação funcional entre transformações de coordenadas através das imagens das funções em estudo. Para não fugir muito do escopo do trabalho as suas provas podem ser encontradas em Lima (2020).

**Lema 4.1.10** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ . Se  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo para algum  $p_0 \in U$ , então*

existem abertos  $V \subset U$  contendo  $p_0$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $F(p_0)$  tais que  $F|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

Afirmar que  $F|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  significa dizer que  $F$  é um homeomorfismo e ambas  $F, F^{-1}$  são aplicações diferenciáveis de classe  $C^k$ . O Teorema da Função Inversa diz que se a diferencial de uma aplicação é um isomorfismo em um certo ponto (equivalentemente, sua matriz jacobiana naquele ponto tem determinante não nulo), então a aplicação é um difeomorfismo na vizinhança daquele ponto; em particular, se isso ocorre para todo ponto em  $U$ , então  $F$  é um difeomorfismo local.

**Proposição 4.1.11.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Para todo  $(u_0, v_0) \in U$  existe um aberto  $V \subset U$ , tal que  $(u_0, v_0) \in V$  e  $X|_V$  é injetiva. Mais que isso,  $X|_V$  é uma superfície regular.*

**Prova.** Se  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é regular, então a matriz jacobiana de  $X$  em  $(u_0, v_0)$  tem posto 2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

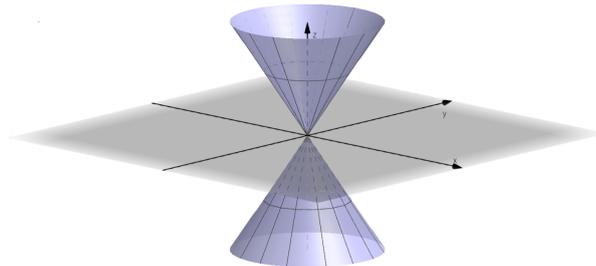
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Consideremos a função  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  que, para cada  $(u, v) \in U$ , associa  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ . Usando o teorema da função inversa, segue-se de  $J \neq 0$  que existe um aberto  $V$ ,  $(u_0, v_0) \in V \subset U$  tal que  $F|_V$  é inversível, em particular,  $F|_V$  é injetora. Portanto, concluímos que  $X|_V$  é injetiva. ■

**Exemplo 4.1.12** (Cone Circular). A aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $X(u, v) = (a \cos(v), a \sin(v), bu)$ ,  $(u, v) \in U$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes não nulas. É uma superfície parametrizada regular, cujo traço descreve um cone circular (ver figura 17).

Observe que  $X(u, v)$  assim definida não é injetiva. De fato, dados  $(0, v_1)$  e  $(0, v_2)$ , com  $v_1 \neq v_2$ , temos que  $X(0, v_1) = X(0, v_2) = (0, 0, 0)$ . Porém, a aplicação  $X|_V$ , com  $V = \{(u, v) \in U; u \neq 0 \text{ e } 0 \leq v < 2\pi\} \subset U$  é injetiva.

Figura 17: Cone Circular.



Fonte: Autor (2024)

**Definição 4.1.13.** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que um ponto  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  não é sobrejetiva. A imagem  $F(p)$  é então chamada um valor crítico de  $F$ .

Se  $q \in \mathbb{R}^n$  não é um valor crítico de  $F$ , então dizemos que  $q$  é um valor regular de  $F$ .

**Lema 4.1.14** (Teorema da Função Implícita). *Seja  $F : V \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ . Escreva um ponto  $(x, y) \in V$  em coordenadas na forma  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_m)$ .*

*Seja  $(x_0, y_0) \in V$  com  $F(x, y) = c$  tal que o menor*

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

*Então existe uma vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^m$  de  $y_0$  e uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , tal que  $f(y_0) = x_0$  e  $F(f(y), y) = c$ .*

**Proposição 4.1.15** (Superfície de Nível). *Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$ . Se  $c \in f(V)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(c)$  é uma superfície regular de classe  $C^k$ .*

**Prova.** Seja  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(c)$ . Como  $c$  é um valor regular, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  que contém  $(x_0, y_0)$  e uma aplicação  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ , tal que  $f(x_0, y_0) = z_0$  e  $F(x, y, f(x, y)) = c$ . Portanto, a aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

é uma parametrização de classe  $C^k$  de uma vizinhança de  $p_0$  em  $f^{-1}(c)$ . Como a inversa de um gráfico é simplesmente a projeção no plano, segue que  $X$  é um homeomorfismo. ■

**Exemplo 4.1.16.** A esfera  $\mathbb{S}_r^2 = f^{-1}(r)$  onde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) \neq 0$  para todo  $(x, y, z) \in f^{-1}(r)$ , pois pelo menos uma variável é não nula.

## 4.2 Mudança de Parâmetros

Nesta secção estudaremos a possibilidade de obter várias superfícies parametrizadas que possuem o mesmo traço de uma superfície parametrizada regular  $X$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u + v, u - v, 4uv), & (u, v) \in \mathbb{R}^2. \\ Y(\bar{u}, \bar{v}) &= (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2), & (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

As aplicações  $X(u, v)$  e  $Y(\bar{u}, \bar{v})$  tem o mesmo traço  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ , que é um parabolóide hiperbólico.

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Se  $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  é uma aplicação diferenciável, cujo determinante da matriz jacobiana não se anula, e  $h(\bar{U}) = U$ , então  $Y = X \circ h$  é uma superfície parametrizada regular que tem o mesmo traço de  $X$ . A aplicação  $Y$  é denominada uma reparametrização de  $X$  por  $h$ , e  $h$  é dita uma mudança de parâmetros.*

**Prova.** A aplicação  $Y = X \circ h$  é diferenciável, pois é composta de funções diferenciáveis. Seja

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ h(\bar{u}, \bar{v}) &= (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Vamos verificar que  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$  satisfaz a condição de regularidade  $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$ . Como

$$\begin{aligned} Y_{\bar{u}} &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right), \\ Y_{\bar{v}} &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right), \end{aligned}$$

temos que:

$$Y_{\bar{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad Y_{\bar{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

Portanto,

$$Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} = X_u \times X_v \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right).$$

Como  $X_u \times X_v \neq 0$  e o determinante da matriz jacobiana de  $h$  não se anula, concluímos que  $Y_{\bar{u}} \times Y_{\bar{v}} \neq 0$ . ■

**Exemplo 4.2.2.** Considere as superfícies parametrizadas

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}, v), & (u, v) \in U, & \text{ onde } U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < a^2\}, \\ Y(\bar{u}, \bar{v}) &= (a \operatorname{sen}(\bar{v}) \cos(\bar{u}), a \operatorname{sen}(\bar{v}) \operatorname{sen}(\bar{u}), a \cos(\bar{v})), & (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U} &= \{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2; 0 < \bar{u} < \end{aligned}$$

$\pi, 0 < \bar{v} < \pi\}$ .

Então,  $Y$  é uma reparametrização de  $X$  por  $h : \bar{U} \rightarrow U$ , onde

$$h(\bar{u}, \bar{v}) = ((a \operatorname{sen}(\bar{v}) \cos(\bar{u}), a \cos(\bar{v})).$$

O traço de  $X$  e  $Y$  é um hemisfério da esfera.

**Proposição 4.2.3.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Para cada  $(u_0, v_0) \in U$ , existe um aberto  $V$ ,  $(u_0, v_0) \in V \subset U$  e uma mudança de parâmetro  $h : \bar{U} \rightarrow V$ , tal que o traço de  $Y = X \circ h$  é o gráfico de uma função diferencial.*

**Prova.** Consideremos  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Suponha sem perda de generalidade que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , então, segue-se do teorema da função inversa que existe um aberto  $V$ ,  $(u_0, v_0) \in V \subset U$ , tal que  $F$  restrita a  $V$  admite inversa  $F^{-1}$  diferenciável. Seja  $\bar{U} = F(V)$  e denotemos por  $h : \bar{U} \rightarrow V$  a inversa de  $F$ .

A reparametrização  $Y = X \circ h$  descreve o gráfico de uma função diferenciável. De fato, se  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$ , então

$$\begin{aligned} Y(\bar{u}, \bar{v}) &= (x \circ h(\bar{u}, \bar{v}), y \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})) = \\ &= (F \circ h(\bar{u}, \bar{v}), z \circ h(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Como  $h$  é a inversa de  $F$ , concluímos que

$$Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, z \circ h(\bar{u}, \bar{v})),$$

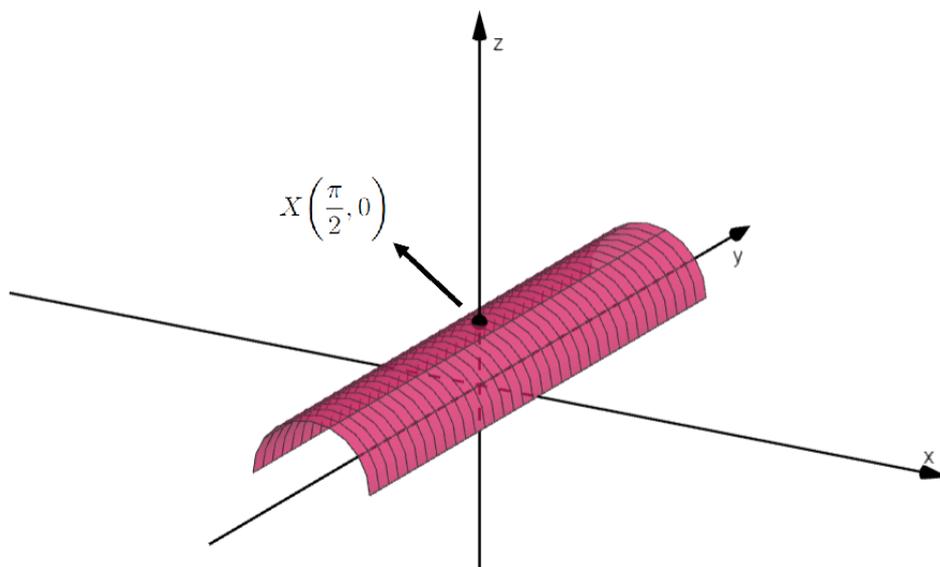
isto é,  $Y$  descreve o gráfico da função diferenciável  $z \circ h$ . ■

**Exemplo 4.2.4.** Considere a superfície

$$X(u, v) = (\cos(u), v, \operatorname{sen}(u)), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular. Fixado o ponto  $(\frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ , consideremos a vizinhança desse ponto  $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$ . Então, a restrição de  $X$  ao aberto  $V$  admite uma reparametrização  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - \bar{u}^2})$ , onde  $-1 < \bar{u} < 1$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}$ , cujo traço está descrito pela Figura 18.

Figura 18:  $Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - \bar{u}^2})$ .



Fonte: Autor (2024)

### 4.3 Espaço Tangente

Para superfícies parametrizadas regulares nós dispomos da diferenciabilidade da superfície para descrevermos a geometria local e uma ferramenta essencial para descrever a geometria da superfície é seu espaço tangente.

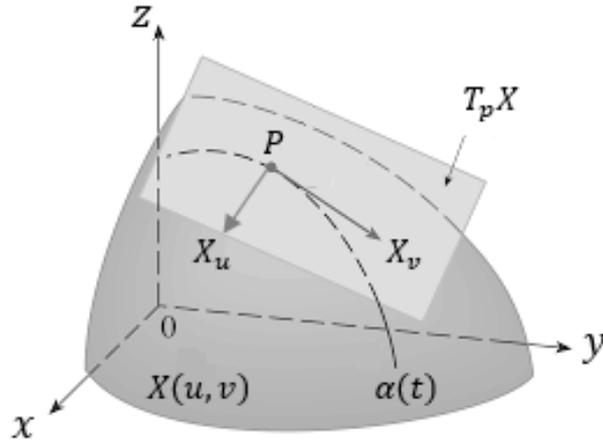
**Definição 4.3.1.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva da superfície se  $\alpha(I) \subset X(U)$ .

**Definição 4.3.2** (Vetor Tangente). Se  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $X$  em  $p = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

Os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são vetores tangentes a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , já que são tangentes as curvas coordenadas de  $X$ .

**Definição 4.3.3** (Espaço Tangente). Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. O conjunto dos vetores tangentes a superfície em  $p = (u_0, v_0)$  é chamado de espaço tangente à superfície em  $p$  e será denotado por  $T_pX$ .

Figura 19: Plano tangente a superfície.



Fonte: Autor (2024)

**Proposição 4.3.4.** *Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $p = (u_0, v_0)$ . Então  $T_pX$  é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$ . Isto é  $T_pX$  é um espaço vetorial de dimensão 2.*

**Prova.** Se  $w \in T_pX$ , então  $w = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  e  $(u(t), v(t)) = (u_0, v_0)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é,  $w$  é uma combinação linear dos vetores  $X_u$  e  $X_v$  em  $(u_0, v_0)$ .

Reciprocamente, suponhamos que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva  $\alpha(t)$  da superfície tal que  $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(0) = w$ . De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde  $u(t) = u_0 + at$  e  $v(t) = v_0 + bt$ . ■

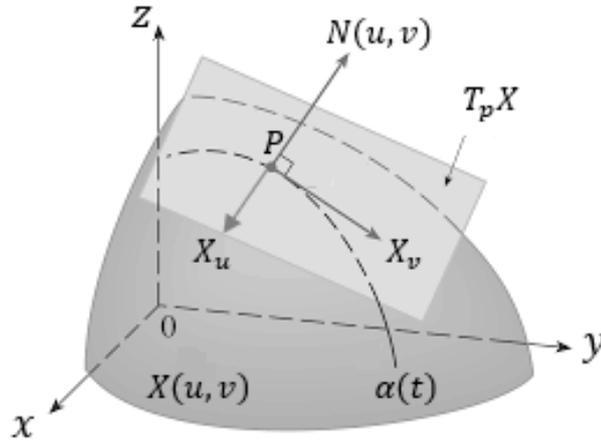
Como  $X$  é um objeto situado no  $\mathbb{R}^3$  vetores ortogonais a  $T_pX$  são ferramentas importantes para estudar certas propriedades geométricas de  $X$  como as curvaturas e a sua orientação.

**Definição 4.3.5** (Vetor Normal). Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada

regular. O vetor unitário normal ao plano tangente  $T_p X$  é o vetor

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v).$$

Figura 20: Vetor normal a superfície.



Fonte: Autor (2024)

**Exemplo 4.3.6.** Considere a esfera com parametrização

$$X(u, v) = (r \cos(u) \sen(v), r \sen(u) \sen(v), r \cos(v)),$$

os vetores tangentes a superfície são:

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-r \sen(u) \sen(v), r \cos(u) \sen(v), 0), \\ X_v(u, v) &= (r \cos(u) \cos(v), r \sen(u) \cos(v), -r \sen(v)). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sen(u) \sen(v) & r \cos(u) \sen(v) & 0 \\ r \cos(u) \cos(v) & r \sen(u) \cos(v) & -r \sen(v) \end{vmatrix} \\ &= e_1(-r^2 \cos(u) \sen^2(v)) + e_2(-r^2 \sen(u) \sen^2(v)) + e_3(-r^2 \cos(v) \sen(v)) \\ &= r^2(-\cos(u) \sen^2(v), -\sen(u) \sen^2(v), -\cos(v) \sen(v)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \|r^2(-\cos(u) \sen^2(v), -\sen(u) \sen^2(v), -\cos(v) \sen(v))\| \\ &= r^2 \sen(v). \end{aligned}$$

O vetor normal a  $X(u, v)$  é

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{r^2(-\cos(u)\operatorname{sen}^2(v), -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}^2(v), -\cos(v)\operatorname{sen}(v))}{r^2\operatorname{sen}(v)} \\ &= (-\cos(u)\operatorname{sen}(v), -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), -\cos(v)). \end{aligned}$$

**Definição 4.3.7.** Seja  $X$  uma superfície regular e seja  $V \subset S$  um conjunto aberto de  $X$ . Chamamos a aplicação  $N : V \subset X \rightarrow \mathbb{R}^3$  de campo diferencial de vetores normais.

Para alguns resultados que apresentaremos no decorrer do trabalho, é suficiente a seguinte definição de superfícies regulares orientáveis.

**Definição 4.3.8.** Dizemos que uma superfície regular  $X$  é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais e unitários definido em toda a superfície. Ou seja, existe uma aplicação diferenciável e contínua

$$\begin{aligned} N &: X \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\rightarrow N(p), \quad \forall p \in X. \end{aligned}$$

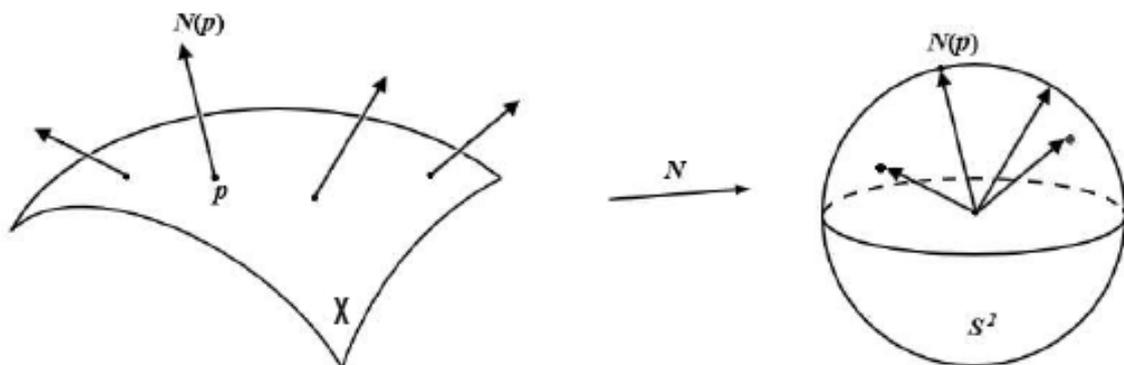
A escolha de  $N$  é uma escolha de orientação para superfície e quando esta escolha foi feita dizemos que a superfície  $X$  foi orientada.

**Definição 4.3.9** (Aplicação de Gauss). Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com orientação  $N$ . O campo diferencial de vetores normais  $N : X \rightarrow \mathbb{S}^2$  com

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

é chamada aplicação de Gauss.

Figura 21: Aplicação de Gauss



Fonte: Autor (2024)

De acordo com a figura 21, a aplicação de Gauss relaciona uma superfície regular  $X$ , levando vetores  $p \in X$  em vetores normais unitários na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  de modo que tenham origem no centro de  $\mathbb{S}^2$  e assim, formando um subconjunto da esfera unitária.

## 4.4 Primeira Forma Fundamental

A primeira forma fundamental de uma superfície está diretamente relacionada à maneira de definirmos distâncias sobre ela e como veremos as propriedades intrínsecas de uma superfície são aquelas que podem ser escritas univocamente como função da primeira forma fundamental.

**Definição 4.4.1.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $\forall p \in U$ , a aplicação

$$I_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2.$$

é denominada primeira forma fundamental de  $X$  em  $p$ .

**Notação 4.4.2.** Sejam  $X(u, v)$  uma superfície dada e  $p = (u_0, v_0)$  um ponto. Então, um vetor  $w \in T_p X$  é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Portanto

$$I_p(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

temos que

$$I_p(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando  $(u, v)$ , temos funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$  diferenciáveis, que são denominadas coeficientes da primeira forma fundamental.

**Proposição 4.4.3.** *Os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem as seguintes propriedades:*

$$I. E(u, v), G(u, v) > 0,$$

$$II. \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0.$$

**Prova.** Pois

$$E(u, v) = \langle X_u \times X_u \rangle = \|X_u\|^2 > 0,$$

$$G(u, v) = \langle X_v \times X_v \rangle = \|X_v\|^2 > 0.$$

já que  $dX_{(u,v)}$  tem posto máximo; o mesmo argumento vale para uma superfície parametrizada. A última desigualdade segue da identidade vetorial

$$\|V \times W\|^2 + \langle V, W \rangle^2 = \|V\|^2 \|W\|^2,$$

pois

$$EG - F^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0,$$

já que  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes. ■

**Exemplo 4.4.4** (Plano). Seja  $X(u, v) = p_0 + ua + vb$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ , e  $a, b$  são vetores ortonormais de  $\mathbb{R}^3$ . Então,  $X_u(u, v) = a$  e  $X_v(u, v) = b$ .

$$E(u, v) = \langle a, a \rangle = 1,$$

$$F(u, v) = \langle a, b \rangle = 0,$$

$$G(u, v) = \langle b, b \rangle = 1.$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental do plano.

**Exemplo 4.4.5.** A reparametrização do gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pela aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$ . Então,  $X_u(u, v) = (1, 0, f_u)$  e  $X_v(u, v) = (0, 1, f_v)$ .

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f_u)^2,$$

$$F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v,$$

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (f_v)^2.$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental da aplicação  $X(u, v)$ .

**Exemplo 4.4.6.** Considere a superfície

$$X(u, v) = (u, v, v^2 + u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve um parabolóide, onde

$$\begin{aligned}X_u(u, v) &= (1, 0, 2u), \\X_v(u, v) &= (0, 1, 2v), \\X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 2), \\X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

Pelo exemplo 4.4.5, temos que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 4u^2, \\F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 4uv, \\G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 4v^2.\end{aligned}$$

**Exemplo 4.4.7** (Superfície de revolução). Considere a aplicação

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v))$$

do exemplo 4.1.5 que representa uma superfície de revolução, de modo que:

$$\begin{aligned}X_u(u, v) &= (-f(v)\sen(u), f(v)\cos(u), 0), \\X_v(u, v) &= (f'(v)\cos(u), f'(v)\sen(u), g'(v)).\end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície de revolução são:

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = (f(v))^2, \\F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.\end{aligned}$$

Suponhamos que a curva  $\alpha(v) = (0, f(v), g(v))$  geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, ou seja  $(f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1$ . Então

$$G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1.$$

**Exemplo 4.4.8** (Cilindro). Considere a superfície de revolução  $X(u, v) = (\cos(u), \sen(u), v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , obtida pela rotação de uma reta perpendicular ao plano  $xy$  em torno do eixo  $z$ , que descreve um cilindro reto de raio 1. Ou seja  $f(v) = 1$  e  $g(v) = v$ .

Pelo exemplo 4.4.7, os coeficientes da primeira forma fundamental do cilindro reto são:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (f(v))^2 = 1, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1. \end{aligned}$$

**Observação 4.4.9** (Comprimento de Curvas em Superfícies). Dada uma curva regular em uma superfície parametrizada regular  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , o seu comprimento de arco (a partir de um ponto inicial fixado em  $t = 0$ ) é dado por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Pela regra da cadeia,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)),$$

segue que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{(u')^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle X_u, X_v \rangle + (v')^2 \langle X_v, X_v \rangle} dt \\ s(t) &= \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2F'u'v' + G(v')^2} dt. \end{aligned}$$

**Observação 4.4.10** (Ângulo entre vetores). Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular, se  $w_1$  e  $w_2$  são vetores não nulos tangentes a  $X$  em  $p = (u, v)$ , então o ângulo  $0 \leq \theta \leq \pi$  formado por  $w_1$  e  $w_2$  é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|}.$$

Usaremos o fato de  $\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + \|w_2\|^2$  para expressar  $\cos\theta$  em termos da primeira forma fundamental. Portanto,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|} \\ &= \frac{\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2}{2\|w_1\| \|w_2\|} \\ &= \frac{I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)}{2\sqrt{I_p(w_1)I_p(w_2)}}. \end{aligned}$$

## 4.5 Área de Regiões de Superfícies

**Definição 4.5.1.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e  $D \subset U$  uma região de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $X$  restrita ao interior de  $D$  é injetiva. A área da região  $X(D)$  é dada por

$$A(X(D)) = \int \int_D \|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)\| \, dudv = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X$ .

**Exemplo 4.5.2** (Área do Toro). O toro é a imagem do domínio do plano  $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  pela parametrização

$$X(u, v) = ((R + r\cos(v))\cos(u), (R + r\cos(v))\sin(u), r\sin(v)).$$

Notemos que, esta é uma parametrização como superfície de revolução com

$$\begin{aligned} f(v) &= R + r\cos(v), \\ g(v) &= r\sin(v). \end{aligned}$$

Pelo exemplo 4.4.7, os coeficientes da primeira forma fundamental desta parametrização são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (f'(v))^2 = (R + r\cos(v))^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2 = (-r\sin(v))^2 + (r\cos(v))^2 = r^2. \end{aligned}$$

Portanto, a área do toro é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(R + r\cos(v))^2 r^2} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos(v)) \, dudv \\ &= r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r\cos(v)) \, dudv \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos(v)) \, dv \\ &= 2\pi r (Rv + r\sin(v)) \Big|_{v=0}^{v=2\pi} \\ A &= 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$

## 4.6 Segunda Forma Fundamental

**Definição 4.6.1.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Fixado  $p = (u_0, v_0) \in U$ , a segunda forma fundamental de  $X$  em  $p$  é a aplicação  $II_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada vetor  $w \in T_p X$  associa o número real  $II_p(w)$  da seguinte forma:  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva diferenciável da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = p$  e  $\alpha'(t_0) = w$ , então definimos

$$II_p(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

onde  $N$  é o vetor normal a  $X$ .

**Proposição 4.6.2.** A segunda forma fundamental  $II_p(w)$  não depende da curva escolhida.

**Prova.** Seja  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ , e consideremos uma curva  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = p$  e  $\alpha'(t_0) = w$ , isto é

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ &\quad + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + \\ &\quad + v''(t)X_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

onde essa última expressão não depende da curva  $\alpha$ . ■

**Notação 4.6.3.** Usando a notação

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

em

$$II_p(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0),$$

temos que

$$II_p(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Variando  $(u, v)$  temos funções diferenciáveis  $e(u, v)$ ,  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  que são denominadas coeficientes da segunda forma fundamental da superfície parametrizada  $X$ .

**Observação 4.6.4** (Matriz de Weingarten). Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ .

Temos que  $\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$ , então

$$\begin{aligned} N(t) &= N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t)), \\ dN(\alpha') &= N'(u'(t), v'(y)) = N_u u' + N_v v'. \end{aligned}$$

Como  $N_u, N_v \in T_p X$ , então

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= N_u u' + N_v v' \\ &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= X_u(a_{11}u' + a_{12}v') + X_v(a_{21}u' + a_{22}v'), \end{aligned}$$

ou seja,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Se  $\{X_u, X_v\}$  formam uma base ortonormal, então a matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , chamada de Matriz de Weingarten, é simétrica.

Vamos determinar os valores dos elementos da Matriz de Weingarten.

Temos que

$$\begin{aligned} \langle N, X_u \rangle &= 0, \\ \langle N, X_v \rangle &= 0, \end{aligned}$$

derivando as equações em relação a  $u$  e  $v$ , temos

$$\begin{aligned}\langle N, X_u \rangle_u &= \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0, \\ \langle N, X_u \rangle_v &= \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ \langle N, X_v \rangle_u &= \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, \\ \langle N, X_v \rangle_v &= \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0,\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\langle N_u, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uu} \rangle = -e, \\ \langle N_v, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uv} \rangle = -f, \\ \langle N_u, X_v \rangle &= -\langle N, X_{vu} \rangle = -f, \\ \langle N_v, X_v \rangle &= -\langle N, X_{vv} \rangle = -g,\end{aligned}$$

Vamos obter agora os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned}-e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G.\end{aligned}$$

Expressando os resultados acima em forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Como,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

temos que a Matriz de Weingarten é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.6.5.** A reparametrização do gráfico da função  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pela aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $X(u, v) = (u, v, \tilde{f}(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$ . Vimos no exemplo 4.4.5 que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (\tilde{f}_u)^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \tilde{f}_u \tilde{f}_v, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (\tilde{f}_v)^2. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (1, 0, \tilde{f}_u), & X_v(u, v) &= (0, 1, \tilde{f}_v), & X_{uu}(u, v) &= (0, 0, \tilde{f}_{uu}), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, \tilde{f}_{vv}), & X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), & N(u, v) &= \frac{(-\tilde{f}_u, -\tilde{f}_v, 1)}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

temos que os coeficientes da segunda forma fundamental de  $X$  em  $p = (u, v)$  são

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \frac{\tilde{f}_{uu}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}}, \\ f(u, v) &= 0, \\ g(u, v) &= \frac{\tilde{f}_{vv}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Consideremos  $w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_pX$ , segue que a segunda forma fundamental da superfície  $X$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u, v) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u, v) \\ &= \frac{a^2 \tilde{f}_{uu}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}} + \frac{2ab \cdot 0}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}} + \frac{b^2 \tilde{f}_{vv}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}} \\ II_p(w) &= \frac{a^2 \tilde{f}_{uu} + b^2 \tilde{f}_{vv}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.6.6.** Considere a superfície  $X(u, v) = (u, v, v^2 + u^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve um parabolóide, onde

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (1, 0, 2u), & X_v(u, v) &= (0, 1, 2v), & X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 2), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0), & X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 2), & N(u, v) &= \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \\ e(u, v) &= \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, & f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) = 0, & g(u, v) &= \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Consideremos  $w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_pX$ , segue que a segunda forma fundamental

da superfície  $X$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u, v) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u, v) \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} + 0 + \frac{2b^2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \\ II_p(w) &= \frac{2a^2 + 2b^2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.6.7.** Considere a aplicação

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v))$$

do exemplo 4.1.5 que representa uma superfície de revolução. Vimos no exemplo 4.4.7 que,

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-f(v)\sen(u), f(v)\cos(u), 0), \\ X_v(u, v) &= (f'(v)\cos(u), f'(v)\sen(u), g'(v)), \end{aligned}$$

e que os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície de revolução são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = (f(v))^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$  em relação a  $u$  e  $v$ , obtemos

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (-f(v)\cos(u), -f(v)\sen(u), 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (-f'(v)\sen(u), f'(v)\cos(u), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (f''(v)\cos(u), f''(v)\sen(u), g''(v)). \end{aligned}$$

Calculando o vetor unitário normal ao plano tangente  $T_p X$ , temos

$$N(u, v) = \frac{(g'(v)\cos(u), g'(v)\sen(u), -f'(v))}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}.$$

Segue então, que os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície  $X$  são

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u, v) = \frac{-f(v)g'(v)}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}, \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u, v) = 0, \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u, v) = \frac{f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v)}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}. \end{aligned}$$

Consideremos  $w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_pX$ , segue que a segunda forma fundamental da superfície  $X$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= a^2\langle X_{uu}, N \rangle(u, v) + 2ab\langle X_{uv}, N \rangle(u, v) + b^2\langle X_{vv}, N \rangle(u, v) \\ &= \frac{-a^2f(v)g'(v)}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}} + 0 + \frac{b^2(f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v))}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}} \\ II_p(w) &= \frac{-a^2f(v)g'(v) + b^2(f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v))}{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}. \end{aligned}$$

Suponhamos que a curva  $\alpha(v) = (0, f(v), g(v))$  geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, ou seja  $(f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1$ . Então

$$\begin{aligned} e(u, v) &= -f(v)g'(v), \\ f(u, v) &= 0, \\ g(u, v) &= f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v), \\ N(u, v) &= (g'(v)\cos(u), g'(v)\sin(u), -f'(v)), \\ II_p(w) &= -a^2f(v)g'(v) + b^2(f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v)). \end{aligned}$$

## 4.7 Curvatura Normal

**Definição 4.7.1.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(u, v) \in U$ , uma superfície parametrizada regular. Fixado  $p = (u_0, v_0)$ , a função curvatura normal em  $p$  é uma aplicação  $k_n : T_pX - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que, para cada vetor  $w \in T_pX$  não nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Observamos que, se  $w$  é um vetor unitário de  $T_pX$ , então  $K_n(w) = II_p(w)$ . De fato,

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \frac{II_p(w)}{I_p(w)} \\ &= \frac{II_p(w)}{\langle w, w \rangle} \\ &= \frac{II_p(w)}{\|w\|^2} \\ &= \frac{II_p(w)}{1} \\ k_n(w) &= II_p(w). \end{aligned}$$

Pela definição 4.6.1, temos

$$k_n(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle.$$

**Proposição 4.7.2.** *Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$ , uma superfície regular e  $\alpha : I \rightarrow S$ , uma curva regular em  $S$  parametrizada pelo comprimento de arco passando pelo ponto  $p \in S$ .*

*Sejam  $II_p$  a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ ,  $N$  o vetor normal unitário a  $S$  em  $p$  e  $n$  o vetor normal unitário a  $\alpha$  em  $p$ . Se  $\kappa$  é a curvatura da curva  $\alpha$  em  $p$ , a curvatura normal  $k_n$  de  $\alpha$  em  $p$  é definida por*

$$k_n = \kappa \langle n, N \rangle.$$

**Prova.** Como  $\alpha$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$k_n = II_p = \langle \alpha'', N \rangle.$$

Usando as fórmulas de Frenet em  $k_n = \langle \alpha'', N \rangle$ , obtemos

$$k_n = \langle \alpha'', N \rangle = \langle \kappa n, N \rangle$$

$$k_n = \kappa \langle n, N \rangle. \quad \blacksquare$$

**Proposição 4.7.3.** *Se  $w \in T_p X$  e  $w \neq 0$ , então  $k_n(\lambda w) = k_n(w)$  para todo número real  $\lambda \neq 0$ .*

**Prova.** Seja  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ , onde  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Denotamos  $e_0, f_0$  e  $g_0$  os coeficientes da segunda forma fundamental em  $(u_0, v_0)$ , temos

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} \\ &= \frac{\lambda^2 (a^2 e_0 + 2ab f_0 + 2b^2 g_0)}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} = \frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + 2b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} \\ &= \frac{II_p(w)}{I_p(w)} \\ k_n(\lambda w) &= k_n(w). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como consequência da proposição 4.7.3, podemos falar na curvatura normal em  $p$  segundo uma direção tangente a superfície.

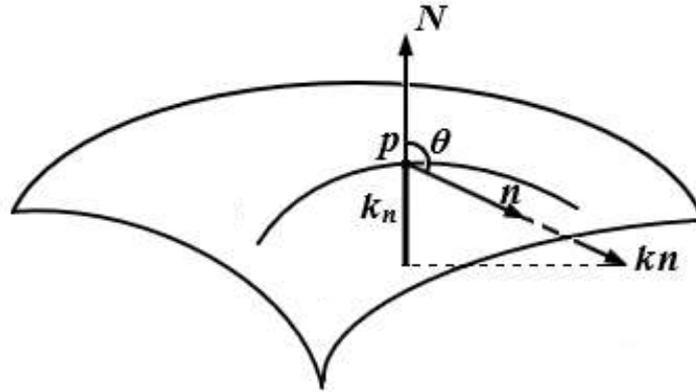
**Proposição 4.7.4.** *Seja  $w$  um vetor unitário de  $T_p X$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva regular da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = p$*

e  $\alpha'(t_0) = w$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $t_0$ ,  $\kappa(t_0) \neq 0$ , então

$$k_n(w) = \kappa(t_0)\cos\theta.$$

Onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $n(t_0)$  e  $N(u(t_0), v(t_0))$  (ver figura 22).

Figura 22: Ângulo formado por  $n(t_0)$  e  $N(u(t_0), v(t_0))$ .



Fonte: Autor (2024)

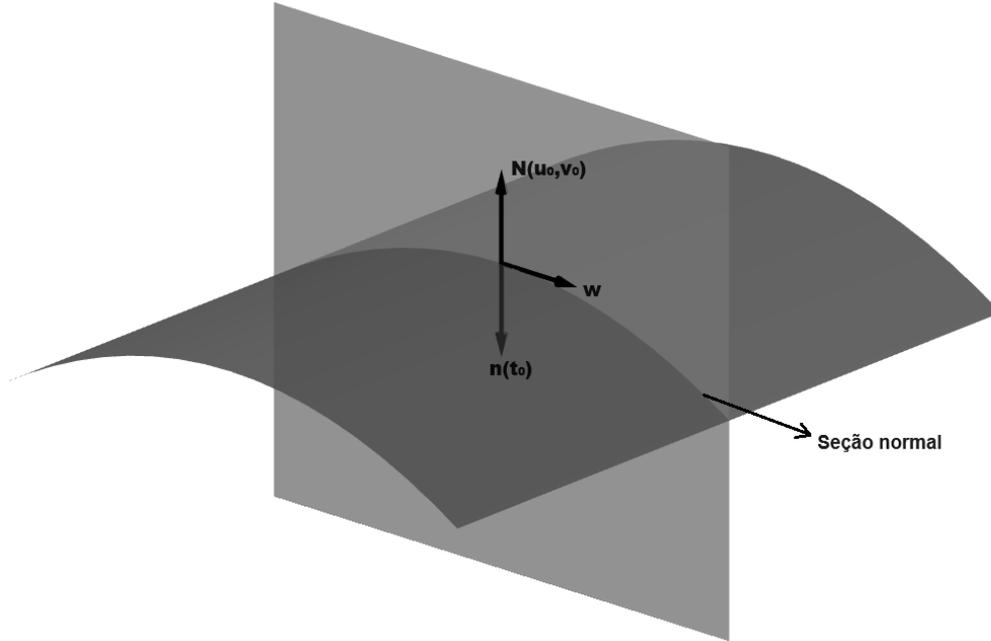
**Prova.** Como  $\alpha$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco,  $I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1$ , segue então

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) \\ &= \langle \alpha''(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\ &= \langle \kappa(t_0)n(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\ &= \kappa(t_0)\langle n(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\ &= \kappa(t_0)\cos\theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Observação 4.7.5.** Podemos notar que  $k_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $\alpha''$  sobre a normal à superfície em  $p$ , com sinal dado pela orientação  $N$  de  $X$  em  $p$ . Como  $k_n$  dá a componente do vetor curvatura  $\alpha''$  de  $\alpha$  segundo a normal  $N$  à superfície, se esses vetores forem colineares, isto é, se a normal principal à curva  $\alpha$  no instante  $t$  tiver a direção normal à superfície em  $\alpha$ , então o valor absoluto de  $k_n$  é igual a curvatura de  $\alpha$  nesse ponto.

**Definição 4.7.6** (Seção Normal). A seção normal da superfície determinada por  $w$  é a curva obtida pela interseção do traço de  $X(u, v)$ , para  $(u, v)$  suficientemente próximos de  $(u_0, v_0)$ , com o plano que passa por  $X(u_0, v_0)$  ortogonal a  $w \times N(u_0, v_0)$ , onde  $n(t_0) = \pm N(u_0, v_0)$  (ver figura 23).

Figura 23: Seção Normal.



Fonte: Autor (2024)

**Proposição 4.7.7.** *Se  $w$  é um vetor unitário tangente a superfície em  $p$ , então  $\|k_n(w)\|$  é igual à curvatura da seção normal em  $p$  determinada por  $w$ . Ou seja,*

$$k_n(w) = II_p(w) = \pm\kappa(t_0).$$

**Prova.** Sejam  $X(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , uma superfície regular e  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  uma curva regular da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco. Dado um vetor unitário  $w \in T_p X$ , a seção normal é o traço da curva regular plana definida por  $\alpha(t)$ , tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$  e  $\alpha'(t_0) = w$ .

Se  $\kappa(t_0) = 0$ , isto é  $\alpha''(t_0) = 0$ , então

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) \\ &= \kappa(t_0) \langle n(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\ &= 0 \cdot \langle n(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se  $\kappa(t_0) > 0$ , então

$$\begin{aligned}
 k_n(w) &= II_p(w) \\
 &= \kappa(t_0)\langle n(t_0), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\
 &= \kappa(t_0)\langle \pm N(u(t_0), v(t_0)), N(u(t_0), v(t_0)) \rangle \\
 &= \kappa(t_0) \cdot (\pm 1) \\
 &= \pm \kappa(t_0).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $k_n(w) = II_p(w) = \pm \kappa(t_0)$ . ■

**Exemplo 4.7.8.** Considere  $X(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$ ,  $r > 0$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , uma superfície que descreve o cilindro circular.

$$\begin{aligned}
 X_u &= (-r \sin(u), r \cos(u), 0), \\
 X_v &= (0, 0, 1), \\
 X_{uu} &= (-r \cos(u), -r \sin(u), 0), \\
 X_{vv} &= (0, 0, 0), \\
 X_{uv} &= (0, 0, 0), \\
 N(u, v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0).
 \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental de  $X(u, v)$  em  $p = (u, v)$  são

$$\begin{aligned}
 E(u, v) &= r^2, & F(u, v) &= 0, & G(u, v) &= 1, \\
 e(u, v) &= -r, & f(u, v) &= 0, & g(u, v) &= 0.
 \end{aligned}$$

Se  $w = aX_u + bX_v = (-ar \sin(u), ar \cos(u), b)$  é um vetor tangente a  $X(u, v)$  em  $p = (u, v)$ , então

$$\begin{aligned}
 I_p(w) &= \|(-ar \sin(u), ar \cos(u), b)\|^2 \\
 &= a^2 r^2 + b^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II_p(w) &= a^2 f + 2abf + b^2 g \\
 &= -a^2 r + 2ab \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \\
 &= -a^2 r.
 \end{aligned}$$

Para um vetor  $w$  não nulo, a curvatura normal da superfície  $X(u, v)$  é dada por

$$k_n(w) = -\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2}.$$

Analisaremos os casos.

$k_n(w) \leq 0$ , a igualdade ocorre quando  $a = 0$  e  $b \neq 0$ .

Caso 1. Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , temos

$$k_n(w) = -\frac{0^2 r}{0^2 r^2 + b^2} = 0.$$

Caso 2. Se  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , temos

$$k_n(w) = -\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + 0^2} = -\frac{a^2 r}{a^2 r^2} = -\frac{1}{r}.$$

Caso 3. Se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , observamos que

$$k_n(w) = -\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} < 0,$$

além disso,

$$k_n(w) = -\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} > -\frac{a^2 r}{a^2 r^2} = -\frac{1}{r}.$$

Observando os três casos analisados, concluímos que  $-\frac{1}{r} \leq k_n(w) \leq 0$ . Portanto a função  $k_n$  admite um máximo e um mínimo nas direções de  $X_v$  e  $X_u$  respectivamente.

## 4.8 Curvaturas Principais, Gaussiana e Média

No exemplo 4.7.8 obtivemos explicitamente a função curvatura normal e verificamos que essa função admitia um máximo e um mínimo. Veremos a seguir que os valores máximo e mínimo da função curvatura normal em um ponto  $p$  serão chamados de curvaturas principais.

**Proposição 4.8.1.** *Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $k_n$  a função curvatura normal de  $X$  em  $p = (u_0, v_0)$ . Então, existem vetores unitários e ortogonais  $w_1, w_2 \in T_p X$  tais que  $k_1 = k_n(w_1)$  e  $k_2 = k_n(w_2)$  são os valores máximo e mínimo da função  $k_n$ .*

**Prova.** Se  $k_n$  é uma função constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de  $T_p X$  satisfazem a condição da proposição. Suponha que  $k_n$  não é constante. Considere a função  $\tilde{k}_n : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\tilde{k}_n(a, b) = k_n(aX_u(p) + bX_v(p)), (a, b) \neq (0, 0),$$

isto é,

$$\tilde{k}_n(a, b) = \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0},$$

onde  $E_0, F_0, G_0, e_0, f_0$  e  $g_0$  são, respectivamente, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental da superfície  $X$  no ponto  $p = (u_0, v_0)$ . A função  $\tilde{k}_n(a, b)$  é diferenciável já que  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Além disso, para todo  $\lambda \neq 0$ ,  $\tilde{k}_n(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n(a, b)$ . Portanto, para obter os valores mínimo e máximo da função  $\tilde{k}$ , basta restringir  $\tilde{k}_n$  à circunferência  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  de raio 1 dada por  $a^2 + b^2 = 1$ . Como  $\tilde{k}_n$  é contínua, então existem pontos  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  de  $C$  tais que

$$k_1 = \tilde{k}_n(a_1, b_1), \quad k_2 = \tilde{k}_n(a_2, b_2), \quad (4.8.1)$$

são, respectivamente, o mínimo e o máximo da função  $\tilde{k}_n$  restrita a  $C$ . Portanto,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n(a, b) \leq k_2,$$

para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Além disso, como  $\tilde{k}_n$  não é constante,  $k_1 < k_2$ .

Consideremos agora os vetores de  $T_p X$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= a_1 X_u(p) + b_1 X_v(p), \\ \tilde{w}_2 &= a_2 X_u(p) + b_2 X_v(p). \end{aligned}$$

Pela própria definição de  $\tilde{k}_n$ , temos que, para todo  $w \in T_p X \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$k_1 = k_n(\tilde{w}_1) \leq k_n(w) \leq k_n(\tilde{w}_2) = k_2.$$

Vamos provar que  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$  são vetores ortogonais. Como  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  dão o mínimo e o máximo da função  $\tilde{k}_n$ , então as derivadas parciais de  $\tilde{k}_n$  são nulas nesses pontos. Calculando essas derivadas parciais e usando as expressões de 4.8.1, obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} (e_0 - k_1 E_0)a_1 + (f_0 - k_1 F_0)b_1 &= 0, \\ (e_0 - k_2 E_0)a_2 + (f_0 - k_2 F_0)b_2 &= 0, \\ (f_0 - k_1 F_0)a_1 + (g_0 - k_1 G_0)b_1 &= 0, \\ (f_0 - k_2 F_0)a_2 + (g_0 - k_2 G_0)b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Suponha  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  não nulos, então

$$\begin{aligned} [(e_0 - k_1 E_0)a_1 + (f_0 - k_1 F_0)b_1]a_2 - [(e_0 - k_2 E_0)a_2 + (f_0 - k_2 F_0)b_2]a_1 &= 0 \\ E_0 a_1 a_2 (k_2 - k_1) + f_0 (b_1 a_2 - b_2 a_1) + F_0 b_2 a_1 k_2 - F_0 b_1 a_2 k_1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

e

$$\begin{aligned} [(f_0 - k_1 F_0)a_1 + (g_0 - k_1 G_0)b_1]b_2 - [(f_0 - k_2 F_0)a_2 + (g_0 - k_2 G_0)b_2]b_1 &= 0 \\ f_0(b_2 a_1 - b_1 a_2) + F_0 b_1 a_2 k_2 - F_0 b_2 a_1 k_1 + G_0 b_1 b_2 (k_2 - k_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

somando as equações 4.8.2 e 4.8.3, obtemos

$$(E_0 a_1 a_2 + G_0 b_1 b_2 + F_0 b_2 a_1 + F_0 b_1 a_2)(k_2 - k_1) = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (E_0 a_1 a_2 + G_0 b_1 b_2 + F_0 b_2 a_1 + F_0 b_1 a_2)(k_2 - k_1) &= 0 \\ \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \rangle (k_2 - k_1) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $k_2 \neq k_1$ , concluímos que  $\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \rangle = 0$ , logo  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$  são ortogonais.

De modo análogo, prova-se que  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$  são ortogonais quando algum dos números  $a_1, a_2, b_1, b_2$  se anula. Normalizando  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$ , temos

$$w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|}, \quad w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|},$$

e como  $k_n(\lambda w) = k_n(w), \forall \lambda \neq 0$ , concluímos que  $w_1$  e  $w_2$  satisfazem as condições da proposição 4.8.1. ■

**Definição 4.8.2** (Curvaturas Principais). As curvaturas principais de  $X$  em  $p$  são a curvatura normal máxima  $k_1$  e a curvatura normal mínima  $k_2$  definidas na proposição 4.8.1.

**Definição 4.8.3** (Curvatura Gaussiana). O produto das curvaturas principais, denotado por  $K(p) = k_1 k_2$  é chamado de curvatura gaussiana de  $X$  em  $p$ .

**Definição 4.8.4** (Curvatura Média). A semisoma das curvaturas principais, denotada por  $H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$  é chamado de curvatura média de  $X$  em  $p$ .

**Observação 4.8.5.** As curvaturas principais de  $X$  em  $p$  são soluções da equação

$$x^2 - 2H(p)x + K(p) = 0.$$

**Exemplo 4.8.6.** Considere a superfície

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \cos(v)), \quad a > 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad 0 < v < \pi,$$

que descreve a esfera de raio  $a$ .

Pelo exemplo 4.3.6, temos que

$$N(u, v) = (-\cos(u)\operatorname{sen}(v), -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), -\cos(v)).$$

Como,

$$\begin{aligned} X_u &= (-a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), a\operatorname{sen}(v)\cos(u), 0), \\ X_v &= (a\cos(v)\cos(u), a\cos(v)\operatorname{sen}(u), -a\operatorname{sen}(v)), \\ X_{uv} &= (-a\cos(v)\operatorname{sen}(u), a\cos(v)\cos(u), 0), \\ X_{uu} &= (-a\operatorname{sen}(v)\cos(u), -a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), 0), \\ X_{vv} &= (-a\operatorname{sen}(v)\cos(u), -a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), -a\cos(v)). \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental e segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= a^2\operatorname{sen}^2(v), & F(u, v) &= 0, & G(u, v) &= a^2, \\ e(u, v) &= a\operatorname{sen}^2(v), & f(u, v) &= 0, & g(u, v) &= a. \end{aligned}$$

Portanto, se  $w = cX_u + dX_v$  é um vetor tangente a  $X$  em  $p = (u, v)$ , então

$$\begin{aligned} I_p(w) &= a^2c^2\operatorname{sen}^2(v) + a^2d^2, \\ II_p(w) &= ac^2\operatorname{sen}^2v + ad^2. \end{aligned}$$

Logo, para um vetor  $w$  não nulo a curvatura normal é constante e definida por

$$k_n(w) = \frac{ac^2\operatorname{sen}^2v + ad^2}{a^2c^2\operatorname{sen}^2(v) + a^2d^2} = \frac{1}{a}.$$

E as curvaturas gaussiana e média são

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{a^2} > 0, \\ H(p) &= \frac{1}{a} > 0. \end{aligned}$$

**Proposição 4.8.7** (Fórmula de Euler). *Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular,  $p = (u_0, v_0)$ ,  $k_1, k_2$  as curvaturas principais de  $X$  em  $p$  e  $w_1, w_2$  os vetores principais em  $p$ . Para todo vetor  $w \in T_pX$  tal que  $\|w\| = 1$ , se  $w = \cos(\theta) \cdot w_1 + \operatorname{sen}(\theta) \cdot w_2$ , então*

$$k_n(w) = k_1\cos^2(\theta) + k_2\operatorname{sen}^2(\theta).$$

**Prova.** Consideremos

$$\begin{aligned}w_1 &= a_1X_u(p) + b_1X_v(p), \\w_2 &= a_2X_u(p) + b_2X_v(p),\end{aligned}$$

tais que  $k_1 = k_n(w_1) \leq k_n(w_2) = k_2$ . Como  $w = \cos(\theta)w_1 + \sen(\theta)w_2$ , temos que

$$w = (\cos(\theta)a_1 + \sen(\theta)a_2)X_u + (\cos(\theta)b_1 + \sen(\theta)b_2)X_v.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}k_n(w) &= (\cos(\theta)a_1 + \sen(\theta)a_2)^2e_0 + 2(\cos(\theta)a_1 + \sen(\theta)a_2)(\cos(\theta)b_1 + \sen(\theta)b_2)f_0 \\&\quad + (\cos(\theta)b_1 + \sen(\theta)b_2)^2g_0,\end{aligned}$$

onde  $e_0, f_0, g_0$  são os coeficientes da segunda forma quadrática de  $X$  em  $p$ . Desenvolvendo a expressão acima, obtemos que

$$k_n(w) = \cos^2(\theta)k_1 + \sen^2(\theta)k_2 + 2(a_1a_2e_0 + (a_1b_2 + a_2b_1)f_0 + b_1b_2g_0)\sen(\theta)\cos(\theta).$$

Consideremos  $A = (a_1a_2e_0 + (a_1b_2 + a_2b_1)f_0 + b_1b_2g_0)$ , e provaremos que  $A$  é nulo. Como  $k_n(w) \leq k_2$ , temos que para todo  $\theta$ ,

$$\cos^2(\theta)k_1 + \sen^2(\theta)k_2 + 2A\sen(\theta)\cos(\theta) \leq k_2 = k_2\sen^2(\theta) + k_2\cos^2(\theta).$$

Logo,

$$\cos^2(\theta)(k_2 - k_1) - 2A\sen(\theta)\cos(\theta) \geq 0.$$

Portanto, para todo  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2(\theta)(k_2 - k_1)}{\cos^2(\theta)} - \frac{2A\sen(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)} &\geq 0 \\(k_2 - k_1) - 2Atg(\theta) &\geq 0 \\k_2 - k_1 &\geq 2Atg(\theta).\end{aligned}$$

Suponhamos que  $A \neq 0$ . Se  $A > 0$ , então existe  $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente pequeno tal que  $2Atg(\theta) > k_2 - k_1$ , um absurdo, pois acabamos de verificar que  $2Atg(\theta) \leq k_2 - k_1$ . Analogamente, se  $A < 0$ , então existe  $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ , para  $\lambda$  suficientemente pequeno tal que

$2Atg(\theta) \geq k_2 - k_1$ , novamente um absurdo. Concluimos que  $A = 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \cos^2(\theta)k_1 + \sen^2(\theta)k_2 + 2(a_1a_2e_0 + (a_1b_2 + a_2b_1)f_0 + b_1b_2g_0)\sen(\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos^2(\theta)k_1 + \sen^2(\theta)k_2 + 2A\sen(\theta)\cos(\theta) \\ k_n(w) &= \cos^2(\theta)k_1 + \sen^2(\theta)k_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposição 4.8.8.** *Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Se  $p = (u_0, v_0)$ , então*

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{2(E_0G_0 - F_0^2)}, \\ K(p) &= \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2}. \end{aligned}$$

**Prova.** Suponhamos que  $k_0$  é uma curvatura principal em  $p = (u_0, v_0)$  na direção  $w_0 = a_0X_u(p) + b_0X_v(p)$ , então pela definição 4.8.2  $k_0$  é o valor mínimo ou máximo da função curvatura  $k_n$ , ou seja

$$k_0 = k_n(a_0, b_0) = k_n(a_0X_u(p) + b_0X_v(p)) = \frac{a_0^2e_0 + 2a_0b_0f_0 + b_0^2g_0}{a_0^2E_0 + 2a_0b_0F_0 + b_0^2G_0}, (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

calculando as derivadas parciais dessa última expressão, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} (e_0 - k_0E_0)a_0 + (f_0 - k_0F_0)b_0 &= 0, \\ (f_0 - k_0F_0)a_0 + (g_0 - k_0G_0)b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Como  $(a_0, b_0)$  é uma solução não trivial do sistema, segue que o determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_0 - k_0E_0 & f_0 - k_0F_0 \\ f_0 - k_0F_0 & g_0 - k_0G_0 \end{vmatrix} &= 0 \\ e_0g_0 - e_0k_0G_0 - g_0k_0E_0 + k_0^2E_0G_0 - f_0^2 + 2f_0k_0F_0 - k_0^2F_0^2 &= 0 \\ k_0^2(E_0G_0 - F_0^2) - (e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0)k_0 + e_0g_0 - f_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pela proposição 4.4.3,  $E_0G_0 - F_0^2 > 0$ , segue então que

$$k_0^2 - \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{(E_0G_0 - F_0^2)}k_0 + \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2} = 0.$$

Ou seja,  $k_0$  satisfaz a equação

$$x^2 - \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{(E_0G_0 - F_0^2)}x + \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2} = 0.$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação,

concluimos que

$$H(p) = \frac{e_0G_0 - 2f_0F_0 + E_0g_0}{2(E_0G_0 - F_0^2)},$$

$$K(p) = \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2}. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 4.8.9.** Considere a superfície  $X(u, v) = (u, v, v^2 + u^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve um parabolóide, pelo exemplo 4.6.5 os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $X$  em  $p$  são

$$E(u, v) = 1 + 4u^2, \quad F(u, v) = 4uv, \quad G(u, v) = 1 + 4v^2,$$

$$e(u, v) = \frac{2}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}}, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = \frac{2}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}}.$$

Pela proposição 4.8.8, a curvatura gaussiana e a curvatura média de  $X$  em  $p = (u, v)$  são

$$K(p) = \frac{4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2},$$

$$H(p) = \frac{1 + 2u^2 + 2v^2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Proposição 4.8.10.** *Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Um vetor não nulo  $w = a_0X_u(p) + b_0X_v(p)$  tangente a  $X$  em  $p = (u_0, v_0)$  é uma direção principal de curvatura principal  $k_0$  se, e só se,  $a_0, b_0$  satisfazem o sistema de equações*

$$(e_0 - k_0E_0)a_0 + (f_0 - k_0F_0)b_0 = 0,$$

$$(f_0 - k_0F_0)a_0 + (g_0 - k_0G_0)b_0 = 0. \quad (4.8.4)$$

**Prova.** Se  $w$  é uma direção principal e  $k_0 = k_n(w)$  é uma curvatura principal, então já vimos na demonstração da proposição 4.8.7 que o sistema de equações (4.8.4) se verifica.

Reciprocamente, se  $a_0, b_0$  satisfazem o sistema de equações (4.8.4), então, como  $(a_0, b_0)$  é uma solução não trivial do sistema (4.8.4),

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0E_0 & f_0 - k_0F_0 \\ f_0 - k_0F_0 & g_0 - k_0G_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pela demonstração da proposição 4.8.8, concluimos que  $k_0$  é uma curvatura principal. Provaremos agora que  $w$  é uma direção principal.

Suponhamos que  $a_0$  e  $b_0$  são não nulos. Manipulando as equações do sistema

(4.8.4), temos

$$\begin{aligned}
((e_0 - k_0 E_0)a_0 + (f_0 - k_0 F_0)b_0) \cdot a_0 &= 0 \cdot a_0 \\
(e_0 - k_0 E_0)a_0^2 + (f_0 - k_0 F_0)a_0 b_0 &= 0 \\
e_0 a_0^2 - k_0 E_0 a_0^2 + f_0 a_0 b_0 - k_0 F_0 a_0 b_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.8.5}$$

$$\begin{aligned}
((f_0 - k_0 F_0)a_0 + (g_0 - k_0 G_0)b_0) \cdot b_0 &= 0 \cdot b_0 \\
(f_0 - k_0 F_0)a_0 b_0 + (g_0 - k_0 G_0)b_0^2 &= 0 \\
f_0 a_0 b_0 - k_0 F_0 a_0 b_0 + g_0 b_0^2 - k_0 G_0 b_0^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.8.6}$$

Somando as equações (4.8.5) e (4.8.6), obtemos

$$\begin{aligned}
e_0 a_0^2 + 2f_0 a_0 b_0 + g_0 b_0^2 - k_0(E_0 a_0^2 + 2F_0 a_0 b_0 + G_0 b_0^2) &= 0 \\
e_0 a_0^2 + 2f_0 a_0 b_0 + g_0 b_0^2 &= k_0(E_0 a_0^2 + 2F_0 a_0 b_0 + G_0 b_0^2) \\
k_0 &= \frac{e_0 a_0^2 + 2f_0 a_0 b_0 + g_0 b_0^2}{E_0 a_0^2 + 2F_0 a_0 b_0 + G_0 b_0^2} = k_n(w).
\end{aligned}$$

Se  $a_0 = 0$ , segue da equação (4.8.6) que

$$\begin{aligned}
f_0 a_0 b_0 - k_0 F_0 a_0 b_0 + g_0 b_0^2 - k_0 G_0 b_0^2 &= 0 \\
f_0 \cdot 0 \cdot b_0 - k_0 F_0 \cdot 0 \cdot b_0 + g_0 b_0^2 - k_0 G_0 b_0^2 &= 0 \\
g_0 b_0^2 - k_0 G_0 b_0^2 &= 0 \\
g_0 b_0^2 &= k_0 G_0 b_0^2 \\
k_0 &= \frac{g_0 b_0^2}{G_0 b_0^2} = k_n((0, b_0)).
\end{aligned}$$

De forma análoga, se  $b_0 = 0$ , então

$$k_0 = k_n((a_0, 0)) = \frac{e_0 a_0^2}{E_0 a_0^2}.$$

Portanto, em todos os casos,  $k_0 = k_n(w)$ . ■

## 4.9 Classificação dos Pontos de uma Superfície

**Definição 4.9.1.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Dizemos que  $p = (u, v)$  é um ponto

- (a) elíptico se  $K(p) > 0$ .
- (b) hiperbólico se  $K(p) < 0$ .

(c) parabólico se  $K(p) = 0$  e  $H(p) \neq 0$ .

(d) planar se  $K(p) = 0$  e  $H(p) = 0$ .

**Exemplo 4.9.2.** Considere a superfície

$$X(u, v) = (u, v, v^2 + u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve um paraboloide, vimos no exemplo 4.8.9 que a curvatura gaussiana de  $X$  em  $p = (u, v)$  é dada por

$$K(p) = \frac{4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2} > 0, \forall p \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, todos os pontos de  $X(u, v)$  são elíticos.

**Exemplo 4.9.3.** Consideremos o paraboloide hiperbólico descrito por

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

Sendo  $\tilde{f}(u, v) = v^2 - u^2$ , temos  $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$  e  $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$ , logo os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X$  em  $p = (0, 0)$  são

$$E(0, 0) = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1,$$

$$F(0, 0) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0,$$

$$G(0, 0) = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1.$$

Como,  $X_{uu}(0, 0) = (0, 0, -2)$ ,  $X_{vv}(0, 0) = (0, 0, 2)$ ,  $X_{uv}(0, 0) = (0, 0, 0)$  e  $N(0, 0) = (0, 0, 1)$ , os coeficientes da segunda forma fundamental de  $X$  em  $p = (0, 0)$ , são

$$e(0, 0) = \langle (0, 0, -2), (0, 0, 1) \rangle = -2,$$

$$f(0, 0) = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$g(0, 0) = \langle (0, 0, 2), (0, 0, 1) \rangle = 2.$$

Segue da proposição 4.8.8 que

$$K(0, 0) = \frac{-2 \cdot 2 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = -4.$$

Portanto  $p = (0, 0)$  é um ponto hiperbólico.

**Exemplo 4.9.4.** Considere a superfície  $X(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$ ,  $r > 0$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve um cilindro reto de raio  $r$ .

Pelo exemplo 4.7.8 os coeficientes da primeira forma fundamental e da segunda forma

fundamental de  $X$  em  $p = (u, v)$ , são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= r^2, & F(u, v) &= 0, & G(u, v) &= 1, \\ e(u, v) &= -r, & f(u, v) &= 0, & g(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

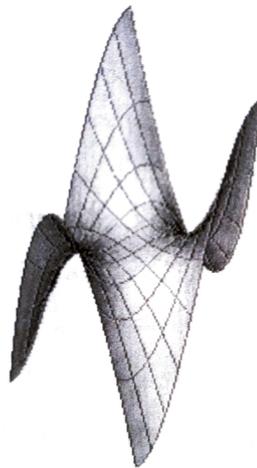
Segue da proposição 4.8.8 que

$$H(p) = -\frac{1}{r}, \quad K(p) = 0.$$

Portanto, todos os pontos de  $X(u, v)$  são parabólicos.

**Exemplo 4.9.5** (Sela de Macaco). Considere a superfície  $X(u, v) = (u, v, v^3 - 3uv^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve a superfície chamada sela de macaco (ver figura 24).

Figura 24: Sela de macaco.



Fonte: Autor (2024)

Sendo  $\tilde{f}(u, v) = v^3 - 3uv^2$ , pelo exemplo 4.6.5 os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $X$  em  $p = (0, 0)$  são

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1 + (\tilde{f}_u)^2 = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1, \\ F(0, 0) &= \tilde{f}_u \tilde{f}_v = 9(0 \cdot 0^3 - 0^4) = 0, \\ G(0, 0) &= 1 + (\tilde{f}_v)^2 = 1 + 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = 1, \\ e(0, 0) &= \frac{\tilde{f}_{uu}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}} = 0, \\ f(0, 0) &= 0, \\ g(0, 0) &= \frac{\tilde{f}_{vv}}{\sqrt{(\tilde{f}_u)^2 + (\tilde{f}_v)^2 + 1}} = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Pela proposição 4.8.8, temos que  $H(0,0) = 0$  e  $K(p) = 0$ . Portanto  $p = (0,0)$  é um ponto planar.

**Exemplo 4.9.6** (Toro). Considere a superfície  $X(u, v) = ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u))$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $0 < r < a$ , que descreve o toro.

Consideremos  $f(u) = a + r\cos(u)$  e  $g(u) = r\sin(u)$ , então  $X(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$ . Segue que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v), g'(u)), \\ X_v(u, v) &= (-f(u)\sin(v), f(u)\cos(v), 0), \\ X_{uu}(u, v) &= (f''(u)\cos(v), f''(u)\sin(v), g''(u)), \\ X_{uv}(u, v) &= (-f'(u)\sin(v), f'(u)\cos(v), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-f(u)\cos(v), -f(u)\sin(v), 0), \\ N(u, v) &= \frac{(-g'(u)\cos(v), -g'(u)\sin(v), f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}. \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental de  $X$  em  $p = (u, v)$  são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (f(u))^2, \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}, \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}. \end{aligned}$$

Como  $f'(u) = -r\sin(u)$ ,  $f''(u) = -r\cos(u)$ ,  $g'(u) = r\cos(u)$  e  $g''(u) = -r\sin(u)$ , temos

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (f'(u))^2 + (g'(u))^2 = r^2\sin^2(u) + r^2\cos^2(u) = r^2 \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (f(u))^2 = (a + r\cos(u))^2, \\ e(u, v) &= \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} = \frac{r^2\sin^2(u) + r^2\cos^2(u)}{\sqrt{r^2\sin^2(u) + r^2\cos^2(u)}} = \frac{r^2}{r} = r, \\ f(u, v) &= 0, \\ g(u, v) &= \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} = \frac{(a + r\cos(u)) \cdot r\cos(u)}{r} = (a + r\cos(u)) \cdot \cos(u). \end{aligned}$$

Pela proposição 4.8.8 a curvatura média e a curvatura gaussiana do toro em  $p = (u, v)$

são dadas pelas expressões

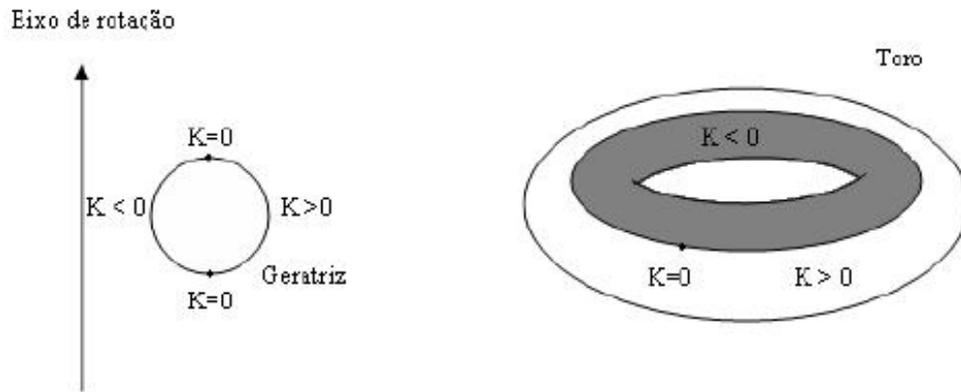
$$H(p) = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{a + 2r\cos(u)}{2r(a + r\cos(u))} = \frac{1}{2r} + \frac{\cos(u)}{2(a + r\cos(u))},$$

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos(u)}{r(a + r\cos(u))}.$$

Concluimos que

- I. Se  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ , então  $K(p) > 0$ , logo  $p$  é elíptico.
- II. Se  $u = -\frac{\pi}{2}$  ou  $u = \frac{\pi}{2}$ , então  $H(p) \neq 0$  e  $K(p) = 0$ , logo  $p$  é parabólico.
- III. Se  $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ , então  $K(p) < 0$ , logo  $p$  é hiperbólico.

Figura 25: Curvatura Gaussiana no toro.



Fonte: (NUNES, 2010, p.70)

**Exemplo 4.9.7** (Pseudoesfera). seja  $a > 0$ . A parametrização principal de Chebyshev de uma pseudoesfera de raio  $a$  é a aplicação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = \left( \frac{a\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{a\sin(v)}{\cosh(u)}, a(u - \operatorname{tgh}(u)) \right).$$

Conseideremos  $f(u) = \frac{a}{\cosh(u)} = a\operatorname{sech}(u)$  e  $g(u) = a(u - \operatorname{tgh}(u))$ , então

$$X(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)).$$

Pelo exemplo 4.9.6, temos

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (f(u))^2, \\
e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}, \\
f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\
g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
f'(u) &= -a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u), \\
f''(u) &= a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}^2(u) - a \cdot \operatorname{sech}^3(u), \\
g'(u) &= a - a \cdot \operatorname{sech}^2(u) = a \cdot \operatorname{tgh}^2(u), \\
g''(u) &= 2a \cdot \operatorname{sech}^2(u) \cdot \operatorname{tgh}(u),
\end{aligned}$$

os coeficientes da primeira forma fundamental e segunda forma fundamental de  $X$  em  $p = (u, v)$  são

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= (f'(u))^2 + (g'(u))^2 = a^2 \operatorname{tgh}^2(u), \\
F(u, v) &= 0, \\
G(u, v) &= (f(u))^2 = a^2 \operatorname{sech}^2(u), \\
e(u, v) &= \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} = -a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u), \\
f(u, v) &= 0, \\
g(u, v) &= \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}} = a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u).
\end{aligned}$$

Pela proposição 4.8.8 a curvatura média e a curvatura gaussiana da pseudoesfera em  $p = (u, v)$  são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned}
H(p) &= \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{1 - 2\operatorname{sech}^2(u)}{2a \cdot \operatorname{sech}(u) \cdot \operatorname{tgh}(u)}, \\
K(p) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

Como  $K(p) = -\frac{1}{a^2} < 0$ , concluímos pela definição 4.9.1 que  $p$  é um ponto hiperbólico.

# Capítulo 5

## Geometria Intrínseca das Superfícies

### 5.1 Isometrias

Pelos exemplos 4.4.4 e 4.4.8 os coeficientes da primeira forma fundamental do plano e do cilindro são os mesmos. Isso ocorre porque existe uma aplicação, entre essas duas superfícies, que se trata de um difeomorfismo especial, como veremos em seguida. Um difeomorfismo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma bijeção diferenciável cuja inversa  $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$  também é diferenciável.

**Definição 5.1.1.** Uma aplicação  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria se  $\varphi$  é um difeomorfismo e para todo ponto  $p \in S_1$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S_1$  temos  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$ . Diz-se que as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são isométricas.

Em outras palavras,  $\varphi$  é uma isometria se a diferencial  $d\varphi$  preserva o produto interno:

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi(w)), \quad \forall w \in T_p S.$$

De outra forma

$$\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p.$$

**Definição 5.1.2.** Uma aplicação  $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  definida na vizinhança  $V_1$  de  $p$ , com  $p \in S_1$ , é uma isometria local em  $p$  se  $\exists V_2$  vizinhança de  $\varphi(p) \in S_2$  tal que  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  seja isometria. Se  $\forall p \in S_1$  for possível estabelecer uma isometria local, então  $S_1$  e  $S_2$  são localmente isométricas.

**Exemplo 5.1.3.** Seja um plano definido por  $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$  e um cilindro dado por  $\tilde{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$  com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ . Vamos mostrar que  $\varphi : \tilde{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \tilde{X}(U)$  é uma isometria.

Temos que  $X_u = w_1$  e  $X_v = w_2$ . Pelo exemplo 4.4.4 os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Temos também que  $\tilde{X}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0)$  e  $\tilde{X}_v = (0, 0, 1)$ . Pelo exemplo 4.4.8 os coeficientes da primeira forma fundamental são

$\tilde{E} = 1$ ,  $\tilde{F} = 0$  e  $\tilde{G} = 1$ .

Sejam um ponto  $p \in X(U)$ , os vetores  $v_1, v_2 \in T_p X(U)$  e  $p_0 = (u_0, v_0)$ . Logo,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^1 X_u + v_1^2 X_v = dX(u_0, v_0)(v_1^1, v_1^2), \\ v_2 &= v_2^1 X_u + v_2^2 X_v = dX(u_0, v_0)(v_2^1, v_2^2). \end{aligned}$$

E  $d\varphi(p) = d\tilde{X}(X^{-1}(p))dX^{-1}(p) = d\tilde{X}(u_0, v_0)dX^{-1}(p)$ . Então

$$\begin{aligned} d\varphi(p)(v_1) &= d\tilde{X}(u_0, v_0)(v_1^1, v_1^2) = v_1^1 \tilde{X}_u + v_1^2 \tilde{X}_v, \\ d\varphi(p)(v_2) &= d\tilde{X}(u_0, v_0)(v_2^1, v_2^2) = v_2^1 \tilde{X}_u + v_2^2 \tilde{X}_v. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v_1), d\varphi(p)(v_2)) &= \langle v_1^1 \tilde{X}_u + v_1^2 \tilde{X}_v, v_2^1 \tilde{X}_u + v_2^2 \tilde{X}_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle + v_1^1 v_2^2 \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle \\ &\quad + v_1^2 v_2^1 \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_u \rangle + v_1^2 v_2^2 \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 + v_1^2 v_2^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_p(v_1, v_2) &= \langle v_1^1 X_u + v_1^2 X_v, v_2^1 X_u + v_2^2 X_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1^1 v_2^2 \langle X_u, X_v \rangle + v_1^2 v_2^1 \langle X_v, X_u \rangle + v_1^2 v_2^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 + v_1^2 v_2^2. \end{aligned}$$

Observe que  $I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v_1), d\varphi(p)(v_2)) = I_p(v_1, v_2)$ , logo o plano é localmente isométrico ao cilindro.

**Proposição 5.1.4.** *Se existirem parametrizações  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\tilde{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$  tais que  $E = \tilde{E}$ ,  $F = \tilde{F}$  e  $G = \tilde{G}$  em  $U$ , então a aplicação  $\varphi = \tilde{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \tilde{S}$  é uma isometria local.*

**Prova.** Sejam  $p \in X(U)$  e  $v, w \in T_p S$ , logo

$$\begin{aligned} v &= v_1 X_u + v_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(v_1, v_2), \\ w &= w_1 X_u + w_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Temos que  $d\varphi(p) = d\tilde{X}(X^{-1}(p))dX^{-1}(p)$ , logo

$$\begin{aligned} d\varphi(p)(v) &= d\tilde{X}(X^{-1}(p))(v_1, v_2) = v_1 \tilde{X}_u + v_2 \tilde{X}_v, \\ d\varphi(p)(w) &= d\tilde{X}(X^{-1}(p))(w_1, w_2) = w_1 \tilde{X}_u + w_2 \tilde{X}_v. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} I_p(v, w) &= \langle v_1 X_u + v_2 X_v, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1 w_2 \langle X_u, X_v \rangle + v_2 w_1 \langle X_v, X_u \rangle + v_2 w_2 \langle X_v, X_v \rangle, \\ I_p(v, w) &= v_1 w_1 E + (v_1 w_2 + v_2 w_1) F + v_2 w_2 G, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v), d\varphi(p)(w)) &= \langle v_1 \tilde{X}_u + v_2 \tilde{X}_v, w_1 \tilde{X}_u + w_2 \tilde{X}_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle + v_1 w_2 \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle + v_2 w_1 \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_u \rangle \\ &\quad + v_2 w_2 \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v), d\varphi(p)(w)) &= v_1 w_1 \tilde{E} + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \tilde{F} + v_2 w_2 \tilde{G}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese  $E = \tilde{E}$ ,  $F = \tilde{F}$  e  $G = \tilde{G}$ , então  $I_p(v, w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v), d\varphi(p)(w))$ . logo é uma isometria local. ■

**Exemplo 5.1.5.** Considere, respectivamente, as parametrizações da catenóide e helicóide  $X, \tilde{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , superfícies regulares definidas por

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sen(u), v), \\ \tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= (\tilde{v}\cos(\tilde{u}), \tilde{v}\sen(\tilde{u}), \tilde{u}). \end{aligned}$$

Considere  $f(v) = \cosh(v)$  e  $g(v) = v$ , então  $f'(v) = \senh(v)$  e  $g'(v) = 1$ . Pelo exemplo 4.4.7, os coeficientes da primeira forma fundamental da catenóide são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (f(v))^2 = \cosh^2(v), \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2 = \senh^2(v) + 1 = \cosh^2(v). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = \senh(v),$$

com  $0 < u < 2\pi$  e  $-\infty < v < \infty$ . Note que a mudança de variável é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  e o Jacobiano

$$\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh(v) \end{vmatrix} = \cosh(v),$$

nunca se anula. Portanto, pela proposição 4.2.1 obtemos a reparametrização  $\varphi : (0, 2\pi) \times$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  da helicóide, dada por

$$\varphi(u, v) = (\sinh(v)\cos(u), \sinh(v)\sin(u), u).$$

Como

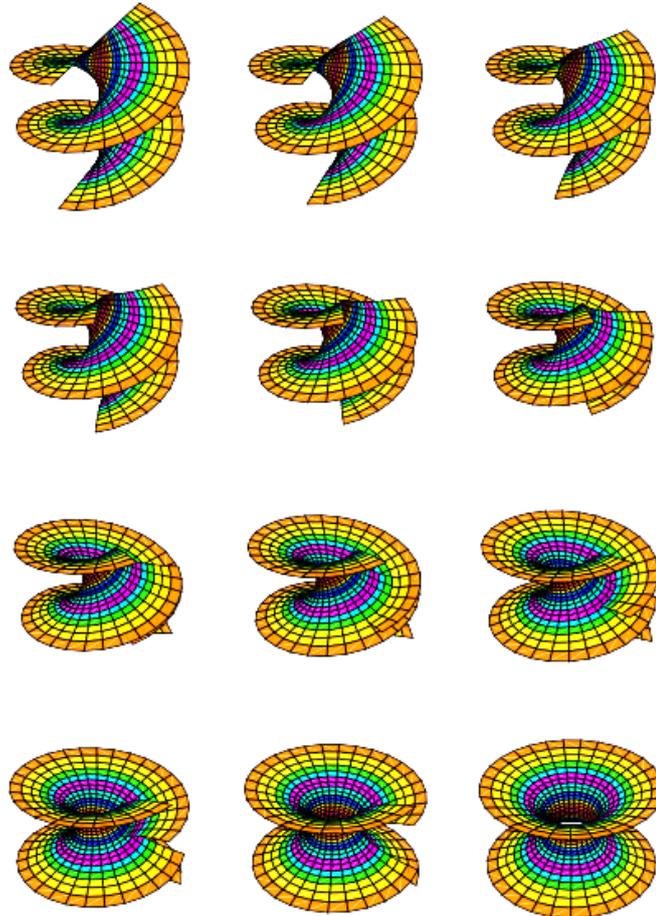
$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-\sinh(v)\sin(u), \sinh(v)\cos(u), 1), \\ \varphi_v &= (\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), 0).\end{aligned}$$

Então, os coeficientes da primeira forma fundamental da helicóide são

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \cosh^2(v), \\ F(u, v) &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \cosh^2(v).\end{aligned}$$

Segue da proposição 5.1.4 que a catenóide e a helicóide são localmente isométricas.

Figura 26: Transformação do helicóide no catenóide.



Fonte: (GRAY et al., 2006, p.505)

## 5.2 Símbolos de Christoffel

Consideremos uma superfície regular parametrizada  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , como para cada  $(u, v) \in U$  o triedo  $\{X_u, X_v, N\}$  forma uma base em  $\mathbb{R}^3$ , temos que  $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}, N_u$  e  $N_v$  podem ser expressos como combinação linear de  $X_u, X_v, N$ . Isto é,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \langle X_{uu}, N \rangle N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \langle X_{uv}, N \rangle N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \langle X_{vu}, N \rangle N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \langle X_{vv}, N \rangle N, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $a_{11}, a_{21}, a_{12}$  e  $a_{22}$  foram calculados na observação 4.6.4, além disso vimos que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, N \rangle &= e, \\ \langle X_{uv}, N \rangle &= \langle X_{vu}, N \rangle = f, \\ \langle X_{vv}, N \rangle &= g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, \\ N_u &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} X_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_v, \\ N_v &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} X_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_v. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Clairaut-Schartz, temos que  $X_{uv} = X_{vu}$ , logo

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2. \end{aligned}$$

**Definição 5.2.1.** Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  para  $i, j, k = 1, 2$  são chamados de símbolos de Christoffel.

**Proposição 5.2.2.** Os símbolos de Christoffel se escrevem em relação aos coeficientes da

primeira forma fundamental da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2FF_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v - FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

**Prova.** Derivando  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ , e  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  em relação a  $u$  e  $v$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{E_u}{2}, & \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{E_v}{2}, & \langle X_{vv}, X_u \rangle &= F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle &= F_u - \frac{E_v}{2}, & \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \frac{G_u}{2}, & \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \frac{G_v}{2}.\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, X_u \rangle = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{E_u}{2}, \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, X_v \rangle = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{E_v}{2}, \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, X_u \rangle = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{E_v}{2}, \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, X_v \rangle = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2}, \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_u \rangle = E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, X_v \rangle = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2}.\end{aligned}$$

Portanto obtemos os seguintes sistemas lineares nas incógnitas  $\Gamma_{ij}^k$

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{E_u}{2}, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{E_v}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{E_v}{2}, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{G_u}{2}, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2}. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes de todos esses sistemas é  $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ , cuja inversa é

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução destes três sistemas é

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_u G}{2} - FF_u + \frac{FE_v}{2} \\ EF_u - \frac{EE_v}{2} - \frac{FE_u}{2} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_v}{2} \\ F_u - \frac{G_u}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{GE_v}{2} - \frac{FG_u}{2} \\ \frac{EG_u}{2} - \frac{FE_v}{2} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v - \frac{G_u}{2} \\ \frac{G_v}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GF_v - \frac{GG_u}{2} - \frac{FG_v}{2} \\ \frac{EG_v}{2} - FF_v + \frac{FG_u}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2FF_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v - FG_u}{2(EG - F^2)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.2.3.** Considere a aplicação

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v))$$

do exemplo 4.1.5 que representa uma superfície de revolução, vimos no exemplo 4.6.7 que

os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície de revolução são:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = (f(v))^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 + (g'(v))^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$EG - F^2 = f^2[(f'(v))^2 + (g'(v))^2],$$

vimos também que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-f(v)\text{sen}(u), f(v)\text{cos}(u), 0), \\ X_v(u, v) &= (f'(v)\text{cos}(u), f'(v)\text{sen}(u), g'(v)), \\ X_{uu}(u, v) &= (-f(v)\text{cos}(u), -f(v)\text{sen}(u), 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (-f'(v)\text{sen}(u), f'(v)\text{cos}(u), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (f''(v)\text{cos}(u), f''(v)\text{sen}(u), g''(v)). \end{aligned}$$

Vimos na demonstração da proposição 5.2.2 que

$$\begin{aligned} E_u &= 2\langle X_{uu}, X_u \rangle = 0, & E_v &= 2\langle X_{uv}, X_u \rangle = 2f(v)f'(v), \\ F_u &= \frac{E_v}{2} + \langle X_{uu}, X_v \rangle = 0, & F_v &= \frac{G_u}{2} + \langle X_{vv}, X_u \rangle = 0, \\ G_u &= 2\langle X_{uv}, X_v \rangle = 0, & G_v &= 2\langle X_{vv}, X_v \rangle = 2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)). \end{aligned}$$

Pela proposição 5.2.2, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{2f(v)f'(v) \left[ (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \right]}{2(f(v))^2 \left[ (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \right]} = \frac{f'(v)}{f(v)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-2(f(v))^3 f'(v)}{2(f(v))^2 \left[ (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \right]} = -\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{2(f(v))^2 (f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v))}{2(f(v))^2 \left[ (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \right]} = \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}. \end{aligned}$$

Suponhamos que a curva  $\alpha(v) = (0, f(v), g(v))$  geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, ou seja  $(f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1$ . Consequente-

mente,

$$\begin{aligned} [(f'(v))^2 + (g'(v))^2]' &= 0 \\ 2f'(v)f''(v) + 2g'(v)g''(v) &= 0 \\ f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v) &= 0. \end{aligned}$$

Portando,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{2f(v)f'(v)}{2(f(v))^2} = \frac{f'(v)}{f(v)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-2(f(v))^3 f'(v)}{2(f(v))^2} = -f(v)f'(v), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{2(f(v))^2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v))}{2(f(v))^2} = f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v) = 0. \end{aligned}$$

### 5.3 Teorema Egregium de Gauss

**Teorema 5.3.1** (Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometrias locais, isto é, é uma propriedade intrínseca<sup>1</sup> das superfícies.*

**Prova.** Temos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned}$$

Calculando  $(X_{uu})_v$  e  $(X_{uv})_u$  obtemos

$$\begin{aligned} (X_{uu})_v &= \Gamma_{11_v}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11_v}^2 X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + e N_v, \\ (X_{uv})_u &= \Gamma_{12_u}^1 X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \Gamma_{12_u}^2 X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + f N_u. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Uma propriedade de uma superfície é intrínseca se ela não depende do espaço no qual está mergulhada. Propriedades intrínsecas são preservadas por isometrias.

Substituindo  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vu}$ ,  $X_{vv}$ ,  $N_u$  e  $N_v$ ,

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v &= \Gamma_{11_v}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \Gamma_{11_v}^2 X_v \\ &+ \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + e_v N + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v), \\ (X_{uv})_u &= \Gamma_{12_u}^1 X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{12_u}^2 X_v \\ &+ \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + f_u N + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v).\end{aligned}$$

Colocando  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$  em evidência temos

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v &= X_u (\Gamma_{11_v}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12}) + X_v (\Gamma_{11_v}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22}) \\ &+ N (e_v + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g), \\ (X_{uv})_u &= X_u (\Gamma_{12_u}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11}) + X_v (\Gamma_{12_u}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21}) \\ &+ N (f_u + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f).\end{aligned}$$

Como  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ , temos

$$\Gamma_{11_v}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} = \Gamma_{12_u}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21}.$$

Então

$$\Gamma_{12_u}^2 - \Gamma_{11_v}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = ea_{22} - fa_{21}.$$

Substituindo os coeficientes  $a_{21}$  e  $a_{22}$  calculados na observação 4.6.4, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{12_u}^2 - \Gamma_{11_v}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= -\frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2} \\ &= -EK.\end{aligned}$$

Como os símbolos de Christoffel se escrevem exclusivamente em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, podemos concluir que a curvatura Gaussiana  $K$  é uma propriedade intrínseca da superfície.

De modo análogo, da igualdade  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ , é possível formular  $FK$  e  $GK$  em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas. Como  $E$ ,  $F$ ,  $G$  não se anulam simultaneamente, podemos concluir que a curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície regular só depende dos coeficientes  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e das suas derivadas, sendo assim, invariante por isometria. ■

**Proposição 5.3.2.** *Se  $X$  é uma parametrização ortogonal, ou seja  $F = 0$ , então*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right].$$

**Prova.** Vimos na prova do teorema 5.3.1 que

$$-EK = \Gamma_{12_u}^2 - \Gamma_{11_v}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2$$

Como  $F = 0$ , segue da proposição 5.2.2 que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -EK &= \left( \frac{G_u}{2G} \right)_u - \left( -\frac{E_v}{2G} \right)_v + \frac{E_v}{2E} \left( -\frac{E_v}{2G} \right) + \left( \frac{G_u}{2G} \right)^2 - \left( \frac{E_u G_u}{2E 2G} \right) - \left( -\frac{E_v}{2G} \right) \frac{G_v}{2G} \\ &= \frac{2GG_{uu} - 2(G_u)^2}{4G^2} + \frac{2GE_{vv} - 2E_v G_v}{4G^2} - \frac{(E_v)^2}{4EG} + \frac{(G_u)^2}{4G^2} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{E_v G_v}{4G^2} \\ &= \frac{GG_{uu} - (G_u)^2}{2G^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{2G^2} - \frac{(E_v)^2}{4EG} + \frac{(G_u)^2}{4G^2} - \frac{E_u G_u}{4EG} + \frac{E_v G_v}{4G^2}. \end{aligned}$$

Protanto,

$$\begin{aligned} K &= \frac{(G_u)^2 - GG_{uu}}{2EG^2} + \frac{E_v G_v - GE_{vv}}{2EG^2} + \frac{(E_v)^2}{4E^2 G} - \frac{(G_u)^2}{4EG^2} + \frac{E_u G_u}{4E^2 G} - \frac{E_v G_v}{4EG^2} \\ &= \frac{2E((G_u)^2 - GG_{uu}) + 2E(E_v G_v - GE_{vv}) + G(E_v)^2 - E(G_u)^2 + GE_u G_u - EE_v G_v}{4E^2 G^2} \\ &= \frac{-2EGE_{vv} + G(E_v)^2 + EE_v G_v}{4E^2 G^2} + \frac{-2EGG_{uu} + E(G_u)^2 + GE_u G_u}{4E^2 G^2}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a expressão acima como

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\frac{EG E_{vv}}{2\sqrt{EG}} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}(E_v G + EG_v)}{EG} + \frac{\frac{EG G_{uu}}{2\sqrt{EG}} - \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}(E_u G + EG_u)}{EG} \right).$$

Observe que,

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v = \frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v \frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v G + E g_v)}{EG} = \frac{\frac{EG E_{vv}}{2\sqrt{EG}} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}(E_v G + E g_v)}{EG},$$

e

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u = \frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u \frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_u G + E g_u)}{EG} = \frac{\frac{EG G_{uu}}{2\sqrt{EG}} - \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}(E_u G + E g_u)}{EG}.$$

Portanto,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u \right]. \quad \blacksquare$$

## 5.4 Derivada Covariante

A derivada covariante é mais uma ferramenta para relacionarmos grandezas que são intrínsecas e veremos que ela é função apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental e dos símbolos de Christoffel.

**Definição 5.4.1.** Dada uma superfície  $S$ , um vetor  $v \in T_p S$  e um campo de vetores  $w$  contidos em  $V \subseteq S$ ; Dada uma curva  $\alpha : I \rightarrow V$ , a derivada covariante de  $w$  segundo  $\alpha$  é a projeção ortogonal de  $(w \circ \alpha)'(t)$  no plano tangente  $T_{\alpha(t)} S$ , e denotaremos esta derivada por  $\frac{Dw}{dt}(t)$ . Assim, para determinarmos  $\frac{Dw}{dt}(t)$  temos que subtrair da derivada  $(w \circ \alpha)'(t)$  sua componente segundo a normal  $N \circ \alpha(t)$  à superfície.

**Definição 5.4.2.** Uma curva parametrizada  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  é a restrição a  $[0, l]$  de uma aplicação diferenciável de  $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , em  $S$ . Se  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(l) = q$ , dizemos que  $\alpha$  liga  $p$  a  $q$ .

**Definição 5.4.3.** Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$ . O campo de vetores  $w$  ao longo de  $\alpha$  é diferenciável em  $t_0 \in I$  se para alguma parametrização  $X(u, v)$  em  $\alpha(t_0)$  as componentes  $a(t)$ ,  $b(t)$  de  $w(t) = aX_u + bX_v$  são funções diferenciáveis de  $t$  a  $t_0$ . O campo  $w$  é diferenciável em  $I$  se é diferenciável  $\forall t \in I$ .

A derivada covariante é um conceito intrínseco e não depende da escolha da curva.

**Proposição 5.4.4** (Localidade da Derivada Covariante). *Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$ . A derivada covariante de  $w$  ao longo da curva parametrizada por  $t$  é dada por*

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{da}{dt} X_u + a \frac{DX_u}{dt} + \frac{db}{dt} X_v + b \frac{DX_v}{dt}.$$

Então,

$$\frac{Dw}{dt} = X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v').$$

**Prova.** Calculando  $\frac{DX_u}{dt}$  e  $\frac{DX_v}{dt}$ , temos

$$\frac{DX_u}{dt} = \frac{\partial X_u}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X_u}{\partial v} \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{DX_v}{dt} = \frac{\partial X_v}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X_v}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

Escrevendo  $\frac{du}{dt} = u'$  e  $\frac{dv}{dt} = v'$ , temos

$$\frac{DX_u}{dt} = \frac{\partial X_u}{\partial u} u' + \frac{\partial X_u}{\partial v} v',$$

$$\frac{DX_v}{dt} = \frac{\partial X_v}{\partial u} u' + \frac{\partial X_v}{\partial v} v'.$$

Expressando  $\frac{\partial X_u}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial X_u}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial X_v}{\partial u}$  e  $\frac{\partial X_v}{\partial v}$  em função dos símbolos de Christoffel, temos

$$\frac{\partial X_u}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v,$$

$$\frac{\partial X_u}{\partial v} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v,$$

$$\frac{\partial X_v}{\partial u} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v,$$

$$\frac{\partial X_v}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v.$$

Portanto,

$$\frac{DX_u}{dt} = (\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v') X_u + (\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v') X_v,$$

$$\frac{DX_v}{dt} = (\Gamma_{21}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v') X_u + (\Gamma_{21}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v') X_v.$$

Substituindo em  $\frac{Dw}{dt}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = & a' X_u + a ((\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v') X_u + (\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v') X_v) + b' X_v + \\ & b ((\Gamma_{21}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v') X_u + (\Gamma_{21}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v') X_v). \end{aligned}$$

Distribuindo  $a$  e  $b$  nos termos acima, obtemos

$$\frac{Dw}{dt} = X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v'),$$

A expressão é chamada de derivada covariante de  $w$  em  $t$ . ■

**Exemplo 5.4.5.** Sejam  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $\mathbb{R}^3$ ,  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^3$ . Vamos calcular a derivada covariante do plano parametrizado  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que, para cada  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , associa  $X(u, v) = p_0 + ua + vb$ . Pelo exemplo 4.4.4, temos

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = a, \quad X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = b, \quad E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Calculando os símbolos de Christoffel, obtemos  $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k = 1, 2$ . Pela proposição 5.4.4, temos

$$\frac{Dw}{dt} = a'X_u + b'X_v.$$

Podemos notar que a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano.

**Exemplo 5.4.6.** Considere a aplicação

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v))$$

Vimos no exemplo 5.2.3 que,

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-f(v)\sen(u), f(v)\cos(u), 0), \\ X_v(u, v) &= (f'(v)\cos(u), f'(v)\sen(u), g'(v)), \end{aligned}$$

e que os símbolos de Christoffel de uma superfície de revolução parametrizada pelo comprimento de arco são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{f'(v)}{f(v)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -f(v)f'(v). \end{aligned}$$

Pela proposição 5.4.4, temos que a derivada covariante de superfície de revolução parametrizada pelo comprimento de arco é dada pela expressão

$$\frac{Dw}{dt} = X_u\left(a' + av'\frac{f'(v)}{f(v)} + bu'\frac{f'(v)}{f(v)}\right) + X_v\left(b' - au'f(v)f'(v)\right).$$

**Exemplo 5.4.7.** Considere a esfera unitária  $X(\theta, \phi) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar e  $\phi$  é o ângulo azimutal. E seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ ,  $\alpha(t) = (\theta(t), \phi(t))$  uma curva parametrizada em  $X$ .

Os vetores tangentes são

$$X_\theta = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta),$$

$$X_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 1, \quad F = \langle X_\theta, X_\phi \rangle = 0, \quad G = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = \cos^2\theta.$$

Calculando  $X_{\theta\phi}$  e  $X_{\phi\phi}$ , obtemos

$$X_{\theta\phi} = (\sin\phi\sin\theta, -\cos\phi\sin\theta, 0),$$

$$X_{\phi\phi} = (-\cos\phi\cos\theta, -\sin\phi\cos\theta, 0).$$

Derivando  $E$ ,  $F$  e  $G$  em relação a  $\theta$  e  $\phi$  obtemos

$$E_\theta = E_\phi = F_\theta = F_\phi = 0,$$

$$G_\theta = 2\langle X_{\theta\phi}, X_\phi \rangle = -2\sin\theta\cos\theta,$$

$$G_\phi = 2\langle X_{\phi\phi}, X_\phi \rangle = 0.$$

Usando a proposição 5.2.2 para calcular os símbolos de Christoffel, obtemos

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = \sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -tg\theta.$$

Pela proposição 5.4.4 a derivada covariante de  $w(t) = a(t)X_\theta + b(t)X_\phi$ , um campo diferenciável de vetores ao longo de  $\alpha$ , é dada por

$$\frac{Dw}{dt} = X_\theta(a' + b\phi'\sin\theta\cos\theta) + X_\phi(b' - a\phi'tg\theta - b\theta'tg\theta).$$

**Definição 5.4.8.** Um campo vetorial  $w$  ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$  é dito paralelo se

$$\frac{Dw}{dt}(t) = 0.$$

**Proposição 5.4.9.** Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular e sejam  $w$  e  $z$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\alpha$ . Então  $\langle w(t), z(t) \rangle$ ,  $\|w(t)\|$ ,  $\|z(t)\|$  e o ângulo  $\theta$  entre  $w(t)$  e  $z(t)$  são constantes.

**Prova.** Por hipótese  $w$  e  $z$  são paralelos, ou seja  $\frac{Dw}{dt}(t) = \frac{Dz}{dt}(t) = 0$ ,  $\forall t \in I$ . Isso significa que,  $\frac{Dw}{dt}(t)$  e  $\frac{Dz}{dt}(t)$  são normais ao plano que é tangente a superfície em  $\alpha(t)$ , logo

$$\langle w'(t), z(t) \rangle = 0, \langle w(t), z'(t) \rangle = 0.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \langle w(t), z(t) \rangle = \langle w'(t), z(t) \rangle + \langle w(t), z'(t) \rangle = 0,$$

portanto  $\langle w(t), z(t) \rangle \equiv \text{constante}$ .

Também temos que  $\langle w'(t), w(t) \rangle = 0$  e  $\langle z'(t), z(t) \rangle = 0$ , logo

$$\frac{d}{dt} \|w\| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle w', w \rangle + \langle w, w' \rangle}{2\sqrt{\langle w, w \rangle}} = \frac{2\langle w', w \rangle}{2\sqrt{\langle w, w \rangle}} = \frac{\langle w', w \rangle}{\sqrt{\langle w, w \rangle}} = 0,$$

portanto,  $\|w\| = \text{constante}$ .

Analogamente,  $\|z\| = \text{constante}$ .

O ângulo entre  $w$  e  $z$  é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle w, z \rangle}{\|w\| \|z\|} = \text{constante}. \blacksquare$$

**Proposição 5.4.10.** Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ . Então existe um único campo paralelo  $w$  ao longo de  $\alpha$  tal que  $w(t_0) = w_0$ .

**Prova.** Um campo paralelo com estas condições tem que ser solução da equação diferencial  $\frac{Dw}{dt} = 0$  com a condição inicial  $w(t_0) = w_0$ . Seque então

$$X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v') = 0.$$

Nessas condições, temos que

$$\begin{cases} a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v' = 0, \\ b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v' = 0. \end{cases}$$

Isto é, as componentes de  $w$  satisfazem ao seguinte sistema EDO

$$\begin{cases} a' = -(a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v'), \\ b' = -(a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v'). \end{cases}$$

Pelo teorema de existência e unicidade de soluções para sistemas lineares de EDO's, temos que existe  $w(t)$  satisfazendo à equação com  $w(t_0) = w_0$ . ■

## 5.5 Geodésicas

Geodésicas em uma superfície parametrizada regular são curvas especiais que generalizam o conceito de reta no espaço euclidiano. Dentre as suas propriedades elas representam as trajetórias mais curtas entre dois pontos na superfície, por exemplo, no plano retas são geodésicas. Possuem curvatura geodésica nula, ou seja, ao longo da curva, o vetor tangente não muda de direção dentro da superfície. E a condição de ser uma geodésica pode ser vista como uma condição de autoparalelismo do campo de vetores tangentes à curva, isto é, o vetor tangente à curva permanece paralelo a si mesmo ao longo da curva.

Uma geodésica em uma superfície parametrizada regular é uma curva, tal que, a aceleração da curva em relação à métrica da superfície é perpendicular à superfície em todos os pontos. Em termos matemáticos, isso significa que a aceleração não tem componente tangente à superfície, ou seja, a curva não desvia em direções que a superfície não permitiria.

**Definição 5.5.1.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica da superfície  $X$  se, para todo  $t \in I$ ,  $\alpha''(t)$  é um vetor normal a  $X$  em  $(u(t), v(t))$ .

De forma equivalente, podemos dizer que  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica da superfície  $X$  se  $\alpha'(t)$  é paralelo ao longo de  $\alpha$  em  $t$ , isto é  $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0$  para todo  $t \in I$ .

**Proposição 5.5.2.** Seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$  uma curva regular de uma superfície  $X(u, v)$ . Então,  $\alpha$  é geodésica de  $X$  se, e somente se, as funções  $u(t)$ ,  $v(t)$  satisfazem o sistema de equações

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel da superfície  $X$ .

**Prova.** Vamos obter  $\alpha''(t)$  como combinação linear de  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$ .

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= X(u(t), v(t)), \\ \alpha'(t) &= u'X_u + v'X_v, \\ \alpha''(t) &= u''X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv} + v''X_v.\end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned}X_{uu} &= \Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= u''X_u + (\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN)(u')^2 + (\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN)2u'v' \\ &\quad + (\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN)(v')^2 + v''X_v \\ \alpha''(t) &= ((u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g)N + (u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1)X_u \\ &\quad + (v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2)X_v.\end{aligned}$$

Pela definição 5.5.1,  $\alpha(t)$  é uma geodésica de  $X$  se para todo  $t \in I$ ,  $\alpha''(t)$  é um vetor normal a  $X$  em  $(u(t), v(t))$ , isto é, não tem componente tangencial à superfície. Logo os coeficientes de  $X_u$  e  $X_v$  são nulos, ou seja

$$\begin{aligned}u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0, \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0,\end{aligned}$$

Reciprocamente, se os coeficientes de  $X_u$  e  $X_v$  são nulos, então

$$\alpha''(t) = ((u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g)N,$$

ou seja,  $\alpha(t)$  é uma geodésica de  $X$ . ■

**Proposição 5.5.3.** *Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Se uma curva regular  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica da superfície  $X$ , então*

$$\|\alpha'(t)\| \equiv \text{constante}.$$

**Prova.** Vimos na proposição 5.5.2 que se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma geodésica de  $X$ ,

então  $\alpha''(t) = ((u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g)N$ . Vamos calcular a derivada de  $\|\alpha'(t)\|^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle \\ &= \langle\alpha''(t), \alpha'(t)\rangle + \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \\ &= 2\langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \\ &= 2\langle u'X_u + v'X_v, ((u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g)N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto  $\|\alpha'(t)\| = \text{constante}$ . ■

**Definição 5.5.4.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular. Uma geodésica  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é dita normalizada ou unitária se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

**Proposição 5.5.5.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular. Então para todo  $p \in S$  e  $V \in T_pS$ , existe um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo 0 (dependente de  $p$  e  $V$ ) e uma única geodésica  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = V$ .*

**Prova.** Temos o sistema de EDOs de segunda ordem não linear

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0, \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Transformando este sistema em um sistema de primeira ordem definindo  $w = u'$  e  $z = v'$ . Obtemos

$$\begin{aligned} w' &= -w^2\Gamma_{11}^1 - 2wz\Gamma_{12}^1 - z^2\Gamma_{22}^1, \\ z' &= -w^2\Gamma_{11}^2 - 2wz\Gamma_{12}^2 - z^2\Gamma_{22}^2. \end{aligned}$$

O resultado segue então do Teorema de Existência e Unicidade local de soluções para sistemas de equações ordinárias de primeira ordem não lineares <sup>2</sup>. ■

**Exemplo 5.5.6.** Considere a aplicação

$$X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v))$$

Definida no exemplo 4.1.5. Vimos no exemplo 5.2.3 que os símbolos de Christoffel de uma

---

<sup>2</sup>Mais detalhes sobre o Teorema de Existência e Unicidade local de soluções para sistemas de equações ordinárias de primeira ordem podem ser encontrados em (BIRKHOFF; ROTA, 1991, p.99).

superfície de revolução são

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{f'(v)}{f(v)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}.\end{aligned}$$

Pela proposição 5.5.2, a equação geodésica de uma superfície de revolução é dada por

$$\begin{cases} u'' + 2\frac{f'(v)}{f(v)}u'v' = 0, \\ v'' - \frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}(u')^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

Vimos também no exemplo 5.2.3 que se a curva  $\alpha(v) = (0, f(v), g(v))$  geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, então

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{f'(v)}{f(v)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -f(v)f'(v).\end{aligned}$$

Portando as equações geodésicas para superfícies de revolução se reduzem a

$$\begin{cases} u'' + \frac{f'(v)}{f(v)}2u'v' = 0, \\ v'' - f(v)f'(v)(u')^2 = 0. \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Vamos verificar que os meridianos e paralelos de uma superfície de revolução são geodésicas. Parametrizando os meridianos de uma superfície de revolução por comprimento de arco, de modo que  $u \equiv u_0$  e  $v = v(t)$ , temos

$$u'' = u' = 0, \quad (v')^2 = 1, \quad 2v'v'' = 0 \Rightarrow v'' = 0.$$

logo as equações (5.5.1) e (5.5.2) são trivialmente satisfeitas.

Para que um paralelo seja uma geodésica, parametrizando-o por comprimento de arco, de

modo que  $u = u(t)$  e  $v \equiv v_0$ , temos

$$v'' = v' = 0, \quad (u')^2 = 1, \quad 2u'u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0,$$

a equação (5.5.1) é trivialmente satisfeita, e a equação (5.5.2) se reduz a

$$f(v)f'(v)(u')^2 = 0.$$

Como  $f(v) = f(v_0) \neq 0$ ,  $u' \neq 0$ , segue que  $f'(v_0) = 0$ , ou seja, o paralelo  $v \equiv v_0$  é uma geodésica de uma superfície de revolução se, e somente se a reta tangente à curva geratriz é paralela ao eixo de revolução.

Em ambos os casos, o vetor normal da curva está na direção do vetor normal da superfície, portanto a sua componente tangencial é nula. De fato, Se  $u = u_0$  e  $v = v(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X(u_0, v(t)), \\ \alpha'(t) &= u'X_u + v'X_v, \\ \alpha''(t) &= u''X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv} + v''X_v \\ &= X_{vv} \\ &= \Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN \\ &= gN, \\ n(t) &= \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{gN}{\|\alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Se  $u = u(t)$  e  $v = v_0$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X(u(t), v_0), \\ \alpha'(t) &= u'X_u + v'X_v, \\ \alpha''(t) &= u''X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv} + v''X_v \\ &= X_{uu} \\ &= \Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN \\ &= eN, \\ n(t) &= \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{eN}{\|\alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Para obtermos as curvas geodésicas que não são paralelos nem meridianos, consideremos a primeira equação do sistema (5.5.1)

$$u'' + 2\frac{f'(v)}{f(v)}u'v' = 0.$$

Esta equação é equivalente a equação  $(f(v))^2u'' + 2f(v)f'(v)u'v' = 0$ , isso nos diz que

$(f(v))^2 u' \equiv c$ , onde  $c$  é uma constante. De fato

$$((f(v))^2 u')' = (f(v))^2 u'' + 2f(v)f'(v)u'v' = 0.$$

Como  $(f(v))^2 u' \equiv c$ , temos

$$(f(v))^2 u' = c \Rightarrow (f(v))^2 \cdot \frac{du}{dt} = c \Rightarrow \frac{dt}{du} = \frac{(f(v))^2}{c}.$$

Tomemos uma geodésica que não seja nem um meridiano nem um paralelo da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco, então vale  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Onde  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$ . De modo que  $\alpha(t) = (f(v(t))\cos(u(t)), f(v(t))\sin(u(t)), g(v(t)))$ . Logo

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (v'f'(v)\cos(u) - u'f(v)\sin(u), v'f'(v)\sin(u) + u'f(v)\cos(u), v'g'(v)), \\ \|\alpha'(t)\|^2 &= (v'f'(v)\cos(u) - u'f(v)\sin(u))^2 + (v'f'(v)\sin(u) + u'f(v)\cos(u))^2 \\ &\quad + (v'g'(v))^2 = 1 \\ &= (v')^2(f'(v))^2\cos^2(u) - 2u'v'f(v)f'(v)\cos(u)\sin(u) + (u')^2(f(v))^2\sin^2(u) \\ &\quad + (v')^2(f'(v))^2\sin^2(u) + 2u'v'f(v)f'(v)\cos(u)\sin(u) + (u')^2(f(v))^2\cos^2(u) \\ &\quad + (v')^2(g'(v))^2 = 1 \\ &= (v')^2(f'(v))^2 + (u')^2(f(v))^2 + (v')^2(g'(v))^2 = 1 \\ &= (v')^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + (u')^2 \cdot (f(v))^2 = 1. \end{aligned}$$

Segue desta última igualdade

$$\begin{aligned} (v')^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + (u')^2 \cdot (f(v))^2 &= 1 \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \cdot (f(v))^2 &= 1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\left(\frac{dt}{du}\right)^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{du}\right)^2 \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + \left(\frac{dt}{du}\right)^2 \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \cdot (f(v))^2 &= \left(\frac{dt}{du}\right)^2 \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + (f(v))^2 &= \left(\frac{dt}{du}\right)^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{dt}{du} = \frac{(f(v))^2}{c}$ , reescreveremos a última equação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{du}\right)^2 &= \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) + (f(v))^2 \\ \frac{(f(v))^4}{c^2} - (f(v))^2 &= ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \frac{(f(v))^4 - c^2 \cdot (f(v))^2}{c^2} &= ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{(f(v))^2 \cdot ((f(v))^2 - c^2)}{c^2 \cdot ((f'(v))^2 + (g'(v))^2)}} &= \frac{dv}{du} \\ \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{((f'(v))^2 + (g'(v))^2)}{((f(v))^2 - c^2)}} &= \frac{du}{dv}. \end{aligned}$$

Concluimos, por integração, que

$$\begin{aligned} du &= \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{((f'(v))^2 + (g'(v))^2)}{((f(v))^2 - c^2)}} dv \\ \int du &= \int \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{((f'(v))^2 + (g'(v))^2)}{((f(v))^2 - c^2)}} dv \\ u &= \int \frac{c}{f(v)} \sqrt{\frac{((f'(v))^2 + (g'(v))^2)}{((f(v))^2 - c^2)}} dv + \text{constante}, \end{aligned}$$

que é a equação de um segmento de uma geodésica da superfície de revolução que não é um paralelo nem um meridiano.

**Exemplo 5.5.7.** Considere a superfície de revolução  $X(u, v) = (a \cos(u), a \sin(u), v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve um cilindro reto de raio  $a$ . Ou seja  $f(v) = a$  e  $g(v) = v$ . Então,  $f'(v) = 0$  e  $g'(v) = 1$ , logo todos os meridianos ( $u = u(t)$  e  $v = v_0$ ) e todos os paralelos ( $v = v(t)$  e  $u = u_0$ ) satisfazem o sistema de equações (5.5.1). Vamos determinar as demais geodésicas.

Pelo exemplo 5.5.6, temos

$$u = \int \frac{c}{a} \sqrt{\frac{1}{(a^2 - c^2)}} dv + \lambda = \frac{c}{a\sqrt{a^2 - c^2}} \int dv + \lambda = \frac{cv}{a\sqrt{a^2 - c^2}} + \lambda.$$

Onde  $\lambda$  é uma constante de integração, e as curvas geodésicas são hélices.

## 5.6 Curvatura Geodésica

Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular,  $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$  seu vetor tangente unitário,  $N(t)$  o vetor unitário normal a superfície em  $\alpha(t)$ .

Temos que  $\{T, N, N \times T\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  em  $\alpha(t)$  e  $\{T, N, N \times T\}$  é uma base orientada positivamente em  $T_{\alpha(t)}S$ .

Verificaremos que  $\frac{DT}{dt}$  está na direção de  $N \times T$ ,

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= 1, \\ \frac{d}{dt}\|T\|^2 &= 2\left\langle \frac{DT}{dt}, T \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Porém,  $\frac{dT}{dt} = aN + b(N \times T)$ , logo  $\frac{DT}{dt} = b(N \times T)$ .

Seja o vetor  $\vec{n} = a_1N + b_1(N \times T)$ .

Se  $s$  é o parâmetro do comprimento de arco

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \|\alpha'\| K \vec{n} = \|\alpha'\| K (a_1N + b_1(N \times T)),$$

entretanto vimos que,  $\frac{DT}{dt} = b(N \times T)$ , e seja  $\lambda = b_1K$  portanto  $\frac{DT}{dt} = \|\alpha'\| \lambda (N \times T)$ .

**Definição 5.6.1.** Denominaremos curvatura geodésica da curva  $\alpha(t)$  a função  $k_g(t)$ , tal que

$$\frac{DT}{dt} = \|\alpha'(t)\| \cdot k_g(t) \cdot (N(t) \times T(t)).$$

Dessa expressão obtemos

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \cdot \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \times N(t) \rangle.$$

O número real  $K_g(t)$ , denotado por  $\left[ \frac{DT}{dt} \right]$ , é chamado valor algébrico da derivada covariante de  $T$  em  $t$ .

**Definição 5.6.2.** Seja  $w(t)$  um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre uma superfície orientada  $S$ , onde  $\|w(t)\| = 1$ . Como  $w(t)$ ,  $t \in I$ , é um campo de vetores unitário,  $\left( \frac{Dw}{dt} \right) (t)$  é normal a  $w(t)$  e portanto

$$\frac{Dw}{dt} = k_g(N(t) \times w(t)).$$

**Proposição 5.6.3.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow S$  é uma geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica  $k_g = 0, \forall t \in I$ .

**Prova.** Se  $\alpha$  é uma geodésica, então

$$\frac{D\alpha'}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{DT}{dt} = 0 \Rightarrow \|\alpha'\| \cdot k_g(t) \cdot (N(t) \times T(t)) = 0 \Rightarrow \|\alpha'\| \cdot k_g(t) = 0.$$

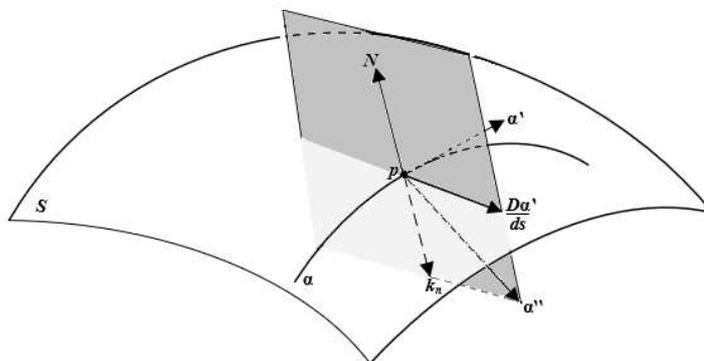
Como  $\alpha$  é regular  $\|\alpha'\| \neq 0$ , logo  $k_g(t) = 0$ .

Reciprocamente, escolhendo um parâmetro, tal que  $\alpha$  está parametrizada por comprimento de arco, então  $\|\alpha'\| = 1$ , logo  $T = \alpha'$ . Se  $k_g = 0$ , temos

$$k_g = 0 \Rightarrow \frac{D\alpha'}{dt} = \frac{DT}{dt} = \|\alpha'\| \cdot 0 \cdot (N \times T) = 0. \quad \blacksquare$$

**Observação 5.6.4.** Como mostra a figura 27, o valor absoluto da curvatura geodésica  $k_g$  da curva  $\alpha(s)$  em  $p$  é o valor absoluto da componente tangencial do vetor  $\alpha''(s) = kn$ , em que  $k$  é a curvatura de  $\alpha(s)$  em  $p$  e  $n$  é o vetor normal da  $\alpha(s)$  em  $p$ . Além disso, vimos na observação 4.7.5 que o valor absoluto da componente normal do vetor  $kn$  é o valor absoluto da curvatura normal  $k_n$  de  $\alpha(s)$  em  $p$ .

Figura 27: Valor absoluto de  $k_g$ .



Fonte: Autor (2024)

Desse modo, obtemos a relação  $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ . Decorre então, já que vimos na proposição 4.7.4 que  $k_n = k \cos(\theta)$ , em que  $\theta$  é o ângulo formado entre  $N$  e  $n$ , que

$$\begin{aligned} k^2 &= k_g^2 + k_n^2 = k_g^2 + (k^2 \cos^2(\theta)) \\ k_g^2 &= k^2(1 - \cos^2(\theta)) = k^2 \sin^2(\theta) \\ k_g &= \pm k \sin(\theta). \end{aligned}$$

**Lema 5.6.5.** Sejam  $v$  e  $w$  dois campos diferenciais de vetores unitários ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$ . Então

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi$  é uma função diferenciável que mede o ângulo de  $v$  a  $w$ .

**Prova.** Vamos mostrar para o caso  $\varphi \neq 0$ .

Como  $v$  e  $w$  são campos de vetores diferenciáveis e unitários, então

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \langle v, w \rangle,$$

e derivando em relação a  $t$  ficamos com  $\langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle = -\varphi' \operatorname{sen}\varphi$ .

Como  $v$  e  $w$  são tangentes à superfície, então podemos reescrever a expressão acima como

$$\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle = -\varphi' \operatorname{sen}\varphi.$$

Usando a definição 5.6.2, segue que

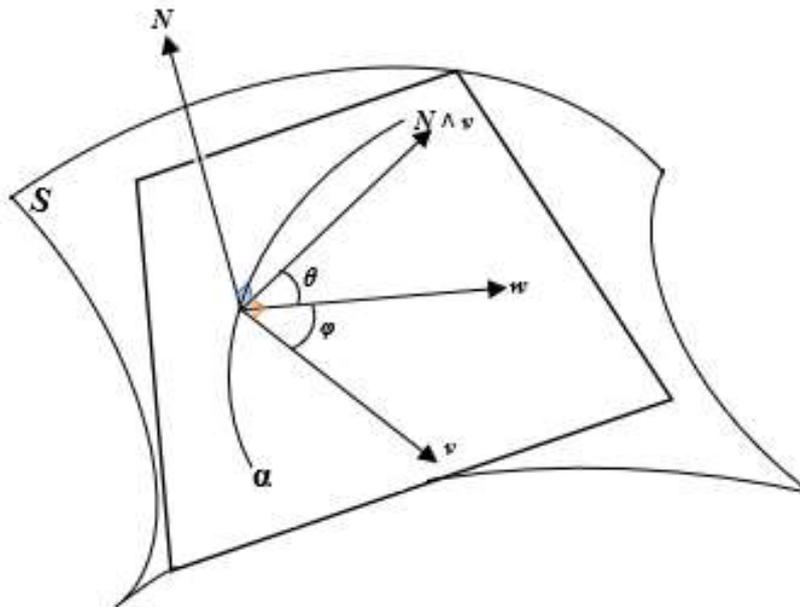
$$\begin{aligned} \left[ \frac{Dv}{dt} \right] \langle N \times v, w \rangle + \left[ \frac{Dw}{dt} \right] \langle v, N \times w \rangle &= -\varphi' \operatorname{sen}\varphi \\ \left( \left[ \frac{Dv}{dt} \right] - \left[ \frac{Dw}{dt} \right] \right) \langle N \times v, w \rangle &= -\varphi' \operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Considere  $\theta$  o ângulo entre  $N \times v$  e  $w$ . Então

$$\cos\theta = \frac{\langle N \times v, w \rangle}{\|N \times v\| \cdot \|w\|}.$$

Sabemos que  $v$ ,  $w$  e  $N$  são vetores unitários e  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  (figura 28).

Figura 28: Ângulos entre os vetores  $u$ ,  $v$  e  $N \times v$ .



Fonte: Autor (2024)

Desse modo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle N \times v, w \rangle &= \cos\theta \\
&= \cos\left(\frac{\phi}{2} - \varphi\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\varphi \\
&= \operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right]\right) \operatorname{sen}\varphi &= -\varphi' \operatorname{sen}\varphi \\
\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right] &= -\varphi' \\
\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right] &= \frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$

Para  $\varphi = 0$ , temos que  $v = w$  e o lema vale trivialmente. ■

**Proposição 5.6.6.** *Sejam  $X(u, v)$  uma parametrização ortogonal ( $F = 0$ ) de uma vizinhança de uma superfície orientada  $S$ , e  $w(t)$  um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva  $X(u(t), v(t))$ . Então*

$$k_g(t) = \left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi(t)$  é o ângulo de  $X_u$  a  $w(t)$  na orientação dada.

**Prova.** Como  $X$  é uma parametrização ortogonal então  $e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$  e  $e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$  são vetores unitários tangentes às curvas coordenadas. Veja que  $e_1 \times e_2 = N$ , em que  $N$  é a orientação de  $S$ .

Utilizando o lema 5.6, temos

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$  é o campo  $e_1$  restrito à curva  $X(u(t), v(t))$ . Pela definição 5.6.2 e o fato de que  $X(u, v)$  é uma parametrização ortogonal, segue que

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}. \quad (5.6.1)$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{X_{uu}\sqrt{E} - X_u(\sqrt{E})_u}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{X_{uu}\sqrt{E} - \frac{X_u E_u}{2\sqrt{E}}}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{2X_{uu}E - X_u E_u}{2\sqrt{E}E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{2X_{uu}E - X_u E_u}{2E\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\sqrt{EG}} - \frac{E_u \langle X_u, X_v \rangle}{2E\sqrt{EG}} \\
&= \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\sqrt{EG}}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\sqrt{EG}}.$$

Como  $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$  e vimos na demonstração da proposição 5.2.2 que  $\langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2} = \frac{E_v}{2}$ ,  $\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{G_u}{2}$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \\
\langle (e_1)_v, e_2 \rangle &= \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (5.6.1), temos

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{De_1}{dt} \right] &= \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt} \\
&= \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{dt} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{dt}, \\
&= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k_g &= \left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt} \\ k_g &= \left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemplo 5.6.7.** Considere a aplicação  $X(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v))$ , com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(v) > 0$ , que representa uma superfície de revolução. Suponhamos que a curva  $\alpha(t)$  geradora da superfície de revolução esteja parametrizada por comprimento de arco, de modo que  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$ , então vale  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , ou seja  $(f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u', & \frac{dv}{dt} &= v', & E(u, v) &= (f(v))^2, & F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (f'(v))^2 + (g'(v))^2 = 1, & G_u &= 0, & E_v &= 2f(v)f'(v). \end{aligned}$$

Segue da proposição 5.6.6 que

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt} \\ k_g &= \frac{-2u'f(v)f'(v)}{2\sqrt{(f(v))^2}} + \frac{d\varphi}{dt} \\ k_g &= -u'f'(v) + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Onde  $\varphi \in [0, 2\pi)$  é o ângulo de  $X_u$  a  $\alpha'(t)$ . Então

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\langle X_u, \alpha' \rangle}{\|X_u\| \|\alpha'\|} \\ &= \frac{\langle X_u, u'X_u + v'X_v \rangle}{\|X_u\|} \\ &= \frac{u'\langle X_u, X_u \rangle + v'\langle X_u, X_v \rangle}{f(v)} \\ &= \frac{u'E + v'F}{f(v)} \\ &= \frac{u'(f(v))^2}{f(v)} \\ \cos\varphi &= u'f(v). \end{aligned}$$

Se  $u = u_0$  e  $v = v(t)$ , temos  $u' = 0$ , então  $\cos\varphi = u'f(v) = 0$ , logo  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ , em

ambos os casos  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} k_g &= -u'f'(v) + \frac{d\varphi}{dt} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora que  $v = v_0$  e  $u = u(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (f(v_0)\cos(u(t)), f(v_0)\sen(u(t)), g(v_0)) \\ \alpha'(t) &= (-u'f(v_0)\sen(u(t)), u'f(v_0)\cos(u(t)), 0), \\ \|\alpha'(t)\|^2 &= (-u'f(v_0)\sen(u))^2 + (u'f(v_0)\cos(u))^2 + 0^2 = 1 \\ &= (u')^2(f(v_0))^2\sen^2(u) + (u')^2(f(v_0))^2\cos^2(u) = (u')^2(f(v_0))^2 = 1, \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(u')^2(f(v_0))^2} = u'f(v_0) = 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $\cos\varphi = u'f(v_0) = 1$ , logo  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ , em ambos os casos  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ , temos ainda que  $u' = \frac{1}{f(v_0)}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} k_g &= -u'f'(v_0) + \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{1}{f(v_0)} \cdot f'(v_0) + 0 \\ &= -\frac{f'(v_0)}{f(v_0)}. \end{aligned}$$

## 5.7 Versão Local do Teorema de Gauss-Bonnet

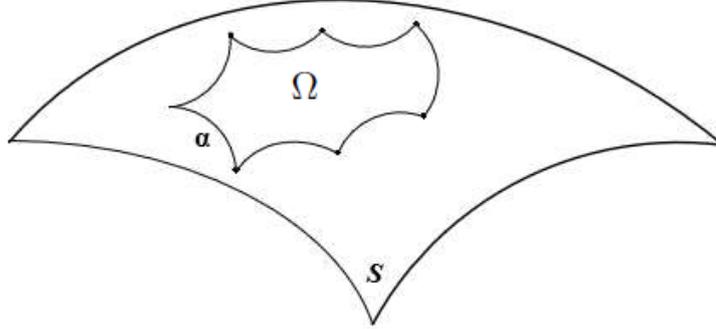
Agora trataremos de um dos teoremas mais importantes da geometria da superfície o qual relaciona aspectos geométricos (a curvatura Gaussiana, curvatura geodésica) e topológicos como a característica de Euler; e que além destes dois aspectos será de grande valia para este trabalho no que concerne a caracterização de triângulos nas geometrias euclidiana, esférica e hiperbólica. Veremos também a importância das geodésicas e suas curvaturas na simplificação de tais resultados e obtenção do teorema de Gauss-Bonnet. Iniciaremos com a sua versão local e concluiremos este capítulo com a versão global.

Seja  $\Omega \subseteq S$  uma região limitada por uma curva  $\alpha : [0, L] \rightarrow S$ , simples, fechada e regular por partes, isto é, que satisfaça as seguintes condições:

- (i)  $\alpha(0) = \alpha(L)$ , que significa que  $\alpha$  é uma curva fechada;
- (ii)  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1, t_2 \in [0, L]$ , então  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ , ou seja, a curva  $\alpha$  não possui autointersecções;

- (iii) Existe uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = L$  de  $[0, L]$ , tal que  $\alpha$  é diferenciável e regular em cada  $[t_i, t_{i+1}]$ , com  $i = 0, \dots, k$ . Ou seja,  $\alpha$  deixa de ter uma reta tangente em um número finito de pontos.

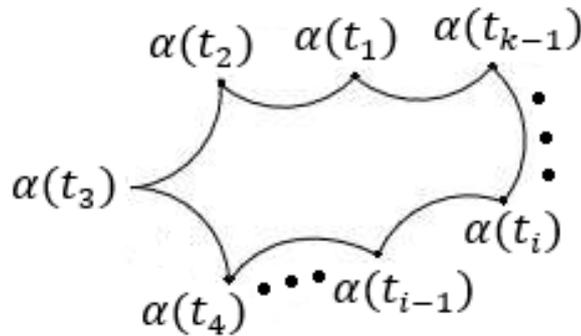
Figura 29: Região  $\Omega$  limitada pela curva  $\alpha$  regular por partes.



Fonte: Autor (2024)

Os pontos  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , são chamados vértices de  $\alpha$  e os traços  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  são chamados arcos regulares de  $\alpha$ , ou arestas de  $\alpha'$ .

Figura 30: Vértices e arcos regulares de  $\alpha$ .



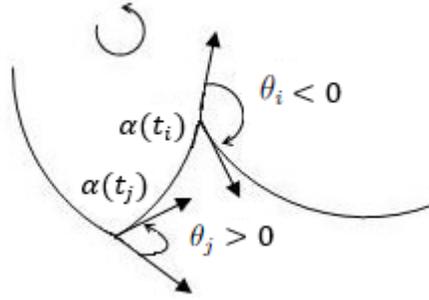
Fonte: Autor (2024)

A condição de regularidade nos garante que em cada vértice  $\alpha(t_i)$  existe o limite à esquerda  $\alpha(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t)$  e o limite à direita,  $\alpha(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t)$ .

**Definição 5.7.1.** O ângulo externo  $\theta_i$  no vértice  $\alpha(t_i)$  é o ângulo orientado de  $\alpha'(t_i^-)$  para  $\alpha'(t_i^+)$ .

Se o vértice não é uma cúspide, o sinal de  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  é dado pela orientação da superfície  $S$ .

Figura 31: Sinal do ângulo externo quando o vértice não é uma cúspide.

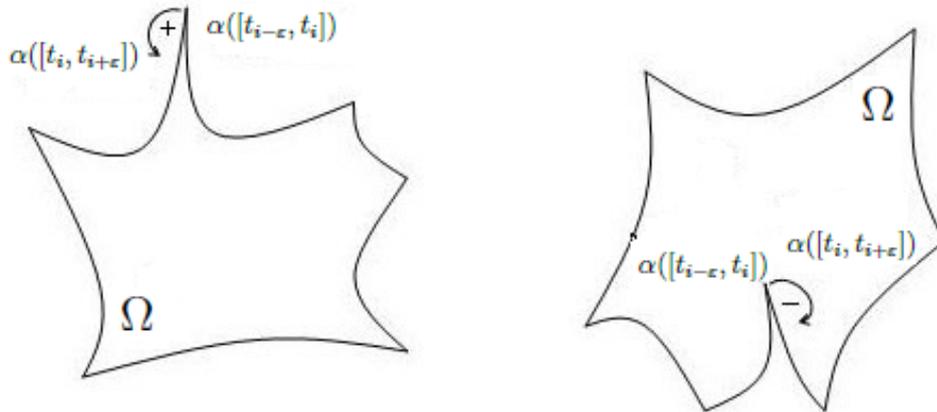


Fonte: Autor (2024)

Se  $\alpha(t_i)$  é uma cúspide, ou seja,  $\|\theta_i\| = \pi$ , que significa que  $\alpha'(t_i^-) = -\alpha'(t_i^+)$ , o sinal é dado da seguinte forma:

- $\theta_i$  é positivo se para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o traço de  $\alpha([t_i, t_{i+\varepsilon}])$  ficar do mesmo lado que  $\Omega$  em relação à curva  $\alpha([t_{i+\varepsilon}, t_i])$ ;
- $\theta_i$  é negativo se para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o traço de  $\alpha([t_i, t_{i+\varepsilon}])$  e  $\Omega$  tiverem lados opostos em relação à curva  $\alpha([t_{i-\varepsilon}, t_i])$ .

Figura 32: Sinal do ângulo externo quando o vértice é uma cúspide.



Fonte: Autor (2024)

Seja as funções contínuas  $\varphi_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_i(t) = \arccos \left( \left\langle \alpha'(t), \frac{X_u}{\sqrt{E}}(\alpha(t)) \right\rangle \right)$ , ou seja, são funções que medem em cada  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  o ângulo positivo de  $X_u$  a  $\alpha'$ .

Seja  $X : U \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  uma parametrização compatível com a orientação de  $S$ . Além disso, suponha que  $U$  é homeomorfo a um disco aberto no plano.

Seja  $\alpha : [0, L] \rightarrow X(U) \subset S$  uma curva parametrizada simples, fechada e suave por partes, com vértices  $\alpha(t_i)$  e ângulos externos  $\theta_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

Anunciaremos a seguir, usando as notações acima citadas, o teorema conhecido como Teorema do Índice de rotação, em ARAÚJO (1998, p.163) pode ser encontrada uma demonstração para esse teorema.

**Teorema 5.7.2** (Índice de Rotação). *Sejam  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , os ângulos externos de  $\Omega$ , e  $\varphi(t)$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  uma determinação contínua do ângulo de  $\frac{X_u}{\sqrt{E}}$  a  $\alpha'(t)$ . Então*

$$\sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

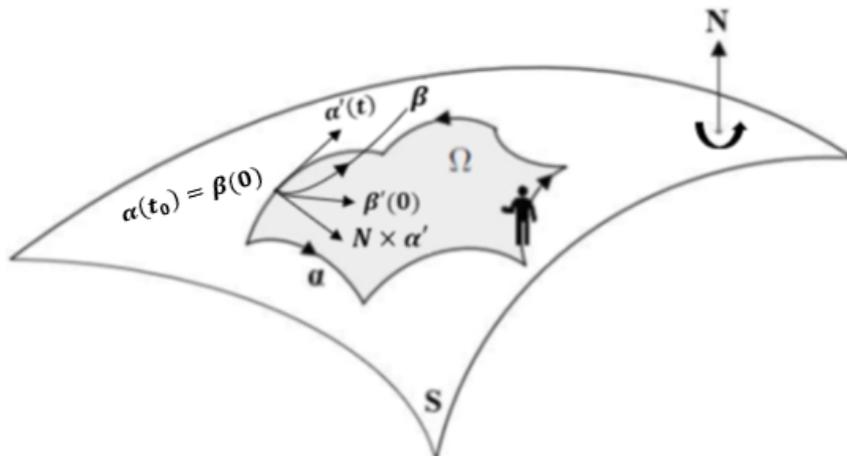
onde o sinal depende da orientação de  $\alpha$ .

Para enunciar o Teorema de Gauss-Bonnet faremos uso das seguintes terminologias.

Seja  $S$  uma superfície orientada e  $\Omega \subset S$  um subconjunto aberto conexo <sup>3</sup> com sua fronteira. Dizemos que uma região  $\Omega \subset S$  é uma região simples, se  $\Omega$  é homeomorfa a um disco e a fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes  $\alpha : I \rightarrow S$ .

A curva  $\alpha = \partial\Omega$  será orientada positivamente se para cada  $\alpha(t)$ , pertencente a um arco regular, a base ortonormal positiva  $\{\alpha', N \times \alpha'\}$  é tal que  $N \times \alpha'$  “aponta” para dentro da região  $\Omega$ , portanto,  $\forall \beta : [a, b] \rightarrow \Omega$ , com  $\beta(a) = \alpha(t_0)$  e  $\beta'(a) \neq \alpha'(t)$ , então  $\langle \beta'(a), N \times \alpha' \rangle > 0$ . Intuitivamente, isso significa que ao andarmos pela curva  $\alpha$  na direção positiva com a cabeça apontada para  $N$ , a região  $\Omega$  está a nossa esquerda.

Figura 33: Curva  $\alpha$  orientada positivamente.



Fonte: Autor (2024)

Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  compatível com sua orientação e  $\Omega \subset X(U)$  uma região limitada de  $S$ . Se  $f$  é uma função diferenciável em  $S$ , então se

<sup>3</sup>Um conjunto é conexo se admite apenas a cisão trivial, isto é, o conjunto é composto de uma única parte.

vê que a integral

$$\iint_{X^{-1}(\Omega)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

não depende da parametrização  $X$ , escolhida na classe de orientação de  $X$ , observe:

Seja  $\tilde{X}(u, v) = X \circ h(\tilde{u}, \tilde{v})$  uma reparametrização de  $X$  por  $h$ ,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $h : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  é uma mudança de coordenadas. Seja  $\tilde{X}^{-1}(\Omega) \subset \tilde{U}$  e  $X^{-1}(\Omega) \subset U$ , sendo  $X^{-1}(\Omega) = h(\tilde{X}^{-1}(\Omega))$ . Segue da definição 4.5.1 que  $\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ . Então,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{X}^{-1}(\Omega)} f(\tilde{u}, \tilde{v}) \sqrt{EG - F^2} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{X}^{-1}(\Omega)} f(\tilde{u}, \tilde{v}) \|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_{\tilde{x}^{-1}(\Omega)} f(u, v) \|X_u \times X_v\| |\det \text{Jac}(h)| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}, \end{aligned}$$

usando o teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas teremos a seguinte igualdade

$$\iint_{X^{-1}(\Omega)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

logo, a integral não depende da parametrização de  $X$ .

Denotaremos a integral de  $f$  sobre a região  $\Omega$  por  $\iint_{\Omega} f \, d\sigma$ .

Para demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet usaremos o teorema de Gauss-Green no plano  $uv$ .

**Teorema 5.7.3** (Teorema de Gauss-Green no Plano  $uv$ ). *Se  $P(u, v)$  e  $Q(u, v)$  são funções diferenciáveis em uma região simples  $A \subset \mathbb{R}^2$ , cuja fronteira é dada por  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ , então:*

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( P \frac{du}{dt} + Q \frac{dv}{dt} \right) dt = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du \, dv.$$

Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em STEWART (2013, p.971).

**Teorema 5.7.4** (Teorema de Gauss-Bonnet (Local)). *Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização ortogonal ( $F = 0$ ), de uma superfície orientada  $S$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  é homeomorfo a um disco aberto e  $X$  é compatível com a orientação de  $S$ . Seja  $\Omega \subset X(U)$  uma região simples de  $S$  e seja  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\partial\Omega = \alpha(I)$ . Suponha que  $\alpha$  é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco  $t$ , e sejam  $\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k)$  e  $\theta_0, \dots, \theta_k$ , respectivamente, os vértices e os ângulos externos de  $\alpha$ . Então*

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \, dt + \iint_{\Omega} K \, d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

onde  $k_g(t)$  é a curvatura geodésica dos arcos regulares de  $\alpha$  e  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $S$ .

**Prova.** Seja  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  uma parametrização de  $X(u, v)$ , pela proposição 5.6.6 temos

$$k_g(t) = \left[ \frac{D\alpha'}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi_i = \varphi(t)$  é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de  $X_u$  a  $\alpha'(t)$  em  $[t_i, t_{i+1}]$ . Integrando a expressão acima em todos os intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  e somando os resultados,

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) dt = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{dt} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{dt} \right) dt + \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dt} dt.$$

Usando o teorema 5.7.3, podemos reescrever essa expressão da seguinte forma

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) dt = \iint_{X^{-1}(\Omega)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv + \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dt} dt. \quad (5.7.1)$$

Segue da proposição 5.3.2 que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] \\ -2K\sqrt{EG} &= \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \iint_{X^{-1}(\Omega)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv &= \iint_{X^{-1}(\Omega)} \frac{1}{2} (-2K\sqrt{EG}) du dv \\ &= -\iint_{X^{-1}(\Omega)} (K\sqrt{EG}) du dv \\ &= -\iint_{\Omega} K d\sigma. \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

Usando o teorema 5.7.2, e o fato da curva ser orientada positivamente, vamos reescrever a última integral da equação (5.7.1) da seguinte forma

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dt} dt = \sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i. \quad (5.7.3)$$

Substituindo (5.7.2) e (5.7.3) em (5.7.1), obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) dt = - \iint_{\Omega} K d\sigma + 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \quad \blacksquare$$

## 5.8 Versão Global do Teorema de Gauss-Bonnet

Vamos considerar uma superfície  $S$  regular. Dizemos que uma região conexa  $\Omega \subseteq S$  é regular se  $\Omega$  é compacta e sua fronteira  $\partial\Omega$  é uma região finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam.

Por conveniência, vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

**Definição 5.8.1.** Uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  é um triângulo.

**Definição 5.8.2.** Uma triangulação de uma região regular  $\Omega \subseteq S$  é uma família finita  $\mathcal{T}$  de triângulos  $T_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tais que:

- (i)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i$ ;
- (ii) Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a curva  $\partial T_i$  tem três vértices. Aos arcos de curvas compreendidos entre dois vértices consecutivos denominamos arestas e as regiões  $T_i$  são denominados faces da triangulação;
- (iii) Se  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então  $T_i \cap T_j$  pode ser uma das três coisas: ou  $T_i \cap T_j = \emptyset$ , ou tem um vértice em comum ou uma aresta em comum.

Dada uma triangulação  $\mathcal{T}$  de uma região  $\Omega \subseteq S$  de uma superfície  $S$ , denotaremos por  $F$  o número de triângulos, por  $A$  o número de arestas, e por  $V$  o número de vértices da triangulação.

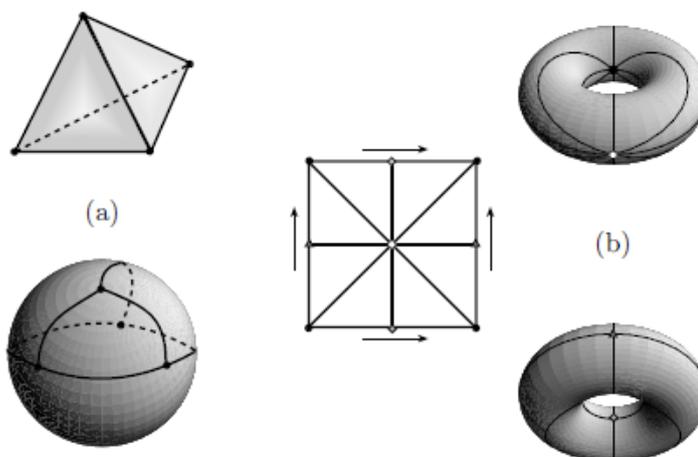
**Definição 5.8.3.** O número  $\chi(S) = F - A + V$  é chamado característica de Euler-Poincaré da triangulação.

As proposições a seguir serão apresentadas sem demonstração. Uma exposição desses fatos pode ser encontrada em (ABATE; TOVENA, 2012).

**Observação 5.8.4.**  $\chi(S)$  não depende da triangulação escolhida e toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação (ABATE; TOVENA, 2012, Seção 6.5, p.338).

Um cálculo direto mostra que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2, a do toro (esfera com uma alça) é zero, em geral a de um  $n$ -toro (esfera com  $n$  alças) é  $-2(n - 1)$ . Modelando a esfera com um tetraedro (que é homeomorfo a uma esfera), obtemos facilmente uma triangulação de uma esfera  $S$  com 4 faces, 6 lados e 4 vértices, então  $\chi(S) = 2$  (ver figura 34.(a)). Usando como modelo um quadrado com lados opostos identificados, obtemos uma triangulação de um toro com 8 faces, 12 lados e 4 vértices, e assim a característica de Euler-Poincaré do toro é zero (ver figura 34.(b)).

Figura 34: Característica de Euler-Poincaré da esfera e toro.



Fonte:(ABATE; TOVENA, 2012, p.314)

**Proposição 5.8.5.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  uma superfície regular compacta e conexa. Então*

$$\chi(S) = 2 - 2g,$$

com  $g \in \mathbb{N}$ . Além disso, se  $\tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular compacta e conexa com  $\chi(S) = \chi(\tilde{S})$  então  $\tilde{S}$  é homeomorfa a  $S$ .

**Prova.** A demonstração pode ser vista em (ABATE; TOVENA, 2012, Proposição 6.2.12, p.313, Proposição 6.2.14, p.314). ■

**Observação 5.8.6.** Em outras palavras toda superfície compacta e conexa  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  é homeomorfa a uma esfera com um número  $g$  de alças. O número  $g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$  é chamado o gênero de  $S$  e a característica de Euler-Poincaré  $\chi(S) \leq 2$ .

**Teorema 5.8.7** (Teorema de Gauss-Bonnet (Global)). *Seja  $\Omega \subseteq S$  uma região regular de uma superfície regular orientada  $S$  com fronteira  $\partial\Omega$  orientada positivamente. Consideremos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  as componentes conexas da fronteira de  $\Omega$  parametrizadas, para  $j = 1, \dots, k$ , por curvas  $\alpha_j : [a_j, b_j] \rightarrow S$  com curvaturas geodésicas  $k_j^j$ . Denotemos por*

$\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$  o conjunto dos ângulos externos das curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Então

$$\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{h=1}^p \theta_h = 2\pi\chi(\Omega),$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $S$ ,  $d\sigma$  é o elemento de área de  $\Omega$  e  $dt$  é o elemento de comprimento de  $\alpha_j$ .

**Prova.** Consideremos uma triangulação  $\mathcal{T}$  da região  $\Omega$ , tal que, cada triângulo  $T_j \in \mathcal{T}$  está contido em uma vizinhança coordenada de uma família de parametrizações ortogonais, compatíveis com a orientação de  $S$ . Além disso, como a fronteira de todo triângulo de  $\mathcal{T}$  está orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes. Aplicando-se o teorema 5.7.4 a cada triângulo de  $\mathcal{T}$  e somando os resultados, obtemos:

$$\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} = 2\pi F, \quad (5.8.1)$$

onde  $\theta_{i1}$ ,  $\theta_{i2}$  e  $\theta_{i3}$  são os ângulos externos do triângulo  $T_i$  e  $F$  é o número de triângulos de  $\mathcal{T}$ .

Se denotarmos os ângulos internos de um triângulo  $T_i$  por  $\phi_{ij} = \pi - \theta_{ij}$ , para  $j = 1, 2, 3$ , temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} &= \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \pi - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} \\ &= 3\pi F - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}. \end{aligned}$$

Denotemos por  $A_e$  o número de arestas externas de  $\mathcal{T}$ ,  $A_i$  o número de arestas internas de  $\mathcal{T}$ ,  $V_e$  o número de vértices externos de  $\mathcal{T}$  e  $V_i$  o número de vértices internos de  $\mathcal{T}$ . Como  $C_i$  são fechadas, temos que  $A_e = V_e$ . Além disso,  $3F = 2A_i + A_e$ . Para provar este fato basta tomar uma indução no número de faces. Dessa forma temos que

$$\sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} = 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}.$$

Os vértices externos são vértices das curvas  $C_i$  ou vértices introduzidos pela triangulação. Temos que  $V_e = V_{ec} + V_{et}$ , onde  $V_{ec}$  denota o número de vértices externos de alguma curva  $C_i$  e  $V_{et}$  o número de vértices externos que vêm da triangulação que não são vértices de alguma curva  $C_i$ . Como a soma dos ângulos ao redor de cada vértice interno é  $2\pi$ ,

temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} &= 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} \\
&= 2\pi A_i + \pi A_e - \left( 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{h=1}^p (\pi - \theta_h) \right) \\
&= 2\pi A_i + \pi A_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{h=1}^p \theta_h \\
&= 2\pi(A_i + A_e) - \pi A_e - 2\pi V_i - \pi(V_{et} + V_{ec}) + \sum_{h=1}^p \theta_h \\
&= 2\pi(A_i + A_e) - \pi A_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{h=1}^p \theta_h \\
&= 2\pi(A_i + A_e) - \pi A_e - 2\pi(V_i + V_e) + \pi V_e + \sum_{h=1}^p \theta_h \\
&= 2\pi A - 2\pi V + \sum_{h=1}^p \theta_h. \tag{5.8.2}
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (5.8.2) na equação (5.8.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + 2\pi A - 2\pi V + \sum_{h=1}^p \theta_h &= 2\pi F \\
\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{h=1}^p \theta_h &= 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V \\
\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{h=1}^p \theta_h &= 2\pi(F - A + V) \\
\sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} k_g^j(t) dt + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{h=1}^p \theta_h &= 2\pi\chi(\Omega). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposição 5.8.8.** *Seja  $\Gamma$  um triângulo geodésico (triângulos cujos lados são arcos geodésicos distintos) em uma superfície orientada  $S$ . Sejam  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  os ângulos externos de  $\Gamma$  e  $\phi_i = \pi - \theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  os ângulos internos. Então a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico é*

- (i) Igual a  $\pi$  se  $K = 0$ .
- (ii) Maior que  $\pi$  se  $K > 0$ .
- (iii) Menor que  $\pi$  se  $K < 0$ .

**Prova.** Aplicando o teorema 5.7.4 (Teorema de Gauss-Bonnet local) no triângulo geodé-

sico  $\mathbb{T}$ , obtemos

$$\iint_{\mathbb{T}} K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

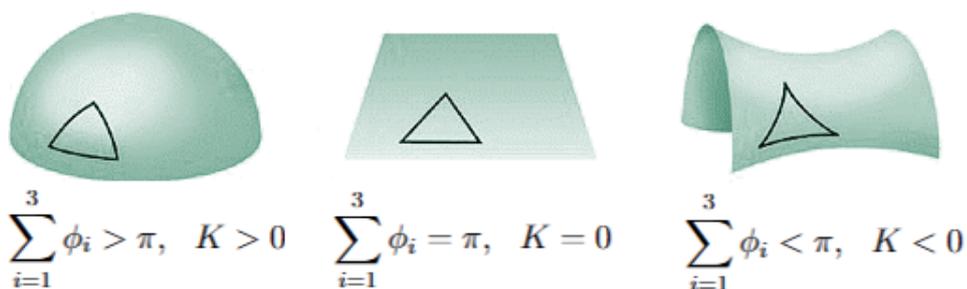
Como  $\theta_i = \pi - \phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  então

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}} K d\sigma &= 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \phi_i) \\ &= 2\pi - 3\pi + \sum_{i=1}^3 \phi_i \\ \sum_{i=1}^3 \phi_i &= \iint_{\mathbb{T}} K d\sigma + \pi. \end{aligned}$$

Como  $\iint_{\mathbb{T}} K d\sigma$  tem o mesmo sinal de  $K$  e é nula quando  $K = 0$ . Segue que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \phi_i = \pi, & \text{se } K = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \phi_i > \pi, & \text{se } K > 0, \\ \sum_{i=1}^3 \phi_i < \pi, & \text{se } K < 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Figura 35: Soma dos ângulos internos do triângulo.



Fonte: Autor (2024)

## Capítulo 6

# Atividade Aplicada no Ensino Médio

Neste capítulo, compartilharemos a experiência de ter aplicado uma proposta de estudo dedicada à exploração de resultados de geometrias não euclidianas no Ensino Médio, visando estimular uma compreensão intuitiva das geometrias esférica e hiperbólica entre os estudantes. Para alcançar esse objetivo, desenvolvemos atividades que abordam tópicos de geometria não euclidiana e trabalhamos em modelos de superfícies não planas. A introdução dos conceitos de ponto, reta e plano serviram como ponto de partida para a exploração dessas novas geometrias, enquanto materiais manipuláveis foram empregados para facilitar a compreensão de superfícies com curvaturas não nulas. Além disso, aproveitamos o ambiente dinâmico oferecido pelo software GeoGebra para realizar construções simultâneas nos espaços euclidiano, hiperbólico e esférico, enriquecendo ainda mais a experiência de aprendizado dos estudantes.

A proposta foi aplicada em uma turma da segunda série da Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio, curso Técnico em Informática, de uma Escola Pública da Rede Estadual de Educação da Bahia, no município de Serrinha. Para realização do trabalho utilizamos a sala de aula e o laboratório de informática da Escola. Os estudantes dessa turma já conheciam o GeoGebra de outras atividades, por isso não houve necessidade de realizar um momento para que eles aprendessem a manipular as ferramentas do software.

### 6.1 Introdução do conceito de Geodésica

Antes de levar os alunos ao laboratório de informática para manipular algum modelo de geometrias não euclidianas em um software, ou apresentar vídeos sobre o tema, começamos nossa proposta com questionamentos que ajudassem os alunos a se desapegar das ideias tradicionais da geometria plana e abrir seus horizontes para novas possibilidades. Isso também permitiu a introdução do conceito de geodésicas. Fizemos algumas perguntas iniciais, dando tempo para que os alunos respondessem com base em seus conhecimentos prévios. Em seguida, eles realizaram pesquisas na internet, ao final, formalizamos as respostas com base nas ideias apresentadas por eles. Como recursos

didáticos, utilizamos folhas de papel A4, régua, lápis e caneta. Iniciamos a atividade com as seguintes abordagens:

Explique com suas próprias palavras, forneça uma definição, características ou uma ideia intuitiva sobre o conceito de "ponto". Em seguida, pedimos que realizassem o mesmo exercício para os conceitos de "reta" e "plano".

Inicialmente, os alunos tiveram dificuldade em definir o conceito de "ponto". Passaram-se alguns minutos sem que surgissem respostas satisfatórias, até que um dos alunos comentou: "Nunca pensei que fosse tão difícil falar sobre algo tão pequeno". Aproveitamos essa fala para questionar qual seria esse tamanho que faz o ponto ser considerado pequeno. A partir daí, as respostas começaram a aparecer. Entre elas, destacamos:

- O ponto não tem tamanho.
- É utilizado no plano cartesiano.
- São os vértices de um polígono.
- Mostra uma localização.

Pedimos aos alunos que pesquisassem sobre o conceito de ponto na internet. Com base nos resultados que encontraram e em suas respostas iniciais, formalizamos a definição da seguinte maneira: "O ponto é a unidade fundamental da geometria, caracterizado por não possuir dimensão".

Nesse ponto, os estudantes já participavam da atividade de maneira mais espontânea, tendo assimilado bem a proposta. Como resultado, as respostas sobre o conceito de "reta" surgiram de forma mais fluida. Dentre elas, destacamos as seguintes:

- É uma linha infinita.
- São os lados de um polígono.
- Não faz curva.
- É um conjunto infinito de pontos.
- Possui uma dimensão.

Após os estudantes compartilharem suas ideias sobre o conceito de "reta", pedimos que realizassem uma pesquisa na internet. Com base nos resultados encontrados e nas discussões, chegamos à seguinte conclusão: "A reta é um conjunto infinito de pontos alinhados em uma única direção e possui uma dimensão".

Dando continuidade, pedimos aos alunos que marcassem dois pontos distintos em uma folha de papel e fizemos a seguinte pergunta: "Quantas retas distintas vocês conseguem traçar passando por esses dois pontos?". Como esperado, a resposta foi: "Uma

reta”. Em seguida, solicitamos que ligassem os dois pontos sem usar uma reta, orientando-os a traçar o caminho que desejassem. Perguntamos então: “De quantas maneiras podemos ligar esses dois pontos sem utilizar uma linha reta?”. De forma unânime, responderam: “De infinitas maneiras”. Por fim, questionamos: “Se precisássemos caminhar entre esses dois pontos, qual seria o menor caminho?”. Mais uma vez, sem hesitação, responderam: “Pela reta”. Então concluímos esse momento endossando a ideia de que a “reta” minimiza distâncias.

Após encerrarmos, momentaneamente, as discussões sobre a “reta”, continuamos a atividade focando no conceito de “plano”. Entre as contribuições dos estudantes, destacamos algumas das respostas apresentadas sobre o plano.

- Uma folha de papel.
- Um polígono.
- Não faz curva.
- Não é torto.
- É reto.

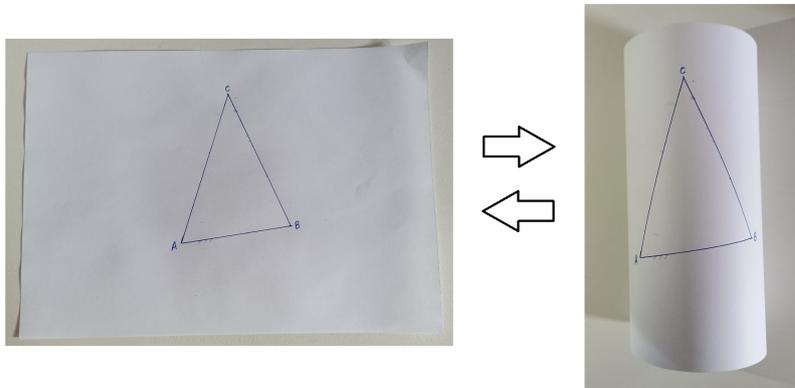
Seguindo a dinâmica da atividade, propomos o conceito de plano da seguinte forma: “O plano é um conjunto infinito de pontos, bidimensional, onde qualquer linha reta traçada entre dois pontos desse plano está totalmente contida nele”.

Em seguida, solicitamos que os estudantes desenhasssem um triângulo em uma folha de papel A4, e fizemos a seguinte pergunta: “o triângulo é uma figura geométrica plana?”. Uma das respostas se destacou por se basear nas ideias anteriormente construídas e levou o restante da turma a concluir que o triângulo é, de fato, uma figura plana. Vamos a resposta: “os lados do triângulo são segmentos de reta e estão totalmente apoiados no plano, então o triângulo é uma figura plana”.

Prontamente, pedimos aos estudantes que unissem as extremidades da folha de papel A4 onde haviam desenhado o triângulo, formando um cilindro. Após chamarmos a atenção que dessa forma o triângulo estava apoiado em uma superfície cilíndrica e não mais em uma superfície plana repetimos então a pergunta feita anteriormente: “O triângulo ainda é uma figura geométrica plana?”. As respostas se dividiram, com alguns estudantes dizendo sim e outros dizendo não. Solicitamos, então, que argumentassem suas respostas com base nas ideias discutidas anteriormente, para chegarmos a um consenso. Dentre os argumentos apresentados, destacamos a seguinte resposta: “O triângulo desenhado no cilindro não é plano porque seus lados não eram retos e faziam curvas”. Endossamos a resposta do estudante, aparentemente os estudantes que discordavam aceitaram a resposta, pois não apresentaram nenhum argumento contraditório. Concluímos então que o triângulo contido numa superfície cilíndrica não era uma figura geométrica

plana.

Figura 36: Unindo as extremidades da folha de papel A4.



Fonte: Autor (2024)

Além disso, destacamos para os estudantes que, ao dobrar a folha de papel formando um cilindro, as medidas dos lados do triângulo, assim como a área e os ângulos, permanecem inalteradas. Mencionamos também que, no plano, o menor caminho entre dois vértices do triângulo é uma reta; de forma similar, na superfície cilíndrica obtida ao unir as extremidades da folha, as curvas que representam os lados do “triângulo curvo” também minimizam as distâncias entre dois vértices do triângulo. Essas curvas são chamadas de geodésicas, e os triângulos desenhados em superfícies não planas são conhecidos como triângulos geodésicos.

Por fim, explicamos de maneira mais simples que uma geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície não plana. No caso de superfícies planas, as geodésicas correspondem às linhas retas, enquanto em superfícies esféricas, como a Terra, as geodésicas são os arcos dos grandes círculos. Esclarecemos também, que o plano tinha curvatura nula, e existiam superfícies não planas que apresentavam curvatura positiva ou negativa. E que poderíamos entender curvatura como uma medida geométrica que descreve como a superfície se dobra ou se curva em torno de um ponto.

As discussões continuaram, e os estudantes perguntaram qual seria a diferença entre curvatura positiva e negativa. Explicamos que a curvatura positiva ocorre quando a superfície se curva “para dentro” como uma esfera por exemplo, enquanto na curvatura negativa a superfície se curva “para fora” como uma pseudoesfera. No entanto, muitos alunos admitiram não conhecer a pseudoesfera, então pesquisaram na internet imagens da pseudoesfera. Informamos que, na sequência da atividade, exploraríamos o triângulo geodésico em ambos os tipos de superfícies e a partir disso construiríamos uma ideia intuitiva sobre superfícies com curvatura positiva ou negativa.

Além disso, durante o debate, um estudante destacou que havia assistido a um

vídeo que explicava por que as medidas do mapa-múndi diferem das do globo terrestre, mencionando que é impossível representar um globo em um plano sem que haja distorções de medidas. Ele então questionou por que, ao utilizar um cilindro, as medidas permaneciam as mesmas. Embora essa questão não fizesse parte da proposta inicial, aproveitamos a oportunidade para introduzir, de forma superficial, o conceito de isometria. Explicamos aos estudantes que o plano e o cilindro são localmente isométricos, o que significa que existe uma função entre eles que é um difeomorfismo, ou seja, esta aplicação preserva a estrutura geométrica entre os dois espaços. Por exemplo, por meio dessa função, é possível transportar um triângulo do plano para o cilindro e vice-versa, preservando as medidas da figura.

Nesse momento, o tempo da aula já havia encerrado, não houve tempo para mais questionamentos, como planejado deixamos como sugestão, no grupo de WhatsApp da turma, o link de um vídeo intitulado “Geometrias plana, esférica, hiperbólica e o 5º Postulado” (CAFÉ Profmat, 2024) que faz um breve relato sobre geometria plana, esférica, hiperbólica e o 5º Postulado. O objetivo com esse vídeo foi que antes do próximo encontro acontecer os estudantes tivessem ciência da existência de outras geometrias além da geometria plana.

## 6.2 Superfícies com Curvaturas Positiva e Negativa

O objetivo do segundo encontro foi construir com os estudantes uma ideia sobre superfícies com curvaturas não nulas, considerando os aspectos da transposição didática em matemática. Para isso, a turma foi encaminhada para o Laboratório de Informática da instituição, onde aproveitamos o ambiente dinâmico oferecido pelo software GeoGebra e propomos aos estudantes explorarem o triângulo geodésico na pseudoesfera, no Disco de Poincaré e na esfera.

Figura 37: Estudantes no Laboratório de Informática.

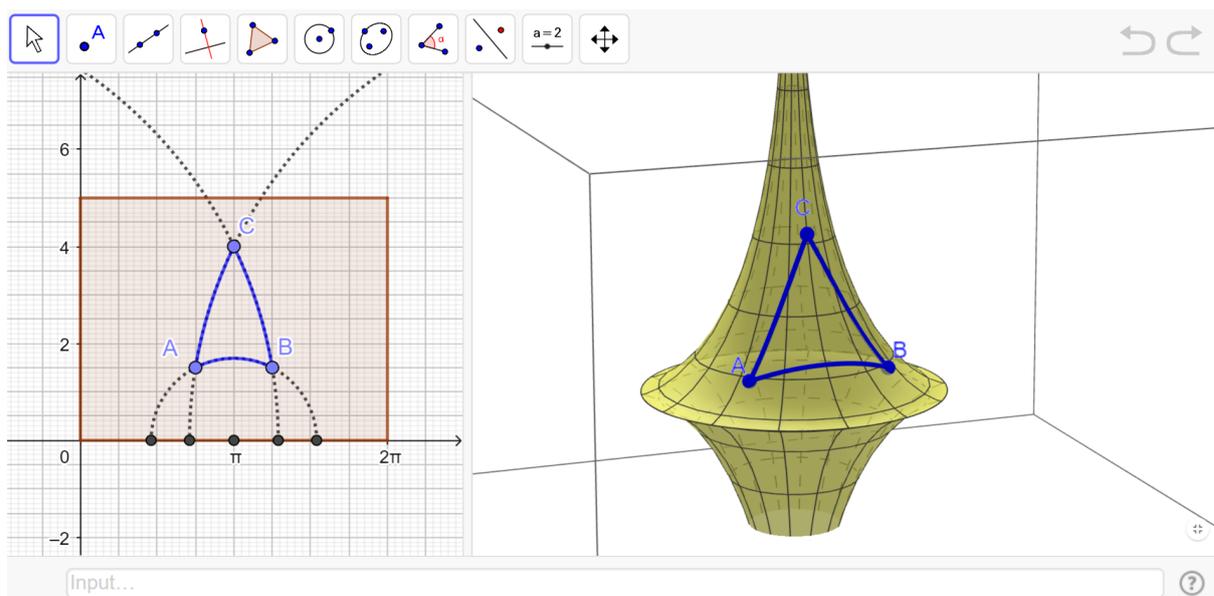


Fonte: Autor (2024)

### 6.2.1 Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera

Iniciamos a atividade no laboratório explorando o triângulo geodésico na pseudoesfera, para isso utilizamos um modelo de atividade do GeoGebra criado por Bortolossi (2020b) e intitulado como “Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera”. O objetivo inicial era possibilitar aos alunos observarem um triângulo em uma superfície não plana.

Figura 38: Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera.



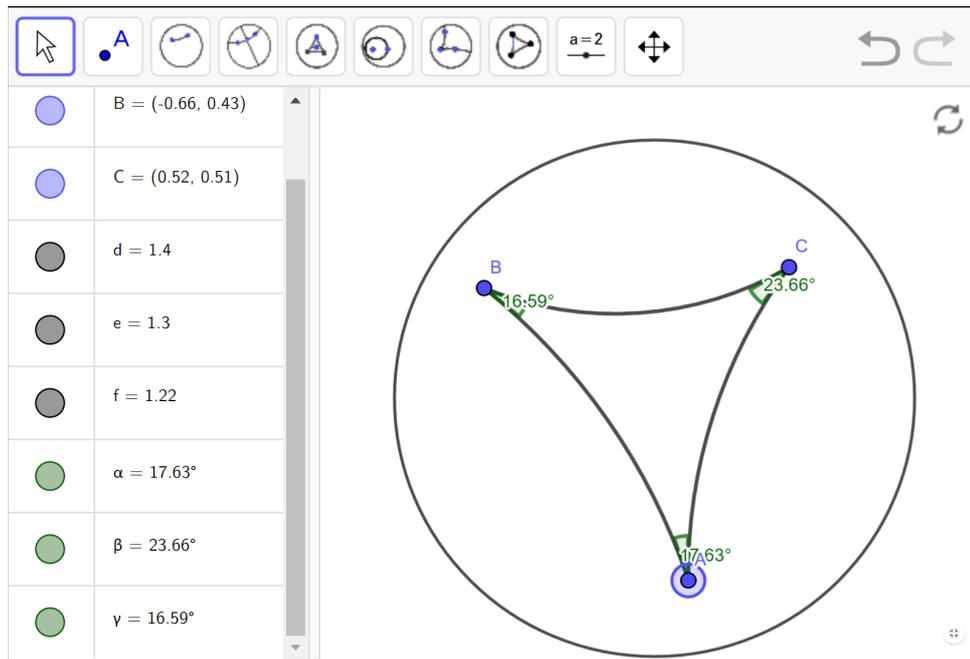
Fonte: Autor (2024)

A pseudoesfera foi apresentada aos estudantes como um modelo de Geometria Hiperbólica. Nessa atividade os alunos tiveram a oportunidade de manipular os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo geodésico, à medida que deslocavam os pontos, eles observavam o comportamento do triângulo sobre a pseudoesfera. Eles foram orientados a observar que os lados do triângulo estavam apoiados sobre arcos de circunferência. Contudo, não apresentaram nenhum questionamento, então seguimos a atividade com o próximo modelo de Geometria Hiperbólica.

### 6.2.2 Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico

Dando sequência a atividade, apresentamos aos alunos o Disco de Poincaré como um modelo para Geometria Hiperbólica. Os alunos tiveram a possibilidade de construir e explorar o triângulo geodésico no Disco de Poincaré. Para que isso fosse possível utilizamos um modelo de atividade do GeoGebra intitulado “Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico” de autoria de Pierce (2018).

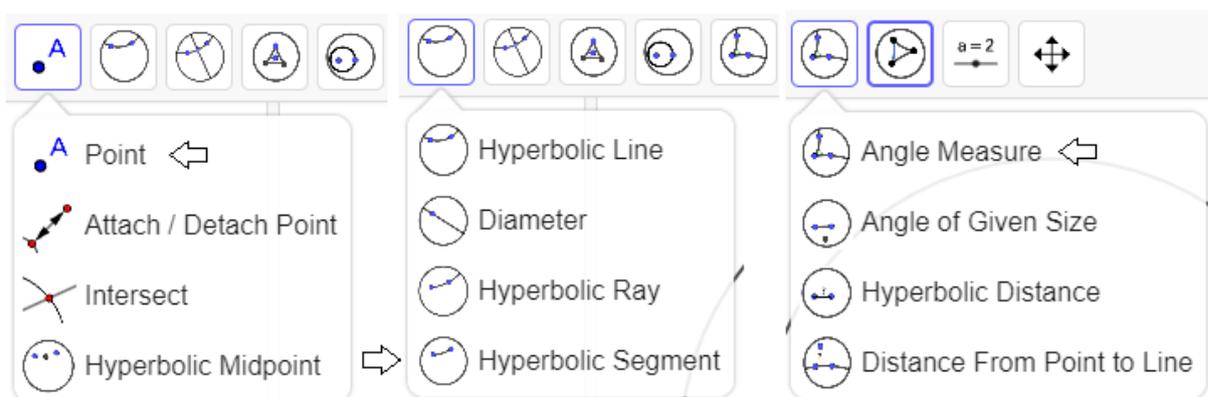
Figura 39: Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico.



Fonte: Autor (2024)

Os alunos foram orientados a usarem a ferramenta “Point” para criar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no Disco de Poincaré. Logo após a criação dos pontos eles utilizaram a ferramenta “Hyperbolic Segment” para criar os segmentos geodésicos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  construindo assim o triângulo geodésico  $ABC$ . Em seguida usaram a ferramenta “Angle Measure” para medir os ângulos internos com vértices nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Figura 40: Ferramentas Point, Hyperbolic Segment e Angle Measure.



Fonte: Autor (2024)

Pedimos aos estudantes que movimentassem os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  para posições arbitrárias e depois fizessem a soma dos ângulos internos do triângulo geodésico  $ABC$ , orientamos ainda que repedissem esse último passo várias vezes e registrassem os resultados das somas dos ângulos internos.

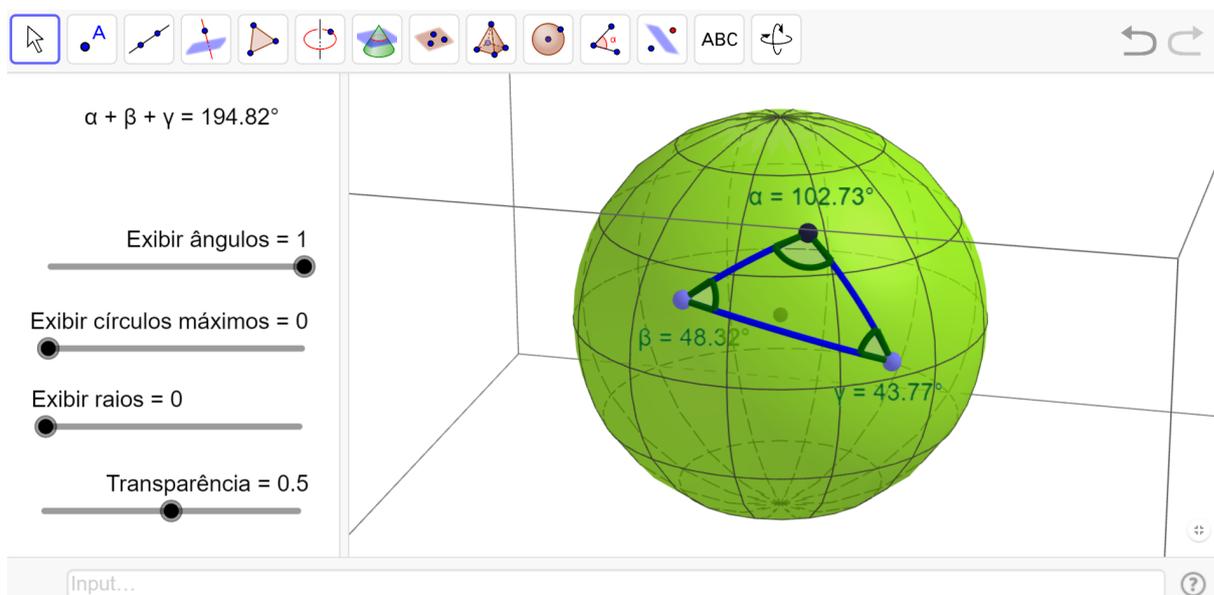
Por fim, mencionamos com os estudantes que na Geometria Plana a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ . Em seguida, pedimos que os alunos comparassem os resultados obtidos das somas dos ângulos internos dos triângulos geodésicos com  $180^\circ$ , todos os estudantes observaram que os resultados eram menores do que  $180^\circ$ .

Baseando-se nas observações realizadas pelos estudantes, concluímos esta etapa formalizando a ideia que na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$  e o triângulo nessa geometria era chamado de triângulo hiperbólico. Antes de avançarmos para última ação do segundo encontro, alguns alunos manifestaram o pensamento expondo a afirmação que na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo era maior que  $180^\circ$ . Então convidamos os mesmos a verificar esta afirmação com mais um modelo de atividade criada no GeoGebra.

### 6.2.3 Triângulo Geodésico em uma Esfera

Chegamos a última ação do segundo encontro, o objetivo é construir junto aos estudantes a ideia que na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo era maior que  $180^\circ$ . Para alcançar a meta estabelecida, possibilitamos aos alunos explorarem o triângulo geodésico na esfera, o recurso utilizado foi um modelo de atividade criado no GeoGebra por Bortolossi (2020a) e intitulado de Triângulo Geodésico em uma Esfera.

Figura 41: Triângulo Geodésico em uma Esfera.

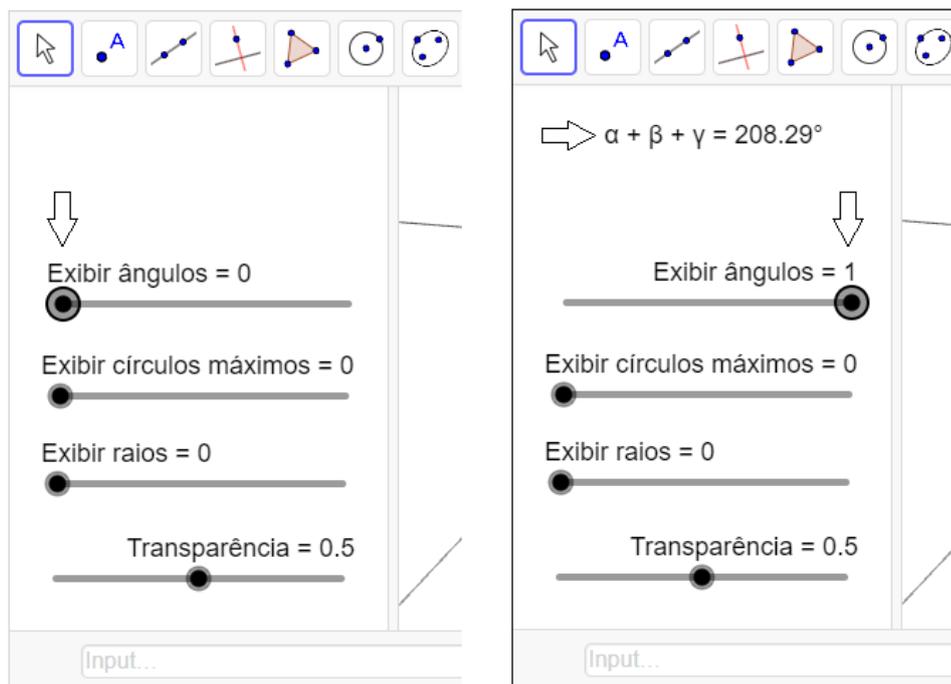


Fonte: Autor (2024)

Ao acessar o modelo, uma esfera e um triângulo geodésico contido na esfera são exibidos a direita. Ao mudar o valor de entrada da ferramenta “Exibir ângulos” de 0 para 1, os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são exibidos no triângulo geodésico e a soma  $\alpha + \beta + \gamma$

aparece acima da própria ferramenta. Orientamos os alunos a movimentarem os vértices do triângulo geodésico para posições arbitrárias, e registrassem os valores de  $\alpha + \beta + \gamma$  nas variadas posições. Em seguida, eles compararam os resultados obtidos nas somas com  $180^\circ$ . Rapidamente, eles confirmaram a afirmação que na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos do triângulo geodésico é maior que  $180^\circ$ . Além disso, mencionamos que nessa geometria os triângulos são chamados de triângulo esférico.

Figura 42: Ferramenta Exibir ângulos.



Fonte: Autor (2024)

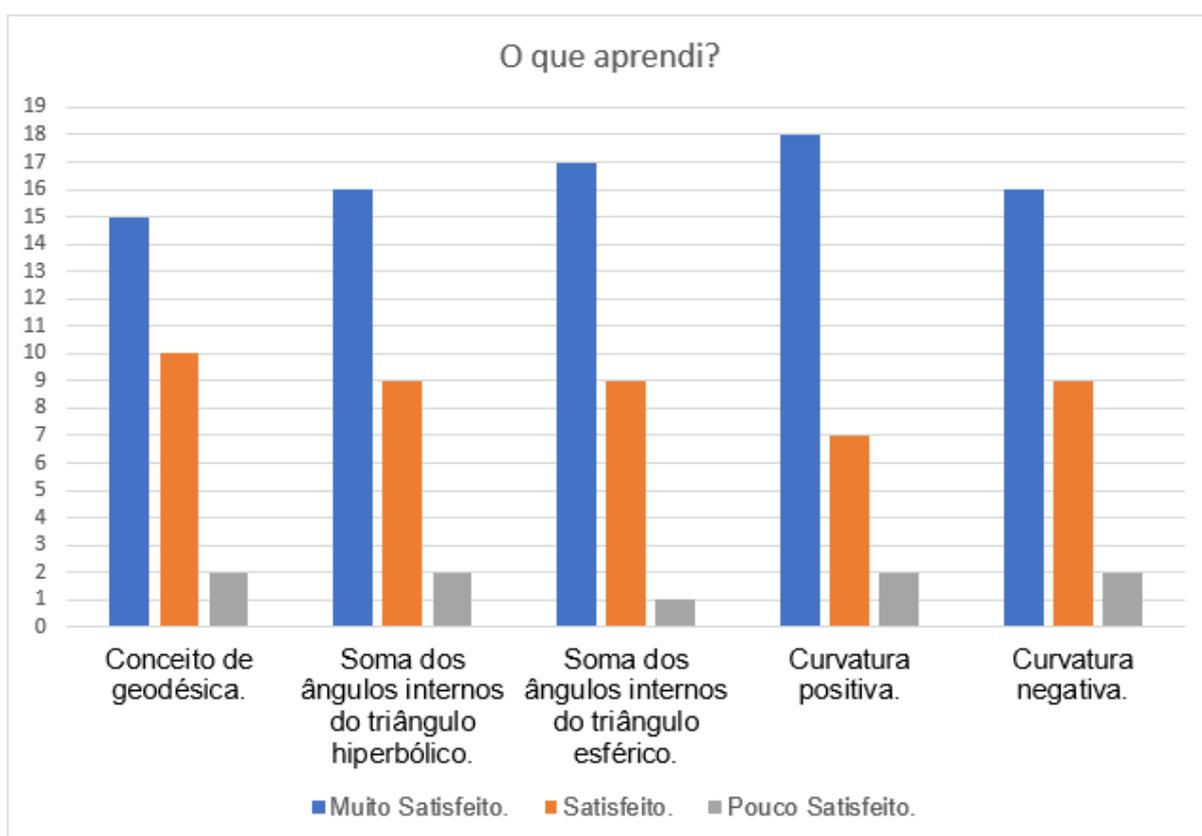
Encerramos o segundo encontro com o seguinte questionamento: “observamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que  $180^\circ$  e a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que  $180^\circ$ , então entre as Geometrias Hiperbólica e Esférica qual delas possui curvatura positiva e qual possui curvatura negativa?”.

Os primeiros estudantes que responderam argumentaram associando o sinal da curvatura com soma dos ângulos internos. Destacamos a seguinte resposta: “acho que a Geometria Hiperbólica tem curvatura negativa porque a soma dos ângulos internos é menor que  $180^\circ$  e a Esférica tem curvatura positiva porque a soma dos ângulos internos é maior que  $180^\circ$ ”. Confirmamos que eles estavam corretos, e de fato na Geometria Hiperbólica a curvatura é negativa e na Geometria Esférica a curvatura é positiva. Por fim, mencionamos, novamente, que a curvatura de uma superfície seria uma medida que descreve como a superfície se dobra ou se desvia de ser plana em um ponto específico.

### 6.3 Construindo Superfícies de Curvatura não Nula

No terceiro encontro com os estudantes deixamos como sugestão, no grupo de WhatsApp da turma, a cópia das atividades dos apêndices A e B. A atividade do apêndice A refere-se à construção de um modelo concreto de espaço esférico com curvatura positiva, e a atividade do Apêndice B refere-se à construção de um modelo concreto de espaço hiperbólico de curvatura negativa.

Além disso, os estudantes responderam uma pesquisa de satisfação, ver apêndice C, onde eles indicaram como se sentiam a respeito dos tópicos: o conceito de geodésica, a soma dos ângulos internos de um triângulo em diferentes geometrias e vimos que existem superfícies com curvatura positiva e superfícies com curvatura negativa, que foram abordados ao longo dos encontros. Segue abaixo o resultado dessa atividade.



Os resultados da pesquisa indicam que no geral os alunos saíram satisfeitos com a proposta. Enfim, encerramos aqui o nosso trabalho.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Com a conclusão deste trabalho acreditamos que é possível explorar tópicos de geometrias não euclidianas no Ensino Médio, mesmo adotando a presunção da veracidade sem uma demonstração completa. Porém aspectos complexos da Matemática embutida nessas geometrias exigem que o professor seja capacitado, por isso, entendemos que a formação continuada dos professores seja fundamental neste processo. Ressaltamos que ambientes dinâmicos, como o GeoGebra, que permitem explorar geometrias não euclidianas tornam-se um fator importante em construções de propostas como esta.

Contudo, estudar geometria diferencial de superfícies foi desafiador e motivante, uma vez que trouxe a possibilidade de ressignificar conteúdos das disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, estudados no curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, poder construir o conhecimento desde a definição de uma curva regular, passando por superfícies regulares até chegar na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet foi extremamente gratificante e edificante.

A sensação de aplicar, em sala de aula, um pouco dos conhecimentos adquiridos é imensurável. Por isso, daremos continuidade aos estudos sobre Geometria Diferencial e geometrias não euclidianas. Esperamos também, que este trabalho se torne uma fonte de referência e inspiração para outros professores.

# Referências Bibliográficas

ABATE, M.; TOVENA, F. **Curves and surfaces - 1st ed.** Milão, Italia: Springer-Verlag, 2012.

ARAÚJO, P. V. **Geometria Diferencial.** Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

BICUDO, I. **EUCLIDES. Os Elementos.** São Paulo, 2009. Disponível em: <<https://ia601508.us.archive.org/10/items/Os.Elementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf>>. Acesso em: 01 de fevereiro 2024.

BIRKHOFF, G.; ROTA, G.-C. **Ordinary Differential Equations - 4st ed.** USA: John Wiley e Sons, 1991.

BORTOLOSSI, H. J. **Triângulo Geodésico em uma Esfera.** 2020. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/acnyx8zg>>. Acesso em: 10 de setembro 2024.

\_\_\_\_\_. **Triângulo Geodésico em uma Pseudoesfera.** 2020. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/cvpkctg2>>. Acesso em: 10 de setembro 2024.

CAFÉ Profmat. **Geometrias plana, esférica, hiperbólica e o 5º Postulado.** 2024. Disponível em: <<https://youtu.be/QbcvbS8P40Y?si=l8IGBZXqaJeqm9l0>>. Acesso em: 10 de setembro 2024.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. **O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes.** *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 28, p. 42–63, 2014.

GARBI, G. G. **CQD: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. et al. **Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica.** New York: CRC Press, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de análise: volume 2.** 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

NUNES, B. **Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet.** Florianópolis, SC, 2010. Disponível em: <[http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Orientacoes\\_arquivos/tcc\\_bruna\\_certo.pdf](http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Orientacoes_arquivos/tcc_bruna_certo.pdf)>. Acesso em: 23 de agosto 2024.

PIASESKI, C. M. **A geometria no ensino fundamental.** Erechim, SC, 2010. Disponível em: <[https://www.uricer.edu.br/cursos/arq\\_trabalhos\\_usuario/1271.pdf](https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf)>. Acesso em: 17 de fevereiro 2024.

PIERCE, H. **Disco de Poincaré para Espaço Hiperbólico**. 2018. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fUCCfAEj>>. Acesso em: 10 de setembro 2024.

SAMUCO, J. M. E. et al. **A gênese da geometria hiperbólica**. Porto, PT, 2005. Disponível em: <[https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/64096/1/90431\\_TESE-159\\_TM\\_01\\_P.pdf](https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/64096/1/90431_TESE-159_TM_01_P.pdf)>. Acesso em: 23 de agosto 2024.

SANTOS, W. T. d. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. Rio Grande, RS, 2016. Disponível em: <[https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_licenciatura/TCC\\_Wellington\\_2016.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_licenciatura/TCC_Wellington_2016.pdf)>. Acesso em: 23 de agosto 2024.

STEWART, J. **Cálculo - Volume 2, Tradução da 7ª edição norte-americana**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

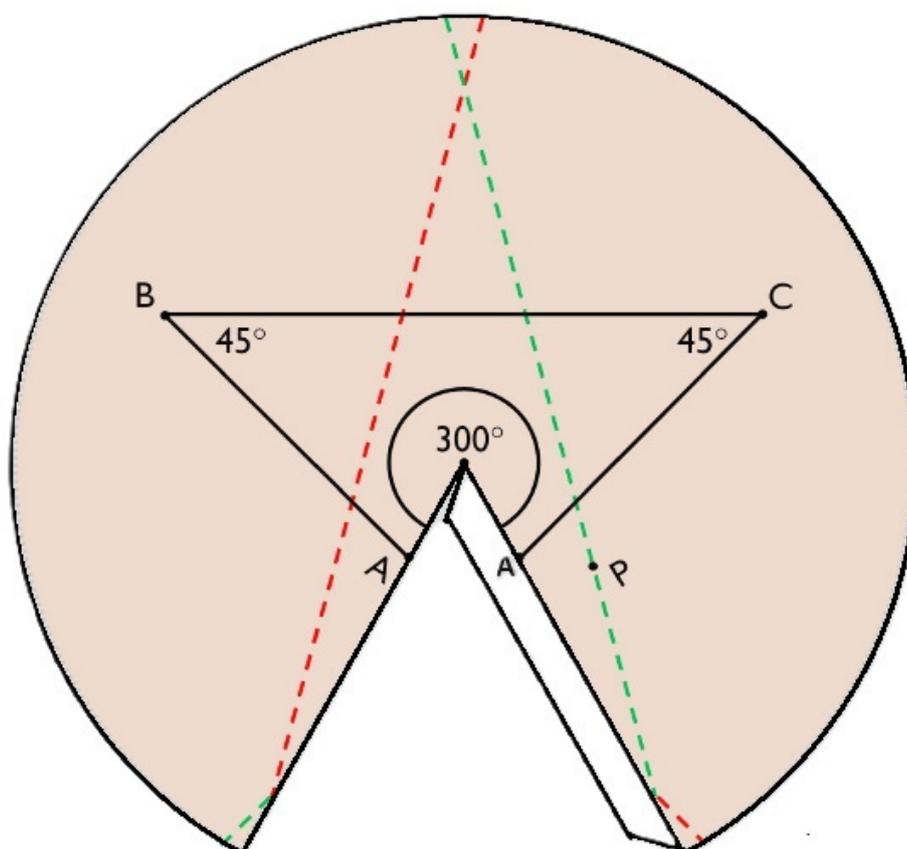
TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

VIEIRA, J. V. **Os quadriláteros de Saccheri e o surgimento da geometria hiperbólica**. Vitória, ES, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufes.br/server/api/core/bitstreams/a716d2f6-ea59-4d9f-9aca-d77ac60cf17c/content>>. Acesso em: 23 de agosto 2024.

## Apêndice A

### Espaço esférico de curvatura positiva

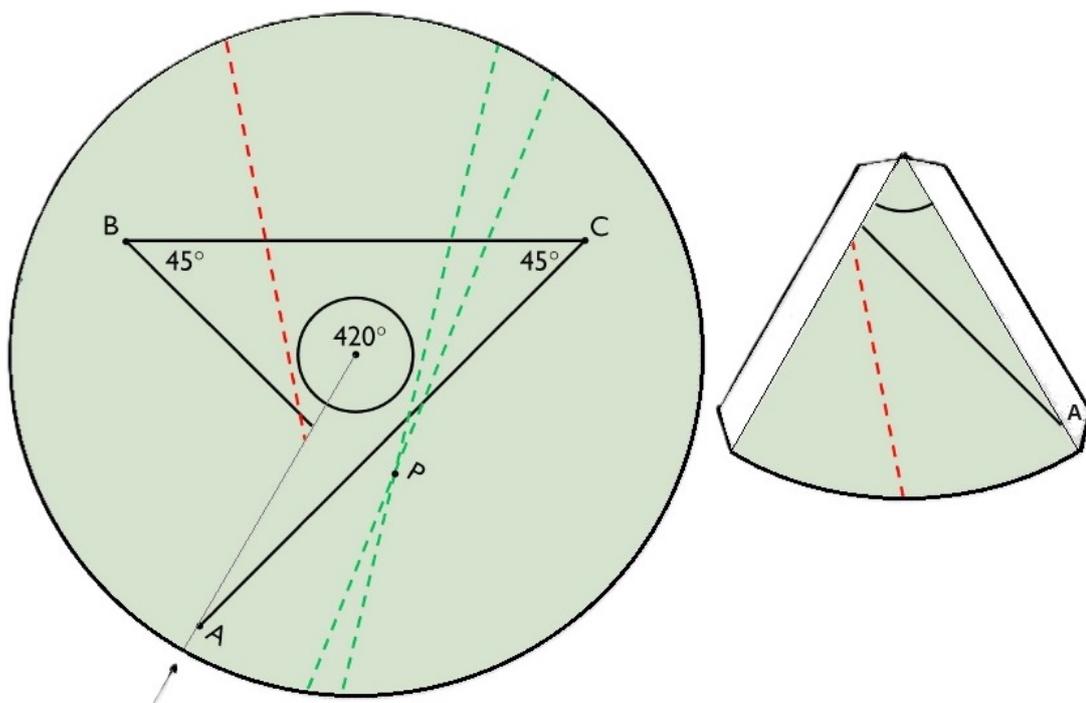
- (I) Recorte o setor circular longo das extremidades.
- (II) Cole a aba por baixo da borda oposta, de modo que os dois pontos  $A$  coincidam.
- (III) Acabou de construir um cone de papel.



## Apêndice B

# Espaço hiperbólico de curvatura negativa

- (I) Recorte o círculo e o setor circular ao longo das linhas das extremidades, incluindo a fenda radial indicada pela seta.
- (II) Colar a aba direita do setor circular embaixo da borda direita da fenda do círculo, de modo que os dois pontos  $A$  coincidam.
- (III) Colar a aba esquerda do setor circular embaixo da borda esquerda da fenda do círculo, de modo que as linhas vermelhas tracejadas fiquem alinhadas.



# Apêndice C

## O que aprendi?

Ao longo da atividade estudamos o conceito de geodésica, a soma dos ângulos internos de um triângulo em diferentes geometrias e vimos que existem superfícies com curvatura positiva e superfícies com curvatura negativa. Registre como se sente a respeito de a cada um desses tópicos.

O que aprendi?			
Tópico	 Muito satisfeito	 Satisfeito	 Pouco satisfeito
Conceito de geodésica.			
Soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico.			
Soma dos ângulos internos do triângulo esférico.			
Curvatura positiva.			
Curvatura negativa.			