



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**GEOMETRIA PROJETIVA DAS CÔNICAS: UMA
ABORDAGEM ATRAVÉS DO GEOGEBRA**

Alexsandro dos Santos Lima

Feira de Santana
Dezembro de 2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

GEOMETRIA PROJETIVA DAS CÔNICAS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DO GEOGEBRA

Alexsandro dos Santos Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
Dezembro de 2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteadó - UEFS

Lima, Alexandro dos Santos
L696g Geometria projetiva das cônicas: uma abordagem através do GeoGebra./
Alexandro dos Santos Lima. – 2024.
116 f.: il.

Orientador: Jean Fernandes Barros
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Feira de Santana,
2024.

1.Geometria projetiva – Ensino médio. 2.Cônicas. 3.Transformação Projetiva.
4.Correspondência polar. 5.Geogebra. 6.Princípio de dualidade. I.Barros, Jean
Fernandes, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514.144

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120



Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Alexandro dos Santos Lima do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos dezesseis dias do mês de dezembro de dois mil e vinte quatro, às 15 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: <https://meet.google.com/yme-rfyj-cjo> da dissertação apresentada sob o título “**Geometria Projetiva das Cônicas: Uma Abordagem Através do GeoGebra**”, do discente **Alexandro dos Santos Lima** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Haroldo Goncalves Benatti (UEFS) e Juarez dos Santos Azevedo (UFBA). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito APROVADO . Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 16 de dezembro de 2024.

Jean F. R.

Prof. Dr Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS)

Haroldo G. Benatti

Prof. Dr. Haroldo Goncalves Benatti (UEFS)

JUAREZ DOS SANTOS AZEVEDO

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo (UFBA)

Visto do Coordenador:

Jean F. R.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder forças e sabedoria para trilhar este caminho até o fim.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e pelas orações que sempre me sustentaram.

À minha esposa e aos meus filhos, pela paciência e compreensão demonstrados durante todo o período em que me dediquei aos estudos.

Aos amigos que me incentivaram, especialmente Jorge e Sílvio, colegas do PROFMAT 2015, pelas palavras de apoio e motivação constantes.

Aos colegas do PROFMAT 2022, pela parceria, pelo companheirismo e pelas trocas de aprendizado que tornaram nossa jornada mais rica e significativa.

Aos professores do PROFMAT, pela dedicação e pelos valiosos ensinamentos ao longo do curso. Em especial, ao Professor Dr. Jean Fernandes Barros, cuja orientação e conhecimentos foram fundamentais para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo geral de desenvolver atividades pedagógicas voltadas para o ensino e aprendizagem da Geometria Projetiva das Cônicas no Ensino Médio, através do software GeoGebra, como a ferramenta pedagógica principal para explorar as propriedades das Cônicas por meio de construções geométricas, o que favorece a visualização, a análise crítica e a aplicação prática dos conceitos básicos trabalhados. Inicialmente, definimos as cônicas como lugares geométricos, e depois, caracterizamos-las como seções planas de um cone, utilizando as Esferas de Dandelin, justificando o porquê de tais curvas serem denominadas de cônicas. Em seguida, observamos suas propriedades ótica e isogonal. Além disso, descrevemos as propriedades notáveis das parábolas. A partir de então, estabelecemos as noções importantes na Geometria Projetiva de inversão, de correspondência polar e, mais geralmente, de transformação projetiva. Depois, descrevemos as principais propriedades projetivas do círculo, estendendo-as para as cônicas. Por fim, propomos as atividades de construção, baseadas nos conceitos e propriedades da Geometria Projetiva das Cônicas, desenvolvidas de antemão, tendo por objetivo uma abordagem interativa e dinâmica. Assim, apresentamos as possibilidades de ampliar o conhecimento dos alunos sobre as transformações geométricas para além da Geometria Euclidiana, tendo o GeoGebra como a ferramenta principal no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Cônica; Transformação Projetiva; Correspondência Polar; Princípio de Dualidade; GeoGebra.

ABSTRACT

The present work has the general objective of developing pedagogical activities aimed at the teaching and learning of Projective Geometry of Conics in High School, using the GeoGebra software as the main pedagogical tool to explore the properties of Conics through geometric constructions, which favors visualization, critical analysis, and practical application of the basic concepts addressed. Initially, we define conics as geometric places, and then we characterize them as plane sections of a cone, using Dandelin Spheres to justify why such curves are called conics. Next, we observe their optical and isogonal properties. Furthermore, we describe the notable properties of parabolas. From then on, we establish important notions in Projective Geometry of inversion, polar correspondence, and, more generally, projective transformation. Afterward, we describe the main projective properties of the circle, extending them to conics. Finally, we propose construction activities based on the concepts and properties of Projective Geometry of Conics, developed in advance, aiming for an interactive and dynamic approach. Thus, we present the possibilities of expanding students' knowledge about geometric transformations beyond Euclidean Geometry, with GeoGebra as the main tool in the teaching and learning process.

Keywords: Conic; Projective Transformation; Polar Correspondence; Principle of Duality; GeoGebra.

Sumário

Introdução	7
1 Propriedades Elementares das Curvas Cônicas	10
1.1 Definições das cônicas	11
1.2 Propriedade óptica	16
1.3 Propriedade isogonal das cônicas	22
1.4 Cônicas e as Esferas de Dandelin	24
1.5 A excentricidade e outra definição de cônicas	26
1.6 Algumas propriedades notáveis da parábola	28
2 Principais Resultados da Geometria Clássica	36
2.1 Inversão no plano	36
2.2 Noções básicas sobre transformações projetivas	41
2.3 Princípio de dualidade	53
2.4 Razão cruzada	55
2.5 Alguns fatos geométricos do triângulo	58
2.6 Eixo radical e lápis de círculos	65
3 Propriedades Projetivas das Cônicas	69
3.1 Razão cruzada em uma cônica	69
3.2 Correspondência polar: polo e polar	73
4 Software Dinâmico para uma Abordagem Interativa em Geometria Projetiva	87
4.1 Transformação por inversão	87
4.1.1 Construção do inverso com a régua e o compasso	88
4.1.2 Construção do inverso pelo GeoGebra	90
4.2 Transformações Projetiva das Cônicas	92
4.3 Transformação por Correspondência Polar	101
4.3.1 Construção das cônicas por correspondência polar via Geogebra	108
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
Referências Bibliográficas	115

Introdução

A geometria desempenha um papel muito importante no ensino básico, pois permite desenvolver habilidades essenciais para compreensão do espaço e das formas ao nosso redor. No contexto da geometria euclidiana, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos da Educação Básica (BRASIL, 2018).

Nesta perspectiva, é possível considerar um estudo mais amplo, que vá além dessa geometria que se preocupa com o mundo em que vivemos, envolvendo também a geometria que lida com relações entre os objetos do mundo em que vemos que é o caso da *geometria projetiva*. Um exemplo simples para distinguir a Geometria Projetiva da Euclidiana é a interseção entre duas retas. Na Geometria Euclidiana, duas retas paralelas não possuem ponto de interseção. Já na Geometria Projetiva, considera-se que as retas paralelas se encontram no infinito. "*Na prática, os trilhos de trem não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito*" (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p.2). Isto significa dizer que na Geometria Projetiva duas retas quaisquer sempre se intersectam.

Historicamente, os primeiros estudos da Geometria Projetiva começam no século XV, na Itália, durante um período que foi marcado por profundas transformações culturais e científicas. Tal período ficou conhecido como Renascimento. No campo da arte, os artistas da época passaram a buscar novas técnicas e conceitos que tornassem suas obras mais realistas. A Geometria Euclidiana, com suas noções de semelhança e equivalência de figuras por meio de congruências, não era suficiente para atender às novas necessidades artísticas. Com isso, de maneira intuitiva, surgiu nos trabalhos dos pintores a noção de perspectiva e ponto de fuga, onde permitiram representar a profundidade e criar uma sensação de realismo. Passaram-se aproximadamente dois séculos para que essas ideias fossem desenvolvidas matematicamente.

O primeiro a introduzir uma linguagem matemática para descrever o que pintores expressavam em suas telas, foi o engenheiro e arquiteto francês Gerard Desargues (1591-1661). Em 1639, ele publicou o trabalho *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (Projeto de Esboço da Interseção de um Cone com um Plano), no qual abordou as propriedades da interseção entre um cone e um plano, um tema que já havia sido amplamente estudado por Apolônio de Perga (262 a.C.–190 a.C.) (LEITE, 2016).

No início do século 19, Jean Victor Poncelet (1788-1867), aluno da *Ecole Polytechnique* e da Academia Militar de Metz, nos dois anos em que estava preso na Rússia, durante a campanha napoleônica contra a Rússia, formulou ideias que revolucionariam a geometria da época. Ele foi o primeiro a reconhecer a Geometria Projetiva como um novo ramo da matemática, e dedicou-se a encontrar todas as propriedades geométricas das figuras que permanecem invariantes sob projeções.

Depois de Poncelet, outros matemáticos trouxeram contribuições para Geometria de Projetiva como Michel Chasles (1798-1867), Jacob Steiner (1796-1863), Karl Christian

e Von Staudt (1798-1867), permitindo sua consolidação até o final de século 19.

Agora, em relação ao uso de recursos tecnológicos no ensino de Matemática, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Logo, o uso das tecnologias no ensino da Matemática traz ganhos significativos no processo de ensino e aprendizagem na sala de aula. Dockendroff e Solar (2017), afirmam que ambientes de aprendizagem enriquecidos por tecnologia preparam os alunos ao aumentar sua capacidade de explorar, reconstruir (ou reinventar) e explicar conceitos matemáticos ao promover conexões entre representações gráficas e definições formais.

Softwares dinâmicos como GeoGebra, por exemplo, potencializam o aprendizado ao facilitar a visualização e a exploração de construções matemáticas, possibilitando uma melhor compreensão de conceitos por meio de recursos interativos e dinâmicos.

Portanto, no ensino de Matemática, a BNCC orienta o estudo das transformações geométricas tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, recomendando o uso de instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica como ferramentas para desenvolver habilidades de reconhecer e construir figuras. Com base nisso, esta pesquisa apresenta como proposta de ensino atividades da geometria projetiva das cônicas, utilizando o GeoGebra como ferramenta, ampliando o aprendizado dos estudantes para além da geometria euclidiana.

Diante disso, neste trabalho, temos como objetivo geral: desenvolver atividades pedagógicas voltadas para o ensino e aprendizagem dos conceitos básicos da geometria projetiva das cônicas no Ensino Médio, utilizando o software GeoGebra como ferramenta pedagógica principal, para explorar suas propriedades por meio de construções geométricas, favorecendo a visualização, a análise crítica e aplicação prática dos conceitos básicos. Para os objetivos específicos vamos: elaborar atividades de construção usando régua e compasso e o software GeoGebra, para aplicar transformação por inversão em relação ao círculo e explorar propriedades envolvendo pontos, retas e círculos; explorar, por meio de atividade de construção utilizando o GeoGebra, as propriedades das cônicas para identificar e analisar suas características projetivas; criar uma atividade de construção utilizando o GeoGebra, para aplicar o conceito de correspondência polar em relação a cônicas, possibilitando uma análise interativa de suas propriedades.

Todas as imagens apresentadas neste trabalho foram construídas pelo autor.

No primeiro capítulo, abordamos as definições das cônicas como lugares geométricos através de relações métricas. Em seguida, apresentamos algumas propriedades interessantes, como as propriedades ópticas e isogonais das cônicas. Também caracterizamos as cônicas como seções planas de um cone, por meio das Esferas de Dandelin. Esta caracterização pode ser utilizada para definir as cônicas, sem recorrer diretamente a relações métricas, porém utilizando-as para mostrar que as tais seções são, de fato, cônicas, como definidas anteriormente. E por fim, encerramos o capítulo com propriedades notáveis da parábola.

Nos segundo e terceiro capítulos, apresentamos os fundamentos teóricos da geometria projetiva das cônicas. No segundo capítulo, exploramos conceitos importantes, como inversão de pontos, retas e círculos em relação a um círculo. Introduzimos noções básicas sobre transformação projetiva, começando com a definição de transformação projetiva, explicando a projeção de um polígono ou de um círculo de um plano para outro plano. No caso de um círculo, por meio de um projeção central, vê-se que a projeção é uma cônica.

Além disso, definimos uma transformação projetiva importante, a correspondência polar, e exploramos suas principais propriedades. No capítulo 3, estendemos as propriedades projetivas do círculo para as cônicas em geral.

Finalmente, no capítulo 4, aplicamos o conteúdo abordado nos três primeiros capítulos, para justificar as construções que realizamos neste capítulo, utilizando o software GeoGebra em atividades adaptadas para alunos do Ensino Médio. Apresentamos propostas de atividades de geometria projetiva das cônicas, transformações por inversão, e correspondência polar. Todas as atividades apresentam o passo a passo das construções, além das abordagens didáticas.

Capítulo 1

Propriedades Elementares das Curvas Cônicas

As seções cônicas, que incluem o círculo, a elipse, a parábola e a hipérbole, não só apenas ocorrem amplamente no mundo natural, mas também são evidentes em diversos campos, desde a arquitetura até a astronomia.

Muitos historiadores creditam ao matemático grego Menaechmus (380 - 320 A.C. aproximadamente), discípulo de Platão, por desenvolver a primeira definição de seção cônica quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Ele foi o primeiro a demonstrar que a elipse, as parábolas e as hipérboles podem ser obtidas como seções de um cone quando cortadas por um plano não paralelos à sua base.

O antigo geômetra grego Apolônio de Perga revisou e aprimorou a definição de seções cônicas no século III a.C., estabelecendo resultados que são conhecidos e usados até hoje. Ele determinou que, ao cortar um cone circular reto em diferentes ângulos, é possível obter todas as quatro seções cônicas.

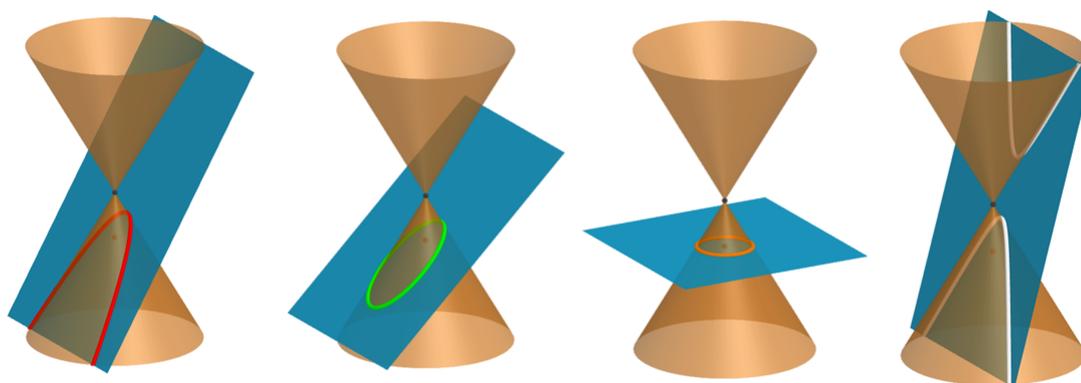


Figura 1.1: Seção cônicas.

Seções cônicas são abundantes no mundo físico. Hoje, as propriedades das seções cônicas são aplicadas em diversas áreas do conhecimento, especialmente no campo da Física. Na Astronomia, por exemplo, elas são importantes para o estudo das órbitas dos planetas ao redor do sol. Na arquitetura e engenharia, são utilizadas no design e construções que integram na sua forma as curvas cônicas. Na ótica, temos os telescópios

de reflexão, formados por espelhos com formatos cônicos, aproveitam as propriedades dessas curvas para melhorar a observação de objetos distantes. Nesta seção, exploraremos as cônicas e suas propriedades elementares.

1.1 Definições das cônicas

As cônicas podem ser definidas de várias maneiras, dependendo do tipo de geometria considerada (euclidiana, afim ou projetiva). Elas podem ser definidas por suas propriedades focais, como seções planas de cones de revolução, imagens em perspectiva de círculos, por equações quadráticas ou, do ponto de vista da geometria projetiva, como o conjunto de pontos de interseção de lápis projetivos ou conjunto de pontos auto-conjugados de uma polaridade no plano. Para fins deste estudo, o termo cônica significa elipses, incluindo os círculos, hipérbolos e parábolas. Sempre que necessário, também mencionaremos os casos das cônicas degeneradas, como pontos ou pares de retas.

Definição 1.1. Uma **elipse** é o conjunto de todos os pontos P no plano, cuja soma das distâncias a dois pontos, F_1 e F_2 , chamados de *focos*, é igual a uma constante $2a > 0$. Essa constante é maior do que $2c > 0$, onde $2c$ é a distância entre os focos, isto é, $d(F_1, F_2) = 2c$.

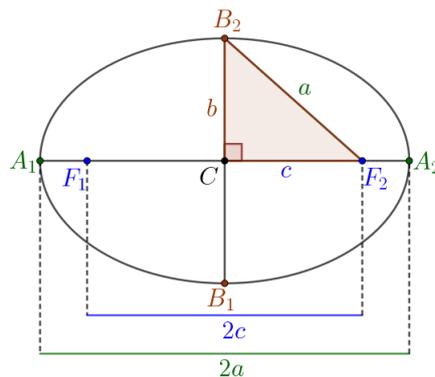


Figura 1.2: Elipse.

Podemos observar na elipse, ilustrada na Figura 1.2, alguns elementos importante, como:

- **Focos (F_1 e F_2):** São os pontos fixos da elipse.
- **Distância focal:** É a distância $2c$ entre os focos F_1 e F_2 .
- **Centro C :** É o ponto médio do segmento F_1F_2 .
- **Eixos de simetria:** São a reta $(\overrightarrow{A_1A_2})$ que passa pelos focos e a reta $(\overrightarrow{B_1B_2})$ perpendicular a essa, passando pelo ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Estas duas retas são chamadas, respectivamente, de *eixo maior* e *eixo menor* da elipse.
- **Excentricidade da elipse:** É o número real $e = \frac{c}{a}$. Note que $0 < e < 1$.

A excentricidade é responsável pela "forma" da elipse, quando a excentricidade estiver próxima de zero, as elipses são aproximadamente círculos, enquanto que excentricidade próxima de 1 teremos um "achatamento" da elipse.

Do triângulo B_2CF_2 , obtemos a relação notável $a^2 = b^2 + c^2$.

Para desenhar uma elipse, precisamos de um pedaço de papelão, duas tachinhas, um lápis e um barbante. Primeiro, fixe as tachinhas no papelão para formar os focos da elipse (ver Figura 1.3). Corte um pedaço de barbante com comprimento maior que a distância entre as duas tachinhas (distância entre os focos), e prenda cada ponta do barbante nas tachinhas. Com lápis, mantendo o barbante sempre esticado, trace uma curva ao redor dos focos. O resultado é uma elipse.

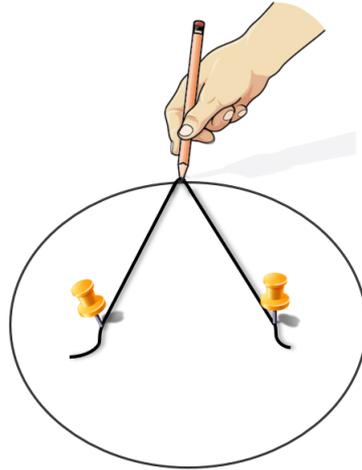
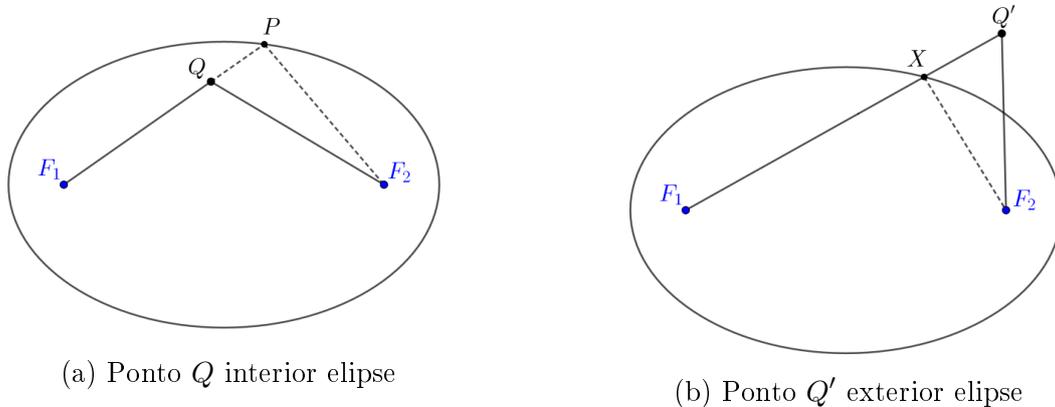


Figura 1.3: Construção de uma elipse utilizando um barbante, duas tachinhas e um lápis.

A seguir, apresentamos um interessante resultado envolvendo distância de qualquer ponto, seja ele interno ou externo à elipse, em relação aos focos e o eixo maior. Considere um ponto Q é interno à elipse se, para qualquer reta que liga um dos focos ao ponto Q , essa reta intersecta a elipse em um ponto P de tal forma que Q está entre o foco e P . Caso Q seja externo, P estará entre o foco e Q .

Proposição 1.2. *Seja uma elipse com focos F_1 e F_2 , e considere Q um ponto arbitrário. Se Q está no interior da elipse, então a soma das distâncias de Q aos dois focos é menor que o comprimento do eixo maior da elipse. Se Q está no exterior da elipse, essa soma é maior que o comprimento do eixo maior.*



(a) Ponto Q interior elipse

(b) Ponto Q' exterior elipse

Figura 1.4

Demonstração: Considere um ponto Q interior a uma elipse de focos F_1 e F_2 . Seja P um ponto de interseção de F_1Q com a elipse, conforme Figura 1.4a. Pela desigualdade

triangular aplicada ao triângulo QPF_2 , temos

$$\overline{F_2Q} < \overline{QP} + \overline{F_2P}$$

Somando $\overline{F_1Q}$ em ambos membros dessa desigualdade, obtemos

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} < \overline{F_1Q} + \overline{QP} + \overline{F_2P}$$

Como $\overline{F_1P} = \overline{F_1Q} + \overline{QP}$, então

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} < \overline{F_1P} + \overline{F_2P}$$

Sabemos que $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ é o comprimento do eixo maior. Logo, $\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q}$ é menor que o comprimento do eixo maior. Por outro lado, se um ponto Q' está externo à elipse (Figura 1.4b), e seja X , um ponto de interseção $\overline{F_1Q'}$ com a elipse, então pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $XQ'F_2$, temos

$$\overline{F_2X} < \overline{XQ'} + \overline{F_2Q'}$$

Somando $\overline{F_1X}$ em ambos membros dessa desigualdade, obtemos

$$\overline{F_1X} + \overline{F_2X} < \overline{F_1X} + \overline{XQ'} + \overline{F_2Q'}$$

Como $\overline{F_1Q'} = \overline{F_1X} + \overline{XQ'}$, então

$$\overline{F_1X} + \overline{F_2X} < \overline{F_1Q'} + \overline{F_2Q'}$$

Novamente, sabemos que $\overline{F_1X} + \overline{F_2X}$ é igual ao comprimento do eixo maior. Portanto, $\overline{F_1Q'} + \overline{F_2Q'}$ é maior que o comprimento do eixo ■

Definição 1.3. Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos P no plano, cuja a diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , é igual a uma constante $2a > 0$. Essa constante é menor do que $2c > 0$, onde $2c$ é a distância entre F_1 e F_2 , ou seja, $d(F_1, F_2) = 2c$.

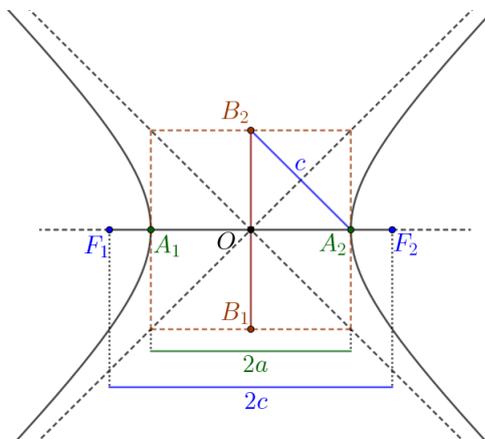


Figura 1.5: Hipérbole de Focos F_1 e F_2 .

Assim como acontece com a elipse, toda hipérbole possui dois eixos de simetria (Figura 1.5): o eixo transversal, e o eixo conjugado. O eixo transversal, também conhecido

como eixo real, é a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ que passa pelo centro da hipérbole e pelos seus focos. O eixo conjugado, também conhecido como eixo imaginário, é a reta $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ perpendicular ao eixo transversal e passa pelo ponto médio entre os focos (centro da hipérbole).

Toda hipérbole possui duas assíntotas que passam pelo seu centro. À medida que os ramos da hipérbole se afastam de seu centro, eles se aproximam dessas assíntotas. Quando as assíntotas são perpendiculares entre si, a hipérbole é chamada de *hipérbole equilátera*.

A excentricidade da hipérbole é o número real $e = \frac{c}{a}$. Ela está intimamente relacionada com a abertura da hipérbole. Observe que, como $c > a$, temos que $e > 1$.

Observe que o retângulo central da hipérbole está situado no seu centro O , com um de seus lados medindo $2a$, enquanto os outros lados, que passam pelos vértices A_1 e A_2 da hipérbole, têm comprimento $2\sqrt{c^2 - a^2}$. Esse retângulo é uma ferramenta muito útil para representar graficamente a hipérbole. Para esboçar as assíntotas da hipérbole, basta desenhar e estender as diagonais do retângulo central.

Análogo ao que foi definido para elipse, considere um ponto Q é interno à hipérbole se, para qualquer reta que liga um dos focos ao ponto Q , essa reta intersecta a hipérbole em um ponto P de tal forma que Q está entre o foco e P . Caso Q seja externo, o ponto P estará entre o foco e Q .

Proposição 1.4. *Considere d a diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos focos F_1 e F_2 e seja Λ o ramo da hipérbole mais próximo de F_1 . Então, para qualquer ponto X no interior (exterior) da hipérbole, $|\overline{XF_2} - \overline{XF_1}|$ é menor (maior) que d .*

Demonstração: Suponha X no interior da hipérbole. Seja Y , interseção de $\overline{F_2X}$ com Λ , conforme ilustrado na Figura 1.6.

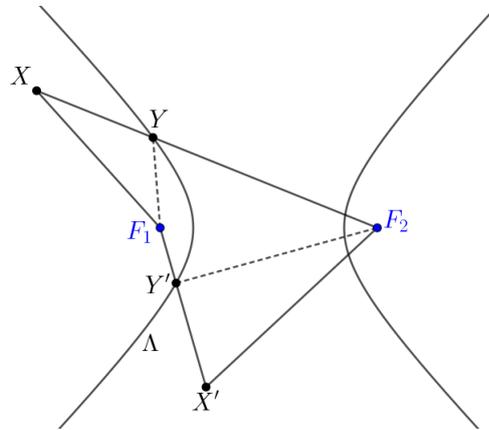


Figura 1.6

Note que $\overline{F_2X} = \overline{F_2Y} + \overline{YX}$. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo F_1XY , temos

$$\overline{F_1X} < \overline{F_1Y} + \overline{YX} \Leftrightarrow -\overline{F_1X} > -(\overline{F_1Y} + \overline{YX})$$

Somando $\overline{F_2X}$ em ambos os membros da segunda desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{F_2X} - \overline{F_1X} &> \overline{F_2X} - (\overline{F_1Y} + \overline{YX}) \\ &= (\overline{F_2Y} + \overline{YX}) - (\overline{F_1Y} + \overline{YX}) \\ &= \overline{F_2Y} - \overline{F_1Y} \end{aligned}$$

Sabemos da definição de hipérbole que $d = \overline{F_2Y} - \overline{F_1Y}$ é constante. Portanto, $\overline{F_2X} - \overline{F_1X} > d$.

Por outro lado, se X' está no exterior de Λ , então considere Y' um ponto interseção de $\overline{F_1X'}$ e Λ . Observe que $\overline{F_1X'} = \overline{F_1Y'} + \overline{Y'X'}$. Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $F_2X'Y'$, temos

$$\overline{F_2X'} < \overline{F_2Y'} + \overline{Y'X'}$$

Subtraindo $\overline{F_1X'}$ em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{F_2X'} - \overline{F_1X'} &< \overline{F_2Y'} + \overline{Y'X'} - \overline{F_1X'} \\ &= (\overline{F_2Y'} + \overline{Y'X'}) - (\overline{F_1Y'} + \overline{Y'X'}) \\ &= \overline{F_2Y'} - \overline{F_1Y'} \end{aligned}$$

Pela definição de hipérbole, temos que $\overline{F_2Y'} - \overline{F_1Y'}$ é constante. Portanto, concluímos que $\overline{F_2X'} - \overline{F_1X'} < d$. ■

Definição 1.5. Uma **parábola** é o conjunto de todos os pontos P de um plano que são equidistantes de um ponto F (chamado foco) e uma reta fixa d (chamada de diretriz). Em outras palavras, para cada ponto P da parábola, a distância de P ao foco F é igual à distância de P à diretriz d .

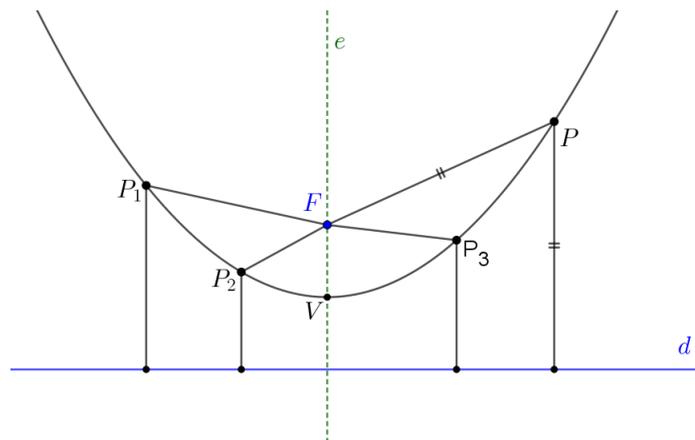


Figura 1.7: Parábola de foco F e diretriz d .

Claramente, na Figura 1.7, observa-se que o ponto médio entre o foco e a diretriz está situado na parábola. Este ponto é chamado de vértice da parábola. A reta e que passa pelo foco e é perpendicular a reta diretriz é chamada de eixo da parábola.

Note que, pela própria definição de parábola, essa curva é simétrica em relação ao seu eixo. Além disso, do ponto de vista geométrico, existe apenas uma parábola, assim como existe apenas um círculo. Mais precisamente, todas as parábolas são semelhantes, ou seja, podem ser transformadas uma na outra por homotetias rotacionais. A prova desses fatos pode ser encontrada em [15].

Um ponto Q é considerado interno à parábola se, para qualquer reta que liga o foco ao ponto Q essa reta intersecta a parábola em um ponto P de forma que Q esteja entre o foco e P . Caso contrário, se for externo, o ponto P estará entre o foco e Q .

Proposição 1.6. *Seja Γ uma parábola com foco F e diretriz d . Para qualquer ponto Q no interior de Γ , a distância de Q ao foco F é menor que a distância de Q à diretriz d . Para qualquer ponto Q no exterior de Γ , a distância de Q ao foco F é maior que a distância de Q à diretriz d .*

Demonstração: Suponha que o ponto P está no interior da parábola. Seja Y a projeção de X sobre a diretriz, Ver Figura 1.8.

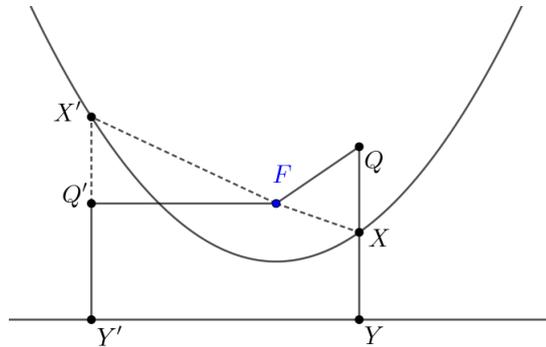


Figura 1.8

Considere o ponto X , interseção QY com a parábola. Observe que $\overline{QY} = \overline{QX} + \overline{XY}$. Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo FQX , temos

$$\overline{FQ} < \overline{QX} + \overline{FX}$$

Pela definição de parábola, sabemos que $\overline{FX} = \overline{XY}$, então

$$\overline{FQ} < \overline{QX} + \overline{XY} = \overline{QY}$$

Se um ponto Q e a parábola estão em lados opostos da diretriz, é fácil observar que a distância de Q ao foco da parábola é maior do que a distância de Q à diretriz. Ou seja, à medida que Q se afasta da parábola na direção contrária à diretriz, a distância até o foco aumenta em comparação com a distância à diretriz. Então, suponha que Q' está externo à parábola, mas do mesmo lado que ela em relação a diretriz. Seja Y' a projeção do ponto X' da parábola na diretriz. Note que $\overline{X'Y'} = \overline{X'Q'} + \overline{Q'Y'}$. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo $FX'Q'$, temos

$$\overline{X'Q'} + \overline{FQ'} > \overline{FX'}$$

Mas pela definição de parábola, $\overline{FX'} = \overline{X'Y'}$, então

$$\overline{X'Q'} + \overline{FQ'} > \overline{X'Y'} = \overline{X'Q'} + \overline{Q'Y'}$$

Portanto, concluímos que $\overline{FQ'} > \overline{Q'Y'}$, ou seja, para qualquer ponto fora da parábola, a distância de Q ao foco da parábola é maior do que a distância de Q à diretriz. ■

1.2 Propriedade óptica

A luz é estudada há muito tempo. Muitos pensadores gregos antigos fizeram contribuições originais, mas mencionamos aqui Heron de Alexandria (que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.), pois ele foi o primeiro a articular o que veio a ser conhecido como *princípio de Fermat*. Em 1657, Fermat declarou que "A luz viajando entre dois pontos segue um caminho que leva menos tempo". Modernamente, tal princípio postula que, no vácuo, a luz se propaga, entre dois pontos, de forma a minimizar o tempo total de percurso [3]. Isso

significa que, se F_1 representa uma fonte de luz (ver Figura 1.9), F_2 um anteparo qualquer e r , em particular, um espelho plano (todos situados no vácuo), então um raio de luz que emana de F_1 , é refletido em um ponto P e incide em F_2 , percorre uma trajetória tal que a soma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é a menor possível. Vamos provar que o caminho, é de fato, o mais curto.

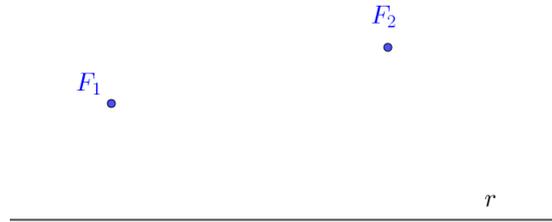


Figura 1.9: Os pontos F_1 e F_2 estão do mesmo lado em relação a reta r .

Com efeito, nas notações da Figura 1.9, queremos encontrar um ponto P na reta r tal que a soma das distâncias de P a F_1 e F_2 seja a menor possível. Refletindo F_1 em r , obtemos um ponto F'_1 , conforme ilustrado na Figura 1.10.

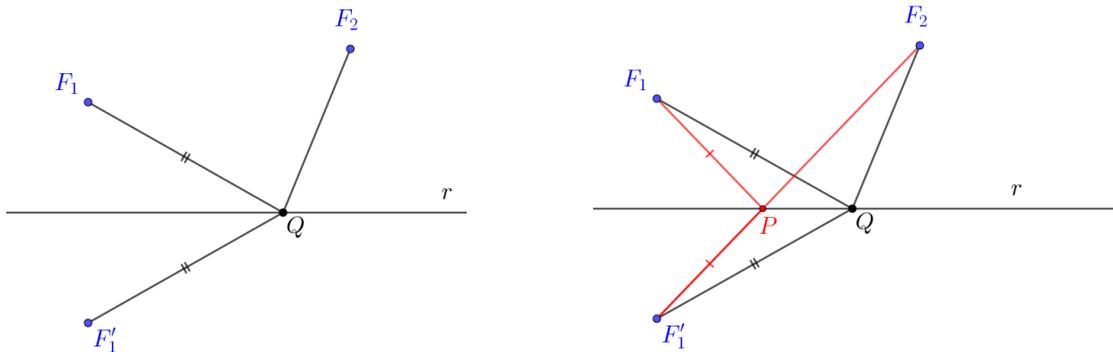


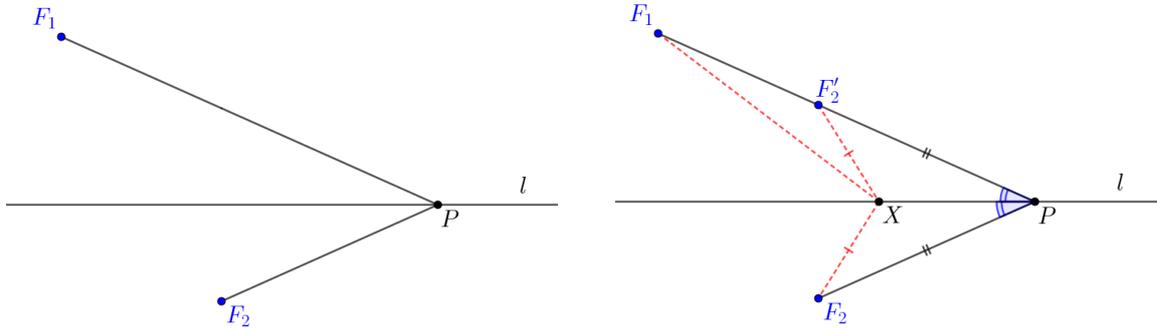
Figura 1.10

Como F'_1 é o simétrico de F_1 em relação a r , para qualquer ponto Q na reta r , o triângulo $QF_1F'_1$ é isósceles, logo $\overline{F'_1Q} = \overline{F_1Q}$. Assim, a soma $\overline{F_2Q} + \overline{QF'_1} = \overline{F_2Q} + \overline{QF_1}$. Agora, traçando o segmento $\overline{F_2F'_1}$, ele intersecta a reta r no ponto P . Novamente, o triângulo $PF_1F'_1$ é isósceles, então $\overline{F'_1P} = \overline{F_1P}$. Assim, a soma $\overline{F'_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo QF'_1F_2 , obtemos $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} < \overline{F_1Q} + \overline{QF_2}$. Portanto, o ponto P é determinado de forma única, uma vez que a reflexão de um ponto em relação a uma reta é única. Note que, quando $\overline{F_1P} + \overline{PF_2}$ é mínima, os segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ formam ângulos iguais com a reta r . Além disso, a condição de igualdade dos ângulos de incidência e reflexão também é uma condição suficiente para garantir que P seja o ponto da r cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 seja a menor possível.

Relacionado a isso, se um raio de luz é refletido em um espelho, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Proposição 1.7. *Sejam os pontos F_1 e F_2 situados em lados opostos de uma reta l . Considere um ponto P sobre l , e seja F'_2 a reflexão de F_2 sobre essa reta. Então, a diferença $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$ é máxima se, e somente se, F_1, F'_2 e P são colineares. Além disso, os ângulos formados por F_1P e l e por F_2P e l são iguais.*

Demonstração:



Seja um ponto X sobre l . Como F_2' é reflexão de F_2 em relação a l , temos que $\overline{F_2X} = \overline{F_2'X}$ para qualquer X sobre l . Precisamos de um ponto P tal que a diferença das distâncias de P a F_1 e F_2' seja máxima. Considere o ponto P como a interseção da reta $\overline{F_1F_2'}$ com l . Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $F_1F_2'P$, temos que

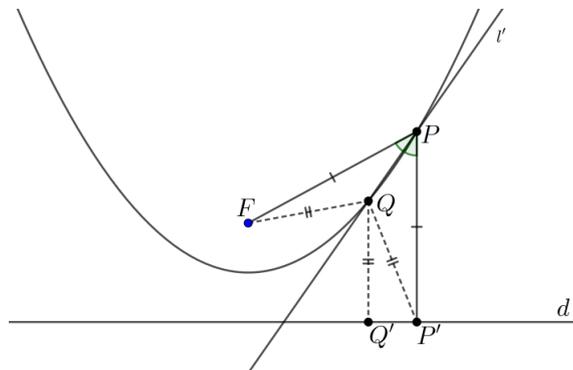
$$\overline{F_1P} \leq \overline{F_1F_2'} + \overline{F_2'P} \quad \text{e} \quad \overline{F_2'P} \leq \overline{F_2'F_1} + \overline{F_1P}$$

Isso implica que $\pm(\overline{F_1P} - \overline{F_2'P}) \leq \overline{F_1F_2'}$. Logo, $|\overline{F_1P} - \overline{F_2'P}| \leq \overline{F_1F_2'}$. Ademais, F_1, F_2' e P são colineares se, e somente se, $|\overline{F_1P} - \overline{F_2'P}| = \overline{F_1F_2'}$. Portanto, $|\overline{F_1P} - \overline{F_2'P}| = |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$ atinge seu valor máximo se, e somente se, F_1, F_2' e P forem colineares. Além disso, como F_2 e F_2' são reflexões um do outro em relação a l , os ângulos formados pelas retas $\overrightarrow{F_1P}$ e $\overrightarrow{F_2P}$ com l são iguais. ■

Vamos agora enunciar algumas das mais importantes propriedades das cônicas, conhecidas como propriedades ópticas. Essas propriedades são fundamentais nos estudos das cônicas e têm diversas aplicações.

Teorema 1.8. *Suponha que uma reta l seja tangente no ponto P na parábola. Considere P' a projeção de P sobre a diretriz. Então, a reta l é a bissetriz do ângulo $\angle FPP'$, onde F é o foco da parábola.*

Demonstração:



Suponha, por absurdo, que uma reta l' seja bissetriz do ângulo $\angle FPP'$ e intersecte a parábola em outro ponto, digamos, Q , cuja projeção à diretriz é denotada por Q' . Pela definição de parábola, $\overline{FQ} = \overline{QQ'}$. Por outro lado, o triângulo FPP' é isósceles, e a

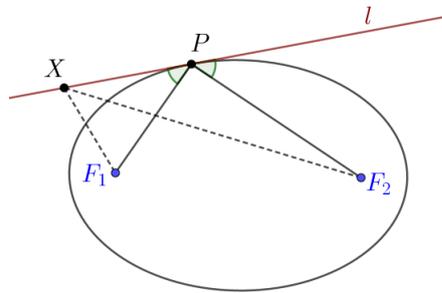
bissetriz do ângulo FPP' é também mediatriz do segmento $\overline{FP'}$, ou seja, l' é perpendicular no ponto médio de FP' . Portanto, $\overline{P'Q} = \overline{Q'Q} = \overline{FQ}$. Mas isso é absurdo, pois o triângulo $P'QQ'$ seria isósceles com ângulos da base retos, o que é impossível, já que em qualquer triângulo a soma de dois de seus ângulos internos é menor do que 180° .

Portanto, concluímos que não existe outro ponto além de P tal que a reta tangente seja a bissetriz do ângulo $\angle FPP'$. ■

A propriedade refletora da elipse é análoga à da parábola, conforme podemos ver no teorema a seguir.

Teorema 1.9. *Suponha que uma reta l seja tangente no ponto P na elipse. Então, a reta l é a bissetriz do ângulo externo $\angle F_1PF_2$, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse.*

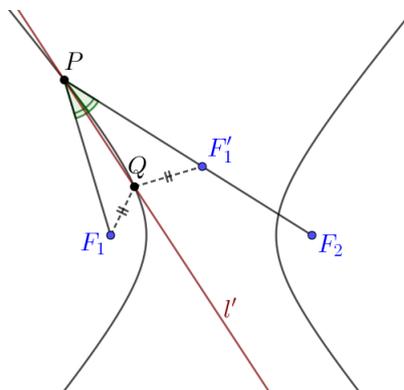
Demonstração:



Seja X um ponto arbitrário na reta l diferente de P . Como X está exterior à elipse, temos $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$. Isso significa que de todos os pontos de l , o ponto P é o que possui a menor soma das distâncias a F_1 e F_2 . Portanto, o ângulo formado pelos segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ com l são iguais, o que implica que l é a bissetriz do ângulo exterior $\angle F_1PF_2$. ■

Teorema 1.10. *Se uma linha l é tangente a uma hipérbole no ponto P , então l é a bissetriz do ângulo $\angle F_1PF_2$, onde F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.*

Demonstração:



Suponha, por absurdo, que uma reta l' seja a bissetriz do ângulo $\angle F_1PF_2$, e intersecte a hipérbole em um ponto Q , localizado no mesmo ramo que P . Por simplicidade, considere que o ponto P está no ramo cujo foco é F_1 . Seja F_1' o simétrico de F_1 em relação a l' . Então, $\overline{F_1Q} = \overline{QF_1'}$ e $\overline{F_1P} = \overline{PF_1'}$. Além disso, como l' é a bissetriz do ângulo $\angle F_1PF_2$,

ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas $\overleftrightarrow{F_1P}$ e $\overleftrightarrow{F_2P}$. Assim, o ponto F'_1 pertence ao lado $\overleftrightarrow{F_2P}$, ou seja, P, F'_1 e F_2 são colineares. Logo, pela definição da hipérbole, $|\overline{F_2P} - \overline{F_1P}| = |\overline{F_2Q} - \overline{F_1Q}|$. Portanto, $\overline{F_2F'_1} = |\overline{F_2P} - \overline{PF'_1}| = |\overline{F_2Q} - \overline{QF'_1}|$. Mas isso é um absurdo, pois pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $F_2QF'_1$, temos $\overline{F_2F'_1} > |\overline{F_2Q} - \overline{QF'_1}|$. Portanto, a bissetriz do ângulo $\angle F_1PF_2$ é a reta tangente l . ■

Observação 1.11. O primeiro cientista a construir um telescópio para observação astronômica foi Galileu Galilei (1564 - 1642). Em 1609, ele fez notáveis descobertas, incluindo a observação da superfície lunar e muitos outros objetos dos espaço.

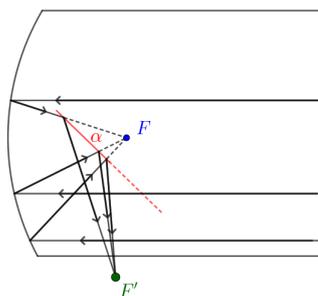


Figura 1.12: Esquema ilustrativo do telescópio de Newton.

Isaac Newton (1642 - 1727) construiu um telescópio refletor, que é basicamente composto por um espelho parabólico no fundo de um tubo. Como ilustrado na Figura 1.12, Newton teve a ideia de colocar um espelho plano α entre o espelho parabólico e o foco F no telescópio refletor. Dessa forma, os raios que formariam a imagem no foco F são novamente refletidos para um ponto F' fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.

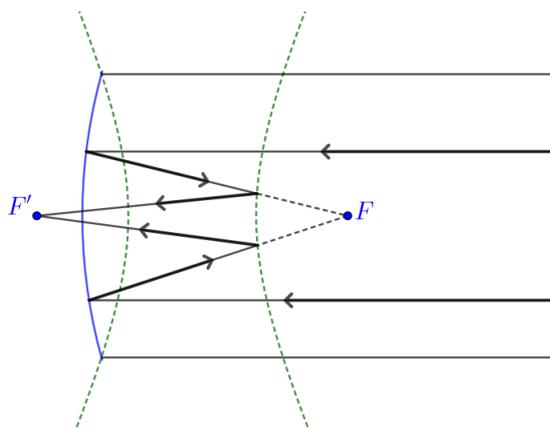


Figura 1.13: Esquema ilustrativo do telescópio Cassegrain.

Em 1672, o astrônomo francês Laurent Cassegrain propôs a utilização do espelho hiperbólico entre o espelho parabólico e o foco F da parábola, de modo que um dos seus focos do espelho hiperbólico coincida com o foco da parábola, veja Figura 1.13. Deste modo, os raios que formariam a imagem no foco F da parábola são refletidos novamente, formando a imagem no foco F' da hipérbole, fora do tubo do telescópio.

A seguir, apresentamos mais um importante resultado envolvendo um círculo tangente a uma corda que passa por um dos focos da elipse.

Proposição 1.12. *Suponha que a corda \overline{PQ} contenha o foco F_1 da elipse. Seja R o ponto de interseção das tangentes à elipse em P e Q . Então, R é o centro do círculo ex-inscrito ao lado \overline{PQ} do triângulo F_2PQ , e F_1 é o ponto de tangência desse círculo com o lado \overline{PQ} .*

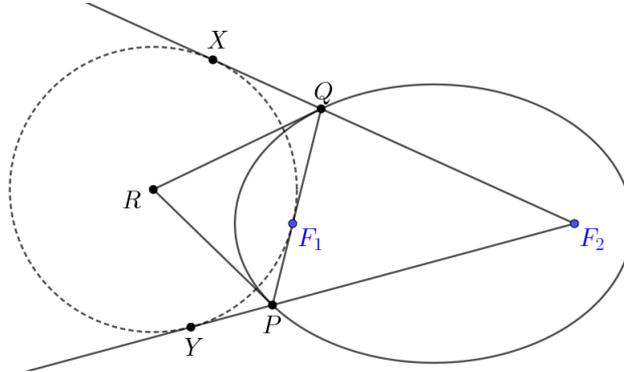


Figura 1.14: Círculo de centro R tangente à corda \overline{PQ} no ponto F_1

Demonstração: Pela propriedade óptica da elipse, \overleftrightarrow{RQ} e \overleftrightarrow{RP} são as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo F_2PQ . Logo, R é o centro do círculo ex-inscrito, conforme ilustrado na Figura 1.14. Os pontos X e Y são os pontos de tangências dos prologamentos de $\overline{F_2Q}$ e $\overline{F_2P}$, respectivamente. Considere o ponto F'_1 o ponto de tangência do círculo correspondente ao lado do triângulo. Observe que $\overline{F_2X} = \overline{F_2Y}$, já que F_2 é um ponto exterior ao círculo ex-inscrito relativo ao lado \overline{PQ} do triângulo F_2QP . Da mesma forma, $\overline{QX} = \overline{QF'_1}$ e $\overline{PY} = \overline{PF'_1}$. Sendo assim,

$$\overline{F_2Q} + \overline{QF'_1} = \overline{F_2Q} + \overline{QX} = \overline{F_2X} = \overline{F_2Y} = \overline{F_2P} + \overline{PY} = \overline{F_2P} + \overline{PF'_1} = 2a_1$$

Como P e Q pertencem à elipse, F_1 e F'_1 pertencem ao lado \overline{PQ} , temos

$$\begin{aligned} 4a_1 &= (\overline{F_2P} + \overline{PF'_1}) + (\overline{F_2Q} + \overline{QF'_1}) \\ &= \overline{F_2P} + \overline{PQ} + \overline{QF_2} \\ &= (\overline{F_2P} + \overline{PF_1}) + (\overline{F_2Q} + \overline{QF_1}) \\ &= 4a \end{aligned}$$

Portanto, $a_1 = a$. Devido ao fato de que P pertence a elipse, concluímos que

$$\overline{PF'_1} = 2a_1 - \overline{PF_2} = 2a - \overline{PF_2} = \overline{PF_1}$$

Logo, $F_1 = F'_1$, já que F_1 e F'_1 estão na mesma semirreta de origem P . ■

Corolário 1.13. *A reta que passa por um foco de uma elipse e pela interseção das tangentes à elipse pelas extremidades de uma corda contendo esse foco é perpendicular à corda.*

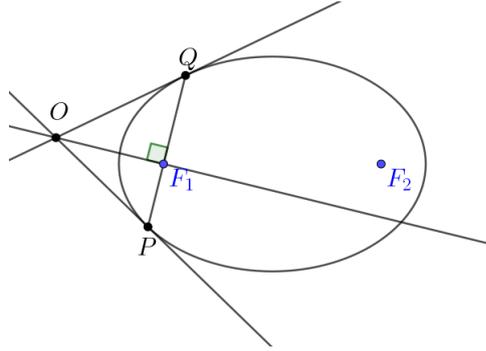


Figura 1.15: A reta $\overrightarrow{OF_1}$ perpendicular à \overline{PQ} .

Demonstração: Pela proposição anterior, vimos que o ponto O é o centro do círculo que tangencia a corda \overline{PQ} no ponto F_1 . Portanto, a reta $\overrightarrow{OF_1}$ é perpendicular à corda \overline{PQ} . ■

1.3 Propriedade isogonal das cônicas

As propriedades ópticas das cônicas podem ser utilizadas para produzir provas elementares dos resultados a seguir.

Teorema 1.14. *De um ponto P fora de uma elipse, desenhe duas tangentes à elipse nos pontos A e B . Então, as medidas dos ângulos $\angle F_1PA$ e $\angle F_2PB$ são iguais, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse.*

Demonstração:

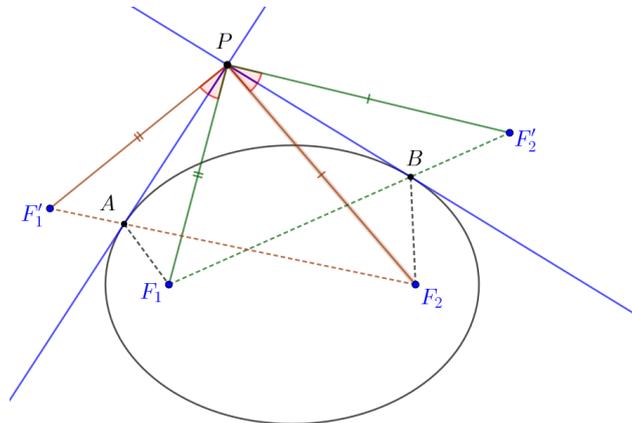


Figura 1.16: Propriedade isogonal da elipse

Seja F_1' a reflexão de F_1 sobre \overleftrightarrow{PA} e F_2' a reflexão de F_2 sobre \overleftrightarrow{PB} . Então, $\overline{PF_1'} = \overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2'} = \overline{PF_2}$. Além disso, pela propriedade refletora, os pontos F_1, B e F_2' estão na mesma reta. Da mesma forma, os pontos F_2, A e F_1' estão alinhados. Assim,

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_2A} + \overline{AF_1} = \overline{F_1B} + \overline{F_2B} = \overline{F_1F_2'}$$

Portanto, os triângulos PF_2F_1' e PF_1F_2' são congruentes (caso LLL). Consequentemente,

$$F_2\hat{P}F_1 + 2F_1\hat{P}A = F_2\hat{P}F_1' = F_1\hat{P}F_2' = F_1\hat{P}F_2 + 2F_2\hat{P}B$$

Logo, $F_1\hat{P}A = F_2\hat{P}B$. ■

Assim como a elipse, em que $\angle F_1PA = \angle F_2PB$, a hipérbole também tem uma propriedade isogonal, conforme podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 1.15. *Seja uma hipérbole com focos F_1 e F_2 . Considere ω o ramo da hipérbole no qual F_2 está situado. Suponha que as tangentes em ω nos pontos A e B se encontrem no ponto P . Então, as retas PA e PB são isogonais em relação a $\angle F_1PF_2$.*

Demonstração:

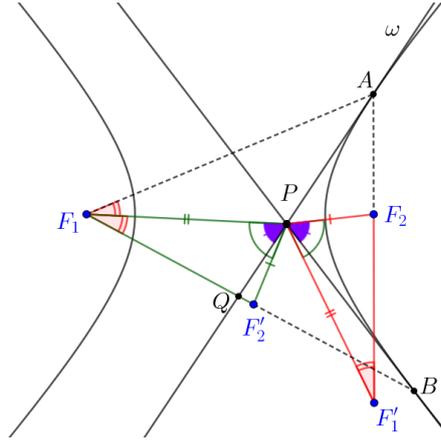


Figura 1.17: Propriedade isogonal da hipérbole

Seja F'_1 a reflexão de F_1 sobre a reta \overleftrightarrow{PA} e F'_2 a reflexão de F_2 sobre a reta \overleftrightarrow{PB} (ver na Figura 1.17). Então, $\overline{F_1A} = \overline{F'_1A}$ e $\overline{F_2B} = \overline{F'_2B}$. Pelo Proposição 1.7 F'_1, F_2 e A são colineares, pois $|\overline{F_1A} - \overline{F_2A}| = |\overline{F'_1A} - \overline{F_2A}|$. Da mesma forma, F_1, F'_2 e B também são colineares, uma vez que $|\overline{F_1B} - \overline{F_2B}| = |\overline{F_1B} - \overline{F'_2B}|$. Segue da definição da hipérbole que

$$\overline{F'_1F_2} = |\overline{F'_1A} - \overline{F_2A}| = |\overline{F_1B} - \overline{F'_2B}| = \overline{F_1F'_2}$$

Portanto, os triângulo $F_1PF'_2$ e F'_1PF_2 são congruentes (caso *LLL*). Isso implica que $F_1\hat{P}F'_2 = F'_1\hat{P}F_2$. Agora, observamos que

$$\begin{cases} F_1\hat{P}Q + Q\hat{P}F'_2 = F_2\hat{P}B + B\hat{P}F'_1 \\ F_1\hat{P}Q = Q\hat{P}F'_2 + F'_2\hat{P}F'_1 \\ F_2\hat{P}B = F'_2\hat{P}F'_1 + F'_1\hat{P}B \end{cases}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} F_1\hat{P}Q + F_1\hat{P}Q - F'_2\hat{P}F'_1 &= F_2\hat{P}B + F_2\hat{P}B - F'_2\hat{P}F'_1 \\ 2F_1\hat{P}Q &= 2F_2\hat{P}B \\ F_1\hat{P}Q &= F_2\hat{P}B \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{F_1P}$ e \overleftrightarrow{PA} é igual ao o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{F_2P}$ e \overleftrightarrow{PB} . ■

Apresentamos, agora, a generalização do teorema 1.14.

Teorema 1.16. *Dado um ponto P externo a uma elipse, traçam-se duas tangentes à elipse intersectando nos pontos A e B . Seja F_1 um dos focos da elipse. Então, a reta F_1P é a bissetriz do ângulo $\angle AF_1B$.*

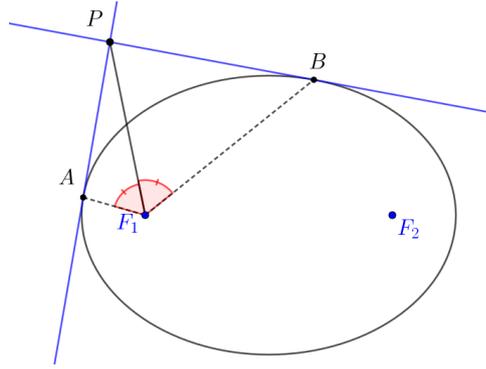


Figura 1.18: Propriedade isogonal da elipse

Demonstração: Utilizando a prova do teorema 1.14, e observando que os triângulo $F_1'PA$ e F_1PA são congruentes pelo caso LLL , temos que $\widehat{PF_1'A} = \widehat{AF_1P}$. Portanto, podemos concluir que

$$P\widehat{F_1}A = P\widehat{F_1}F_2 = P\widehat{F_1}F_2' = P\widehat{F_1}B$$

■

1.4 Cônicas e as Esferas de Dandelin

Considere um cone de vértice V e base circular de centro C . O cone é formado pelas retas que ligam V a todos os pontos do círculo de base. Cada uma dessas retas é denominada de uma geratriz do cone.

Agora, considere uma seção cônica obtida pela interseção do cone com um plano β que intercepta todas as suas geratrizes, mas que não é perpendicular ao seu eixo de simetria (a reta que passa por V e é perpendicular à base circular do cone C). Inscreva duas esfera no cone, de modo que ambas toquem o plano β nos pontos F_1 e F_2 , ver Figura 1.19.

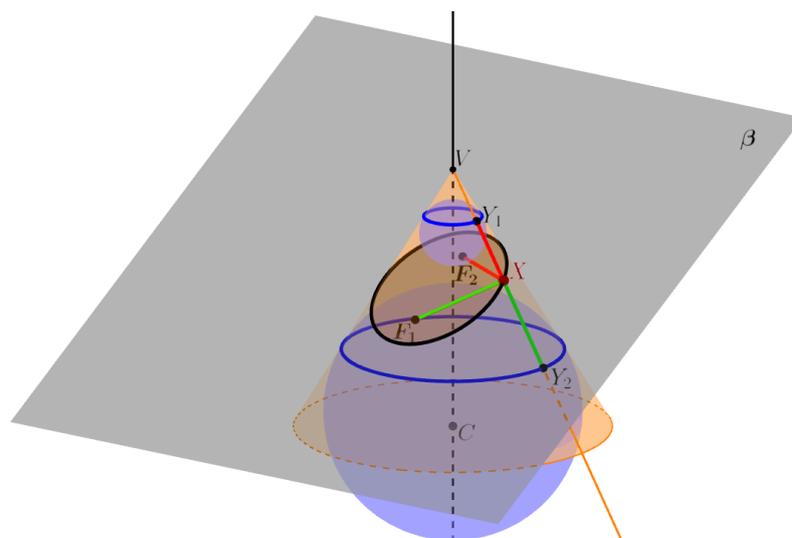


Figura 1.19: O plano β secciona o cone em uma única folha e tangencia as esferas nos pontos F_1 e F_2 .

Seja um ponto arbitrário X na interseção do cone com o plano β . Considere que Y_1 e Y_2 sejam os pontos de interseções da reta \overleftrightarrow{VX} (uma das geratrizes) com as esferas inscritas. Temos que $\overline{XF_1} = \overline{XY_1}$ e $\overline{XF_2} = \overline{XY_2}$, pois os segmentos das tangentes a uma esfera traçadas a partir de um ponto exterior à esfera são iguais. Portanto, $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = \overline{Y_1Y_2}$.

O comprimento do segmento $\overline{Y_1Y_2}$, que está entre os dois planos perpendiculares ao eixo de simetria do cone (planos que contêm os círculos que passam por Y_1 e Y_2), é independente da escolha do ponto X . Logo, a interseção do cone com o plano β é uma elipse.

Vamos considerar, agora, o caso de duas esferas inscritas no cone de duas folhas que intersectam um plano α paralelo a duas geratrizes nos pontos F_1 e F_2 , como mostra a Figura 1.20.

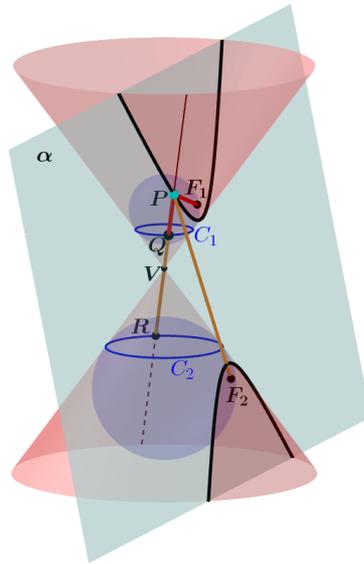


Figura 1.20: O plano α secciona o cone em duas folhas e é tangente às esferas nos pontos F_1 e F_2 .

Seja P um ponto qualquer na interseção do plano α com a folha superior do cone. A geratriz tangencia as esferas nos pontos Q e R , de modo que $\overline{PF_1} = \overline{PQ}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PR}$, pois os segmentos das tangentes traçadas a uma esfera a partir do mesmo ponto são iguais. Levando em conta que $\overline{PF_2} > \overline{PF_1}$ (já que P está mais próximo a F_1) a diferença é positiva e obtemos

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PR} - \overline{PQ} = \overline{QR}$$

Os círculos que passam por Q e R são as interseções do cone de folhas duplas com as esferas. O comprimento do segmento QR não depende do ponto P . Mais precisamente,

$$\overline{QR} = \overline{QV} + \overline{VR} = \sqrt{h_1^2 + r_1^2} + \sqrt{h_2^2 + r_2^2}$$

onde h_i é a altura relativa ao cone de vértice V , cuja base é o círculo C_i , de raio r_i . Para qualquer ponto P , a distância \overline{QR} é constante.

Se escolhermos P na interseção do plano α com a folha inferior do cone, teremos $\overline{PF_1} > \overline{PF_2}$ e a diferença $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ também será positiva e igual a \overline{QR} . Logo, podemos concluir ambos os casos numa única expressão: $|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}|$ é uma constante que não depende do ponto P . Deste modo, todo ponto na interseção do plano com a superfície do cone tem suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 satisfazendo $|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = k$, em

que k é uma constante que não depende do ponto. Portanto, a seção transversal é uma hipérbole.

Finalmente, considere o caso, digamos π , é paralelo a uma geratriz, conforme ilustra a figura 1.21.

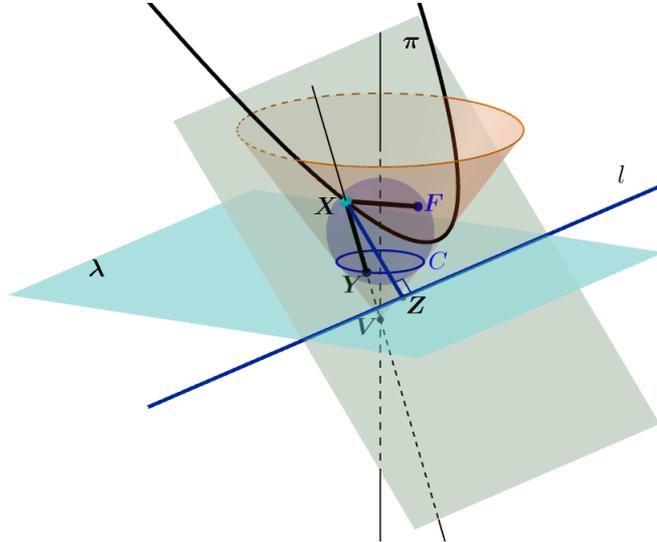


Figura 1.21: O plano π secciona o cone paralelamente a uma geratriz e é tangente à esfera no ponto F .

Nesse caso, inscreve-se no cone uma esfera tangente a plano π no ponto F . Esta esfera é tangente ao cone ao longo de um círculo C situado em um plano λ , perpendicular ao eixo do cone. Considere l a reta de interseção dos planos π e λ . Para um ponto arbitrário X na interseção do cone com o plano π , seja Y o ponto de interseção da geratriz \overrightarrow{VX} com o plano λ e seja Z a projeção ortogonal de X a l . Então, $\overline{XF} = \overline{XY}$, pois ambos os segmentos são tangentes à esfera.

Por outro lado, Y e Z estão em λ , o ângulo entre \overline{XY} e λ é igual ao ângulo entre uma geratriz e o plano λ perpendicular ao eixo cone, e o ângulo entre \overline{XZ} e λ é igual ao ângulo entre os planos π e o λ . Como o plano π é paralelo a uma das geratrizes do cone, esses ângulos são iguais. Logo $\overline{XY} = \overline{XZ}$, pois esses segmentos formam ângulos iguais com o plano λ . Portanto, $\overline{XF} = \overline{XZ}$, o que implica que X está na parábola com foco F e diretriz l .

Dado um cone circular reto, qualquer plano perpendicular ao eixo do cone é paralelo ao plano da base. Sendo assim, toda geratriz forma ângulos iguais com o plano perpendicular ao eixo. Por isso, a elipse, a hipérbole e a parábola são chamadas de seções cônicas ou simplesmente cônicas. Além disso, as esferas inscritas no cone, que tangenciam cada plano em cada uma das situações acima, são conhecidas como esferas de Dandelin.

1.5 A excentricidade e outra definição de cônicas

A construção que acabamos de descrever das esferas de Dandelin revela uma outra importante propriedade das cônicas.

Consideremos um plano α que intersecta o cone circular reto de vértice V . Suponhamos uma esfera inscrita no cone e tangente ao plano α no ponto F_1 . Similarmente ao caso da parábola, seja λ o plano que contém os pontos de tangência do cone com a esfera.

Seja l a reta de interseção de α e λ . Suponha que um ponto X esteja na interseção do cone com o plano α . Seja Y a interseção da reta VX com λ e Z a projeção de X sobre l . Vamos mostrar que a razão de XY e XZ é constante, ou seja, não depende de X .

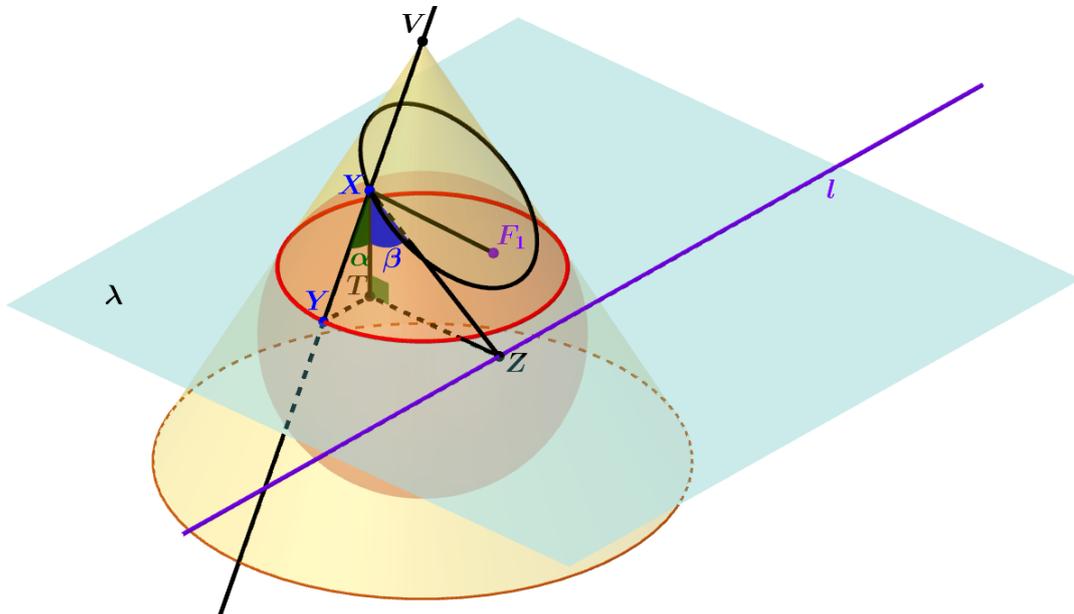


Figura 1.22: O plano λ passa pela interseção entre o cone e a esfera, e l é a interseção de λ com o plano que contém a cônica.

Seja T a projeção de X sobre o plano λ (Figura 1.22). Considere o ângulo $\alpha = \angle YXT$ do triângulo retângulo XTY , e o ângulo $\beta = \angle TXZ$ do triângulo. Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, obtemos

$$\overline{XT} = \overline{XY} \cos \alpha = \overline{XZ} \cos \beta$$

Segue-se que a razão entre \overline{XT} e \overline{XY} não depende de X , e é igual $\cos(\alpha)$. Da mesma forma, a razão entre \overline{XT} e \overline{XZ} também não depende de X , e é igual a $\cos(\beta)$. Portanto,

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{XT}}{\overline{XZ}} \cdot \frac{\overline{XY}}{\overline{XT}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Como $\overline{XY} = \overline{XF_1}$, temos que a razão $\frac{\overline{XF_1}}{\overline{XZ}}$ é constante.

Assim, para qualquer cônica, existe uma reta tal que, para qualquer ponto na cônica, a razão entre as distâncias do ponto ao foco e a reta é constante. Essa razão é chamada de excentricidade da cônica, e as retas são chamadas de diretrizes. Tanto a elipse quanto a hipérbole tem duas diretrizes (uma para cada foco).

É fácil ver que esta propriedade leva a mais uma definição de cônicas:

Uma cônica com foco F , diretriz l (onde F não está em l) e excentricidade ϵ é o conjunto de pontos onde a razão das distância a F e a l é igual a ϵ . Desde forma:

- Se $\epsilon > 1$, então a curva é uma hipérbole.
- Se $\epsilon = 1$, é uma parábola.
- Se $\epsilon < 1$, é uma elipse.

Observação 1.17. Isso nos mostra que, em coordenadas, as cônicas são curvas gerais do segundo grau em duas variáveis, contando com os casos degenerados.

1.6 Algumas propriedades notáveis da parábola

Nesta seção, abordaremos algumas propriedades importantes da parábola. Consideremos o ponto F como o foco da parábola. Iniciaremos com o seguinte lema:

Lema 1.18. *Se o foco de uma parábola reflete na tangente, então sua imagem estará sobre a diretriz. Essa imagem corresponde à projeção do ponto onde a tangente toca a parábola.*

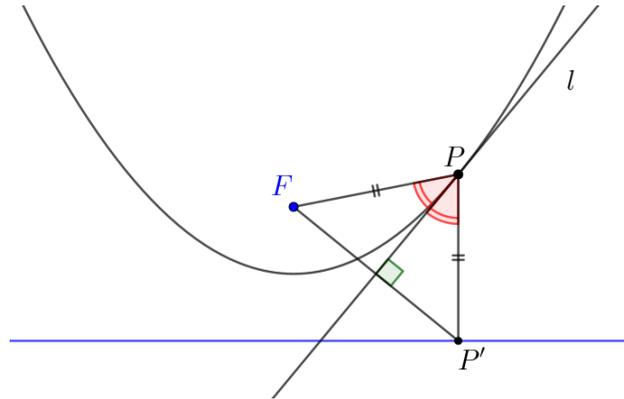


Figura 1.23: O ponto P' é a projeção do ponto P sobre a diretriz.

Demonstração: Suponha que a reta l seja tangente à parábola no ponto P (ver Figura 1.23). Seja P' a projeção de P sobre a reta diretriz. Como o triângulo FPP' é isósceles, a reta l , pelo Teorema 1.8, é a bissetriz do ângulo em P e também o eixo de simetria. Portanto, a reflexão de P' de F sobre l está na diretriz. ■

Corolário 1.19. *As projeções do foco de uma parábola sobre suas tangentes estão todas na reta tangente à parábola no seu vértice.*

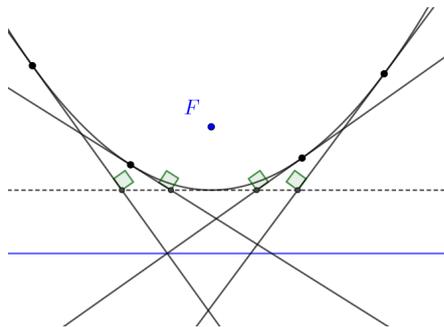


Figura 1.24: Conjunto de retas tangentes à parábola com foco em F .

Demonstração: Inicialmente, observe que pelo lema 1.18, as projeções dos pontos de tangência da parábola estão sobre a diretriz. Queremos mostrar que os pontos médios dos segmentos formados pelo foco e as projeções dos pontos de tangência estão sobre uma reta.

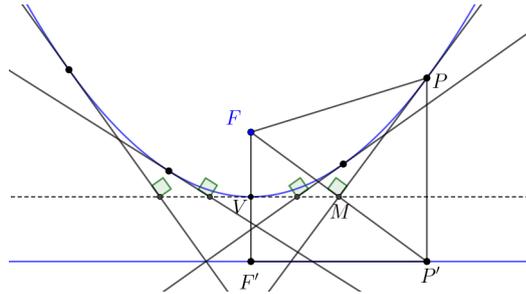


Figura 1.25

Considere na parábola os pontos V (vértice) e P , e na diretriz F' e P' as projeções de F e P (Figura 1.25). Seja M o ponto médio de $\overline{FP'}$, interseção da tangente em P com $\overleftrightarrow{FP'}$. Pela propriedade da base média, aplicada ao triângulo $FP'F'$ temos que, \overleftrightarrow{VM} é paralela a diretriz. Portanto, para qualquer ponto P na parábola, o ponto médio do segmento formado por F e a projeção de P sobre a diretriz está sobre uma reta paralela à diretriz, ou seja, as projeções de F estão sobre a tangente à parábola em V . ■

Lema 1.20. *Suponha que as tangentes à parábola nos pontos X e Y se intersectam em um ponto P . Então, P é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $FX'Y'$, onde X' e Y' são as projeções de X e Y na diretriz da parábola, e F é o foco da parábola (Figura 1.26).*

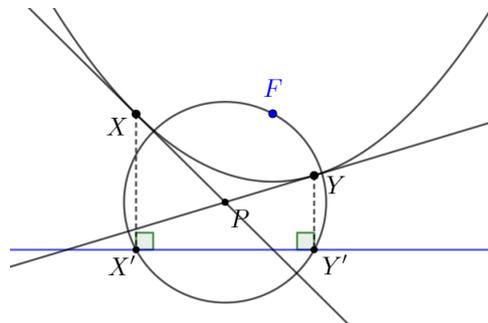


Figura 1.26

Demonstração: Pelo Lema 1.18, essas duas tangentes são as mediatrizes do ponto médio aos segmentos $\overline{FX'}$ e $\overline{FY'}$ (Figura 1.26). Portanto, o ponto de interseção dessas duas tangentes é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $FX'Y'$. ■

Corolário 1.21. *Se \overleftrightarrow{PX} e \overleftrightarrow{PY} são as tangentes à parábola, então a projeção de P à diretriz é o ponto médio do segmento cujas extremidades são as projeções de X e Y (conforme Figura 1.27).*

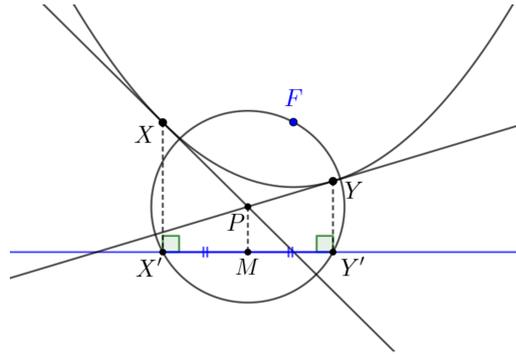


Figura 1.27: Retas tangentes à parábola que passam pelo ponto P .

Demonstração: Como P é o circuncentro do triângulo $X'FY'$, temos que o triângulo $X'PY'$ é isósceles de base $\overline{X'Y'}$. Além disso, \overline{PM} é altura de $X'PY'$ em relação ao lado $\overline{X'Y'}$, temos que \overline{PM} também é mediana relativa ao lado $\overline{X'Y'}$. Logo, M é o ponto médio de $\overline{X'Y'}$ ■

Qual é o conjunto P onde a parábola é vista em ângulo reto? A proposição a seguir, semelhante à Proposição 1.12, mas aplicada à parábola, responde a essa pergunta.

Proposição 1.22. *O conjunto de pontos P onde a parábola é vista em ângulo reto é a diretriz da parábola. Além disso, se \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PY} são tangentes à parábola, então \overline{XY} contém F e PF é a altura do triângulo PXY .*

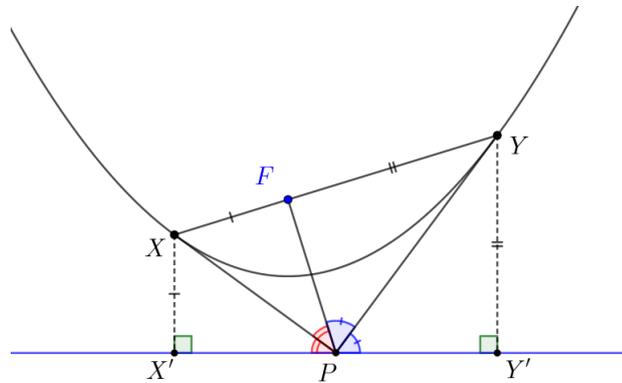


Figura 1.28: As retas \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PY} intersectam-se perpendicularmente no ponto P , que está sobre a diretriz.

Demonstração: Suponha que P está na diretriz, e sejam X' e Y' as projeções de X e Y na diretriz. Então, os triângulos PXF e PXX' são congruentes, pelo caso LAL , pois $\overline{XF} = \overline{X'X}$, \overline{XP} é lado comum e $\widehat{PXX'} = \widehat{PXF}$. Sendo assim, as retas \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PY} são bissetrizes dos ângulos $\angle FPX'$ e $\angle FPY'$, respectivamente. Como os ângulos $\angle PFX$ e $\angle PFY$ são retos, temos que X, F e Y são colineares, com F entre X e Y , e PF é a altura relativa ao lado XY do triângulo PXY .

Agora, seja P um ponto que não pertence à parábola, intersecção de duas tangentes à parábola em X e Y , que são perpendiculares. Novamente, consideremos X' e Y' as projeções de X e Y sobre a diretriz da parábola. Como as retas \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PY} são bissetrizes relativas aos vértices X e Y dos triângulos isósceles $X'XF$ e $Y'YF$, os triângulos $X'XP$

e XFP são congruentes, assim como YFP e $YY'P$, também são pelo caso LAL . Dessa forma, os ângulos $\angle X'PF$ e $\angle FPY'$ são suplementares o que implica que X', P e Y' são colineares. Portanto, P está na diretriz. ■

Para parábola, também é possível enunciar um resultado semelhante ao Teorema 1.14 e 1.16.

Proposição 1.23. *Sejam \overleftrightarrow{PX} e \overleftrightarrow{PY} as tangentes à parábola passando pelo ponto P , e seja l a reta passando por P paralela ao eixo da parábola. Então, a medida do ângulo entre as retas PY e l é igual a medida do ângulo $\angle XPF$, e os triângulos AFP e PFY são semelhantes. Como consequência, FP é a bissetriz do ângulo $\angle XFY$.*

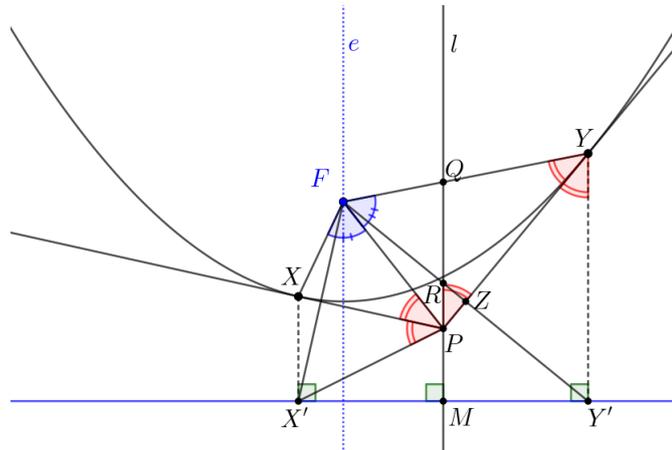


Figura 1.29: O ângulo $\angle lPY = \angle XPF$, onde l é perpendicular à diretriz passando pelo ponto P .

Demonstração: Considere X' e Y' as projeções de X e Y sobre a diretriz (conforme Figura 1.29). Então, pelo Lema 1.20, os pontos X', F e Y' estão sobre um círculo. Logo, $X'\widehat{Y}'F = \frac{1}{2}X'\widehat{P}F = X\widehat{P}F$. Por outro lado, o ângulo $Q\widehat{P}Y = P\widehat{Y}Y'$ assim como $Y\widehat{Y}'R = M\widehat{R}Y'$, um vez que as retas l e YY' são paralelas (perpendiculares à diretriz). Como $\overline{FY'}$ é perpendicular a \overline{PY} , os triângulos retângulos RPZ e $RY'M$, retângulos em Z e M , são semelhantes, pois têm um ângulo em comum, $\angle PRZ = \angle MRY'$. Logo, $Q\widehat{P}Y = X'\widehat{Y}'F = X\widehat{P}F$.

Agora, precisamos mostrar que os triângulos FPX e FPY são semelhantes. De fato, pela propriedade óptica, $\angle FYP = \angle PYY'$, isto implica que $X\widehat{P}F = F\widehat{Y}P$. Da mesma forma, $\angle X'XP = \angle FXP$. Como $\overleftrightarrow{XX'}$ é paralelo a l , então $F\widehat{X}P = X\widehat{P}Q$. Além disso,

$$X\widehat{P}Q = X\widehat{P}F + F\widehat{P}Q = F\widehat{P}Q + Q\widehat{P}Y = F\widehat{P}Y$$

Assim, $F\widehat{X}P = F\widehat{P}Y$. Portanto, os triângulos AFP e PFY são semelhantes (caso AA). ■

O próximo resultado que veremos é conhecido como a *reta de Simson-Wallace*. Ela será útil para provar outro teorema.

Teorema 1.24 (Simson-Wallace). *As projeções de P aos lados de um triângulo ABC está sobre uma reta se, e somente se, P está no círculo circunscrito do triângulo ABC .*

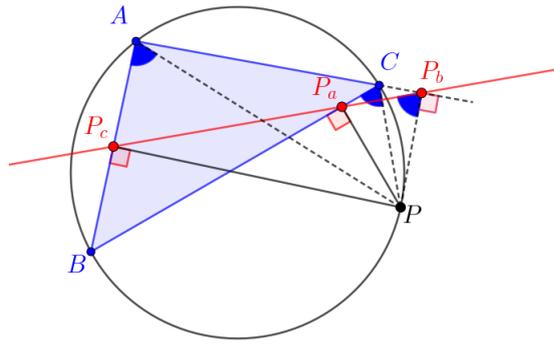


Figura 1.30: Círculo circunscrito ao triângulo ABC com uma reta passando pelos pontos P_a , P_b e P_c .

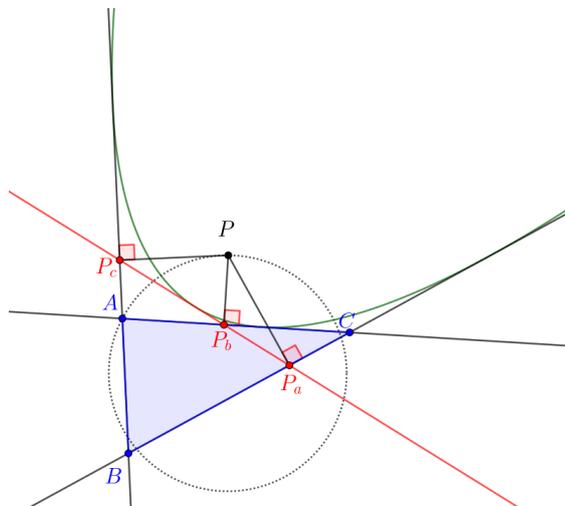
Demonstração: Sejam P_a, P_b e P_c as projeções de P sobre os lados BC, CA e AB , respectivamente. Vamos considerar o caso conforme a Figura 1.30. Os demais casos são tratados de forma análoga.

Inicialmente, note que o quadrilátero PP_bCP_a é inscrito, então $P\hat{C}P_a = P\hat{P}_bP_a$. Da mesma forma, para o quadrilátero PP_bAP_c , temos que $P\hat{P}_bP_c = P\hat{A}P_c$. Os pontos P_a, P_b e P_c são colineares se, e somente se, $P\hat{P}_bP_c = P\hat{P}_bP_a$ ou, equivalentemente, $P\hat{A}P_c = P\hat{C}P_a$. Mas isso significa que P está circuncirculo do triângulo ABC .

Reciprocamente, se P está no circuncirculo de um triângulo ABC , então $P\hat{A}B = P\hat{C}B = P\hat{P}_bP_a$. Sendo este último válido pois o quadrilátero PP_bCP_a é inscrito. Da mesma forma, $P\hat{A}B = P\hat{P}_bP_c$. Portanto, P_a, P_b e P_c são colineares, ou seja, estão em uma reta. ■

Teorema 1.25. *Suponha que um triângulo ABC esteja circunscrito a uma parábola, ou seja, as retas AB, BC e CA são tangentes à parábola. Então, o foco da parábola está no círculo circunscrito ao triângulo ABC .*

Demonstração:



Pelo Corolário 1.19, as projeções do foco sobre os lados do triângulo estão todas em uma reta (que é paralela à diretriz e está à metade da distância do foco à diretriz). Portanto, pelo Teorema 1.24, segue o resultado. ■

Assim, para cada ponto do círculo circunscrito a um triângulo ABC , podemos associar uma única parábola tangente aos lados do triângulo. Mais precisamente, consideremos um ponto arbitrário P no círculo circunscrito ao triângulo ABC e aplique a reflexão sobre os lados do triângulo. Obtemos os pontos P_A, P_B e P_C , alinhados em uma reta. A parábola com foco em P e diretriz $\overleftrightarrow{P_A P_B}$ é tangente a todos os lados do triângulo. Por exemplo, ela tocará \overleftrightarrow{BC} no ponto de interseção de \overleftrightarrow{BC} com a perpendicular à reta $\overleftrightarrow{P_A P_B}$ que passa por P_A , ver Figura 1.31.

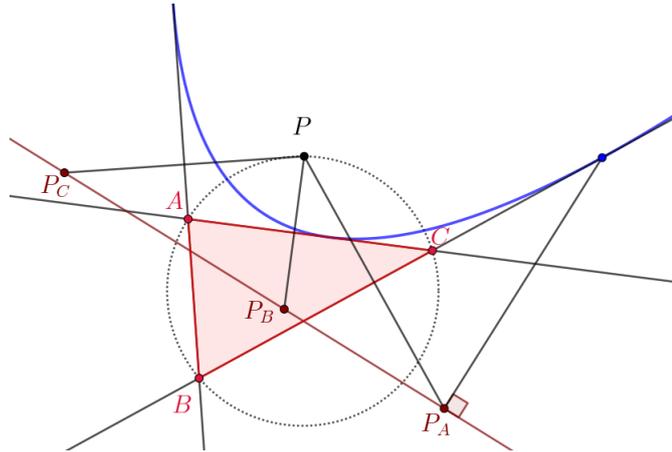


Figura 1.31: Parábola inscrita no triângulo ABC , que está inscrito em um círculo que passa pelo ponto P .

A reta de Simson-Wallace possui algumas propriedades interessantes, que exploraremos a seguir.

Lema 1.26. *Suponha que P seja um ponto sobre o círculo circunscrito de um triângulo ABC . Escolha um ponto B' no círculo circunscrito tal que a reta $\overleftrightarrow{PB'}$ seja perpendicular a AC . Então, a reta $\overleftrightarrow{BB'}$ é paralela à reta de Simson-Wallace de P com respeito ao triângulo ABC (ver Figura 1.32).*

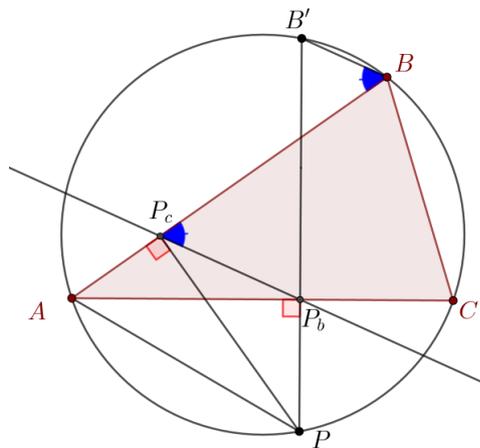


Figura 1.32: Círculo circunscrito ao triângulo ABC e a reta de Simson-Wallace $\overleftrightarrow{P_b P_c}$.

Demonstração: Considere o caso em que o ponto P está no arco \widehat{AC} , conforme mostrado na Figura 1.32. Os demais casos são tratados de maneira semelhante.

Sejam P_c e P_b as projeções ortogonais do ponto P sobre os lados AB e AC , respectivamente. Como $\widehat{ABB'}$ e $\widehat{APB'}$ correspondem ao mesmo arco $\widehat{AB'}$, temos $\widehat{ABB'} = \widehat{APB'}$. Como, $\widehat{AP_cP}$ e $\widehat{PP_bA}$ correspondem ao mesmo arco \widehat{AP} , ou seja, $\widehat{AP_cP} = \widehat{PP_bA}$, temos que o quadrilátero APP_bP_c é inscrito e a soma de seus ângulos opostos é igual a 180° . Portanto, $\widehat{AP_cP_b}$ e $\widehat{AP_bP_c}$ são suplementares. Temos então

$$\widehat{AP_bP'} = \widehat{AP_cP_b} = 180^\circ - \widehat{AP_cP_b} = \widehat{BP_cP_b}$$

Portanto, $\overleftrightarrow{P_bP_c}$ é paralelo a $\overleftrightarrow{BB'}$. ■

Corolário 1.27. *Seja H o ortocentro do triângulo ABC . A reta de Simson-Wallace do ponto P em relação ao triângulo ABC intersecta PH no seu ponto médio (Figura 1.33).*

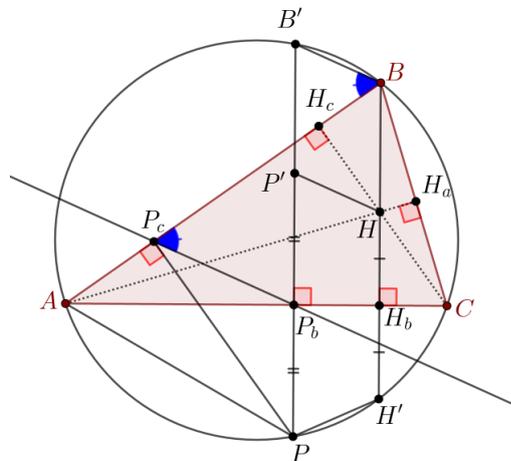


Figura 1.33

Demonstração: Seja H' o simétrico de H relativo à reta \overleftrightarrow{AC} . Consideremos H_a o pé da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC . Note que o quadrilátero AH_cH_aC é inscrito. Desta forma, $\widehat{H_aAB} = \widehat{H_cCB} = 90^\circ - \widehat{ABC}$. Como os triângulos AHC e $AH'C$ são congruentes (por reflexão em relação à reta \overleftrightarrow{AC}), segue-se que $\widehat{AHC} = \widehat{AH'C}$. Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{AHC} = \widehat{AH'C} &= 180^\circ - (\widehat{HAC} + \widehat{HCA}) \\ &= 180^\circ - [(\widehat{BAC} - \widehat{HAB}) + (\widehat{BCA} - \widehat{HCB})] \\ &= 180^\circ - [\widehat{BAC} - 90^\circ + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} - 90^\circ + \widehat{ABC}] \\ &= 180^\circ - \widehat{ABC} \end{aligned}$$

Então, $\widehat{ABC} + \widehat{AH'C} = 180^\circ$. Consequentemente, o quadrilátero $ABCH'$ é inscrito, ou seja, H' pertence ao círculo circunscrito ao triângulo ABC .

Agora, considerando as retas $\overleftrightarrow{B'P}$ e $\overleftrightarrow{BH'}$, ambas são perpendiculares ao lado \overline{AC} do triângulo ABC , o que significa que elas são paralelas. Sendo assim, o quadrilátero inscrito $B'BH'P$ é um trapézio. Tomando as diagonais $\overline{B'H'}$ e \overline{BP} , temos que os triângulos $B'H'B$ e PBH' são congruentes, pelo caso AA. Isso implica que $\overline{BB'} = \overline{H'P}$, mostrando que o trapézio $B'BH'P$ é isósceles.

A seguir, refletindo a corda $\overline{PH'}$ em relação à reta \overleftrightarrow{AC} , obtemos o segmento $\overline{P'H}$, que é paralelo à corda $\overline{B'B}$. Como $\overline{B'B}$ é paralelo à reta de Simson-Wallace, concluímos que $\overline{P'H}$ também é paralelo à reta de Simson-Wallace.

Pelo fato de que P' é o simétrico de P relativo ao lado \overline{AC} , e que P_b é o pé da perpendicular que passa por P e P' , temos que P_b é o ponto médio do lado $\overline{PP'}$ do triângulo $PP'H$. Aplicando o Teorema da Base Média ao triângulo $PP'H$, concluímos que a reta de Simson-Wallace passa pelo ponto médio do segmento \overline{PH} no triângulo $PP'H$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 1.28. *O ortocentro de um triângulo circunscrito a uma parábola está localizado na reta diretriz da parábola.*

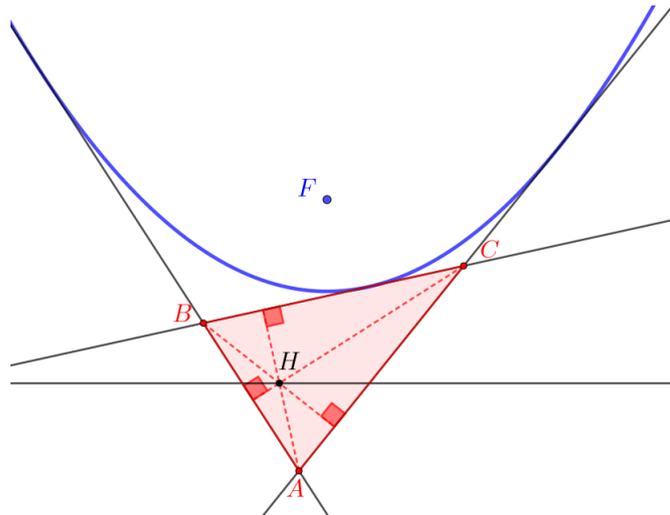


Figura 1.34: O ortocentro H do triângulo ABC sobre a diretriz da parábola.

Demonstração: Pelo Teorema 1.25, o foco da parábola está sobre o círculo circunscrito do triângulo ABC . O Corolário 1.27, diz-nos que a reta de Simson-Wallace do foco F passa pelo ponto médio do segmento \overline{FH} . Pelo Corolário 1.19, temos que a reta de Simson-Wallace de F tangencia a parábola no seu vértice. Logo, H está sobre a diretriz da parábola. ■

Capítulo 2

Principais Resultados da Geometria Clássica

2.1 Inversão no plano

A Geometria Inversiva tem como base a interação entre pontos, retas e círculos por meio da inversão. Veremos que certas transformações preservam a propriedade de círculo-a-círculo, transformando círculo em outros círculos. Vamos introduzir o conceito de inversão com um exemplo prático: construir o ponto médio de um segmento de reta utilizando apenas compasso.

Exemplo 2.1. Dada uma reta que passa pelos pontos A e B , encontre o ponto médio do segmento AB utilizando apenas um compasso.

Solução:

1. Com centro A e raio $r = \overline{AB}$, desenhe o círculo de centro em A e raio r e localize o ponto P na reta \overleftrightarrow{AB} de modo que B seja o ponto médio de \overline{AP} .
2. Com centro em P , desenhe um círculo de raio AP que intersectará o primeiro círculo no ponto C , como mostra a Figura 2.1.
3. Por fim, desenhe o círculo de centro em C e raio r cruzando a reta \overleftrightarrow{AB} em P' . Então, P' é o ponto médio de \overline{AB} .



Figura 2.1

Para verificar este fato, observe que os triângulo $AP'C$ e ACP são triângulos isósceles semelhantes, pois compartilham um ângulo de vértice em A , de modo que

$$\frac{\overline{AP'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$$

o que implica que

$$\frac{\overline{AP'}}{r} = \frac{r}{2r}$$

portanto

$$\overline{AP'} = \frac{r}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Observe que

$$\overline{AP} = 2r \quad \text{e} \quad \overline{AP'} = \frac{r}{2}$$

Assim, temos $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = r^2$.

Esta relação entre P e P' é chamada de Inversão. De forma mais geral, temos a seguinte definição:

Definição 2.2. Dado um círculo \mathcal{C} de centro O e raio r , considere um ponto P diferente de O . O ponto P' na semirreta \overrightarrow{OP} é chamado de inverso de P se, e somente se, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

O círculo $\mathcal{C}(O, r)$ é chamado de *círculo de inversão*, o ponto O é o *centro de inversão*, r é o *raio de inversão*, e r^2 é conhecido como a *potência de inversão*. A inversão em relação ao círculo $\mathcal{C}(O, r)$ será denotada por $I(O, r^2)$.

Suponha que P seja um ponto diferente do centro de inversão. Se P está fora do círculo de inversão, então seu inverso P' está dentro do círculo de inversão. Se P estiver sobre o círculo, então ele é seu próprio inverso. Se P estiver dentro do círculo, então seu inverso P' está fora do círculo de inversão. A demonstração dessas afirmações será apresentada no Capítulo 4.

Além disso, podemos afirmar que o ponto P' é único. De fato, suponha que exista um outro ponto P'' que seja o inverso de P . Neste caso, teríamos $\overline{OP'} = \overline{OP''}$. Como P' e P'' pertencem à mesma semirreta com origem em O , segue que $P' = P''$. Logo, o inverso de um ponto é único.

Com isso, todo ponto P no plano tem uma inversa em relação a um círculo $\mathcal{C}(O, r)$, exceto o centro O de \mathcal{C} . O ponto O não tem inverso e não é o inverso de nenhum outro ponto. Para superar esta omissão, acrescentamos um único ponto no infinito ao plano para que a inversão mapeie O para o ponto no infinito e vice-versa.

A seguir, utilizaremos a inversão para demonstrar algumas propriedades importantes, começando pela proposição abaixo:

Proposição 2.3. Sob a inversão $I(O, r^2)$, sejam P e Q dois pontos distintos não colineares com O , e P' e Q' os respectivos pontos inversos de P e Q . Então, os triângulos OPQ e $OQ'P'$ são semelhantes e $\overline{Q'P'} = \frac{r^2}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \overline{PQ}$.

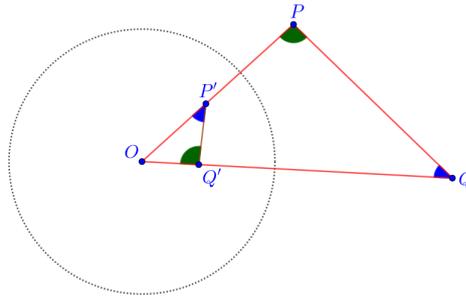


Figura 2.2: Triângulos $OQ'P'$ e OPQ com um dos vértices no centro do círculo.

Demonstração: Sabemos que:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} \quad (2.1)$$

Isso implica que:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$$

Como o $\widehat{POQ} = \widehat{Q'O'P'}$ (ângulo comum), pelo caso de semelhança LAL , concluímos que os triângulos OPQ e $OQ'P'$ são semelhantes. Donde,

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{Q'P'}}$$

Pela relação (2.1), sabemos que $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$. Substituindo essa expressão na equação anterior, obtemos:

$$\overline{Q'P'} = \frac{r^2}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \overline{PQ}$$

.

■

Teorema 2.4. *O operador de inversão $I(O, r^2)$ transforma retas e círculos da seguinte maneira:*

1. *A inversão de uma reta l que passa por O é a própria reta.*
2. *A inversão de uma reta l que não passa por O é um círculo que passa por O .*
3. *A inversão de um círculo que passa por O é uma reta que não passa por O .*
4. *A inversão de um círculo que não passa por O é um outro círculo que também não passa por O .*

Demonstração:

1. A primeira afirmação é direta. No entanto, observe que um ponto da reta inverte para um ponto distinto da mesma da reta, exceto para um o ponto onde a reta intercepta o círculo de inversão. Além disso, o ponto no infinito e o centro O do círculo de inversão são inversos entre si.

2. Seja Q o pé da perpendicular baixa de O à reta l , e seja Q' o inverso de Q . Considere um ponto qualquer P na reta l que não seja o ponto no infinito, e denote P' como o inverso de P , conforme indicado na Figura 2.3. Pela Proposição 2.3, os triângulos $OP'Q'$ e OQP são semelhantes. Portanto,

$$\widehat{OP'Q'} = \widehat{OQP} = 90^\circ$$

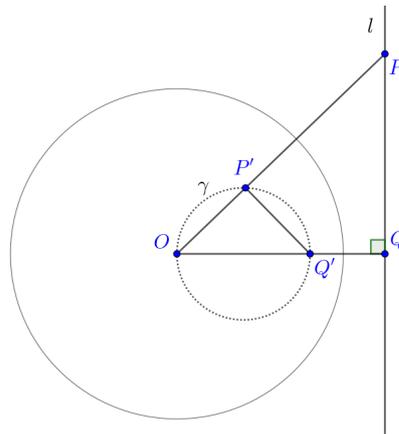


Figura 2.3

Assim, P' pertence ao círculo γ , cujo diâmetro é $\overline{OQ'}$, já que o triângulo $OP'Q'$ é retângulo. Da mesma forma, todo ponto X em γ é o inverso de algum ponto X' na reta l .

3. Seja γ um círculo que passa por O . Consideremos Q' o ponto diametralmente oposto a O em γ . Seja Q o inverso de Q' relativo ao círculo $\mathcal{C}(O, r)$ (Figura 2.4). Tomando t a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OQ'}$ em Q , afirmamos que, dado P' em γ , o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{OP'}$ com t , digamos P , é o inverso de P' relativo a $\mathcal{C}(O, r)$. De fato, o triângulo $OP'Q'$ é semelhante ao triângulo OQP , pelo caso AA. Sendo assim, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$. Donde,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2,$$

já que Q é o inverso de Q' , como queríamos demonstrar.

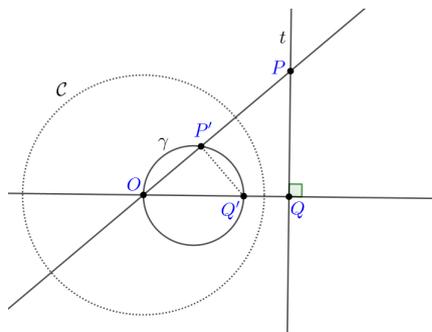


Figura 2.4

4. Conforme Figura 2.5, seja α um círculo com diâmetro \overline{PQ} sendo invertido em relação I . Consideremos R' , Q' e P' , respectivamente, os inversos dos pontos R , Q e P que estão sobre círculo α . Pela Proposição 2.3, os triângulos $OR'P'$ e OPR , bem como $OR'Q'$ e OQR , são semelhantes. Isso implica que:

$$O\widehat{R}'P' = O\widehat{P}R \quad \text{e} \quad O\widehat{R}'Q' = O\widehat{Q}R$$

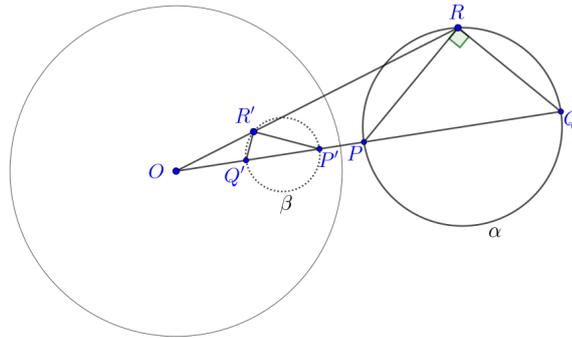


Figura 2.5

Agora, temos

$$\begin{aligned} Q'\widehat{R}'P' &= O\widehat{R}'P' - O\widehat{R}'Q' \\ &= O\widehat{P}R - O\widehat{Q}R \end{aligned}$$

Pela medida do ângulo externo do triângulo PRQ , temos

$$O\widehat{P}R - O\widehat{Q}R = P\widehat{R}Q$$

Como \overline{PQ} é o diâmetro de α , segue que $P\widehat{R}Q = 90^\circ$. Portanto, o ângulo $Q'\widehat{R}'P' = 90^\circ$, ou seja, o triângulo $Q'R'P'$ é retângulo. Assim, R' pertence ao círculo β , cujo diâmetro $\overline{Q'P'}$. Analogamente, qualquer ponto no círculo β é o inverso de algum ponto no círculo α . ■

Utilizaremos ainda inversão, vamos provar o teorema de Ptolomeu.

Teorema 2.5 (Teorema de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Ou seja:*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}$$

Demonstração: Considere o efeito de $I(A, r^2)$ no círculo do quadrilátero inscritível $ABCD$. O círculo se inverte em uma reta, e os pontos inversos B', C' e D' estão nessa reta, como mostrado na Figura 2.6.

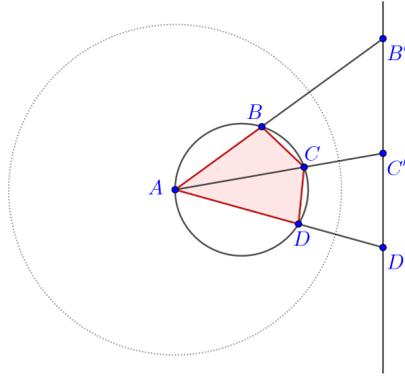


Figura 2.6

Observe que a reta \overleftrightarrow{AD} deixa os pontos B e C do quadrilátero convexo $ABCD$ do mesmo lado, conforme ilustrado na Figura 2.6. Como o ponto C está no arco DB que não passa por A , a semirreta \overrightarrow{AC} está contida na região angular $\angle DAB$. Logo, a projeção de C , é o ponto C' , na reta $\overleftrightarrow{D'B'}$ está no segmento $D'B'$. Assim, podemos escrever $\overline{B'D'} = \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$. Aplicando a Proposição 2.3, obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} \cdot r^2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \cdot r^2 + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} \cdot r^2$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC}}{r^2}$, obtemos

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}$$

que é o resultado desejado. ■

Embora a inversão mapeie círculos em círculos, ela tem uma desvantagem técnica importante: não transforma cônicas em cônicas. Por exemplo, uma parábola submetida à inversão em relação a um círculo com centro no foco da parábola se transforma em um cardioide (ver Figura 2.7). No entanto, mais adiante, utilizaremos a inversão para construir a chamada *transformação polar*, que possui essa propriedade.

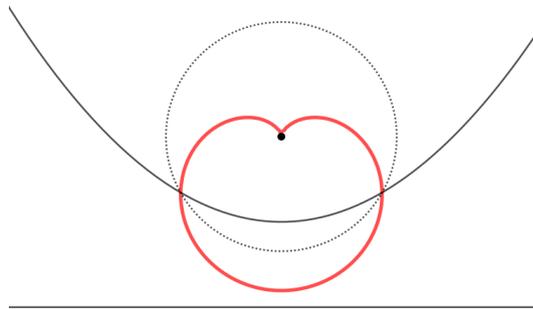


Figura 2.7: A curva vermelha é um cardioide

2.2 Noções básicas sobre transformações projetivas

As transformações projetivas, também conhecidas como transformações colineares ou homográficas, são aplicações que levam pontos de um plano projetivo para outro,

preservando as relações de incidência entre pontos e retas. Isso significa que, se três ou mais pontos estão alinhados em uma reta em um espaço, eles permanecerão alinhados após a transformação. Mas, tais transformações nem sempre levam retas paralelas em retas paralelas.

No plano usual, as retas paralelas se transformarão em retas paralelas porque a transformação é bijetiva. Por isso, acrescenta-se a chamada reta no infinito. Os pontos nesta reta são chamados de pontos no infinito, e são considerados como as das retas paralelas em uma mesma direção. Cada ponto no infinito é visto como pertencente a todas as retas na mesma direção. O plano, quando concluído dessa maneira, é chamado de plano projetivo.

Definição 2.6. Uma transformação projetiva é uma aplicação entre planos projetivos que leva cada reta de um, incluindo a reta no infinito, para uma reta do outro.

Conforme a definição, as transformações projetivas, com a operação de composição de funções, constituem um grupo. Primeiro, a composta de transformações projetivas é uma transformação projetiva. A composição de transformações é associativa, a aplicação identidade é uma transformação projetiva, e cada transformação projetiva, por ser bijetiva, tem uma transformação projetiva inversa. Entre os subgrupos desse grupo, destacam-se os grupos de transformações afins, que preservam as retas paralelas (que podem ser definidas como as transformações que preservam a reta no infinito), além dos grupos de semelhanças, que incluem homotetias, e os movimentos compostos por rotações e translações.

Uma transformação projetiva no plano pode ser visualizada da seguinte maneira. Suponha dois planos, α e β , concorrentes no espaço, e um ponto H não pertence a esses planos, conforme Figura 2.8a. Considere um pentágono regular no plano α . Se H é o observador (centro de projeção), então a projeção do pentágono por meio desse ponto, ainda que distorcida da original, será outro pentágono. Isso ocorre porque as retas são transformadas em retas.

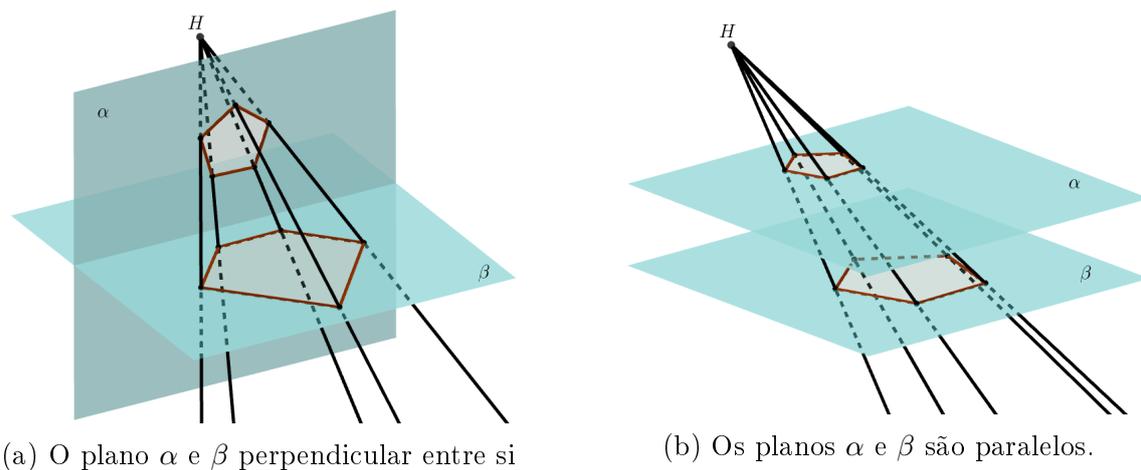


Figura 2.8

Agora, consideremos que o plano α seja paralelo a β (Figura 2.8b). O pentágono regular em α será transformado em outro pentágono regular por homotetia.

Suponha agora que estamos projetando pontos em um plano γ por meio de um centro de projeção H em outro plano β .

Seja um plano λ que passa por H paralelo ao plano β que intersecta o plano γ na reta l (Figura 2.9). Esta reta se projeta para o infinito no plano β , por esta razão l é chamada de *reta de fuga* no plano γ .

A reta de fuga é claramente paralela à reta s , que é a interseção entre os planos γ e β , chamada de eixo de projeção.

Agora, consideremos os pontos A e B na reta de fuga l e um ponto C no plano γ . O ângulo $\angle ACB$ no plano γ será projetado no plano β como o ângulo $\angle AHB$.

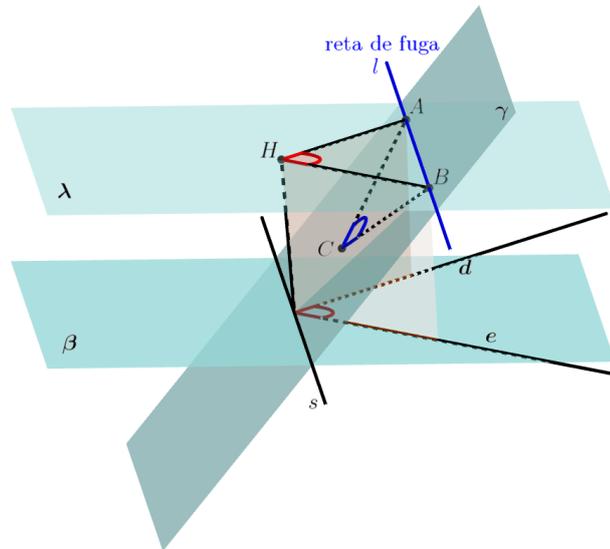


Figura 2.9: Os planos α e β são paralelos.

Com efeito, observe que o plano $\langle HCA \rangle$ intercepta o plano β em uma reta d . Como o plano λ é paralelo ao plano β , as interseções desses planos com o plano $\langle HCA \rangle$ são paralelas, ou seja, $d = \langle HAC \rangle \cap \beta$ é paralelo a \overleftrightarrow{HA} . De forma análoga, as interseções dos planos λ e β com o plano $\langle HCB \rangle$ também são paralelas, ou seja, $e = \langle HCB \rangle \cap \beta \parallel \overleftrightarrow{HB}$. Assim, temos que $\angle de = \angle AHB$.

Portanto, qualquer ângulo no plano γ se projeta no plano β como um ângulo de medida igual ao ângulo correspondente subtendido em H pela porção da reta de fuga interceptada pelas retas que formam o ângulo original.

Além disso, observamos que qualquer transformação projetiva é uma composição de uma projeção central e um movimento no espaço. Isso significa que, ao realizar movimentos no plano de projeção, como rotações, translações ou outras transformações, podemos relacionar o plano de projeção com o plano original. Portanto, conforme analisado na Seção 1.4 e discutido anteriormente, é possível aplicar a projeção do círculo (que é a interseção das esferas de Dandelin com o cone) utilizando V como centro de projeção, de acordo com a posição do plano de projeção. Então,

- Se o plano β intercepta o eixo de simetria em uma única folha do cone, de modo que sua inclinação não seja paralela a nenhuma geratriz, a projeção do círculo C através do vértice V será uma elipse. Neste caso, a elipse não possui pontos no infinito.

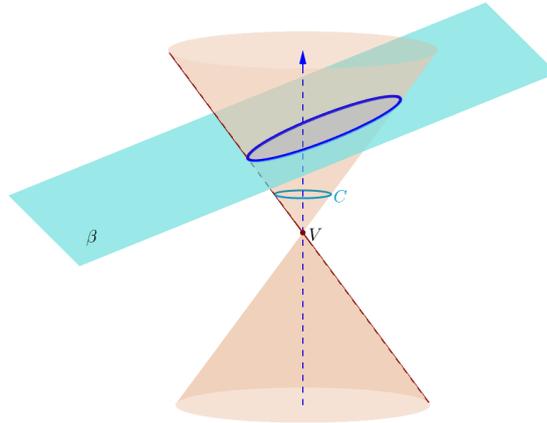


Figura 2.10: Projeção de um círculo a partir do centro de projeção V sobre o plano β , que intersecta o cone em apenas uma de suas folhas.

- Se o plano β é paralelo a duas geratrizes do cone, a projeção dos círculos por V será uma hipérbole. Neste caso, a hipérbole intersecta a reta no infinito em dois pontos, o que corresponde uma direção de cada geratriz.

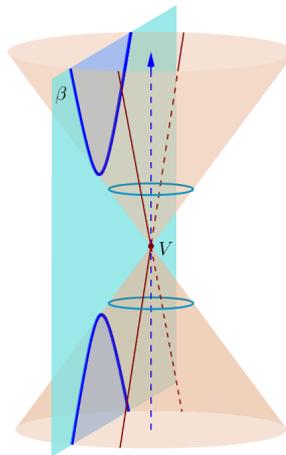


Figura 2.11: Projeção de um círculo a partir do centro de projeção V sobre o plano β , que é paralelo a duas geratrizes e intersecta ambas as folhas do cone.

- Se o plano β é paralelo a uma única geratriz do cone, então a projeção do círculo por V é uma parábola. A geratriz paralela a β projeta-se sobre β no infinito. Neste caso, a parábola possui um ponto de interseção com a reta no infinito em uma única direção.

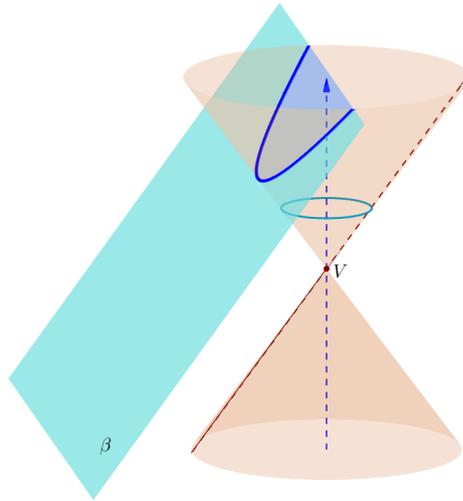


Figura 2.12: Projeção de um círculo a partir do centro de projeção V sobre o plano β , que é paralelo a uma geratriz e intersecta apenas uma folha do cone.

- Se o plano β é perpendicular ao eixo de simetria do cone, a projeção do círculo por V será um círculo.

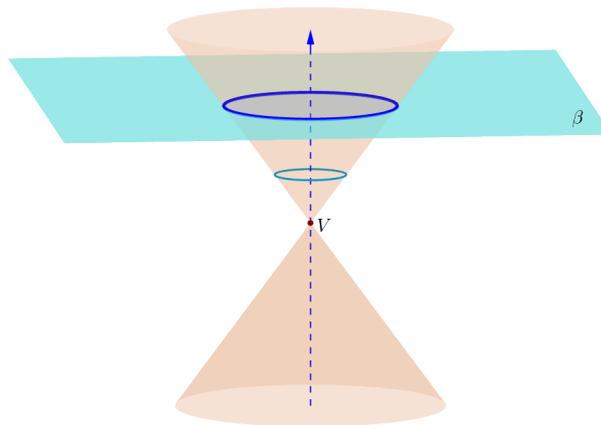


Figura 2.13: Projeção de um círculo a partir do centro de projeção V sobre o plano β , que é perpendicular ao eixo de simetria do cone.

Por fim, nos casos em que o plano β contém o eixo de simetria do cone ou é perpendicular ao eixo de simetria pelo vértice, a projeção resultará em duas cônicas degeneradas: duas retas concorrentes ou um ponto (círculo degenerado), respectivamente.

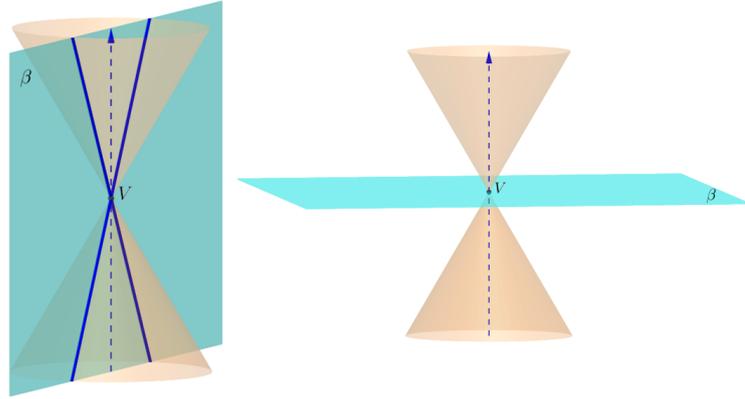


Figura 2.14: O par de retas e o ponto V representam cônicas degeneradas.

O que foi feito acima, juntamente com o que abordamos na Seção 1.4 do Capítulo 1, mostra-nos que

Proposição 2.7. *Toda cônica é projetivamente equivalente a um círculo, ou seja, existe uma transformação projetiva que leva uma cônica em um círculo.*

Desse modo, as transformações projetivas levam cônicas em cônicas. De fato, qualquer transformação projetiva é a composição de duas transformações, a primeira transforma a cônica em um círculo, e a segunda transforma o círculo em uma cônica, conforme Proposição 2.7. Isto demonstra que as transformações projetivas são adequadas para trabalhar com cônicas.

A seguir, enunciamos algumas das principais propriedades das transformações projetivas.

Proposição 2.8. *Todos os quadriláteros são projetivamente equivalentes. Mais precisamente, para quaisquer dois conjuntos de quatro pontos em posição geral, A, B, C, D e A', B', C', D' , existe uma única transformação projetiva que leva A em A' , B em B' , C em C' e D em D' .*

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero formado por quatro pontos A, B, C, D no plano, dispostos em posição geral (isto é, três a três não colineares). Definimos E e F como os pontos de interseção das extensões dos lados opostos, digamos, E é a interseção de \overrightarrow{AB} com \overrightarrow{CD} e F é a interseção de \overrightarrow{AD} com \overrightarrow{BC} (ver figura 2.15). Além disso, seja Q o ponto de interseção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} . Denotemos por \overleftrightarrow{EF} a reta que passa pelos pontos E e F .

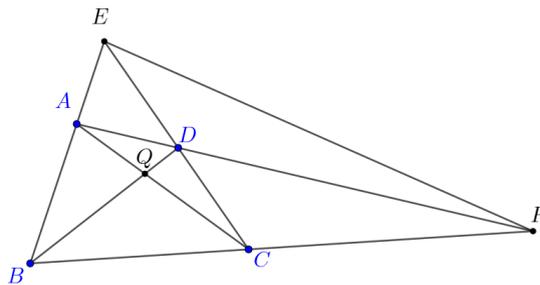


Figura 2.15

Agora, aplicamos uma transformação projetiva que envia a reta \overleftrightarrow{EF} para o infinito. Esta transformação garante que os lados opostos do quadrilátero se tornam paralelos, projetando o quadrilátero original em um paralelogramo. Em seguida, projetamos o ângulo $\angle BAD$ em um ângulo reto, transformando o paralelogramo em um retângulo.

Finalmente, ao projetar o ângulo $\angle BQA$ também em um ângulo reto, o retângulo resultante se transforma em um quadrado. Como cada uma destas transformações é única, o quadrilátero original $ABCD$ é projetivamente equivalente a um quadrado $A'B'C'D'$.

Portanto, para quaisquer dois quadriláteros com quatro pontos em posição geral, existe uma única transformação projetiva que leva A em A' , B em B' , C em C' e D em D' . D' . ■

Teorema 2.9. *Dado qualquer conjunto de cinco pontos, desde que três deles não são colineares, existe uma única cônica que passa por todos esses pontos.*

Demonstração: Considere cinco pontos A, B, C, D e E . Aplicando uma transformação projetiva adequada, podemos levar os pontos A, B, C e D a novos pontos A', B', C' e D' , de modo que esses pontos se tornem os vértices de um quadrado no plano de coordenadas. Consideremos as mediatrizes dos lados do quadrado $A'B'C'D'$ como eixos coordenados, onde a intersecção das mesmas é a origem do sistema de coordenadas. No sistema considerado, os vértices do quadrado têm coordenadas $(\pm 1, \pm 1)$. Observemos que a família de curvas $ax^2 + (1-a)y^2 = 1$, de parâmetro a , passam pelos vértices. Sendo assim, para $a = \frac{1}{2}$, a curva é um círculo. As diagonais também pertencem a família, isto é, os pontos da forma $(x_0, \pm y_0)$. Agora, dado $X_0 = (x_0, y_0)$, com $x_0 \neq \pm y_0$, temos que o a_0 correspondente é dado por $\frac{1-y_0^2}{x_0^2-y_0^2}$. Sendo assim, por cada ponto do plano, passa uma única curva da família. ■

Teorema 2.10 (Desargues). *As retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{C_1C_2}$ que ligam os vértices correspondentes dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$, intersectam-se em um único ponto se, e somente se, as intersecções das retas $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ com $\overleftrightarrow{A_2B_2}$, $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ com $\overleftrightarrow{B_2C_2}$, $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ com $\overleftrightarrow{C_2A_2}$ são colineares.*

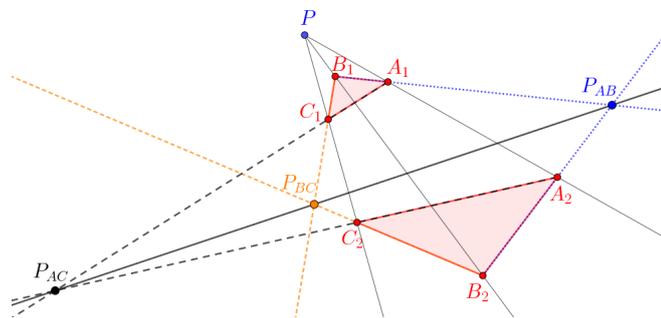


Figura 2.16: Prolongamento dos lados correspondentes, intersectando-se em pontos colineares.

Demonstração: Suponhamos que as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ se encontrem em um único ponto P (centro de projeção). Considere os pontos P_{AB}, P_{BC} e P_{AC} as intersecções de $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ com $\overleftrightarrow{A_2B_2}$, $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ com $\overleftrightarrow{B_2C_2}$, $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ com $\overleftrightarrow{C_2A_2}$, respectivamente, conforme Figura 2.16.

Consideremos a transformação projetiva, que leve os pontos de interseções P_{AB} e P_{BC} ao infinito. Denotemos as projeções dos pontos A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 e C_2 por $A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2$ e C'_2 , respectivamente (ver Figura 2.17).

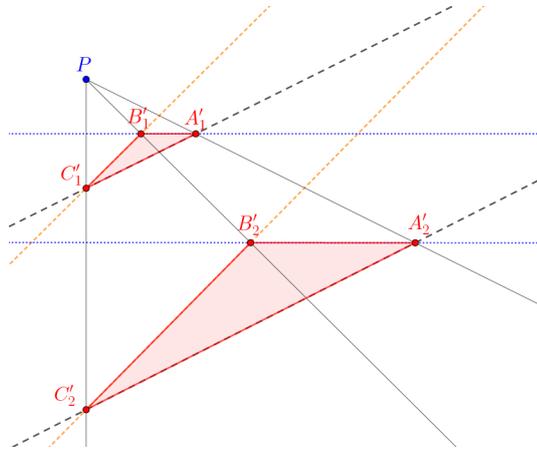


Figura 2.17

No novo sistema projetivo, as retas $\overleftrightarrow{A'_1B'_1}$ e $\overleftrightarrow{A'_2B'_2}$, assim como $\overleftrightarrow{B'_1C'_1}$ e $\overleftrightarrow{B'_2C'_2}$, são paralelas. Aplicando o Teorema de Tales, obtemos

$$\frac{\overline{PA'_1}}{\overline{PA'_2}} = \frac{\overline{PB'_1}}{\overline{PB'_2}} = \frac{\overline{PC'_1}}{\overline{PC'_2}}$$

Conseqüentemente, pela recíproca parcial de Tales [3] $\overleftrightarrow{A'_1C'_1}$ é paralela a $\overleftrightarrow{A'_2C'_2}$, o que implica que P_{AC} também está no infinito. Assim, P'_{AB}, P'_{BC} e P'_{AC} são colineares no infinito.

Portanto, os pontos P_{AB}, P_{BC} e P_{AC} são colineares.

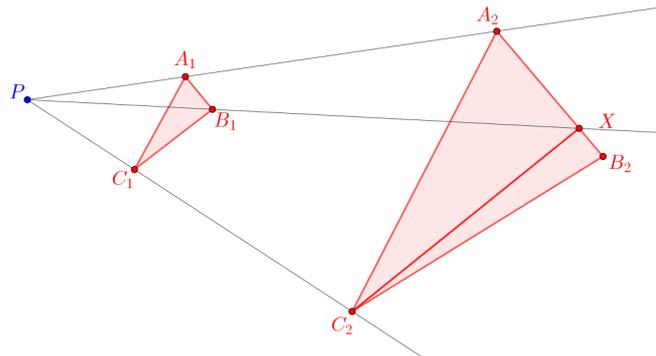


Figura 2.18

Reciprocamente, Suponhamos que P_{AB}, P_{BC} e P_{AC} são colineares. Consideremos que as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ intersectam-se em P , conforme Figura 2.18. Seja X o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{PB_1}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_2}$. Neste caso, os triângulos $A_1C_1B_1$ e A_2C_2X estão em correspondência projetiva pelo centro de projeção P . Sendo assim, a intersecção de $\overleftrightarrow{C_1B_1}$ e $\overleftrightarrow{C_2X}$ está na reta $\overleftrightarrow{P_{AB}P_{AC}}$. Mas, por hipótese, as retas $\overleftrightarrow{C_1B_1}$ e $\overleftrightarrow{C_2B_2}$ intersectam a reta $\overleftrightarrow{P_{AB}P_{AC}}$ em P_{BC} . Desta forma, C_2B_2 e C_2X estão na mesma reta. Logo, $B_2 = X$. Portanto, as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ intersectam-se em um único ponto, como queríamos demonstrar. ■

Via de regra, transformações projetivas não preservam círculos, no entanto o seguinte fato é verdade.

Proposição 2.11. *Seja dado um círculo Γ e uma reta l que não o intersecta. Existe uma transformação projetiva enviando o círculo Γ em um outro círculo e a reta l na reta no infinito.*

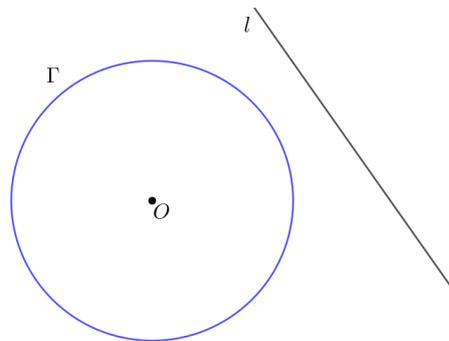
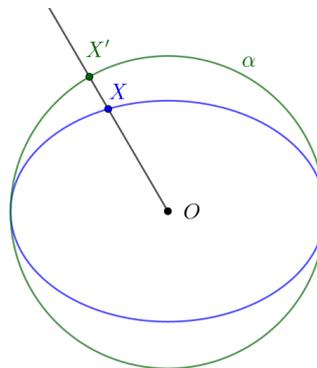


Figura 2.19: Círculo Γ e um reta l

Demonstração: Considere a transformação projetiva que leve a reta l na reta no infinito. Então, sob essa transformação, o círculo se transforma em uma cônica, especificamente em uma elipse, já que ela não intersecta reta no infinito.



Agora, aplicando a transformação afim, podemos enviar essa elipse em um círculo. De fato, dada uma elipse de centro O , considere o círculo α , também centrado em O , cujo diâmetro é igual ao eixo maior da elipse. Definimos uma transformação afim que leva cada ponto da elipse a um único ponto no círculo α da seguinte forma: para cada ponto X da elipse, a semirreta de origem em O intersecta α em um único ponto X' . Essa transformação, é claramente bijetiva. ■

Transformações projetivas estão intimamente relacionadas com transformações que levam ponto em reta.

Definição 2.12. A *correspondência polar* em relação a um círculo ω com centro O e raio r associa a cada ponto P do plano, distinto de O , uma reta p chamada de *polar de P* . Esta reta p é perpendicular ao segmento \overline{OP} , e intersecta a reta \overleftrightarrow{OP} no ponto P' , que é o ponto inverso de P em relação ao círculo ω , isto é, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Nessa correspondência, o ponto P é chamado de *polo* da reta p .

Para o ponto O , a polar é definida como a reta no infinito. Por sua vez, a polar de um ponto no infinito é definida como a reta que passa pelo centro O do círculo e é perpendicular às retas paralelas que se interseccionam no ponto no infinito.

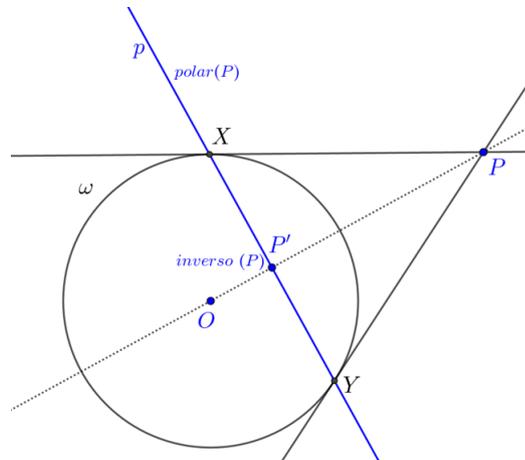


Figura 2.20: Reta polar de P em relação a um círculo ω .

Quando que P está fora de ω , a Figura 2.20 ilustra o processo de construção da reta polar do ponto P . Neste caso, a reta polar de P é definida como a reta que passa pelos pontos de tangência, X e Y , das duas retas tangentes a ω que passam por P . De fato, Observe que os triângulos $OP'X$ e $OX P$ são semelhantes pelo caso AA , o que implica que

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OX}^2$$

onde $\overline{OX} = r$.

Se P estiver no interior de ω , com $P \neq O$, a reta polar pode ser determinada da seguinte forma: trace uma perpendicular à semirreta \overrightarrow{OP} no ponto P e marque os pontos de interseção, A e B , dessa reta com o círculo. Em seguida, construa as retas tangentes a ω nos pontos A e B , e marque o ponto de interseção P' dessas tangentes com a semirreta \overrightarrow{OP} . Este ponto P' é o inverso de P . Finalmente, trace uma perpendicular a \overrightarrow{OP} passando por P' . Esta será a reta polar do ponto P (ver Figura 2.21). Por fim, no caso em que o ponto P está exatamente sobre o círculo, a reta polar coincide com a reta tangente a ω no ponto P . Com efeito, como o segmento OP é um raio, temos que $\overline{OP} \cdot \overline{OP} = r^2$. Isto significa que $P = P'$.

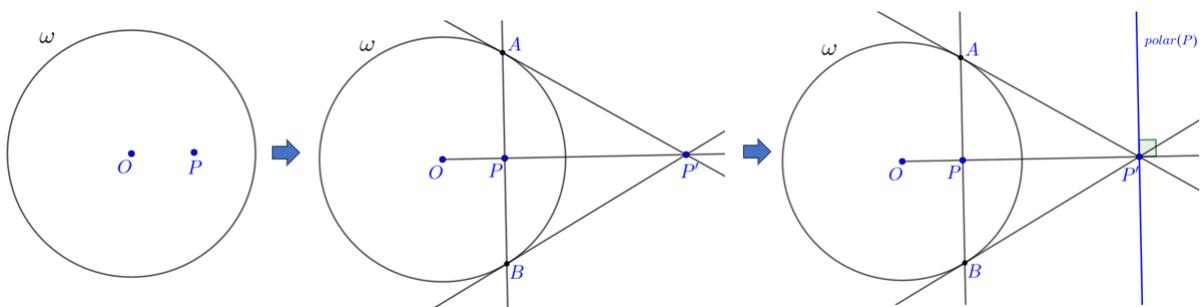
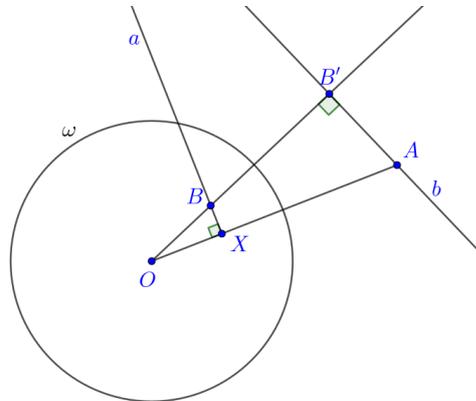


Figura 2.21: Construção da reta polar de um ponto P interno círculo ω .

Mencionamos agora uma importante propriedade da correspondência polar.

Proposição 2.13. *Sejam dois pontos A e B no plano e suas respectivas retas polares a e b . Se $A \in b$, então a polar de A passar por B .*

Demonstração:



Suponhamos que B' seja o ponto inverso de B em relação ao círculo ω . Consequentemente, a reta b (polar de B) é perpendicular à reta \overleftrightarrow{OB} no ponto B' . Além disso, na semirreta \overrightarrow{OA} , consideremos X como pé da perpendicular traçada a partir de B .

Como os triângulos $AB'O$ e BXO são retângulos e possuem um ângulo comum, eles são semelhantes. Dessa semelhança, obtemos

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OB'}}$$

O que implica que

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA} \cdot \overline{OX} = r^2$$

Assim, X é o ponto inverso de A .

Agora, pela definição da reta polar a , temos que $a = \overleftrightarrow{BX}$. Isso significa que, se A estiver em b , então B está em a .

Portanto, B pertence a polar de A , ou seja, $B \in a$. ■

Isso implica que o polo de qualquer reta é a interseção das polares de todos os pontos pertencentes a esta reta. Dualmente, a polar de um ponto é o lugar geométrico dos polos de todas as retas que passam por este ponto (ver Figura 2.22).

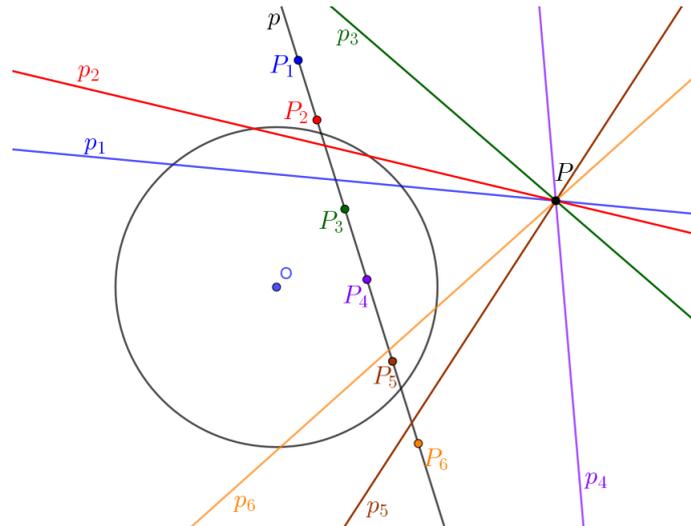


Figura 2.22: Conjunto de polares passando pelo ponto P .

Definição 2.14. Dado um círculo e uma reta l , definimos a *reta diametral* associada a l como sendo a reta que passa pelo polo P de l e é perpendicular a reta l no ponto inverso de P em relação ao círculo. O ponto inverso é também o polo de uma reta que, passando pelo polo de l , é paralela a l .

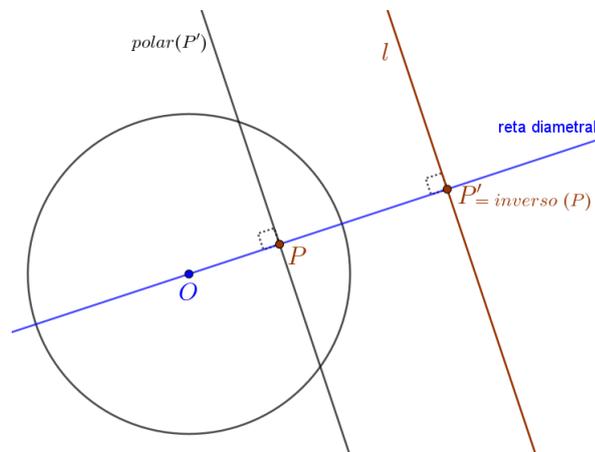


Figura 2.23: Reta diametral \overleftrightarrow{OP} associada a reta l .

Desta forma, ao tomarmos uma reta paralela a uma dada reta que passe pelo seu polo, podemos determinar o polo dessa reta traçando uma reta perpendicular que passe pelo centro do círculo e pelo polo da reta dada. O ponto de interseção, sobre a reta dada, é seu polo.

Observe que, apesar das propriedades métricas mencionadas na definição, a correspondência polar é uma noção projetiva. Em outras palavras, se uma transformação projetiva preserva o círculo dado e envia o ponto P para P' , então a polar de P transforma-se na polar de P' . Isso produz um resultado importante conforme veremos na próxima seção.

2.3 Princípio de dualidade

Um princípio muito importante da geometria projetiva é *Princípio de Dualidade*. Ele afirma que qualquer teorema formulado em termos de pontos, retas, interseções e incidências permanece verdadeiro se trocarmos as palavras "pontos" por "retas", "retas" por "pontos" e seus derivados (concorrentes por colineares, vértice por lado, etc.), mantendo a relação de incidência entre pontos e retas. O teorema resultante dessa troca é chamado de *teorema dual*. A descoberta de que teoremas válidos, ao serem dualizados, geram novos teoremas igualmente válidos na geometria projetiva é geralmente atribuída ao matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771–1859).

Por exemplo, se um teorema original afirma que três retas em um plano se encontram em um ponto, o teorema dual afirma que três pontos estão alinhados em uma reta. De forma análoga, se um teorema original afirma que quatro planos passam por um ponto, o teorema dual afirma que quatro pontos estão em um mesmo plano.

Dessa maneira, cada propriedade geométrica de uma figura possui uma propriedade correspondente em sua figura dual.

Assim, ao provarmos uma proposição geométrica, estamos, na verdade, provando duas proposições: a original e sua dual.

Um exemplo clássico do princípio de dualidade é o Teorema de Pascal e o Teorema de Brianchon. O primeiro afirma que

Teorema 2.15 (Pascal). *Os pontos de interseção dos pares de lados opostos de um hexágono inscrito em um círculo são colineares, ou seja, todos pertencem a uma mesma reta.*

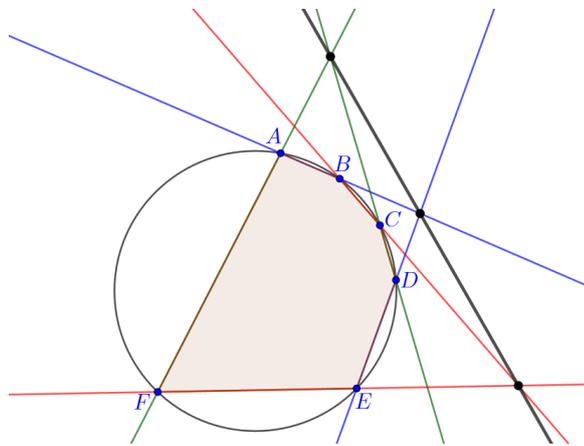
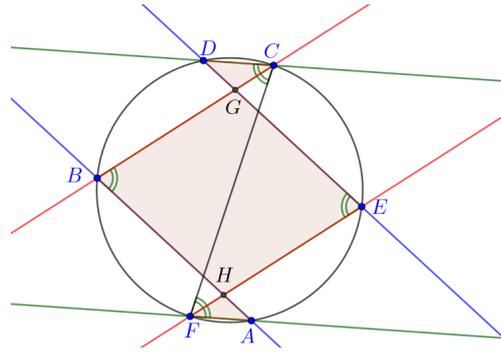


Figura 2.24: Prolongamento dos pares de lados opostos de um hexágono inscrito em um círculo, intersectando-se em pontos colineares.

Demonstração: Seja o hexágono $ABCDEF$ inscrito em um círculo. Apliquemos uma transformação projetiva e movamos os pontos de interseção das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{EF} para o infinito. Neste caso, as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{DE} tornam-se paralelas, assim como \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{EF} .



Agora, precisamos mostrar que \overleftrightarrow{CD} é paralelo a \overleftrightarrow{FA} . Observe que, como $\angle ABC$ e $\angle DEF$ têm lados paralelos, esses ângulos são congruentes. O quadrilátero $BGEH$ é um paralelogramo. Sendo assim, os lados opostos são iguais e os ângulos opostos são iguais. ■

Observação 2.16. Ao fazer coincidir determinados pares de vértices no hexágono $ABCDEF$, é possível deduzir teoremas análogos ao Teorema de Pascal para pentágonos, quadriláteros e até triângulos inscritos em uma círculo. Assim, para um caso particular, ilustrado na Figura 2.24, ao fazer coincidir A com B e D com E , as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{DE} tornam-se tangentes ao círculo, criando uma nova configuração, como mostrado na Figura 2.25.

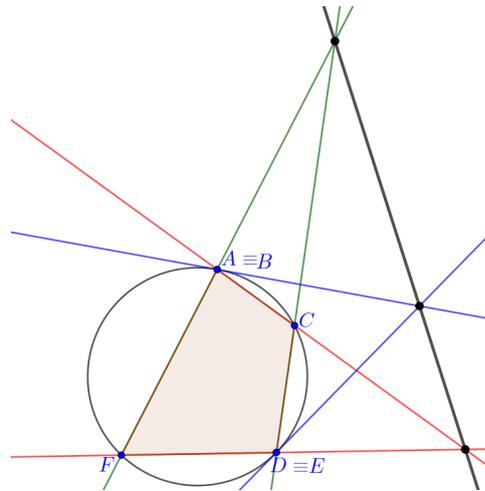


Figura 2.25: Os pares de pontos A e B , assim como D e E , coincidem, formando um quadrilátero.

Para maiores detalhes, consulte a referência [7]

O próximo resultado é o dual do Teorema de Pascal.

Teorema 2.17 (Brianchon). *As diagonais de um hexágono circunscrito a uma círculo se encontram em um único ponto.*

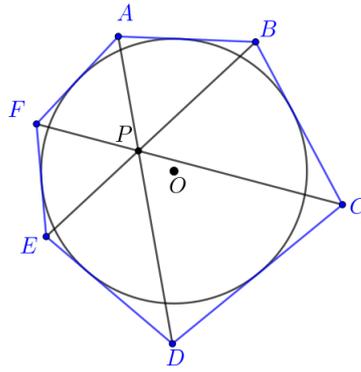


Figura 2.26: Hexágono $ABCDEF$ circunscrito a um círculo.

Aplicando o princípio de dualidade também podemos provar a próxima proposição.

Proposição 2.18. *Dado um círculo α e um ponto C localizado em seu interior, existe uma transformação projetiva que envia círculo α para outro círculo e C para o centro do novo círculo.*

Demonstração: Aplicando o princípio de dualidade obtemos a Proposição 2.11. Agora, utilizando uma transformação projetiva, movamos a reta polar do ponto C ao infinito. Neste caso, o centro do novo círculo corresponde ao ponto C , já que o polo da reta no infinito é o centro do círculo. Assim, C torna-se o centro do círculo transformado. ■

2.4 Razão cruzada

Recordamos que, na geometria euclidiana plana, as propriedades das figuras estudadas são precisamente aquelas que permanecem invariantes por rotações, reflexões e translações, que são denominadas de *movimentos rígidos*. Na geometria projetiva, por outro lado, o foco está nas transformações projetivas. Um conceito métrico fundamental nessa geometria é a de *razão cruzada*, o qual é invariante sob tais transformações projetivas. Vamos explorar esse conceito agora.

Definição 2.19. Sejam A, B e C três pontos distintos em uma reta. A razão entre esses pontos é definida como

$$(A, B; C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Dualizando, consideremos três retas distintas, l_1, l_2 e l_3 que se interceptam em um único ponto. A razão entre essas retas é definida por

$$(l_1, l_2; l_3) = \frac{\text{sen}\angle l_1 l_3}{\text{sen}\angle l_2 l_3}$$

Agora, vamos definir a razão cruzada entre quatro pontos distintos em uma reta, a saber

Definição 2.20. Considere A, B, C, D quaisquer quatro pontos distintos em uma reta (ver Figura 2.27). A razão cruzada de A e B com relação a C e D , denotada por $(A, B; C, D)$, é definida como a razão entre $(A, B; C)$ e $(A, B; D)$. Explicitamente, temos:

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}/\overline{BC}}{\overline{AD}/\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \quad (2.2)$$

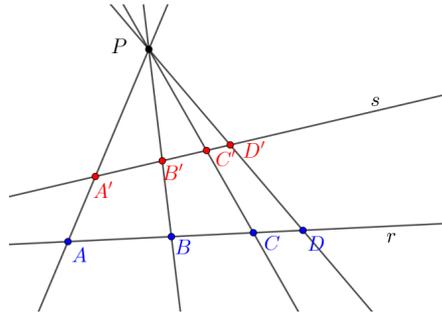


Figura 2.27: Razão cruzada

Consideremos, na Figura 2.27, os quatro pontos distintos A, B, C e D situados na reta r . A partir de um ponto P , não pertencente à reta r , projete esses pontos em uma outra reta s , que também não passa por P , para obter os pontos projetados A', B', C' e D' . O próximo teorema apresenta uma importante propriedade sobre a razão cruzada.

Teorema 2.21. *A razão cruzada de quatro pontos distintos em uma reta permanece invariante sob qualquer projeção.*

Demonstração: Como mostrado anteriormente, qualquer transformação projetiva pode ser vista como uma projeção central. Seja P o centro de projeção, Figura 2.28. Tracemos uma perpendicular de P até a reta r encontrando o ponto H . A razão cruzada pode ser expressa como

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}/\overline{BC}}{\overline{AD}/\overline{BD}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}\overline{HP} \cdot \overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{HP} \cdot \overline{BC}}}{\frac{\frac{1}{2}\overline{HP} \cdot \overline{AD}}{\frac{1}{2}\overline{HP} \cdot \overline{BD}}} = \frac{\frac{A_{\triangle APC}}{A_{\triangle BPC}}}{\frac{A_{\triangle APD}}{A_{\triangle BPD}}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{CP} \cdot \text{sen}\angle APC}{\frac{1}{2}\overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \text{sen}\angle BPC}}{\frac{\frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{DP} \cdot \text{sen}\angle APD}{\frac{1}{2}\overline{BP} \cdot \overline{DP} \cdot \text{sen}\angle BPD}} = \frac{\text{sen}\angle APC \cdot \text{sen}\angle BPD}{\text{sen}\angle BPC \cdot \text{sen}\angle APD}$$

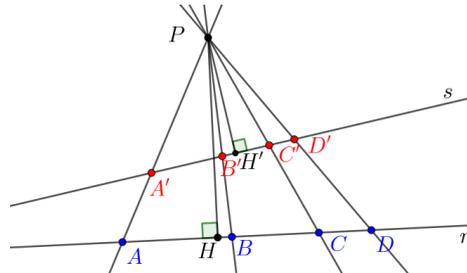


Figura 2.28

Agora, tracemos uma perpendicular de P até a reta s , obtendo o ponto H' , e aplique o mesmo argumento acima. Isso resulta em

$$(A', B'; C', D') = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\text{sen}\angle A'P'C' \cdot \text{sen}\angle B'P'D'}{\text{sen}\angle B'P'C' \cdot \text{sen}\angle A'P'D'}$$

Logo, temos a igualdade

$$\frac{\text{sen}\angle A'P'C' \cdot \text{sen}\angle B'P'D'}{\text{sen}\angle B'P'C' \cdot \text{sen}\angle A'P'D'} = \frac{\text{sen}\angle APC \cdot \text{sen}\angle BPD}{\text{sen}\angle BPC \cdot \text{sen}\angle APD}$$

. Portanto, concluímos que

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$



O Teorema 2.21 permite-nos definir a razão cruzada na situação dual. Consideremos quatro retas distintas a, b, c e d que se intersectam em um ponto P . Suponhamos que estas retas sejam cortadas por quaisquer retas r e s , que não passam por P , nos conjuntos de pontos A, B, C, D e A', B', C', D' , respectivamente. Pelo que acabamos de ver

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Isto sugere a seguinte definição:

Definição 2.22. A razão cruzada, em qualquer ordem, de quatro retas a, b, c e d em um ponto P é definida como a razão cruzada, na mesma ordem, dos quatro pontos A, B, C, D onde estas retas são interceptadas por qualquer reta que não passe por P . Em outras palavras

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, D) = (c, a; d, b) = (C, A; D, B), \text{ e assim por diante.}$$

A razão cruzada implica que, se as imagens de três pontos na reta são conhecidas, as imagens dos demais pontos são determinadas de maneira única. De fato, sejam A, B e C três pontos numa reta r , e A', B' e C' suas imagens através de uma transformação projetiva. Suponhamos que as imagens A', B' e C' estão em r' . Agora, dado D em r , para determinarmos sua imagem, basta obtermos o único X' em r' tal que $(A, B; C, D) = (A', B'; C', X')$.

Teorema 2.23 (Pappus). Se A_1, B_1, C_1 estão em l_1 e A_2, B_2, C_2 em l_2 , então os pontos de interseção das retas $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, $\overleftrightarrow{C_1A_2}$ e $\overleftrightarrow{C_2A_1}$ são colineares.

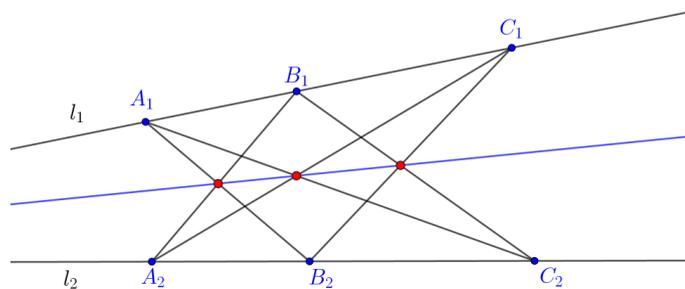


Figura 2.29: Três pares de retas se intersectam em três pontos colineares.

Demonstração: Aplicando uma certa transformação projetiva, podemos mover os pontos de interseção entre as retas $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, assim como as retas $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, ao infinito. Como resultado, as retas $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_1}$ tornam-se paralelas, bem como as retas $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$.

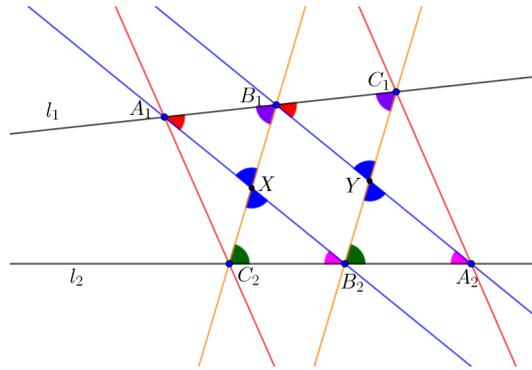


Figura 2.30

Sejam agora X e Y os pontos de interseção das retas $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ com $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_1}$ com $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, respectivamente, conforme Figura 2.30. Observe que os triângulos XA_1B_1 e YB_1C_1 são semelhantes (caso AA), assim como YA_2B_2 e XB_2C_2 . Sendo assim,

$$\frac{\overline{XA_1}}{\overline{YB_1}} = \frac{\overline{XB_1}}{\overline{YC_1}} \quad (2.3)$$

$$\frac{\overline{XC_2}}{\overline{YB_2}} = \frac{\overline{XB_2}}{\overline{YA_2}} \quad (2.4)$$

Como, o quadrilátero XB_1YB_2 é um paralelogramo, temos de (2.3) e (2.4) que

$$\begin{aligned} \overline{XC_2} \cdot \overline{YA_2} &= \overline{XB_2} \cdot \overline{YB_2} \\ &= \overline{YB_1} \cdot \overline{XB_1} \\ &= \overline{XA_1} \cdot \overline{YC_1} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a relação

$$\frac{\overline{XA_1}}{\overline{XC_2}} = \frac{\overline{YA_2}}{\overline{YC_1}}$$

Além disso, como $A_1\widehat{X}C_2 = A_2\widehat{Y}C_1$, os triângulos A_1XC_2 e A_2YC_1 são semelhantes. Consequentemente, temos $C_2\widehat{A_1}X = C_1\widehat{A_2}Y$, o que implica que as retas $\overleftrightarrow{A_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2C_1}$ são paralelas. Assim, os três pontos são colineares no infinito.

Portanto, os pontos de interseção das retas $\overleftrightarrow{A_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$, $\overleftrightarrow{C_1A_2}$ e $\overleftrightarrow{C_2A_1}$ são colineares, como queríamos demonstrar. ■

2.5 Alguns fatos geométricos do triângulo

Nesta seção, abordaremos algumas propriedades fundamentais da geometria do triângulo, que serão essenciais na demonstração de alguns resultados importantes.

Definição 2.24. Uma *ceviana* de um triângulo é um segmento que liga um vértice a um ponto do lado oposto. Em outras palavras, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB , respectivamente de um triângulo ABC os segmentos $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} são cevianas.

Teorema 2.25 (Ceva). *Sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, AC e AB , respectivamente, do triângulo ABC . Os segmentos $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} intersectam-se em um ponto P se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

Usando o Princípio de Dualidade, ao invés de demonstrarmos o Teorema de Ceva, demonstraremos o seu dual, que é o Teorema de Menelaus.

Teorema 2.26 (Menelaus). *Sejam X, Y e Z pontos sobre as retas suportes dos lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e \overline{BC} , respectivamente, mas não todos situados sobre os lados do triângulo ABC . Os pontos X, Y e Z são colineares se, e somente se, a seguinte relação for satisfeita:*

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = 1$$

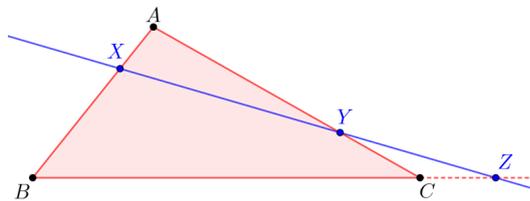


Figura 2.31: Pontos colineares X, Y e Z sobre os lados do triângulo ABC .

Demonstração:

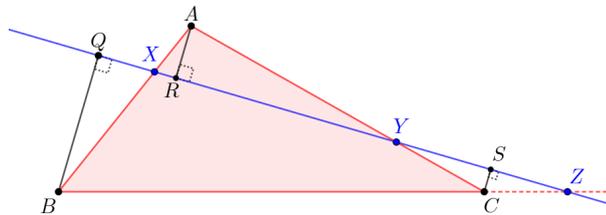


Figura 2.32

Inicialmente, vamos supor que os pontos X, Y e Z são colineares, com X e Y situados sobre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} , respectivamente, e Z localizado sobre o prolongamento de BC , conforme mostrado na Figura 2.32. Sejam $\overline{AR}, \overline{BQ}$ e \overline{CS} as perpendiculares traçadas a partir de A, B e C , respectivamente, sobre a reta que passa por X, Y e Z .

Observe que os triângulos ARX e BQX são semelhantes pelo caso AA , assim como os triângulos BQZ e CSZ . Então,

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{BQ}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CS}}$$

Além disso, os triângulos ARY e CSY também são semelhantes pelo caso AA . Consequentemente, temos

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AR}}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{CS}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{AR}} = 1$$

Reciprocamente, suponhamos $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = 1$. Queremos provar que X, Y e Z são colineares. Seja X' um ponto sobre o lado AB , tal que X', Y e Z são colineares, conforme indicado na Figura 2.33.

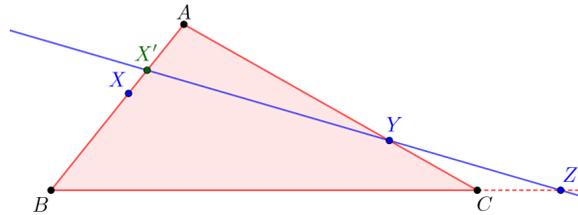


Figura 2.33

Pela primeira parte da demonstração, já sabemos que se X', Y e Z são colineares, vale a equação

$$\frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = 1$$

Portanto,

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = 1 = \frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}$$

Simplificando os termos comuns, concluímos que

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}} \quad (2.5)$$

Como X e X' são pontos pertencentes ao lado AB , da equação temos que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AX'}}{\overline{AB}}$$

Sendo assim, $\overline{AX} = \overline{AX'}$. Como X e X' estão na mesma semirreta de origem A , temos que $X = X'$. Portanto, os pontos X, Y e Z são colineares, o que completa a demonstração. ■

Definição 2.27. Seja ABC um triângulo qualquer e P um ponto no plano, distinto dos vértices A, B e C . As reflexões das retas \overleftrightarrow{AP} , \overleftrightarrow{BP} e \overleftrightarrow{CP} em relação às bissetrizes dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente, intersectam-se em um ponto P' . Este ponto é chamado de *conjugado isogonal de P* em relação ao triângulo ABC .

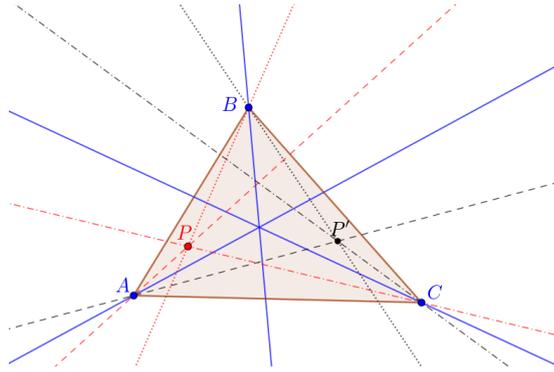


Figura 2.34: Conjugado isogonal

A transformação que associa cada ponto do plano projetivo ao seu conjugado isogonal é chamada de conjugação isogonal.

A partir dessa definição, podemos mencionar algumas propriedades elementares da conjugação isogonal:

1. Se P não estiver sobre nenhuma das retas que contêm os lados do triângulo, então o conjugado isogonal de P , P' , é determinado de forma única. É imediato que um é o conjugado isogonal do outro. Neste caso, dizemos que P e P' são *isogonalmente conjugados*.
2. O conjugado isogonal de um ponto situado sobre uma reta que contém um dos lados de um triângulo é o vértice oposto a esse lado.
3. A conjugação isogonal fixa exatamente quatro pontos do plano: o centro do círculo inscrito (incentro) e os três centros dos círculos ex-inscritos do triângulo.

Proposição 2.28. *Se P está sobre o círculo circunscrito ao triângulo ABC , então o conjugado isogonal de P é o ponto da reta no infinito, na direção perpendicular à reta de Simson de P em relação a ABC , ou seja, a reta que passa pelas projeções de P aos lados do triângulo ABC .*

Demonstração:

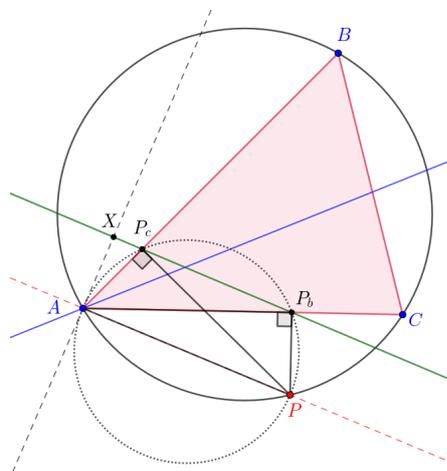


Figura 2.35

Consideremos o caso indicado na Figura 2.35. Os demais casos são tratados de forma análoga. Suponha que o ponto P esteja sobre o círculo circunscrito ao triângulo ABC . Considere as projeções P_b e P_c de P sobre os lados \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Seja X o ponto de interseção da reta de Simson de P com a reta r , que é a reflexão de \overline{AP} em relação à bissetriz do ângulo $\angle A$. O quadrilátero PAP_cP_b é inscrito, logo

$$\begin{aligned} \widehat{AP_cP_b} &= 180^\circ - \widehat{AP_bP_c} \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \widehat{PAP_b}) \\ &= 90^\circ + \widehat{PAP_b} \\ &= 90^\circ + \widehat{XAP_c} \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que o ângulo exterior de um triângulo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes, concluímos que $\widehat{AXP_c} = 90^\circ$

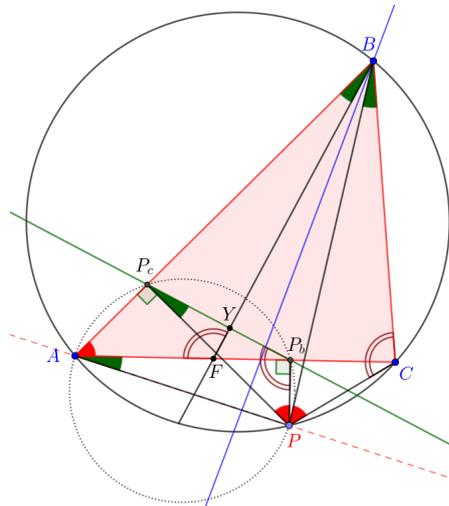


Figura 2.36

Agora, considere os pontos Y e F , interseções da reflexão da reta PB relativo à bissetriz do ângulo $\angle B$, respectivamente, com a reta de Simson e com \overline{AC} (ver Figura 2.36). Assim, temos

$$\widehat{ABY} = \widehat{PBC} \quad (2.6)$$

Como o quadrilátero $ABCP$ é inscrito, segue que

$$\widehat{BPC} = \widehat{BAC} = \widehat{BAP_b} \quad (2.7)$$

A partir de (2.6) e (2.7), implica que

$$\widehat{BCP} = \widehat{AFB} = \widehat{P_cP_bP}$$

Além disso, como o quadrilátero AP_cP_bP é inscrito, vem que

$$\widehat{P_cAF} = \widehat{P_cP_bP} \quad \text{e} \quad \widehat{APP_c} = \widehat{P_cP_bF}$$

Como $\widehat{P_bP_cP} = 90^\circ + \widehat{FP_bP_c}$ e $\widehat{AFY} = \widehat{FP_bP_c} + \widehat{FY P_b} = \widehat{P_bP_cP}$. Logo, $\widehat{FY P_b} = 90^\circ$.

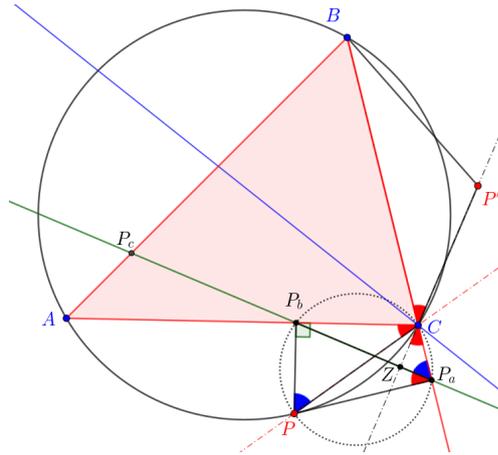


Figura 2.37

Por fim, nas notações da Figura 2.37, P_a é a projeção de P no prolongamento do lado BC , o ponto P' é a reflexão de P relativa à bissetriz do ângulo $\angle C$ e Z é o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{P'C}$ com a reta $\overleftrightarrow{P_bP_a}$. Pela condição isogonal $\widehat{BCP'} = \widehat{P_bCP}$.

Observe que o quadrilátero PP_aCP_b é inscrito, então $\widehat{P_bPC} = \widehat{P_bP_aC}$. Além disso, $\angle BCP'$ e $\angle ZCP_a$ são opostos pelo vértice, o que implica $\widehat{BCP'} = \widehat{ZCP_a}$, como $\widehat{P_bPC} + \widehat{P_bCP_b} = 90^\circ$, então

$$\begin{aligned} \widehat{P_aZC} &= 180^\circ - (\widehat{P_bP_aC} + \widehat{P_aCZ}) \\ &= 180^\circ - (\widehat{P_bPC} + \widehat{BCP'}) \\ &= 180^\circ - (\widehat{P_bPC} + \widehat{P_bCP_b}) \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

Portanto, o isogonal de P é o ponto no infinito. ■

Utilizando a conjugação isogonal, provaremos o Teorema de Pascal de maneira bastante geral.

Teorema 2.29. (Pascal) *Sejam seis pontos A, B, C, D, E e F situados sobre uma cônica. Então, as interseções das retas \overleftrightarrow{AB} com \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{BC} com \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{CD} com \overleftrightarrow{FA} são colineares.*

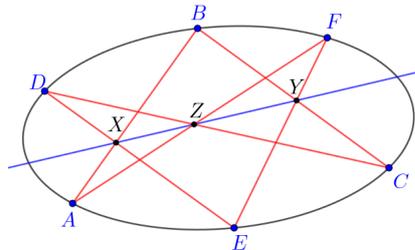


Figura 2.38: Teorema geral de Pascal

Demonstração: Consideremos as posições dos pontos A, B, C, D, E e F como na Figura 2.38. Os outros casos são tratados de forma análoga.

Aplicando uma transformação projetiva, podemos transformar a cônica em um círculo. Nesta configuração, os pontos A, B, C, D, E e F estão no círculo (ver Figura 2.39).

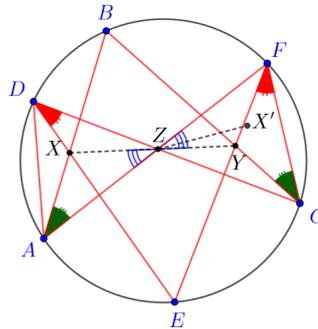


Figura 2.39

Sejam X, Y e Z os pontos de interseção das retas \overleftrightarrow{AB} com \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{BC} com \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{AF} com \overleftrightarrow{CD} , respectivamente. Queremos provar que X, Y e Z são colineares.

Observe que os ângulos $\angle BAF$ e $\angle BCF$ são iguais, pois ambos subtendem o mesmo arco no círculo. Da mesma forma $\angle CDE$ é igual a $\angle CFE$. Além disso, o triângulo AZD é semelhante a CZF pelo caso AA , pois $\widehat{ADZ} = \widehat{ZFC}$, e os ângulos $\angle AZD$ e $\angle CZF$ são opostos pelo vértice.

Consideremos a similaridade que transforma o triângulo AZD no triângulo CZF . Para construir o ponto X' , proceda da seguinte forma: sobre a reta suporte de \overleftrightarrow{FZ} , com vértice em F e um dos lados a semirreta \overrightarrow{FZ} , construa o ângulo de medida \widehat{XDZ} . Analogamente, sobre a reta suporte de \overleftrightarrow{CZ} , com vértice em C e um dos lados a semirreta \overrightarrow{CZ} , construa o ângulo de medida \widehat{XAZ} . Os outros dois lados dos ângulos descritos se interseccionam em X' . Observemos que $\widehat{XZA} = \widehat{X'ZC}$.

A transformação de similaridade faz com que no triângulo CZF , X' seja tal que $\widehat{X'FZ} = \widehat{XDZ}$ e $\widehat{X'CZ} = \widehat{XAZ}$. Logo, pela definição de isogonalidade X' é o conjugado isogonal de Y . Portanto, temos que $\widehat{AZX} = \widehat{CZ'X'} = \widehat{FZY}$, o que prova que os pontos X, Y e Z são colineares. ■

Novamente, o dual desse teorema também generaliza o Teorema de Brianchon, como podemos ver abaixo.

Teorema 2.30. *Sejam l_1, l_2, \dots, l_6 seis retas tangentes a uma mesma cônica, e sejam A_{ij} os pontos de interseção das retas l_i e l_j . Então, as retas $\overleftrightarrow{A_{12}A_{45}}$, $\overleftrightarrow{A_{23}A_{56}}$ e $\overleftrightarrow{A_{34}A_{61}}$ se intersectam em um único ponto.*

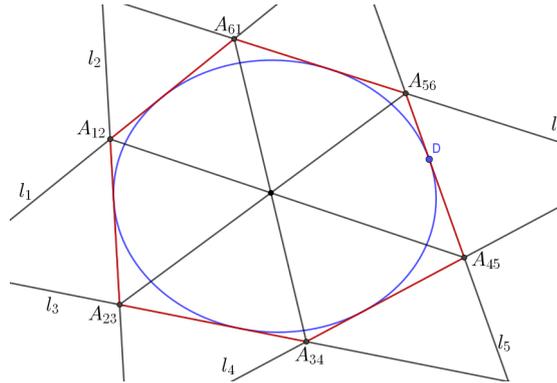


Figura 2.40: Dual do Teorema geral de Pascal.

2.6 Eixo radical e lápis de círculos

Definição 2.31. Seja o círculo de centro O e raio r , e um ponto P . A expresso $\text{Pot}(P) = \overline{OP}^2 - r^2$  chamada de potência de P em relação ao círculo.

Essa definição implica que a potência de um ponto P  igual a zero quando P est sobre o círculo,  positiva quando P est fora do círculo, e negativa quando P est dentro do círculo.

Lema 2.32. Dado um círculo de centro O e raio r , e um ponto P interior (exterior) a este círculo. Considere uma reta que passa por P e intercepta o círculo nos pontos A e B . O produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ independente da escolha da reta e  igual ao valor absoluto da potência de P em relação ao círculo.

Demonstração:

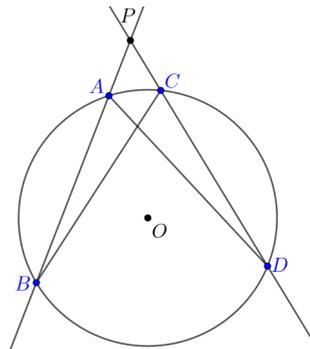


Figura 2.41

Suponhamos que o ponto P est exterior ao círculo (o caso em que P  interior  tratado de forma anloga). Consideremos duas retas passando por P , sendo que a primeira intercepta o círculo nos pontos A e B , e a segunda nos pontos C e D , como indicado na Figura 2.41. observe que os triângulos PAD e PCB só semelhantes, pois compartilham o ângulo $\angle P$ e os ângulos $\angle PBC$ e $\angle PDA$ só iguais, j que subtendem os mesmos arcos. Portanto, pela semelhana de triângulos, temos

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Agora, resta mostrar que essa expressão é igual ao valor absoluto da potência de P em relação ao círculo. Considere uma reta passando por P e pelo centro do círculo O . Então, o produto das distâncias de P às interseções com o círculo dos pontos é igual a $(\overline{OP} + r)(\overline{OP} - r) = \overline{OP}^2 - r^2$. ■

Teorema 2.33. *Sejam ω_1 e ω_2 dois círculos não concêntricos. O lugar geométrico dos pontos P no plano para os quais as potências de P em relação a ω_1 e ω_2 são iguais, isto é, $\text{Pot}_{\omega_1}(P) = \text{Pot}_{\omega_2}(P)$, é uma reta perpendicular à reta que conecta os centros de ω_1 e ω_2 . Esta reta é denominada o eixo radical dos círculos ω_1 e ω_2 .*

Demonstração:

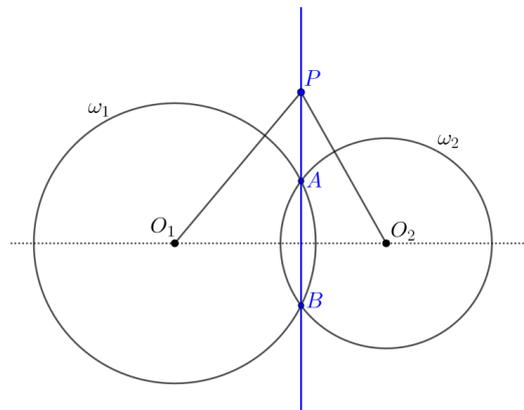


Figura 2.42

Suponhamos que os dois círculos ω_1 e ω_2 se intersectam. Trace uma reta passando pelos pontos de interseção A e B (ver Figura 2.42). Afirmamos que esta reta é o eixo radical dos dois círculos. De fato, consideremos o ponto P arbitrário na reta \overleftrightarrow{AB} , externo aos dois círculos (o caso em que P é interno é tratado de forma análoga). Pelo Lema 2.32, a potência de P em relação a ambos os círculos é dada por $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, e os sinais destas potências coincidem. Além disso, como os triângulos O_1AB e O_2AB são isósceles, a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ (a reta que une os centros dos círculos) é a bissetriz do ângulo formado por esses triângulos e é perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} . Portanto, a reta \overleftrightarrow{AB} é o eixo radical dos círculos.

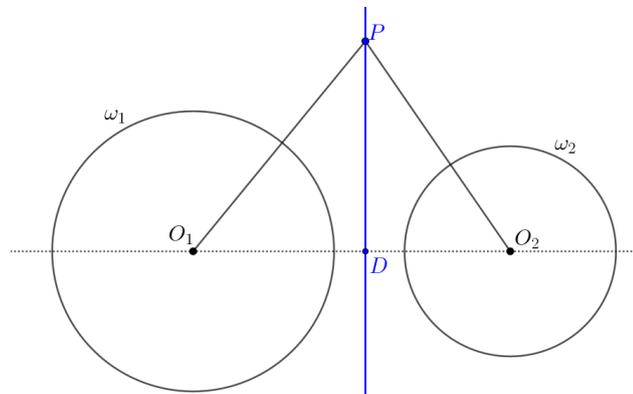


Figura 2.43

Para o caso em que os dois círculos não se intersectam, Figura 2.43, consideremos

um ponto P no plano tal que $\text{Pot}_{\omega_1}(P) = \text{Pot}_{\omega_2}(P)$. Temos que

$$\begin{aligned} \overline{PO_1}^2 - r_1^2 &= \overline{PO_2}^2 - r_2^2 \Leftrightarrow \\ \overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 &= r_1^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

ou seja, se, e somente se, a diferença dos quadrados das distâncias de P aos pontos O_1 e O_2 , respectivamente, for constante e igual a $r_1^2 - r_2^2$.

Agora, considere D o pé da perpendicular baixada de P à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$, e suponhamos que D pertence ao segmento $\overline{O_1O_2}$ (Figura 2.43). Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} \overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 &= (\overline{PD}^2 + \overline{DO_1}^2) - (\overline{PD}^2 + \overline{DO_2}^2) \\ &= \overline{DO_1}^2 - \overline{DO_2}^2 \\ &= (\overline{DO_1} + \overline{DO_2})(\overline{DO_1} - \overline{DO_2}) \\ &= \overline{O_1O_2}(\overline{O_1O_2} - 2\overline{DO_2}), \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $\overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 = r_1^2 - r_2^2$, se, e somente se,

$$\overline{DO_2} = \frac{1}{2} \left(\overline{O_1O_2} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{\overline{O_1O_2}} \right)$$

uma expressão constante.

Os casos em que os círculos são disjuntos, um contido no outro, ou tangentes podem ser tratados de maneira análoga. ■

Agora, suponhamos que três círculos são dados. Se seus centros não forem colineares, então os eixos radicais de dois pares desses círculos se intersectam em um ponto. As potências desse ponto em relação aos três círculos são iguais, e, portanto, o terceiro eixo radical também passa por ele. Esse ponto é chamado de *centro radical* dos três círculos. Se os centros dos círculos estão em uma reta, então os eixos radicais são paralelos ou coincidem. Neste último caso, os círculos são ditos coaxiais.

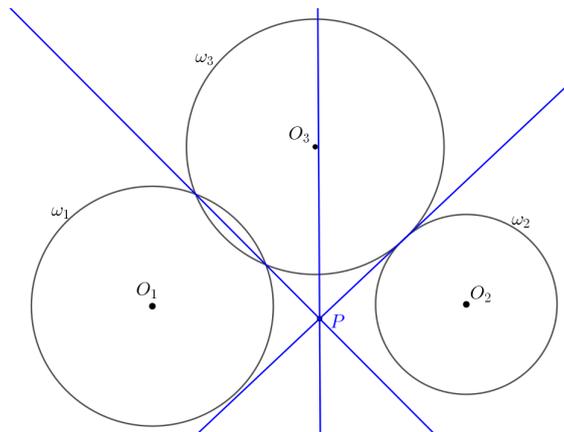
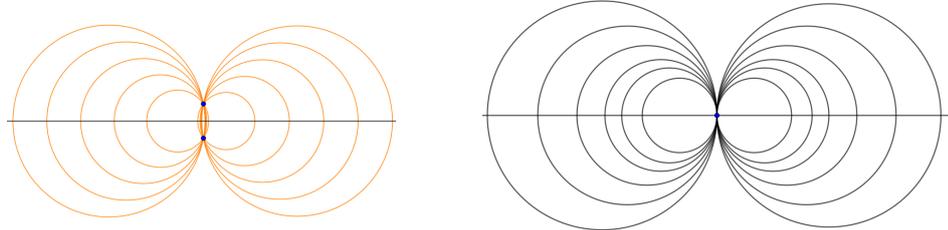


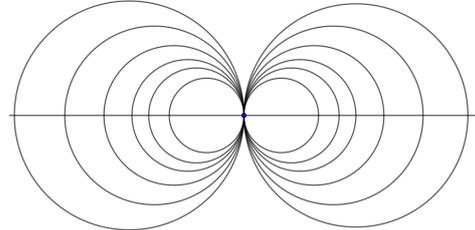
Figura 2.44: Ponto P é o centro radical.

O conjunto de todos os círculos coaxiais com dois círculos dados é chamado de *lápiz*, ver Figura 2.45. Se os círculos que definem o lápis se intersectam em dois pontos, o lápis consiste em todos os círculos que passam por esses pontos, sendo então chamado de *lápiz é hiperbólico*. Se os dois círculos são tangentes, qualquer círculo do lápis será

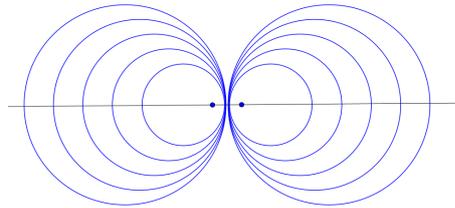
tangente à reta tangente comum no ponto de tangência, e o lápis é chamado de *parabólico*. Finalmente, dois círculos sem interseção dão origem ao *lâpis elíptico*. Além disso, dois círculos degenerados em pontos no lápis elíptico são chamados de *pontos limites* de lápis.



(a) Lápis hiperbólico



(b) Lápis parabólico



(c) Lápis elíptico

Figura 2.45: Lápis de círculos.

Capítulo 3

Propriedades Projetivas das Cônicas

A análise das cônicas no campo da Geometria Projetiva proporciona uma compreensão mais profunda de suas propriedades distintivas. Ao explorar as propriedades projetivas dessas curvas, introduzimo-nos em um domínio de transformações e relações intrínsecas que revelam a riqueza e complexidade inerentes a essas formas matemáticas. Neste capítulo, mostraremos as características fundamentais das cônicas sob a perspectiva projetiva.

3.1 Razão cruzada em uma cônica

No capítulo 2, demonstramos que ao projetar quatro pontos colineares a partir de um ponto P situado fora de uma reta, obtemos um invariante numérico conhecido como razão cruzada. Esta grandeza permanece constante, independentemente da posição específica do ponto de projeção P . Agora, buscamos estender esta propriedade para uma cônica. Assim, começando com um círculo ω , consideremos os pontos A, B, C, D em ω e os pontos A', B', C' e D' , formados pelas interseções de $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ e \overrightarrow{PD} com uma reta l , vamos mostrar que $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. De fato, já sabemos que

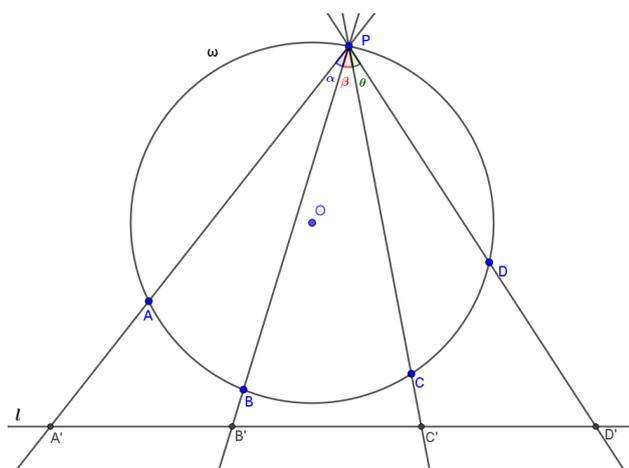


Figura 3.1: Razão cruzada em um círculo ω

$$(A', B'; C', D') = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\beta + \theta)}{\text{sen}(\alpha + \beta + \theta) \cdot \text{sen}(\beta)}$$

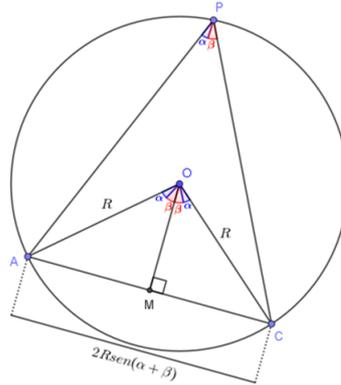


Figura 3.2: O triângulo ACO é isósceles e M é o ponto médio de AC

Observe que o triângulo ACO é isósceles de base \overline{AC} . Além disso, \overline{OM} é bissetriz do $\angle AOC$ relativa à base \overline{AC} . Portanto, aplicando a Lei dos Senos, temos que $\overline{AC} = 2R \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Da mesma maneira, procedemos com \overline{BD} , \overline{BC} e \overline{AD} . Daí,

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{2R \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot 2R \operatorname{sen}(\beta + \theta)}{2R \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \theta) \cdot 2R \operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\beta + \theta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \theta) \cdot \operatorname{sen}(\beta)} = (A, B; C, D)$$

Logo, $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

Este resultado amplia a invariância da razão cruzada para o contexto de um círculo, porém com uma leve restrição: o ponto de projeção deve estar localizado sobre o próprio círculo. Agora, estendemos essa invariância para cônicas em geral.

Sabemos que uma cônica é a projeção de um círculo e que qualquer propriedade do círculo que seja invariante sob transformações projetivas, também será uma propriedade da cônica. Portanto, a razão cruzada para os quatro pontos A, B, C, D na cônica é definida da mesma forma que no círculo. Para isso, considera-se uma reta arbitrária r e um ponto X adicional na cônica que não pertence à reta r (conforme ilustrado na Figura 1.3), e define-se a razão cruzada de $(A, B; C, D)$ como sendo igual à razão cruzada $(A', B'; C', D')$.

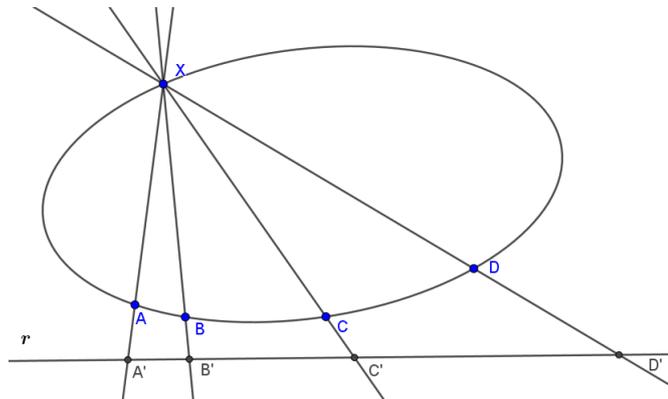


Figura 3.3: A razão cruzada $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$

As cônicas tem as seguintes propriedades fundamentais em relação a razão cruzada:

Proposição 3.1. *Dada uma cônica K e quatro pontos A, B, C e D pertencentes a ela (vide Figura 1.4), então para qualquer ponto P pertencente a K , a razão cruzada $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD})$ é independente de P .*

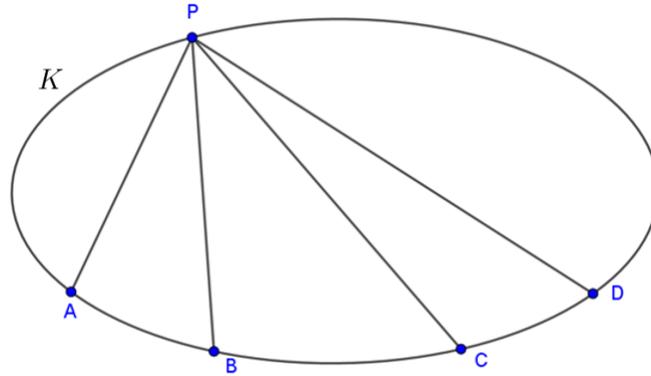


Figura 3.4: Razão cruzada na Cônica

Demonstração: Sabemos que uma cônica pode ser obtida como a imagem de um círculo por meio de uma transformação projetiva, como ilustrado na Figura 3.5. No círculo, Pelo Teorema do Ângulo Inscrito, conforme a Figura 3.5, à esquerda, temos que $\widehat{APB} = \widehat{AP'B}$, e analogamente, para as demais cordas \overline{BC} e \overline{CD} . Dessa forma, a razão cruzada $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD})$ é independente da posição do ponto P no círculo. Como a razão cruzada é invariante sob uma projeção, essa propriedade se mantém válida para qualquer cônica, através de uma transformação projetiva.

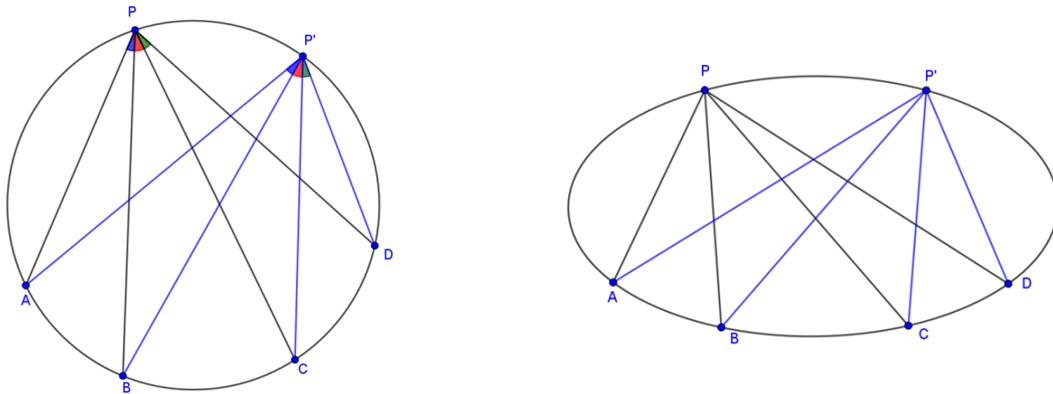


Figura 3.5: A cônica imagem de uma círculo por uma Transformação projetiva

■

Vamos explorar agora a recíproca dos teoremas de Pascal e Brianchon, os quais serão úteis nas demonstrações de alguns resultados geométricos.

Teorema 3.2. (O inverso do Teorema de Pascal) *Sejam $X_i, i = 1, \dots, 6$, quaisquer seis pontos distintos no plano. Se os pontos de interseções das retas $\overrightarrow{X_1X_2}$ e $\overrightarrow{X_4X_5}$, $\overrightarrow{X_2X_3}$ e $\overrightarrow{X_5X_6}$ e $\overrightarrow{X_3X_4}$ e $\overrightarrow{X_6X_1}$ forem colineares, então existe uma cônica única que passa por todos esses seis pontos.*

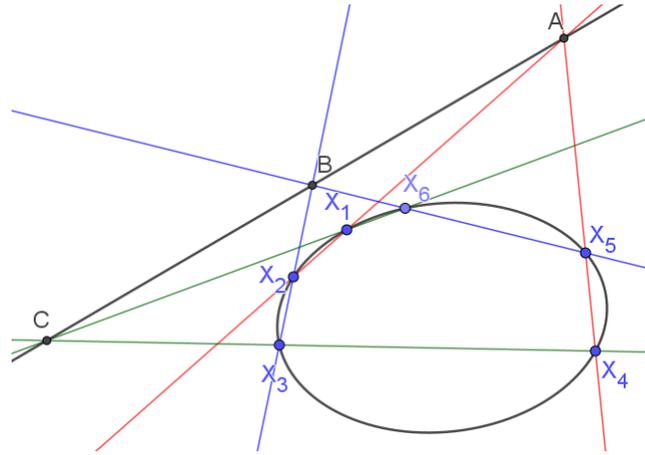
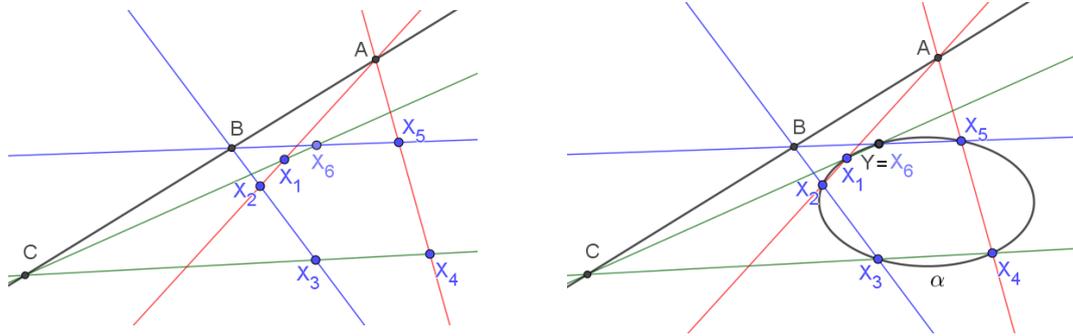


Figura 3.6: Razão cruzada na cônica

Demonstração: Sabemos que, para quaisquer cinco pontos em posição geral, existe uma única cônica que passa por esses pontos. Seja α a cônica passando por X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 . Consideremos A, B e C os pontos de interseções das retas $\overleftrightarrow{X_1X_2}$ e $\overleftrightarrow{X_4X_5}$, $\overleftrightarrow{X_2X_3}$ e $\overleftrightarrow{X_5X_6}$ e $\overleftrightarrow{X_3X_4}$ e $\overleftrightarrow{X_6X_1}$, e seja Y o ponto de interseção de α e BX_5 , tal que $Y \neq X_5$. Pelo Teorema 2.29 (Pascal), a interseção entre $\overleftrightarrow{X_3X_4}$ e $\overleftrightarrow{X_1Y}$ está na reta \overleftrightarrow{AB} , isto é, $\overleftrightarrow{X_3X_4} \cap \overleftrightarrow{X_1Y} = C$. Logo, Y coincide com X_6 .



■

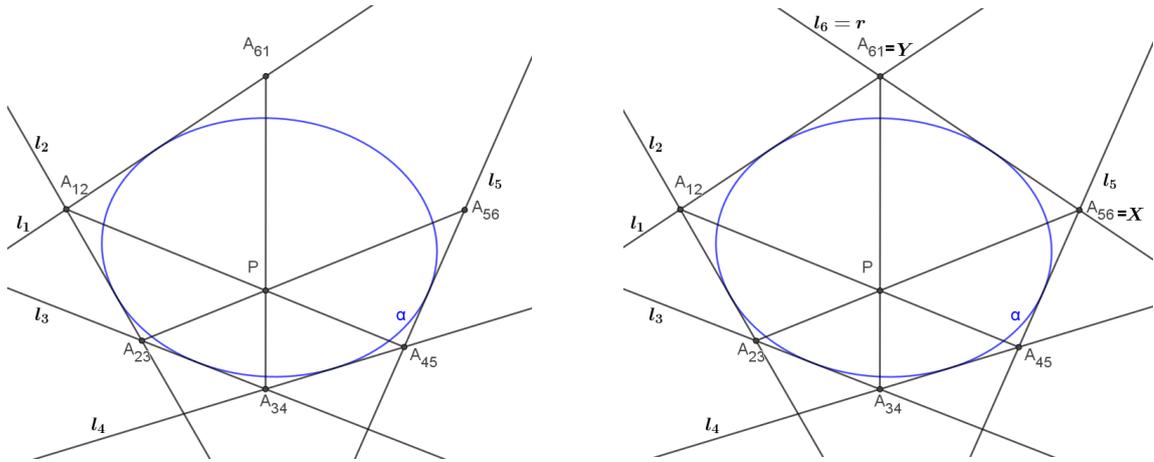
Ao dualizarmos o Inverso do Teorema de Pascal, obtemos o inverso do teorema de Brianchon, que para prová-lo, precisamos do próximo resultado.

Proposição 3.3. *Sejam cinco retas no plano tais que três quaisquer não são concorrentes. Então, existe uma única cônica tangente a essas cinco retas.*

Demonstração: Aplicando o Princípio de Dualidade, obtemos o Teorema 2.9 que afirma que, dados cinco pontos em posição geral, existe uma única cônica que passa por esses pontos. ■

Teorema 3.4. (O inverso do Teorema de Brianchon) *Sejam $l_i, i = 1, \dots, 6$, seis retas distintas quaisquer no plano e A_{ij} a interseção de l_i e l_j . Se as retas $\overleftrightarrow{A_{12}A_{45}}$, $\overleftrightarrow{A_{23}A_{56}}$ e $\overleftrightarrow{A_{34}A_{61}}$ intersectam em um único ponto, então existe uma única cônica tangente a todos os l_i .*

Demonstração:



Pelo Proposição 3.3, dadas cinco retas tangentes, existe uma única cônica tangente a todas as cinco retas. Sejam α a cônica tangente às retas l_i e A_{ij} . Consideremos o ponto P intersecção das retas $\overleftrightarrow{A_{12}A_{45}}$, $\overleftrightarrow{A_{23}A_{56}}$ e $\overleftrightarrow{A_{34}A_{61}}$, onde $A_{56} \in l_5$ e $A_{61} \in l_1$. Seja agora, a reta r tangente à α tal que $r \cap l_5 = \{X\}$ e $r \cap l_1 = \{Y\}$. Pelo Teorema 2.30 (Brianchon), o ponto de intersecção das diagonais do hexágono $A_{12}A_{23}A_{34}A_{45}XY$ circunscrito a α coincide com P , de maneira que $X = A_{56}$ e $Y = A_{61}$. Logo, r coincide com a reta $\overleftrightarrow{A_{56}A_{61}} = l_6$. ■

3.2 Correspondência polar: polo e polar

Podemos generalizar o conceito de reta polar para quaisquer cônicas, definindo e construindo a reta polar associada a um ponto dado.

Sejam uma cônica e um ponto A , pertencentes ao mesmo plano. Consideremos uma transformação projetiva arbitrária que leve a cônica em um círculo. Através de uma transformação projetiva dada, sejam A' a imagem de A e a' a reta polar de A' relativa ao círculo dado. Desta forma, definimos a polar de A como sendo a imagem inversa de a' . Vejamos, como a pode ser construída no plano da cônica dada.

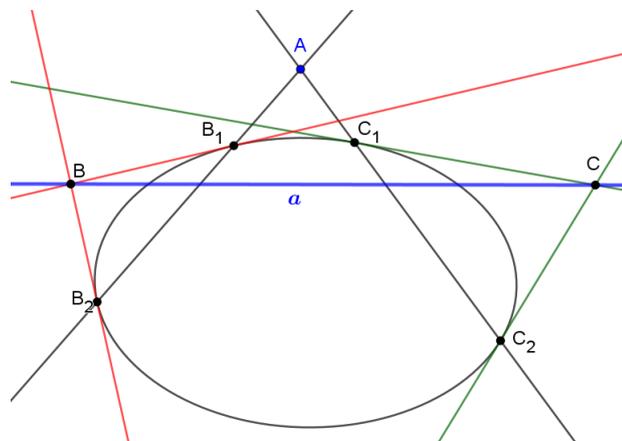


Figura 3.9: Construção da reta polar de A em relação a um cônica

Sejam duas retas passando por A e intersectando a cônica nos pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 . Consideremos B e C os pontos de intersecção das retas tangentes à cônica nos pontos B_1

e B_2 e C_1 e C_2 , respectivamente. Sendo assim, a reta polar a de A é definida como a reta que passa por B e C . Mostremos que, de fato, a reta que passa por B e C é a imagem inversa de a' , que é a polar de A' , conforme Figura 3.9.

Sejam B'_1, B'_2, C'_1 e C'_2 os pontos de intersecção das retas que passam por A' com o círculo. Considerando B' e C' os pontos de intersecção das tangentes ao círculo que passam por B'_1 e B'_2 e C'_1 e C'_2 , respectivamente, temos que as polares de B' e C' são as retas que passam por B'_1 e B'_2 e C'_1 e C'_2 , respectivamente. Como A' pertencem as polares de B' e C' , então a polar de A' passa por B' e C' , como queríamos demonstrar.

Como transformações projetivas preservam as intersecções e tangências de retas e cônicas, a reta a não depende da escolha da transformação projetiva utilizada. Além disso, pela Proposição 2.13, do Capítulo 2, podemos observar que as retas $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ são, respectivamente, as polares de B e C .

Uma outra maneira de construir a reta polar a é a seguinte:

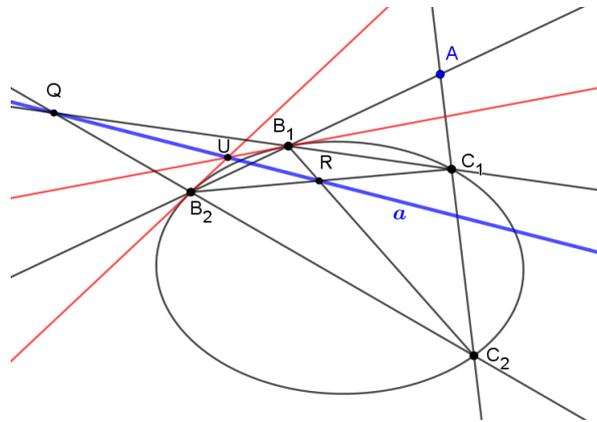


Figura 3.10: Construção da reta polar de A em relação a um cônica

A partir de um ponto A no plano, externo a uma cônica dada (ver Figura 3.10), traçamos duas retas secantes, respectivamente, passando pelos pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 . As retas $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ se intersectam em um ponto Q . As retas tangentes em B_1 e B_2 se intersectam no ponto U . Por fim, marcamos os pontos de intersecção R das retas $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$. Pelo Teorema de Pascal, e Observação 2.16, os pontos Q, U e R são colineares. Logo, a reta a passa pelos pontos Q, U e R . Particularmente, se A é o centro de uma elipse ou uma hipérbole a reta polar será a reta no infinito.

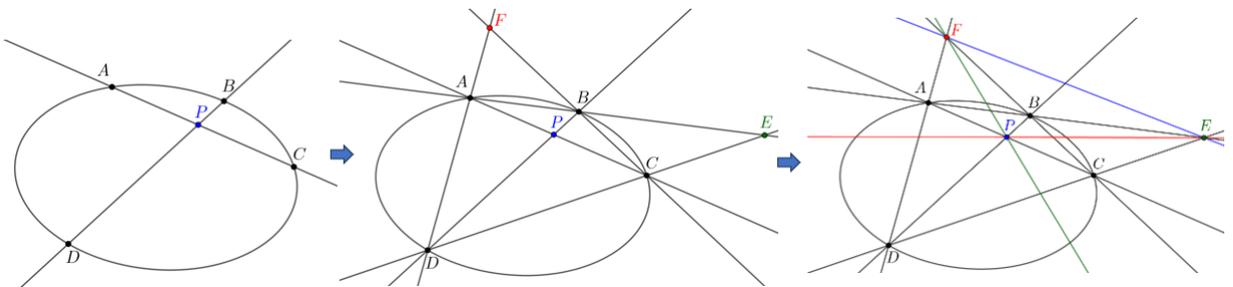


Figura 3.11: À direita, o ponto P está no interior de uma elipse, e sua reta polar é definida pelos pontos E e F .

Para o caso em que ponto P esteja no interior da cônica, mas não coincida com o centro, façamos da seguinte forma: trace duas retas passando por P e marque os pontos

A, B, C e D , que são as interseções dessas retas com a cônica (ver Figura 3.11). Em seguida, trace as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , e denote seu ponto de interseção por E . De modo análogo, trace as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} , e denote o ponto de interseção por F . A reta \overleftrightarrow{EF} é, então, a reta polar do ponto P . De fato, pela construção acima, a reta que passa por P e E é a polar do ponto F , já a reta que passa por P e F é polar de E . Sendo assim, a polar de P , é a reta que passa pelos pontos E e F .

A relação estabelecida acima entre os pontos e as retas relativas à cônica é denominada de *correspondência polar* relativa à cônica. A reta a é chamada de polar de A , enquanto que A é o polo de a . Procedendo como acima, é imediato que as propriedades da correspondência polar no círculo estende-se naturalmente para as cônicas.

Em particular, podemos definir a *reta diametral* associada a uma reta em relação a uma cônica. Observando que já temos a definição de reta diametral no círculo, aplicamos uma transformação projetiva que leva a cônica a um círculo e a reta para sua imagem transformada. Dessa forma, a imagem inversa desta reta é a reta diametral da reta dada relativa à cônica.

Nosso objetivo agora é descrever, assim como fizemos para a reta polar em relação a uma cônica, o procedimento para construir a reta diametral de uma dada reta em relação a uma cônica.

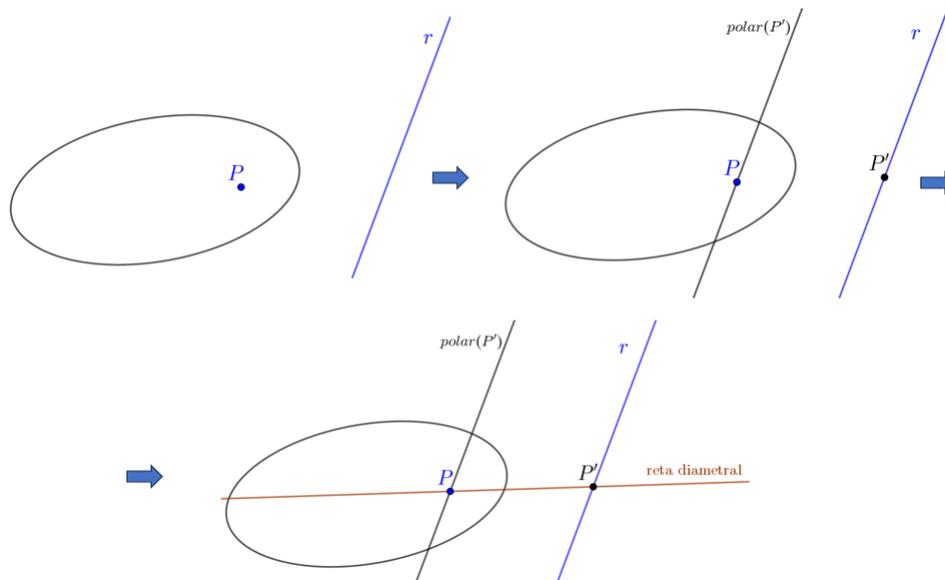


Figura 3.12: Construção da reta diametral dado uma reta r e um cônica.

Para isso, consideremos uma reta r e uma cônica (Figura 3.12). Seja P o polo da reta r , isto é, o ponto de interseção de todas as retas polares de cada ponto de r em relação à cônica. Em seguida, tomamos a reta paralela a r que passa por P e determinamos o seu polo, que estará sobre a reta r . A reta diametral de r é então a reta que passa por P e pelo polo (inverso de P) em r da reta paralela a r .

Essa construção permite definir a reta diametral de maneira semelhante à definição de retas polares, estendendo o conceito para qualquer cônica.

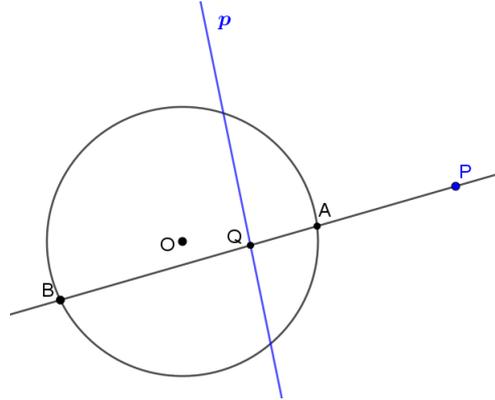


Figura 3.13: A reta polar do ponto P passa pela reta \overleftrightarrow{AB} no ponto Q .

Agora, observemos que se uma reta p é a polar de um ponto P e uma reta arbitrária passa por P intersectando p em Q e a cônica nos pontos A e B (Figura 3.13), então $(P, Q; A, B) = 1$. Para provar esse resultado, vamos considerar o caso em que a cônica é um círculo. Para isso, traçamos outra reta passando por P e intersectando a círculo em dois pontos distintos, C e D . Pela construção da polar, as retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AD} se intersectam em p em um ponto, digamos E (ver Figura 3.14) e as retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AD} em R .

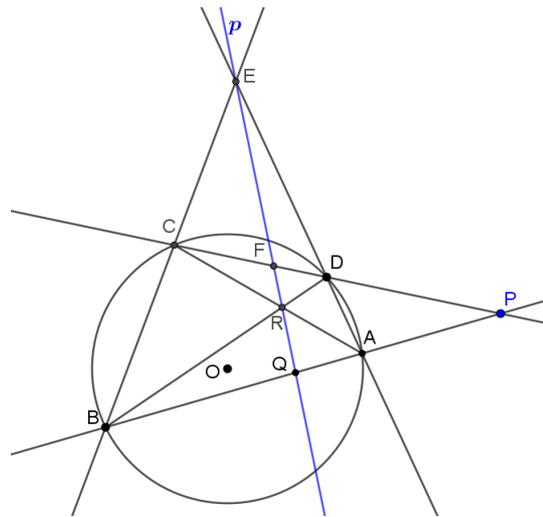


Figura 3.14

Assim, aplicando o Teorema de Ceva no triângulo ABE , obtemos

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{DA}} = 1 \quad (3.1)$$

Aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ABE , temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{DA}} = 1 \quad (3.2)$$

Dividindo (3.2) por (3.1), temos

$$1 = \frac{\overline{AP}/\overline{PB}}{\overline{AQ}/\overline{QB}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{QB}}{\overline{AQ} \cdot \overline{PB}} = (P, Q; A, B)$$

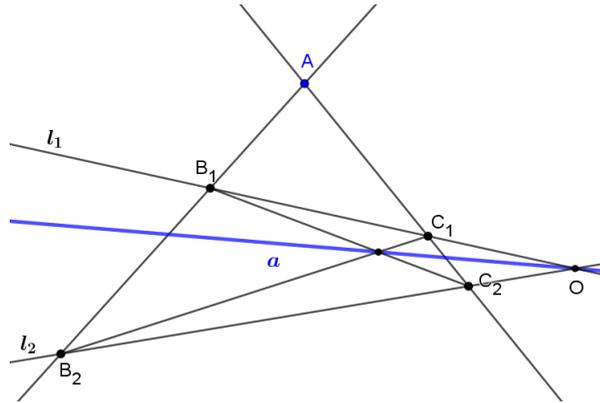


Figura 3.15: Reta polar de a em relação a um cônica degenerada de 2° grau

Observemos que a última construção que fizemos da polar de uma cônica se aplica a cônicas degeneradas, ver Figura 3.15. Considerando a cônica constituída por duas retas l_1 e l_2 concorrentes em O , temos, dado um ponto A , sejam duas retas que passam por A , intersectando l_1 e l_2 nos pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 , respectivamente, como indicado na Figura 3.15. Sendo assim, a reta que passa por O e pela intersecção das retas $\overleftrightarrow{B_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_2C_1}$ é a reta polar. E, novamente, por pelos Teoremas de Ceva e Menelaus, temos que $(l_1, l_2; \overrightarrow{OA}, a) = 1$.

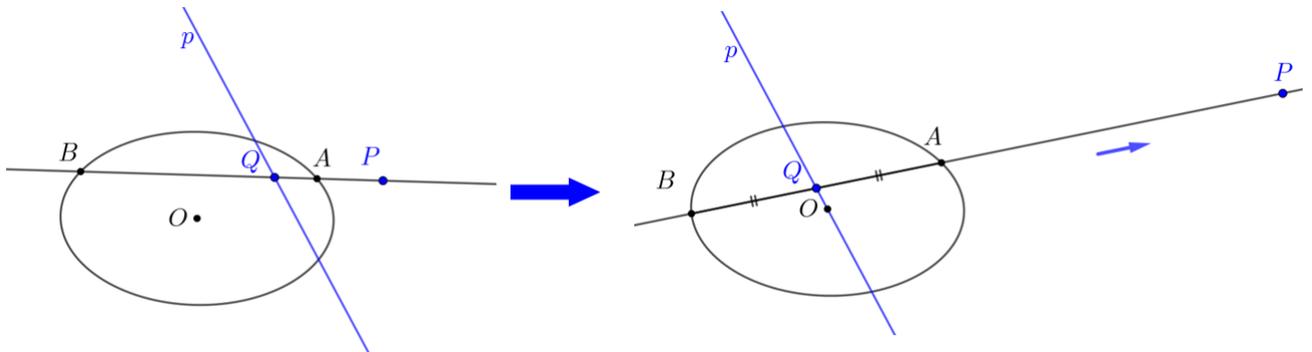


Figura 3.16: Elipse de centro O , a reta polar p passando por O e o ponto P no infinito

Agora, levando P para o infinito, sua polar passa pelo centro do círculo, e a reta que passa por A e B é a polar do ponto de intersecção das tangentes ao círculo por A e B . Consequentemente, p é a mediatriz da corda \overline{AB} pelo ponto Q . Disto, segue-se que os pontos médios de todas as cordas paralelas a uma dada reta estão sob uma reta que passa pelo centro do círculo. Em particular, se a cônica é uma elipse ou uma hipérbole, então os pontos médios de todas as cordas paralelas a uma reta fixa estão em uma reta que passa pelo centro da cônica. Se a cônica é um parábola, os pontos médios das cordas paralelas a uma reta fixa estão em uma reta paralela a seu eixo. A próxima proposição mostra este último fato.

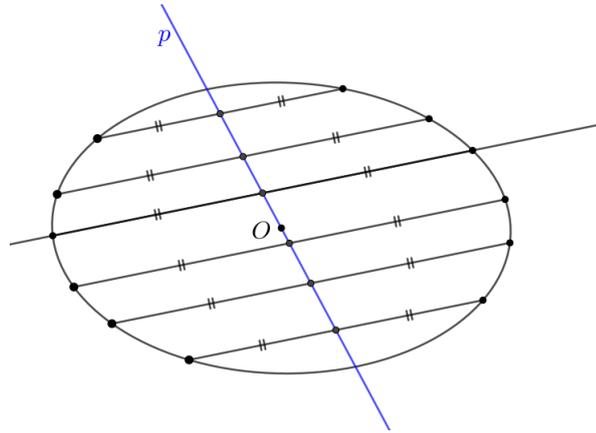


Figura 3.17: Elipse com cordas paralelas a uma reta fixa, e a reta p passando pelos pontos médios dessas cordas

Proposição 3.5. *Sejam duas retas paralelas que intersecta a parábola nos pontos A, B e C, D , respectivamente. Então, a reta que liga os pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} é paralela ao eixo da parábola.*

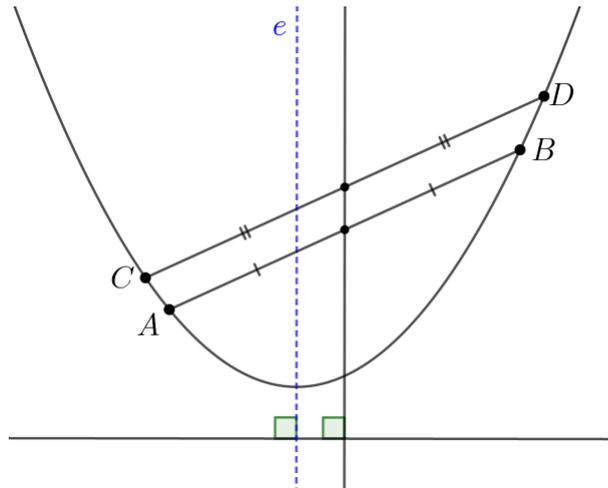


Figura 3.18: Reta paralela ao eixo da parábola.

Demonstração: Apliquemos uma transformação afim que leva as retas dadas a retas paralelas à diretriz da parábola. Com isso, a reta que conecta os pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} será, naturalmente, transformada no eixo da parábola. Além disso, a transformação afim preserva o paralelismo entre as retas que são paralelas ao eixo da parábola. Essas retas intersectam o ponto de tangência da parábola com a reta no infinito. ■

Definição 3.6. A *curva dual* de uma curva suave é o conjunto dos duais de todas as retas tangentes à curva. Dada uma curva φ , denotamos a curval dual de φ por $R(\varphi)$.

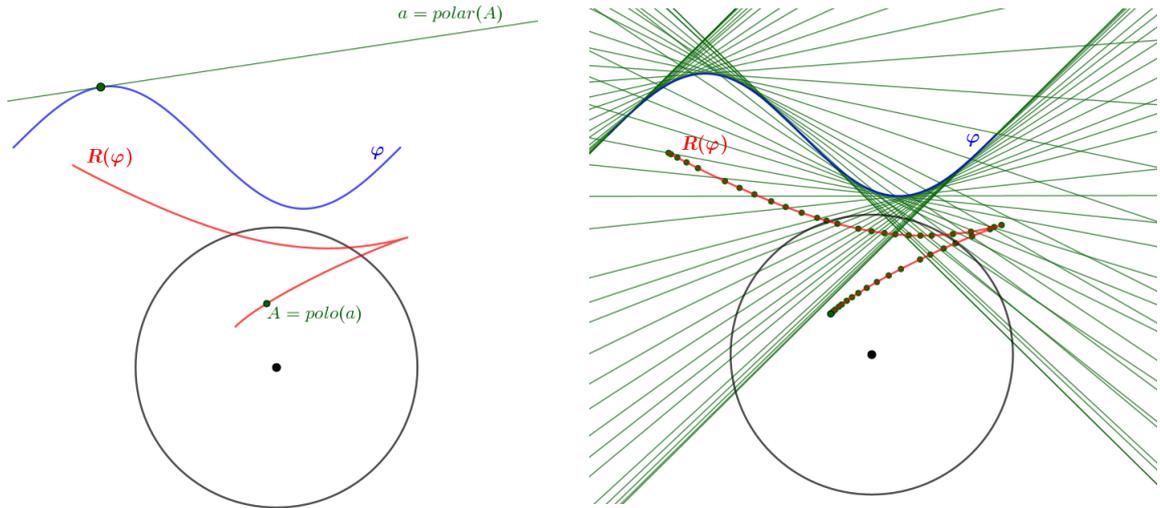


Figura 3.19: Exemplo da curva polar associada à curva φ .

O exemplo de curva dual de uma curva suave que nós estamos interessados é aquela associada correspondência polar. Neste caso, a curva dual é o conjunto dos polos de todas as tangentes à curva relativos a um dado círculo, que passamos a denominar de *curva polar* relativa ao círculo dado, conforme Exemplos 3.19 e 3.20.

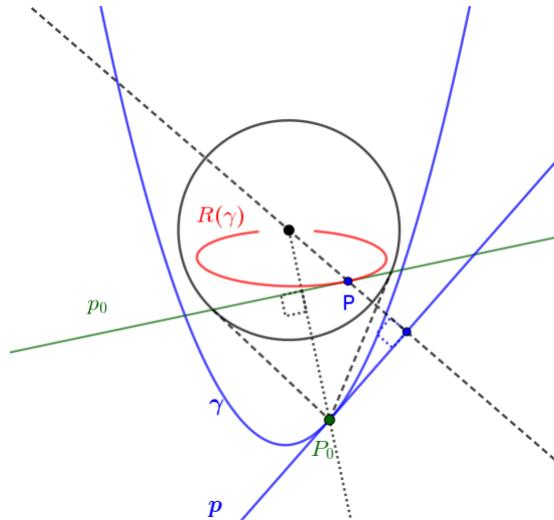
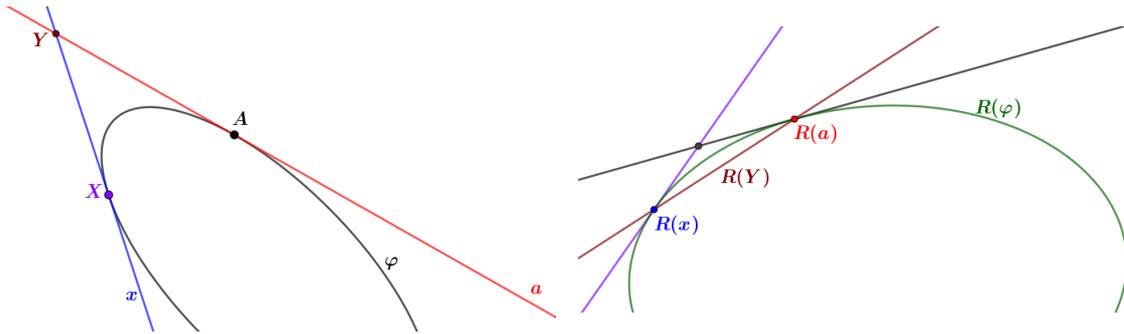


Figura 3.20: Curva γ e sua curva polar.

A proposição a seguir estabelece uma propriedade importante da operação de dualidade.

Proposição 3.7. *Seja φ uma curva e $R(\varphi)$ a curva dual de φ . Então, $R(R(\varphi))=\varphi$.*

Demonstração:



Suponha um ponto X movendo-se ao longo de φ em direção a A . Então, as interseções das retas tangentes em X e A convergem para A . Seja Y a interseção das retas tangentes x e a . Ao considerarmos as duais de x e a na curva $R(\varphi)$, notamos que $\overrightarrow{R(x)R(a)}$ tende a $R(a)$, logo o segmento $\overline{R(x)R(a)}$ tende a tangente de $R(\varphi)$ em $R(a)$. Mas $\overrightarrow{R(x)R(a)}$ nada mais é que $R(Y)$, e portanto $R(Y)$ tende a tangente de $R(\varphi)$ em $R(a)$. Então, o dual de $R(Y)$ tende ao dual da tangente em $R(a)$. Porém este é o ponto Y , sob movimento, tende a A . Segue-se que o dual da tangente em $R(a)$ é A . Mas isso implica que os duais das tangentes para $R(\varphi)$ formam a curva φ . ■

Proposição 3.8. *A curva polar de um círculo com relação a outro círculo é uma cônica.*

Demonstração:

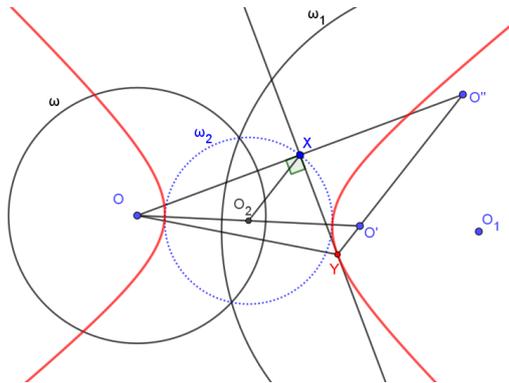


Figura 3.22

Consideremos um círculo ω com centro O e ω_1 um círculo com centro em O_1 . Vamos assumir que O está fora de ω_1 (ver Figura 3.22). Suponhamos que a inversão em relação a ω transforma ω_1 em um círculo ω_2 centrado em O_2 . Neste caso, ω_2 não passa pelo centro de ω , conforme o Teorema 2.4 item 4. Então, seja $p(X)$ a reta passando por X em ω_2 e perpendicular a \overrightarrow{OX} . Ela é a polar do inverso de X com relação a ω . Observemos que à medida que X se move ao longo de ω_2 , sua reta correspondente varre o conjunto das retas polares de pontos de ω_1 .

Vamos mostrar que o conjunto de todas essas retas são tangentes a uma cônica. Consideremos O' a reflexão de O relativa ao ponto O_2 e O'' a reflexão de O relativa ao ponto em X . Note que $\overline{O'O''}$ é o diâmetro de ω_2 , pois pelo Teorema da base média do triângulo $OO'O''$, temos que $\overline{O'O''} = 2\overline{O_2X}$. Suponha Y seja a interseção entre $\overline{O'O''}$ e $p(X)$. Então, como $p(X)$ é perpendicular no ponto médio de OO'' , o triângulo OYO'' é isósceles, pois $\overline{YO} = \overline{YO''}$. Além disso, $O\hat{Y}X = X\hat{Y}O''$. Portanto, $p(X)$ é tangente a uma hipérbole em Y , de focos O e O' e cujo valor absoluto da diferença das distâncias de

Y aos focos é o diâmetro de ω_2 , já que $|\overline{OY} - \overline{O'Y}| = |\overline{O''Y} - \overline{O'Y}| = 2\overline{O_2X}$. Além do mais, à medida que X percorre ω_2 , o ponto Y percorre toda hipérbole.

Por fim, se O está dentro de ω_1 , argumentando de modo análogo, a curva polar será uma elipse. Por outro lado, se O está em ω_1 a curva será uma parábola. ■

Devido à equivalência projetiva das cônicas, podemos generalizar a proposição anterior como segue.

Teorema 3.9. *A curva polar de uma cônica com relação a outra cônica é também uma cônica (Figura 3.23).*

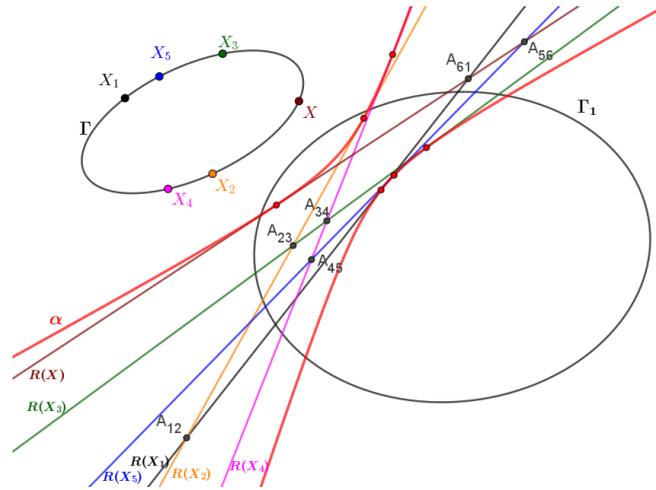


Figura 3.23: A curva polar da cônica Γ em relação a cônica Γ_1 é uma hipérbole.

Demonstração: Sejam as cônicas Γ e Γ_1 . Escolhamos cinco pontos X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 sobre a cônica Γ cuja curva polar consideramos. As retas polares desses cinco pontos em relação a Γ_1 são tangentes a alguma outra cônica, que chamaremos de α .

Seja X um ponto movendo-se sobre Γ . Sendo assim, o Teorema 2.29 pode ser aplicado aos pontos X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 e X . Por dualidade, o Teorema de Brianchon pode ser aplicado as retas polares destes pontos. Segue-se que as retas polares dos pontos colineares $\overline{X_1X_2} \cap \overline{X_4X_5}$, $\overline{X_2X_3} \cap \overline{X_5X}$ e $\overline{X_3X_4} \cap \overline{XX_1}$ se intersectam em um único ponto. Consequentemente, pelo Inverso do Teorema de Brianchon, todas as seis retas polares são tangentes a uma cônica, que só poder ser α , pois cinco das seis retas polares (as polares de $X_i, i = 1, \dots, 5$) são tangentes a uma única cônica. Portanto, todas as polares de todos os pontos de Γ são tangentes a α .

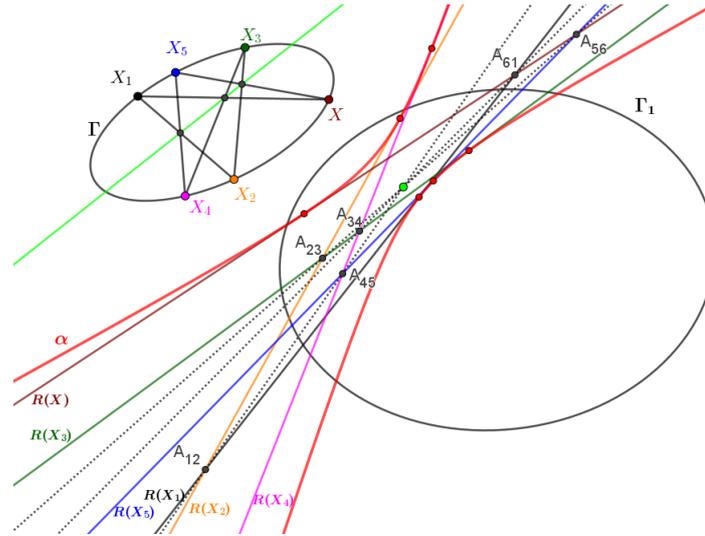


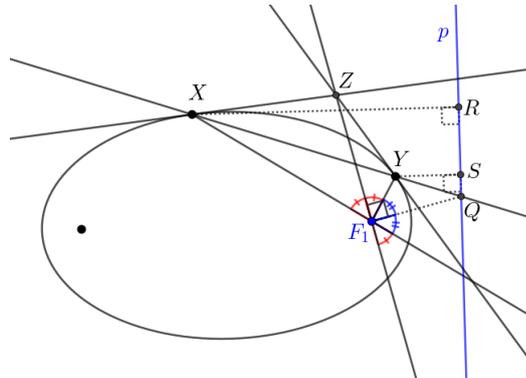
Figura 3.24: O ponto verde externo a cônica α representa o polo, e as linhas tracejadas indicam as retas polares da reta verde e dos três pontos sobre esta reta em Γ .

■

Vamos mostrar agora que um foco e a diretriz correspondente de uma cônica são polares entre si.

Proposição 3.10. *Um foco e a diretriz correspondente de uma cônica são polares entre si.*

Demonstração:



Consideremos uma cônica, que sem perda de generalidade, podemos supor que é uma elipse cujo o foco é F_1 e a reta polar deste é p . Vamos mostrar que para quaisquer dois pontos X e Y na cônica, a razão entre as distâncias a F_1 e a p são iguais. Seja Q a intersecção da reta \overleftrightarrow{XY} e p , e Z a intersecção das retas tangentes em X e Y . Como Q pertence as polares de F_1 e Z , temos que a reta que passa por F_1 e Z é a polar de Q . E mais, observando que Q pertence às tangentes das intersecções da polar de Q , que formam uma corda que contém o foco F_1 , com a cônica, temos, pela Proposição 1.12, que a reta que passa por F_1 e Q é perpendicular à polar de Q em F_1 , isto é, $\widehat{QF_1Z} = 90^\circ$. Além do mais, pelo Teorema 1.16 implica que F_1Z é a reta bissetriz do ângulo $\widehat{XF_1Y}$. Então, os ângulos formados pelas retas $\overleftrightarrow{XF_1}$ e $\overleftrightarrow{ZF_1}$ são opostos pelo vértice, logo, $\overleftrightarrow{F_1Q}$ é bissetriz

do ângulo externo em F_1 do triângulo XF_1Y . Assim, pelo teorema da bissetriz externa aplicada a esse triângulo, temos

$$\frac{\overline{F_1X}}{\overline{QX}} = \frac{\overline{F_1Y}}{\overline{QY}} \quad (3.3)$$

Considerando R e S , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de X e Y à reta p , os triângulos XQR e YQS são semelhantes (caso AA), então

$$\frac{\overline{QX}}{\overline{XR}} = \frac{\overline{QY}}{\overline{YS}} \quad (3.4)$$

Portanto, de (3.3) e (3.4), temos

$$\frac{\overline{F_1X}}{\overline{XR}} = \frac{\overline{F_1Y}}{\overline{YS}}$$

.

A proposição anterior pode ser demonstrada utilizando a construção de Dandelin, a qual aplicamos para mostrar que uma cônica é uma projeção de um círculo, ver Figura 3.25. Além disso, no espaço tridimensional, também existem transformações de dualidade, onde os pontos se transformam em planos e os planos em pontos, enquanto que retas se tornam em retas. Essas transformações podem ser construídos de maneira análoga como fizemos em 2D.

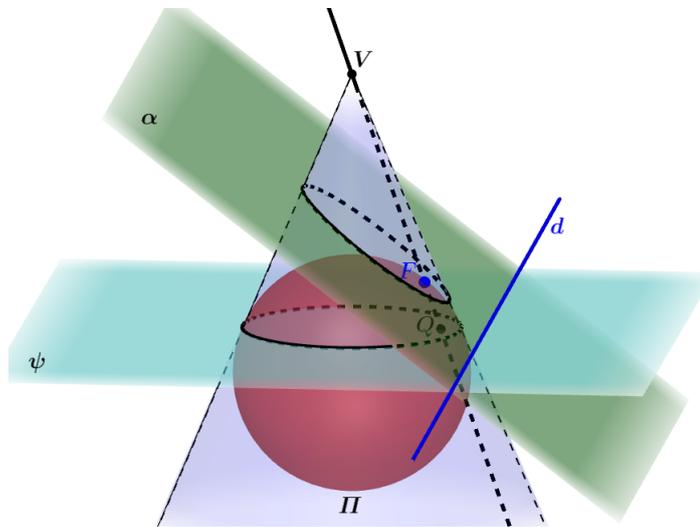


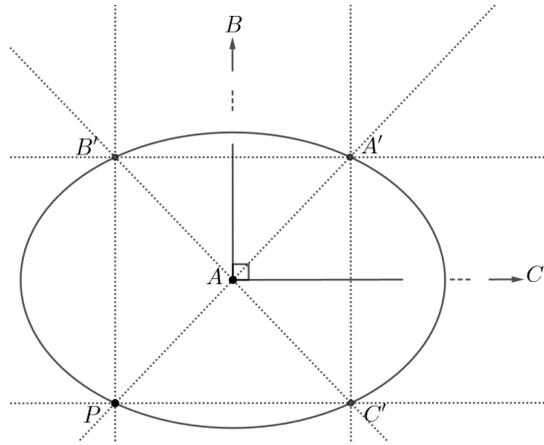
Figura 3.25: O plano ψ é o plano polar do ponto V , e o plano α é o polar do ponto F .

O plano polar de um ponto V com relação a uma esfera Π é o plano ψ , e o plano polar de um ponto F é o plano α . Assim, o polar de uma reta \overleftrightarrow{VF} é a reta d . Note que o polo de d com relação ao círculo, interseção de Π e ψ , é o ponto Q , que é interseção da reta \overleftrightarrow{VF} e o plano ψ . Portanto, F é o polo de d com relação a interseção do cone e o plano α , onde podemos considerar a projeção do plano ψ a α a partir do ponto V .

Vejamos mais outro resultado relacionado ao triângulo de Ceva do triângulo inscrito em uma cônica. Para isso, definimos um *triângulo autopolar* como aquele em que cada vértice é o polo de seu lado oposto.

Proposição 3.11. *Um triângulo ABC é autopolar com relação a uma cônica se, e somente se, ele é o triângulo de Ceva de um ponto na cônica com relação a um triângulo inscrito na cônica.*

Demonstração:



Suponhamos que o triângulo ABC seja autopolar. Por uma transformação projetiva movamos os vértices B e C aos pontos no infinito com direções perpendiculares. Logo, o centro da cônica passa ser o ponto A cuja a polar é a reta no infinito \overleftrightarrow{BC} . Consideremos um retângulo inscrito na cônica cujos lados são paralelos às direções dadas por B e C . Seus vértices podem ser vistos como de um triângulo e um ponto P na cônica para o qual o triângulo ABC é um triângulo de Ceva.

Reciprocamente, suponhamos que o triângulo ABC seja de Ceva de um ponto P em relação a um triângulo inscrito na cônica. Por uma transformação projetiva, leve os pontos B e C em direções perpendiculares aos pontos no infinito, e o ponto A , no centro da cônica. Logo, o polo da reta \overleftrightarrow{BC} no infinito é o centro da cônica, isto é, o ponto A . Além disso, as polares dos pontos no infinito são as retas que passam pelo centro da cônica, ou seja, \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{AB} . Portanto, o triângulo ABC é autopolar. ■

Proposição 3.12. *Sejam um triângulo ABC e um ponto Z . Consideremos A' e B' as interseções das retas suportes dos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, com uma reta arbitrária passando por Z . Então, o lugar geométrico das interseções das retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ é uma cônica passando por A , B e C , e é tangente às retas \overleftrightarrow{AZ} e \overleftrightarrow{BZ} .*

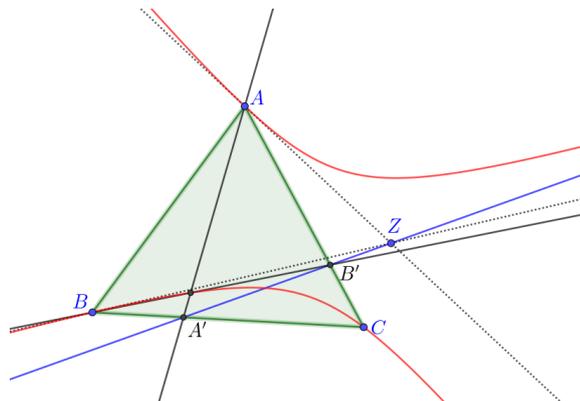
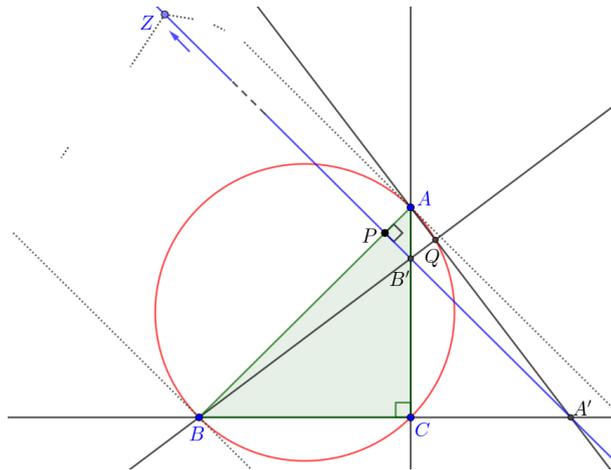


Figura 3.26: Cônica passando pelos pontos A , B e C .

Demonstração: Inicialmente, aplicando a transformação projetiva, transformamos o triângulo ABC em um triângulo retângulo isósceles, onde $\overline{AC} = \overline{BC}$, e enviamos o ponto Z ao ponto no infinito em direção perpendicular a \overline{AB} . Seja P o ponto de intersecção das retas \overleftrightarrow{AB} e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Como A' e B' pertencem à reta que passa por Z , temos que a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ é perpendicular à reta suporte do lado \overline{AB} no ponto P . Assim, concluímos que os triângulos retângulos APB' e ABC são semelhantes pelo caso AA . Logo, $\overline{PA} = \overline{PB'}$. Além disso, o quadrilátero $PBCB'$ é inscrito, pois $\widehat{BPB'} + \widehat{BCB'} = 180^\circ$. Consequentemente, temos que $\widehat{PBB'} = \widehat{PCB'}$. De maneira análoga, o quadrilátero $PCA'A$ é inscrito, já que $\widehat{APA'} = \widehat{ACA'} = 90^\circ$. Logo, temos $\widehat{PCA} = \widehat{PBB'} = \widehat{PA'A}$. Com isso, os triângulos APA' e $B'PB$ são congruentes pelo caso $LAAO$. Segue-se que $\overline{AA'} = \overline{B'B}$.

Agora, observemos que os triângulos ACA' e BCB' são congruentes, pelo caso Hipotenusa-Cateto, dado que $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{BB'} = \overline{A'A}$. Assim, os ângulos $\angle B'BC$ e $\angle A'AC$ são iguais. Como os ângulos $\angle BB'C$ e $\angle AB'Q$ são opostos pelos vértices, onde Q é o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, e complementares ao ângulo $\angle B'AQ$, segue-se que o triângulo $AB'Q$ é retângulo em Q . Além disso, as retas \overleftrightarrow{BZ} e \overleftrightarrow{AZ} são tangentes ao círculo em A e B .



■

Por fim, como foi visto, alguns teoremas relacionados as cônicas, à primeira vista, pareciam difíceis de demonstrar. No entanto, com os conhecimentos de geometria projetiva, as demonstrações se tornaram simples e objetivas. Neste contexto, usando transformação polar, vamos demonstrar uma teorema muito interessante, que é o Teorema de Frégier.

Teorema 3.13 (Frégier). *Seja Γ uma cônica dada e um ponto P pertencente a Γ . Então, todas as cordas de Γ que são vistas em um ângulo reto a partir de P intersectam-se em um único ponto.*

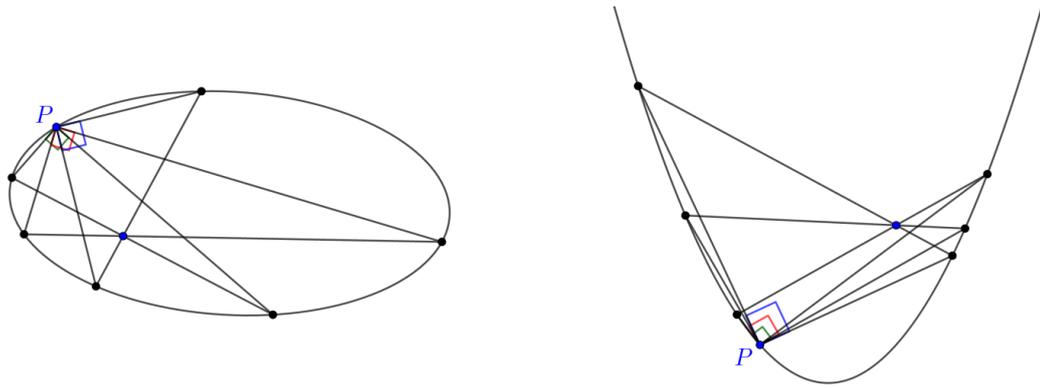
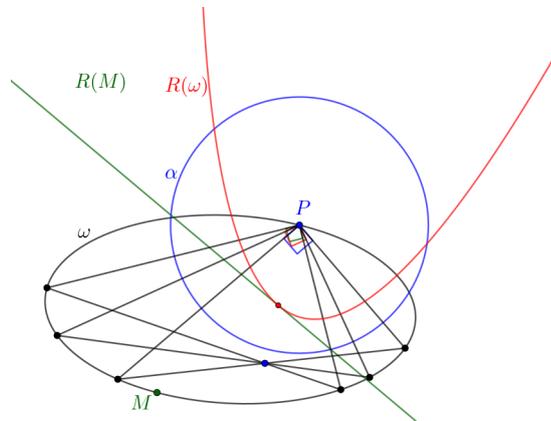


Figura 3.27: Cordas vistas sob um ângulo reto se intersectam em um único ponto.

Demonstração: Consideremos um círculo α centrado em P . Seja $R(\omega)$ a curva polar de ω pela correspondência polar relativa ao círculo α . Pelo Teorema 3.9, $R(\omega)$ também é uma cônica. Como ω passa pelo centro de α , temos que a polar de P em relação à α está no infinito. Sendo assim, pela Proposição 3.8, a cônica transformada é uma parábola. As retas perpendiculares em P se transformam em pontos no infinito correspondentes às direções perpendiculares, e suas segundas interseções com a cônica se transformarão em retas perpendiculares tangentes a parábola. Pela Proposição 1.22, Capítulo 1, estas intersecções estão sobre a diretriz. Logo, a corda correspondente, cujos extremos são os pontos de tangência na parábola, passa pelo polo (foco) da diretriz.



■

Capítulo 4

Software Dinâmico para uma Abordagem Interativa em Geometria Projetiva

As tecnologias digitais e a Computação é um tema presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a importância da integração de recursos tecnológicos ao processo de ensino e aprendizagem. Esses recursos apresentam novas possibilidades para auxiliar no aprendizado em diversas disciplinas, ampliando as formas de explorar conceitos e desenvolver habilidades nos estudantes.

Desse forma, o uso de tecnologias no processo educacional tem se tornado cada vez mais importante, principalmente no ensino de Matemática. Várias ferramentas tecnológicas foram desenvolvidas para apoiar o ensino e aprendizagem dessa disciplina, e uma das que se destacam no âmbito educacional é o GeoGebra.

Desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito que pode ser utilizado em diferentes contextos de ensino e aprendizagem em matemática. Ele permite explorar e modelar situações geométricas, onde facilita a visualização e a compreensão das propriedades e relações entre figuras geométricas. Assim, essa característica torna o GeoGebra uma poderosa ferramenta pedagógica para o ensino de conceitos matemáticos desde os mais simples aos mais complexos.

Neste capítulo, apresentamos propostas de atividades sobre a geometria projetiva das cônicas que podem ser aplicadas ao Ensino Médio, utilizando o software GeoGebra como recurso didático, na busca por promover uma abordagem interativa e visual para a apresentação dos conceitos básicos, cuja base teórica encontra-se no capítulos anteriores.

4.1 Transformação por inversão

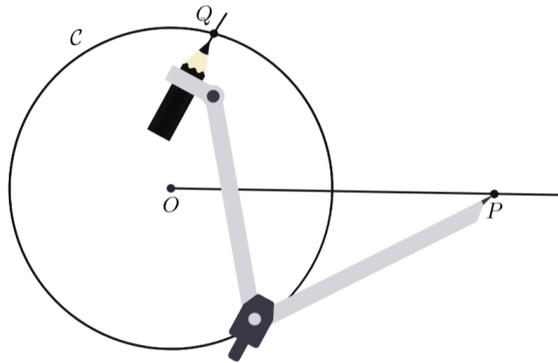
No Capítulo 2, abordamos a inversão em relação a um círculo, apresentando algumas de suas propriedades importantes. Pensando em adaptar esse conceito para o ensino médio, podemos tratá-lo de uma maneira mais simples, como veremos a seguir. Primeiramente, construiremos o inverso de um dado ponto utilizando régua e compasso. Em seguida, usaremos o GeoGebra para realizarmos a mesma construção.

4.1.1 Construção do inverso com a régua e o compasso

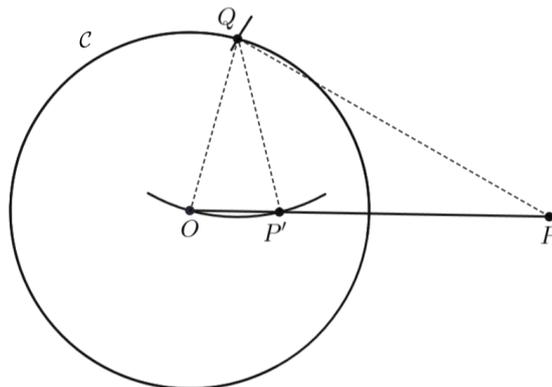
Dado um círculo \mathcal{C} de centro O e raio r , e um ponto P , descreveremos um procedimento para construir o ponto inverso P' , utilizando régua e compasso. Sendo assim, temos três casos, o primeiro é quando P está no exterior do círculo.

Descrição dos passos:

1. Trace o segmento \overline{OP} .
2. Com o compasso centrado em P e abertura igual ao comprimento de \overline{OP} , desenhe um arco que intercepte \mathcal{C} em um ponto Q .



3. Com o compasso centrado em Q e abertura igual ao comprimento de \overline{OQ} , trace um arco que intercepte o segmento \overline{OP} em P' .



Logo, o ponto P' é o inverso de P em relação ao círculo \mathcal{C} .

Para ver isso, podemos observar que os triângulos isósceles OQP e $OP'Q$ são semelhantes pelo caso de semelhança AA , já que compartilham dois ângulos iguais. de modo que

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}}$$

e portanto,

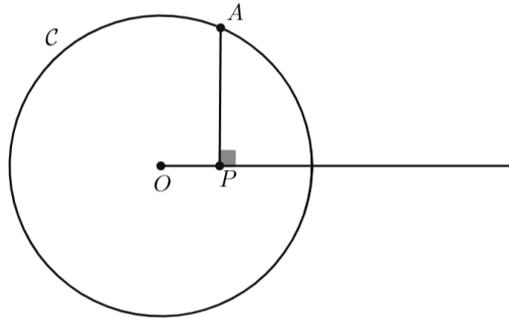
$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2 = r^2$$

o que prova a construção.

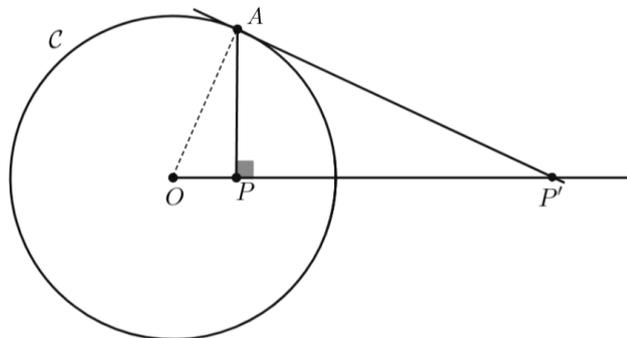
O segundo caso, é quando P está no interior do círculo \mathcal{C} . Vejamos como proceder neste caso.

Descrição dos Passos:

1. Trace a semirreta \overrightarrow{OP} .
2. Desenhe uma perpendicular à semirreta \overrightarrow{OP} passando por P , e marque o ponto A na interseção desta perpendicular com o círculo \mathcal{C} .



3. Trace uma tangente a \mathcal{C} passando por A e marque o ponto P' na interseção da tangente com a semirreta \overrightarrow{OP} .



O ponto P' é o inverso de P em relação ao círculo \mathcal{C} .

De fato, os triângulos OPA e OAP' são semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos \widehat{AOP} e $\widehat{AOP'}$ são comuns e $\widehat{OPA} = \widehat{OP'A} = 90^\circ$. Segue-se que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{P'A}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{P'O}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{AO}} \quad \implies \quad \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA}^2 = r^2$$

o que confirma a construção.

O último caso é aquele em que P está sobre o círculo \mathcal{C} . Bem, se o ponto P está sobre o círculo \mathcal{C} , então o inverso de P é o próprio ponto P . Isso é imediato, pois, como $\overline{OP} = r$, temos que $\overline{OP} \cdot \overline{OP} = \overline{OP}^2 = r^2$.

4.1.2 Construção do inverso pelo GeoGebra

Podemos construir o ponto P' no GeoGebra de maneira prática e direta, conforme os passos a seguir:

Descrição dos Passos:

1. Na barra de ferramentas, selecione a opção *Círculo: Centro & Raio* , insira na janela de visualização, um círculo de centro A , e um raio qualquer, digamos. Renomeie o ponto A de O .

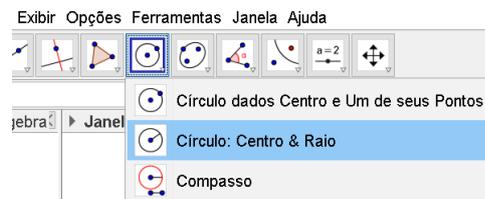


Figura 4.1: Ferramenta *Círculo: Centro & Raio*.

2. Insira um ponto P diferente de O na janela de visualização.
3. Na barra de ferramentas, encontre e selecione a ferramenta *Inversão* . Em seguida, clique no ponto P e no círculo para obter o ponto inverso P' .

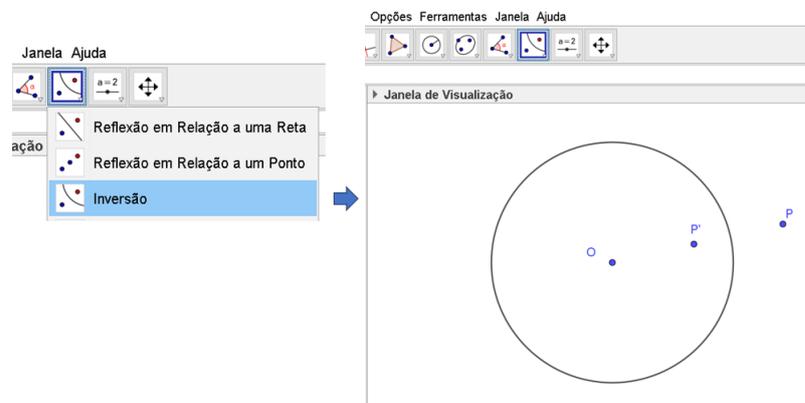


Figura 4.2: Inversão ponto P' de P .

A seguir, veremos como determinar, usando a transformação de inversão, o lugar geométrico dos pontos de uma reta que não passa pelo centro de um círculo. Para isso, podemos proceder da seguinte forma:

Descrição dos Passos:

1. Na barra de ferramentas, selecione a opção *Controle Deslizante*  e crie um controle chamado n , com intervalo de valores definido como $\min = 0$ e $\max = 1$, e incremento de 0.01 (veja a Figura 4.3).

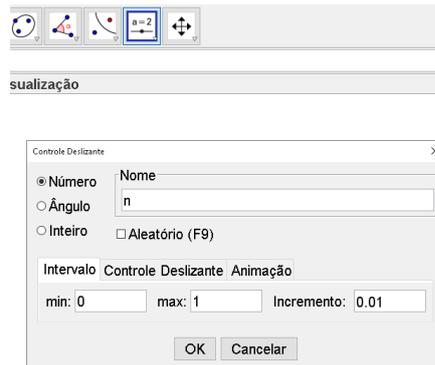


Figura 4.3: Controle Deslizante

2. Insira uma reta f na janela de visualização. Em seguida, utilize o comando $Ponto(\langle Objeto \rangle, \langle Parâmetro \rangle)$ no campo de entrada, preenchendo-o como $Ponto(f, n)$. Aparecerá um ponto C sobre a reta f , que poderá ser movido utilizando o controle deslizante.
3. Selecione a ferramenta *Inversão*  e clique no ponto C sobre a reta f e no círculo c . Surgirá um ponto C' que é o inverso de C . À medida que o controle deslizante é movido, podemos observar que o ponto C' descreve uma curva. Esse lugar geométrico é um círculo que passa pelo centro do círculo c .
4. Utilize o comando $LugarGeométrico(\langle Ponto \text{ do Lugar Geométrico} \rangle, \langle Controle Deslizante \rangle)$ no campo de entrada, preenchendo-o como $LugarGeométrico(C', n)$. Assim, obteremos o círculo que passa pelo centro do círculo c .

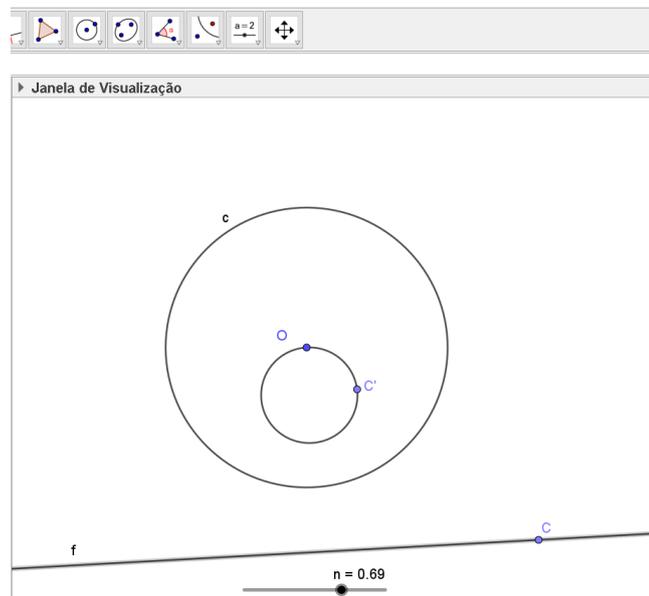


Figura 4.4: Inversão da reta f em relação ao círculo c

Esse procedimento pode ser realizado de maneira inversa. Dado um círculo α que passa pelo centro do círculo c , o lugar geométrico da inversão dos pontos de α é uma reta que não passa pelo centro do círculo c . Caso o círculo α não passe pelo centro de c , sua inversão será outro círculo que também não passa pelo centro de c .

Claro que poderíamos utilizar diretamente a ferramenta de Inversão para encontrar o inverso de uma reta ou círculo. Com a ferramenta *Inversão* selecionada, basta clicar em uma reta ou círculo e, em seguida, no círculo c . Dessa forma, obteremos o lugar geométrico correspondente, que será:

- um círculo que passa pelo centro de c , se o objeto de inversão for uma reta que não passa pelo centro de c .
- uma reta que não passa pelo centro de c , se o objeto de inversão for um círculo que não passa pelo centro de c
- uma reta l que passa pelo centro de c , se o objeto de inversão for a própria reta l que passa pelo centro de c
- um círculo que não passa pelo centro de c , se objeto de inversão for um círculo que não passa pelo centro de c .

Vale ressaltar que esses resultados foram demonstrados no Capítulo 2.

Portanto, o método descrito acima promove uma investigação mais detalhada junto aos estudantes, permitindo, por exemplo, deduzir que a inversão de uma reta que não passa pelo centro de c resulta em um círculo.

4.2 Transformações Projetiva das Cônicas

Para uma análise investigativa das cônicas, com base no que foi apresentado no Capítulo 2, podemos utilizar o conceito de transformação projetiva. Com o objetivo de facilitar a compreensão da projeção das cônicas, iniciaremos explicando o conceito de transformação projetiva, utilizando o software GeoGebra como ferramenta didática. Para tanto, utilizaremos um cone para ilustrar como as cônicas são formadas por uma projeção central em relação a um círculo, permitindo uma visualização clara das suas diferentes formas e propriedades.

Inicialmente, construiremos dois planos no GeoGebra para ilustrar a ideia de transformação projetiva, seguindo as etapas descritas abaixo.

Descrição dos passos:

1. Selecione a ferramenta *Controle Deslizante*  e crie três controles deslizantes (Figura 4.5):

- O primeiro, chame-o de h . Ele controlará a posição de um plano em relação ao outro, com valores de $\min = 0$, $\max = 6$, e incremento de 0.01.
- O segundo, chame-o inc . Ele ajustará a inclinação do plano, com valores de $\min = 0.001$, $\max = \pi/2$, e incremento de 0.01.
- O terceiro, chame-o cp . Controlará a altura do centro de projeção, com valores de $\min = h$, $\max = 6$, e incremento de 0.01.

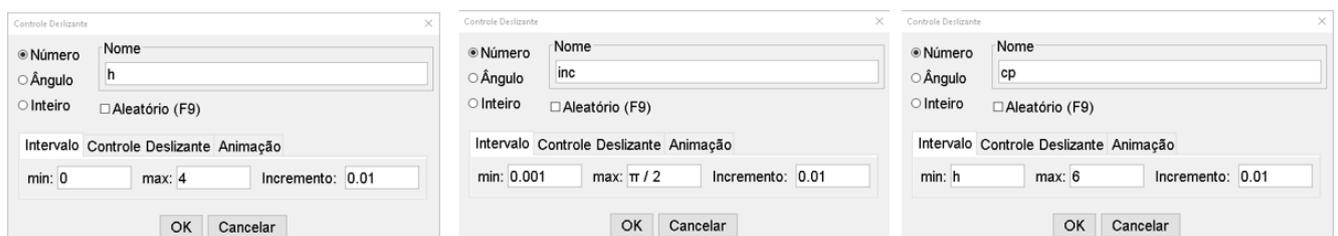


Figura 4.5

2. No campo de entrada, crie um número β definido como $\beta = \pi/2 - inc$, para ajustar a inclinação do plano.
3. Abra a janela 3D e, no campo de entrada, defina os pontos $A = (-1, 0, h)$ (que ajustará a posição de um dos planos) e $O = (-2, 0, cp)$ (o centro de projeção). Em seguida, crie uma reta f paralela ao eixo OY utilizando o comando $Reta(A, EixoY)$.
4. Defina o ponto $H = (0, 0, \text{abs}(x(A)) \tan(\beta) + h)$. Com a ferramenta *Plano* selecionada, clique no ponto A e na reta f para gerar um plano p .
5. No campo de entrada da janela 3D, crie o plano $g : z = 0$.
6. Na janela 3D, oculte todos os objetos, exceto os planos α , β , e os pontos O e H (Figura 4.6).

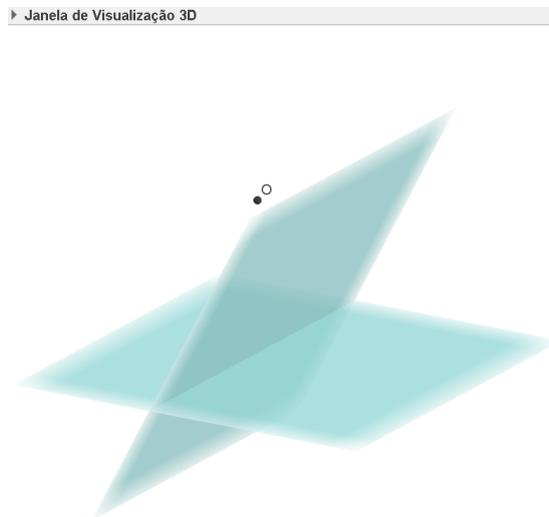


Figura 4.6

7. Selecione a ferramenta *Polígono Regular*  na janela 3D e crie um pentágono regular sobre o plano p . Em seguida, use a ferramenta *Semirreta* para clicar no ponto O e, depois, em cada vértice do pentágono, gerando as semirretas que partem de O .
8. Por fim, selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*  e clique em cada semirreta e no plano g para criar os pontos de interseção. Use a ferramenta *Polígono* para construir um novo polígono com os pontos obtidos no plano β (ver Figura 4.7).

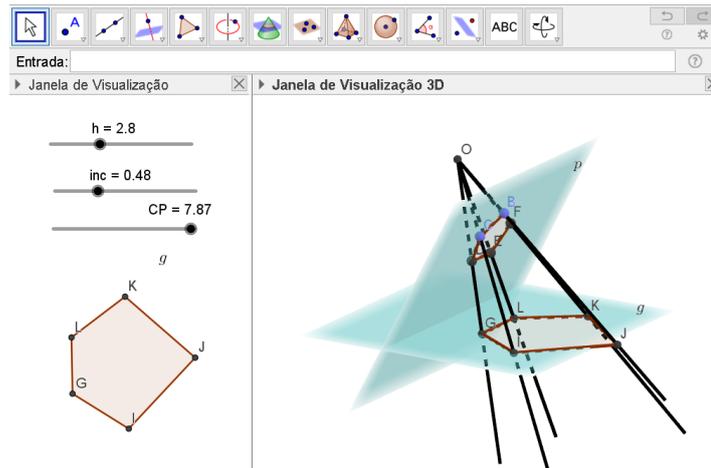


Figura 4.7

A construção dinâmica descrita acima (disponível em <https://www.geogebra.org/m/bgyvfeaa>) possibilita que os estudantes compreendam de forma intuitiva o conceito de transformação projetiva. Observe que o ponto O (centro de projeção) projeta o pentágono regular que está no plano p para o plano g . Embora a projeção resulte do plano p em uma figura diferente da original, ao ajustar o controle deslizante inc , os alunos perceberão que a figura projetada permanece um pentágono, mesmo que os lados e ângulos pareçam alterados. Além disso, ao mover o controle deslizante de forma que os planos p e g fiquem paralelos, observaremos dois pentágonos semelhantes. Isso ilustra a propriedade fundamental de que as transformações projetivas preservam retas e as relações de incidências entre elas, contribuindo para uma melhor compreensão do conceito pelos estudantes.

Agora, com o auxílio do GeoGebra, vamos construir uma ferramenta didática que servirá como suporte para explorar o conceito de transformação projetiva das cônicas. Por meio de uma abordagem interativa, será possível visualizar como diferentes cônicas (como elipses, parábolas e hipérbolas) podem ser obtidas a partir da interseção de um plano com um cone de duas folhas, utilizando o vértice do cone como centro de projeção. Esta ferramenta vai permitir uma compreensão mais clara e dinâmica das transformações e das propriedades que se mantêm invariantes durante o processo.

Descrição dos passos:

1. Selecione a ferramenta *Controle Deslizante*  e crie quatro controles deslizantes:
 - O primeiro, chame-o de h . Ele controlará a posição de um plano em relação ao outro, com valores de $\min = 0$, $\max = 6$, e incremento de 0.01.
 - O segundo, chame-o de inc . Ele ajustará a inclinação do plano, com valores de $\min = 0.001$, $\max = \pi/2$, e incremento de 0.01.
 - O terceiro, chame-o de a . Controlará o ângulo do centro de projeção, com valores de $\min = 0$, $\max = 1$, e incremento de 0.01.
 - O quanto, chame-o de cp . Controlará a posição do ponto V sobre o eixo de simetria, com valores de $\min = h + 0.001$, $\max = 4.01$, e incremento de 0.01.
2. No campo de entrada, crie um número λ definido como $\lambda = \pi/2 - inc$, para ajustar a inclinação do plano.

3. Na janela 3D, no campo de entrada, defina o ponto $A = (-1, 0, h)$. Em seguida, crie uma reta f paralela ao eixo OY utilizando o comando $Reta(A, EixoY)$
4. Crie o ponto $B = (0, 0, \text{abs}(x(A)) \tan(\lambda) + h)$. Em seguida, crie uma reta f paralela ao eixo OY utilizando o comando $Reta(A, EixoY)$.
5. Selecione a ferramenta *Plano*  e clique no ponto B e na reta f para gerar o plano p . No campo de entrada, digite $z = 0$ para criar o plano g . Oculte a reta f e o plano padrão da janela de visualização 3D (plano cinza).
6. Na janela 3D, usando a ferramenta *Reta Perpendicular* , clique no plano p e no ponto A para gerar a reta perpendicular i . Em seguida, marque o ponto de interseção C entre a reta i e o plano g .
7. Com a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto* , clique no ponto A e depois no ponto C para gerar o ponto A' . Em seguida, determine a semirreta $j = \overrightarrow{CA'}$.
8. Utilize o comando $\hat{\text{Angulo}}(\langle Reta \rangle, \langle Reta \rangle)$ colocando $\hat{\text{Angulo}}(j, EixoX)$ para criar o ângulo α entre o plano p e a reta i .
9. No campo de entrada, utilizando o comando $\text{Circulo}(\langle Ponto \rangle, \langle Raio \rangle, \langle Direção \rangle)$, coloque $\text{Circulo}((-1, 0, 0), cp, EixoY)$ para gerar um círculo c . Marque o ponto de interseção entre a reta i e c , renomeando-o como V . Oculte os eixos coordenados e todos os objetos recém-construídos, exceto o ponto V (Ver Figura 4.8 à direita).

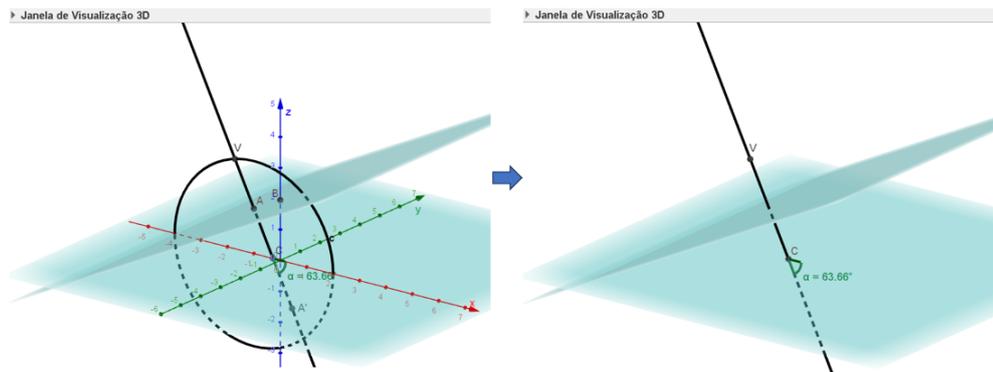


Figura 4.8

10. Construa um cone infinito b através do comando $\text{ConeInfinito}(\langle Ponto \rangle, \langle Ponto \rangle, \langle \hat{\text{Angulo}} \rangle)$, usando $\text{InfiniteCone}(V, A, a)$ para definir o cone.
11. Com a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies*  selecionada, clique no cone b e no plano g para gerar a cônica d sobre o plano. Oculte o plano p (Figura 4.9).

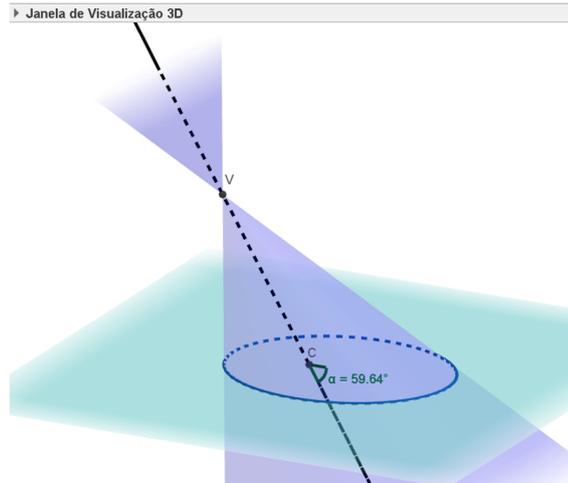


Figura 4.9

12. Determine os pontos de interseção entre o eixo OX e a cônica d , usando o comando $Interseção(\langle Objeto \rangle, \langle Objeto \rangle)$, colocando $Interseção(EixoX, b)$. Renomeie esses pontos como V_1 e V_2 .
13. Trace as geratrizes $k = \overleftrightarrow{VV_1}$ e $l = \overleftrightarrow{VV_2}$ do cone.
14. Construa as bissetrizes m e n usando o comando $Bissetriz(\langle Reta \rangle, \langle Reta \rangle)$ colocando $Bissetriz(EixoX, k)$ (pois há uma esfera de Dandelin tangente ao cone b e ao plano g). Em seguida, use os comandos $Interseção(m, i)$ e $Interseção(n, i)$ para encontrar e renomear os pontos como O_1 e O_2 , que são os centros das esferas de Dandelin.
15. Trace as perpendiculares utilizando os comandos $q = Perpendicular(O_1, k)$ e $r = Perpendicular(O_2, k)$. Marque os pontos D e E , que são as interseções entre as retas q com k e r com k , respectivamente.
16. Selecione a ferramenta *Plano Perpendicular*  e construa dois planos perpendiculares ao eixo de simetria i . Clique no ponto D e depois em i para gerar o plano p_1 , e faça o mesmo para gerar o plano q_1 , clicando no ponto E e depois em i .
17. Selecione a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies*  e clique no cone, em seguida no plano r , para gerar o primeiro círculo e . Repita o procedimento para gerar o segundo círculo s no cone.

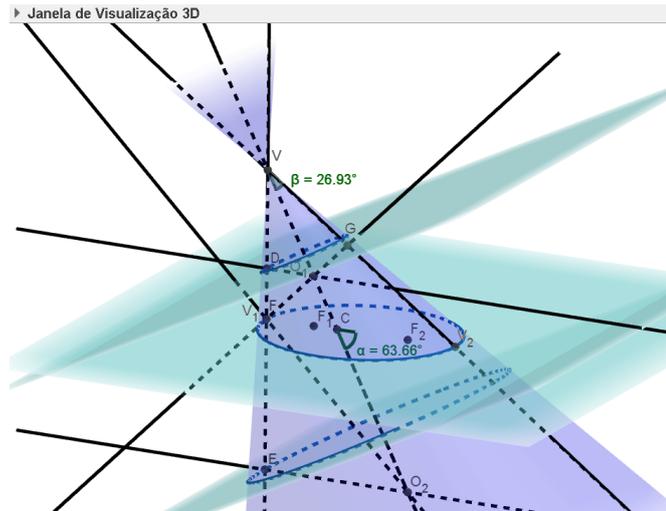


Figura 4.10

18. Agora, selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e Clique na reta l e em seguida no cone b para gerar os pontos F e G . Utilizando os pontos C , V e G , construa o ângulo β (Figura 4.10).
19. Para determinar os focos da cônica d , utilize o comando $Foco(\langle Cônica \rangle)$ inserindo $Foco(d)$.
20. Por fim, oculte os objetos que não são essenciais para a visualização final, deixando apenas os elementos principais, conforme mostrado na Figura 4.11. A construção completa pode ser acessada na plataforma GeoGebra pelo link:
<https://www.geogebra.org/m/vdyjcrsp>

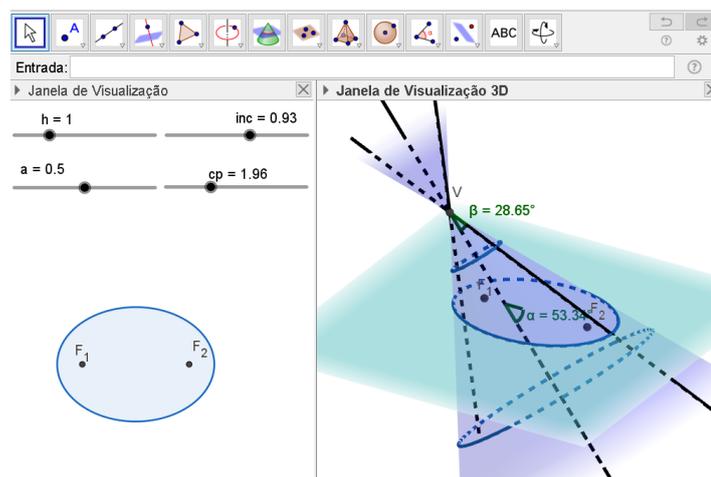


Figura 4.11: Construção apresentadas em duas janelas de visualização.

Essa construção ainda pode ser melhorada adicionando novos elementos, como botões, textos explicativos e segmentos que conectam os focos a um ponto comum na cônica, entre outros objetos. Esses incrementos ajudam a enriquecer a visualização e a interação entre os objetos construídos, resultando em uma construção mais bem detalhado (ver Figura 4.12), como a disponível na plataforma GeoGebra, acessível pelo link:
<https://www.geogebra.org/m/cfbhhnvc>

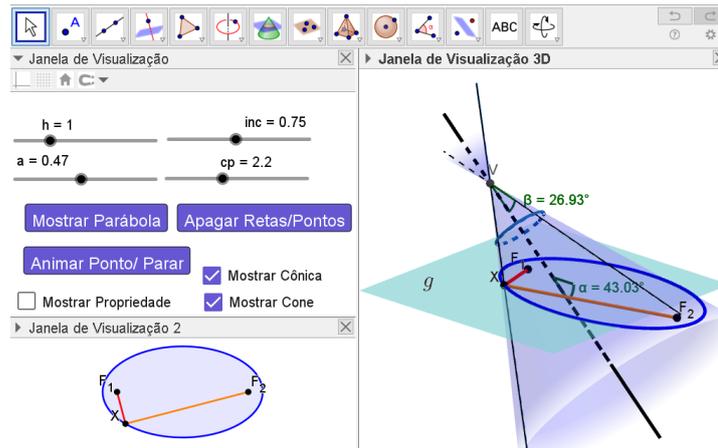


Figura 4.12: Construção detalhada com três janelas de visualização, três botões e caixas de seleção para exibir os objetos.

Depois de aprimorada, a construção vai servir como uma ferramenta pedagógica para explicar os conceitos básicos de transformação projetiva das cônicas. A partir de um centro de projeção V , um círculo contido em um plano p é projetado em outro plano g , gerando diferentes tipos de cônicas. Isso permite um trabalho de investigação simples junto aos estudantes, como explorar as condições em que a projeção de um círculo resulta em uma determinada cônica, por exemplo, uma parábola.

Um objeto importante nessa construção que desempenha uma função importante, é o controle deslizante *inc*. Ele permite alterar a projeção do círculo e gerar diferentes tipos de cônicas. À medida que os valores de *inc* são ajustados, o ângulo α também se modifica, mostrando as diferentes cônicas projetadas no plano g . É possível observar as propriedades específicas de cada cônica, de acordo com a posição do centro de projeção V . Ao clicar na opção *Mostrar Propriedade*, podemos verificar, por exemplo, que a soma das distâncias entre os focos F_1 , F_2 e um ponto X em uma elipse é constante quando $\alpha < \beta$, e que o valor absoluto da diferença das distâncias entre os focos F_1 , F_2 e um ponto X em uma hipérbole permanece constante quando $\alpha > \beta$. Além disso, ao utilizar o botão *Animar Ponto/Parar*, podemos visualizar que as distâncias entre os focos e as diferentes posições do ponto X na elipse não se alteram. Durante a animação, observa-se ainda um conjunto de retas e pontos sendo gerados, reforçando a ideia de transformação projetiva das cônicas, conforme figura 4.13.

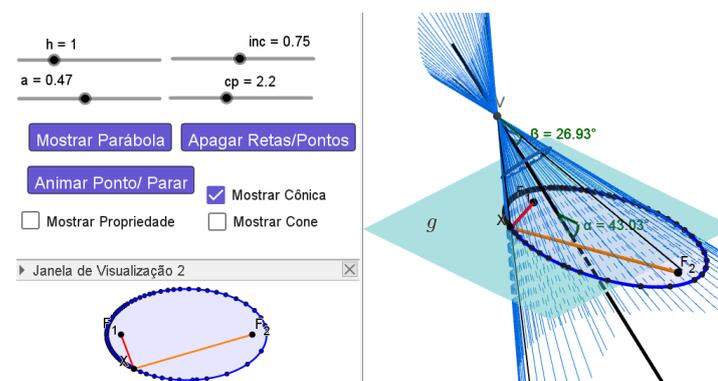


Figura 4.13: Ao clicar no botão *Animar Ponto/Retar*, foi gerado um conjunto dinâmico de retas e pontos, ilustrando a projeção do círculo no plano.

Por fim, ao clicar no botão *Mostrar Parábola*, uma parábola será exibida, destacando a igualdade entre os ângulos α e β , o que indica que o plano g é paralelo a uma geratriz do cone. Com base nas investigações realizadas ao analisar a posição do centro de projeção V , podemos concluir que:

- Quando $\alpha > \beta$, a soma das distâncias dos focos F_1 e F_2 ao ponto X é constante, e a projeção do círculo no plano g é uma elipse, ver Figura 4.14.

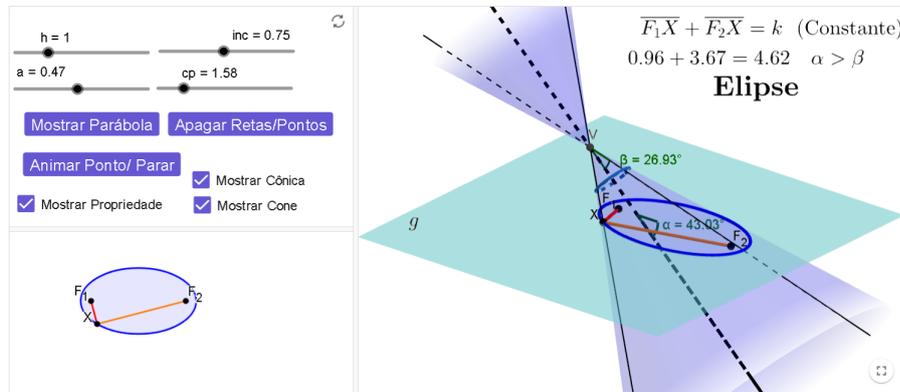


Figura 4.14: A projeção do círculo é uma elipse.

- Quando $\alpha < \beta$, o valor absoluto da diferença das distâncias dos focos F_1 e F_2 ao ponto X é constante. A projeção do círculo ao plano g é uma hipérbole, Figura 4.15.

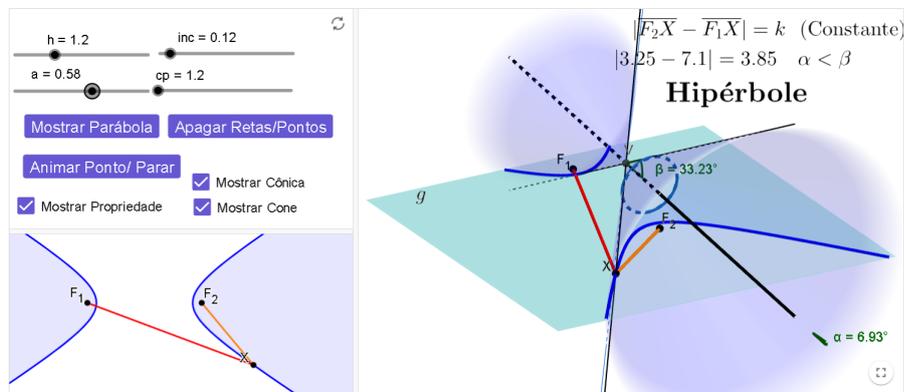


Figura 4.15: A projeção do círculo é uma hipérbole.

- Quando $\alpha = \beta$, o plano g é paralelo a uma geratriz do cone, e a projeção do círculo no plano g é uma parábola, Figura 4.16.

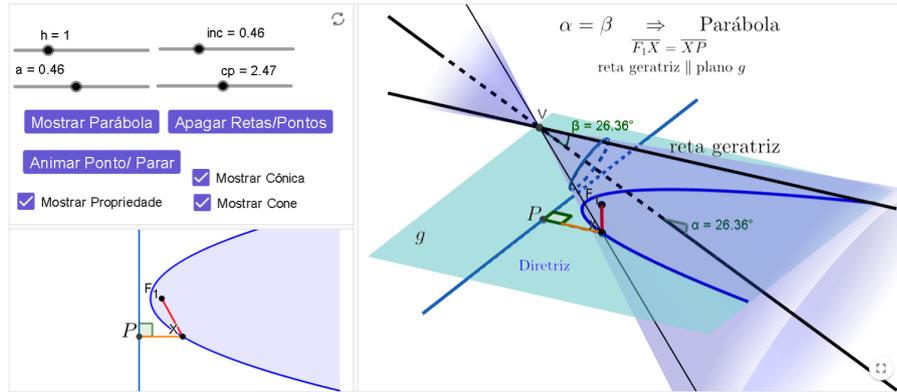


Figura 4.16: A projeção do círculo é uma parábola.

- Quando $\alpha = 90^\circ$, o plano g é perpendicular ao eixo de simetria do cone. A projeção do círculo ao plano g é um círculo.

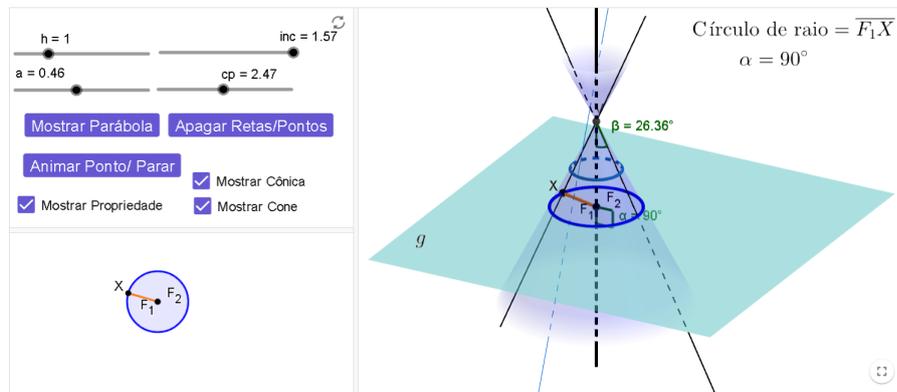


Figura 4.17: A projeção do círculo é um círculo.

Podemos analisar ainda que, quando ajustamos os controles deslizantes h , inc e cp , colocando-os nos valores mínimos, ou seja, $h = 0$, $inc = 0$ e $cp = 0$, o centro de projeção V estará localizado sobre o plano g . Neste caso, a projeção em g será um par de retas concorrentes, isto é, uma cônica degenerada, conforme ilustrado à esquerda da Figura 4.18. Para o caso em que $h = 0$, $cp = 0$, e alterando o valor de inc , colocando, por exemplo $inc = 1.57$, obtemos um círculo degenerado, como mostrado à direita da Figura 4.18.

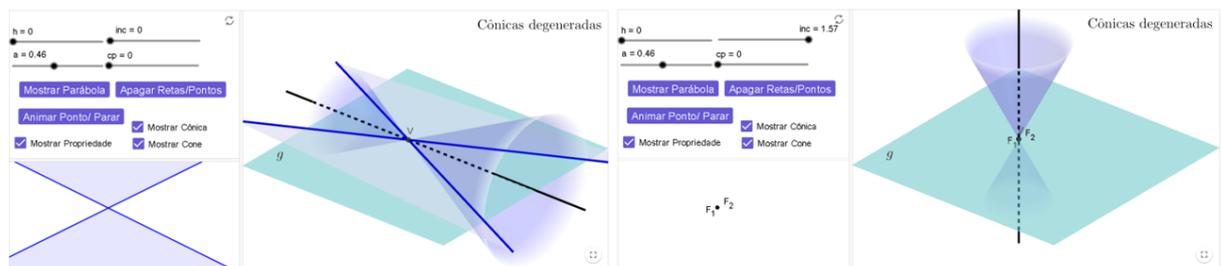


Figura 4.18: À esquerda, uma cônica degenerada representada por um par de retas concorrentes. À direita, uma cônica degenerada reduzida a um único ponto.

Observemos que, no Capítulo 1, as cônicas foram definidas como lugares geométricos em termos de relações métricas. Aqui, as cônicas são apresentadas em termos das relações

angulares: o ângulo entre uma geratriz e o eixo de simetria e o ângulo entre o eixo de simetria e o plano de projeção da cônica.

Como podemos ver, essa construção permite uma abordagem interativa das transformações projetivas de cônicas, é um recurso didático que contribui para a compreensão dos estudantes sobre o porquê dessas curvas serem denominadas cônicas. Por meio dela, eles podem observar que a elipse, a hipérbole e a parábola surgem como intersecções de um plano com um cone.

4.3 Transformação por Correspondência Polar

Nos capítulos 2 e 3, definimos a reta polar, primeiramente em relação a um círculo e, em seguida, a uma cônica qualquer. Além disso, demonstramos como construir a reta polar a partir de um dado ponto em relação a uma cônica. Nesta seção, exploraremos algumas ideias sobre o conceito de reta polar e discutiremos algumas de suas propriedades, de modo que possam ser abordadas de forma acessível para alunos do Ensino Médio.

Primeiro, podemos começar introduzindo o conceito de reta polar de maneira intuitiva, propondo a seguinte construção utilizando o GeoGebra.

Descrição dos passos:

1. Na barra de ferramentas do GeoGebra, selecione a ferramenta *Círculo: Centro & Raio*  círculo e insira um círculo c de centro O e raio r na janela de visualização. Em seguida, insira um ponto exterior ao círculo e rotule-o como P .
2. Solicite aos estudantes que acessem a barra de ferramentas e selecionem a opção *Reta Tangente*  para inserir duas tangentes a partir do ponto P . Nos pontos de tangência, marquem os pontos A e B .

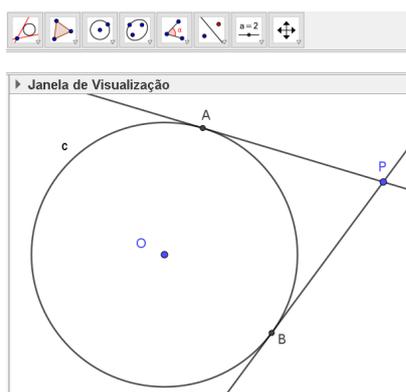


Figura 4.19: Retas tangentes ao círculo.

3. Peça aos alunos que construam a reta que passa pelos pontos de tangência A e B e que a rotulem como p . Esta reta p é a reta polar do ponto P . Neste caso, P é denominado o *polo de p* .

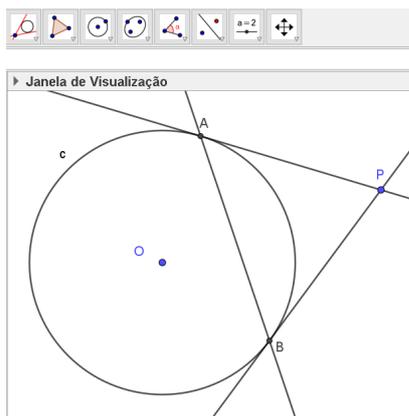


Figura 4.20: Reta \overleftrightarrow{AB} é a polar do ponto A .

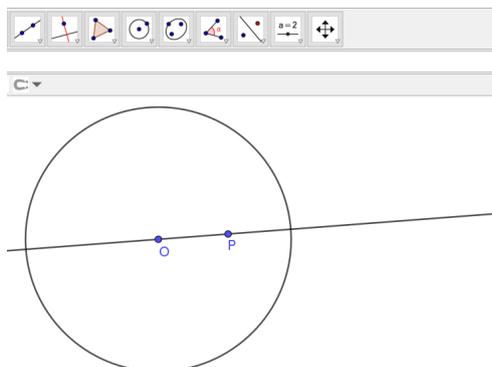
Note que, ao traçar a reta \overleftrightarrow{OP} , ela intersecta perpendicularmente a reta polar no ponto que corresponde ao inverso de P , conforme foi visto no Capítulo 2.

Para o caso em que o ponto P está no interior do círculo, podemos proceder da seguinte forma:

Descrição dos passos:

1. Na janela de visualização marque o ponto P interior ao círculo.

2. Utilize a ferramenta *Reta*  e selecione o ponto P e o centro O do círculo para traçar uma reta \overleftrightarrow{OP} .



3. Usando a ferramenta *Reta Perpendicular* , trace a reta perpendicular passando por P e marque os pontos de intersecção com o círculo os pontos A e B .

4. Com a ferramenta *Reta Tangente* , trace duas tangentes ao círculo passando pelos pontos A e B .

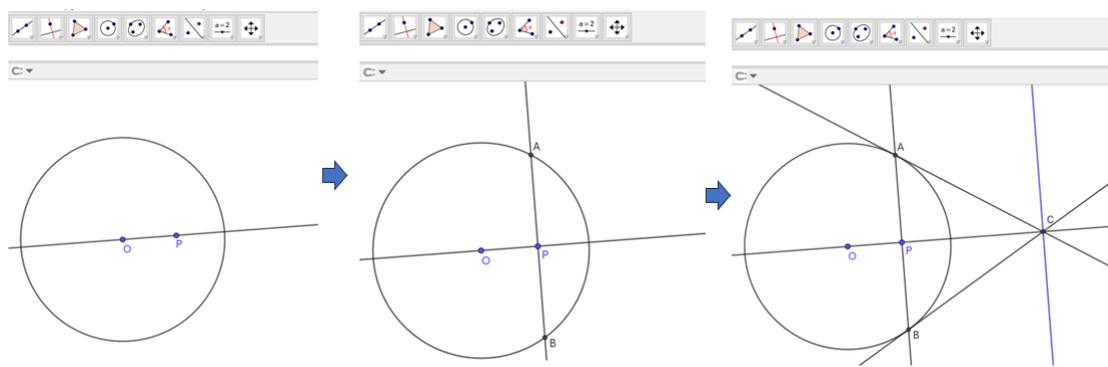


Figura 4.21: Construção da reta polar de um ponto P , localizado no interior do círculo e distinto de O .

5. Usando novamente a ferramenta *Reta Perpendicular* , trace uma perpendicular passando pelo ponto de interseção entre as retas tangentes e a reta \overleftrightarrow{OP} . A reta obtida é a polar do ponto P .

Observe que o ponto de interseção das retas tangentes é o ponto inverso de P .

Para o caso em que P está sobre o círculo, sua reta polar é a tangente ao círculo no ponto P . Porém, o que acontece quando P coincide com o centro O do círculo? Da construção anterior, notamos que, ao mover o ponto P em direção ao centro O , a reta polar correspondente se afasta progressivamente. Assim, quando P é posicionado exatamente no centro do círculo, isto é, $P = O$, a reta polar de P encontra-se no infinito. De fato, quando P se aproxima do centro do círculo, as tangentes tendem a ser paralelas, veja Figura 4.22. Dessa forma, o inverso de O é o ponto no infinito na direção das retas paralelas. Além disso, o polo de qualquer reta que passa pelo centro do círculo é o ponto no infinito. Esta dedução está de acordo com a abordagem e as definições apresentadas nos Capítulos 2 e 3, que tratam da posição dos polos e polares em relação a uma cônica.

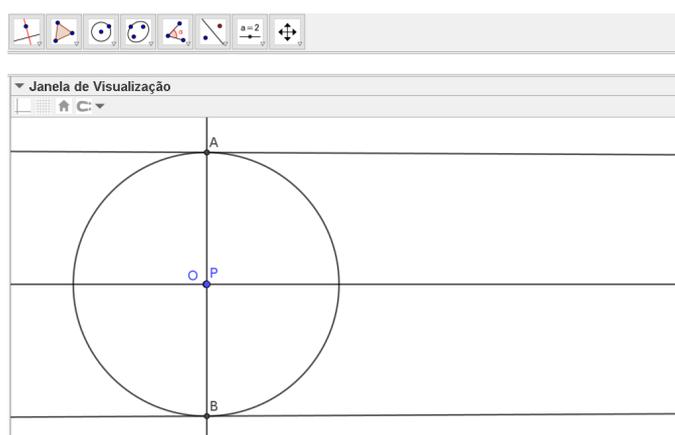


Figura 4.22: Construção da reta polar de um ponto P em relação a uma elipse.

É importante que os alunos explorem a movimentação do ponto para observar como a reta polar se comporta. Ao mover o ponto, eles devem perceber como a reta polar muda de posição. Quanto mais próximo o ponto estiver do círculo, mais próxima a reta polar estará também. Além disso, ao posicionar o ponto P sobre o círculo c , os estudantes devem perceber que a reta polar de P é justamente a reta tangente ao círculo no ponto

P . Essa abordagem permite uma compreensão intuitiva da relação entre o ponto e sua reta polar.

O procedimento feito para encontrar a polar de um ponto P externo a um círculo também vale para qualquer cônica. Para o caso em que P está interno a cônica, como demonstrado no Capítulo 3, seguiremos os passos a seguir.

Descrição dos passos:

1. Insira uma cônica na janela de visualização usando uma das ferramentas disponíveis para cônicas (por exemplo, selecione uma elipse ). Marque um ponto no interior da cônica e renomeie-o como P . Em seguida, oculte o ponto C e renomeie os focos por F_1 e F_2 , ver Figura 4.23.

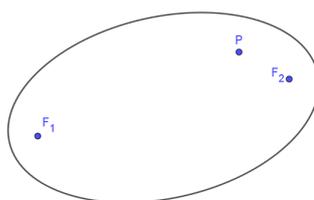
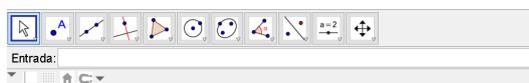


Figura 4.23

2. Com a ferramenta *Reta*  selecionada, trace duas retas passando P . Marque o pontos de interseção entre as retas e cônica. Renomeie-os de A, B, C e D .
3. Ainda com a ferramenta *Reta* selecionada, trace as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} e marque o ponto de interseção E . Da mesma forma, trace as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} e marque o ponto de interseção F .

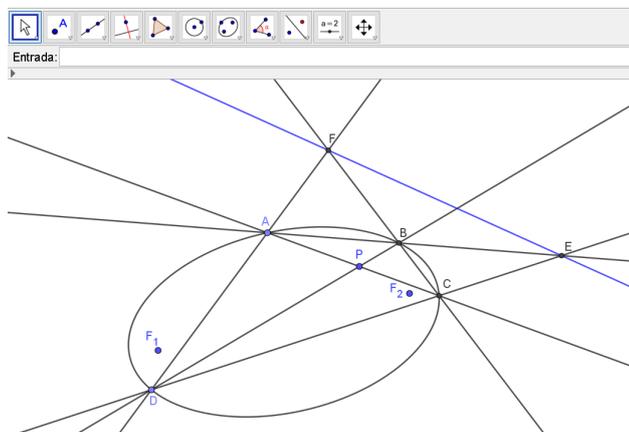


Figura 4.24: A reta \overleftrightarrow{EF} é a polar de um ponto no interior de uma cônica.

4. Finalmente, trace a reta \overleftrightarrow{EF} , que é a polar do ponto P em relação à cônica.

Após discutir a construção da reta polar de um ponto P em relação a uma cônica qualquer, podemos utilizar uma abordagem mais rápida e direta com a ferramenta *Reta Polar ou Diametral* . Para construir a reta polar de um ponto P no plano em relação a uma cônica, basta selecionar a ferramenta *Reta Polar ou Diametral*, clicar no ponto P e, em seguida, na cônica. Dessa forma, a reta polar de P será gerada automaticamente.



Figura 4.25: Construção da reta polar de um ponto P em relação a uma elipse.

Para o caso de uma reta r qualquer e uma cônica dada, utilize a mesma ferramenta *Reta Polar ou Diametral*, clicando na reta r e depois na cônica. Aparecerá a chamada *reta diametral* d , que passa pelo centro da cônica e intercepta a reta r em um ponto que é o polo de uma reta paralela a r .

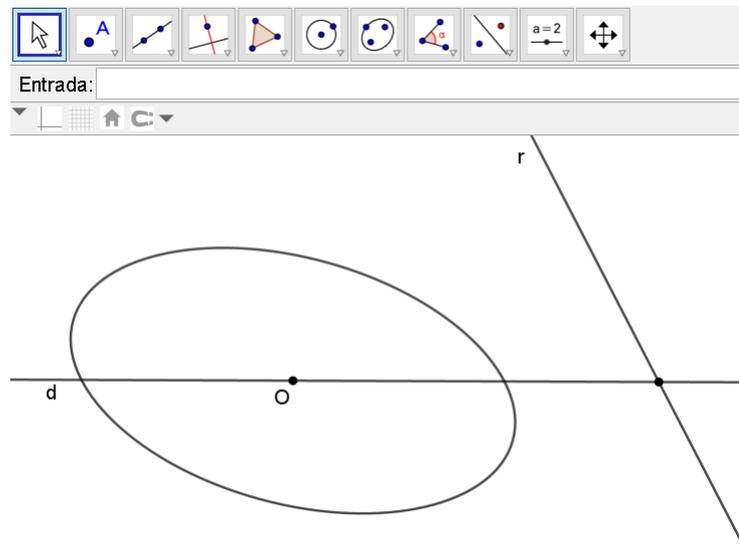


Figura 4.26: A imagem ilustra uma cônica, uma reta r e reta diametral d passando pelo centro O da elipse.

Vale destacar que qualquer ponto na reta polar de um ponto P tem sua própria reta polar que passa por P , conforme Proposição 2.13 demonstrada no Capítulo 2 para círculo e também válido para cônicas, de acordo com a Proposição 2.7. Isso estabelece uma relação que chamamos de *dualidade* ou *relação mútua*. Em outras palavras, cada

ponto em uma reta pode ser associado a sua reta polar, e, reciprocamente, cada reta polar pode ser associada a seu polo. Para facilitar a compreensão dos estudantes, essa ideia pode ser explorada também com o uso do GeoGebra.

Por exemplo, de forma simples podemos ilustrar a relação dual entre ponto e reta da seguinte forma: no GeoGebra marque um ponto Q sobre uma cônica (ver Figura 4.27). Seguindo o procedimento para encontrar a polar de um ponto, obteremos a reta tangente à cônica no ponto Q . Por outro lado, se tivermos uma reta tangente à cônica, o polo dessa reta será precisamente o ponto de tangência.

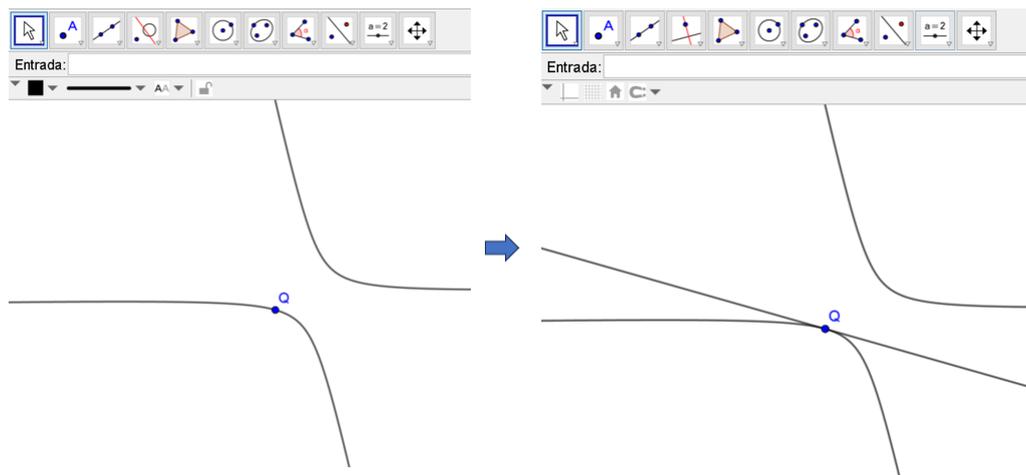


Figura 4.27: A tangente à cônica no ponto Q representa a polar de Q .

Para um conjunto de pontos sobre uma reta r que não tangencia uma dada cônica seguimos os passos abaixo.

Descrição dos passos:

1. Na janela de visualização, insira uma reta r e uma cônica c .
2. Coloque alguns pontos sobre a reta r (ver Figura 4.28).

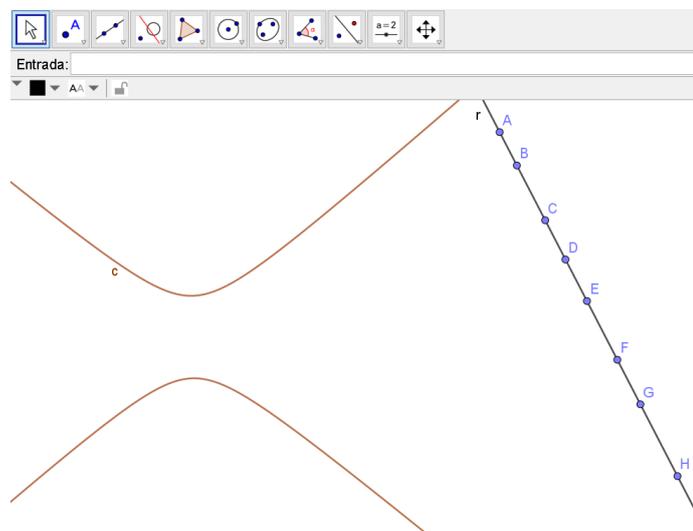


Figura 4.28

3. Selecione a ferramenta *Reta Polar ou Diametral* . Para cada ponto colocado em r , clique nele e, em seguida, na cônica c para construir suas respectivas retas polares. Em seguida, use a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , para marcar o ponto de interseção dessas retas e renomeie-o como R .

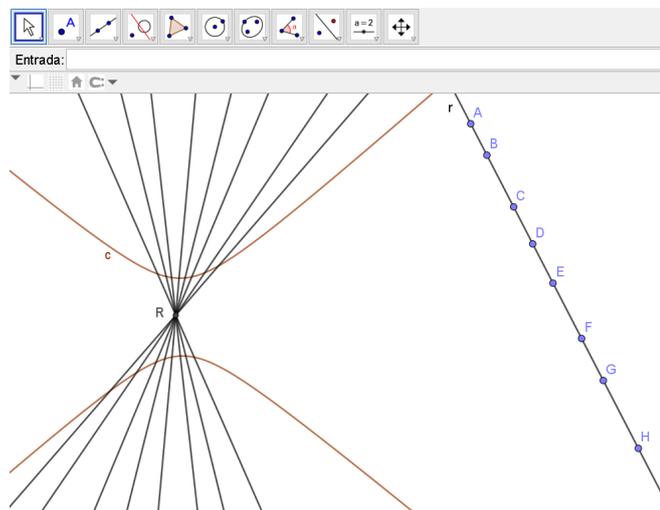


Figura 4.29: Conjunto de pontos sobre a reta r e suas retas polares, todas intersectando em um único ponto.

4. Por fim, com a ferramenta *Reta Polar ou Diametral*  novamente selecionada, clique no ponto R e depois na cônica. Veremos que a reta polar obtida coincidirá com a reta r , ou seja, r é a polar do ponto R .

Outra maneira de explorar a Proposição 2.13 é dinamizar o processo descrito anteriormente utilizando um controle deslizante. A seguir, estão os passos para essa construção:
Descrição dos passos:

1. Na janela de visualização, insira uma reta r e uma cônica c .
2. Na barra de ferramentas, selecione a opção Controle Deslizante e crie um controle chamado n , com intervalo de valores definido como $\min = 0$ e $\max = 1$, e incremento de 0.01.
3. No campo de entrada, utilize o comando $\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$, preenchendo-o como $\text{Ponto}(r, n)$. Isso criará um ponto móvel sobre a reta r . Na Figura 4.30, este ponto é identificado como A .

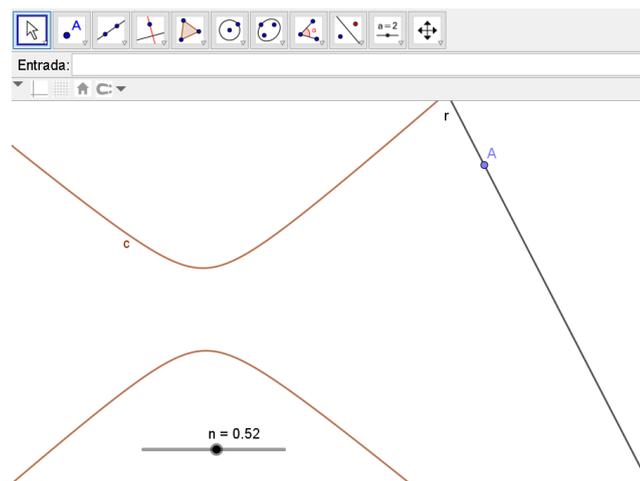


Figura 4.30

4. Selecione a ferramenta *Reta Polar ou Diametral*  para encontrar a polar de A . Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A e a reta polar de A , e selecione a opção *Habilitar Rastro* .

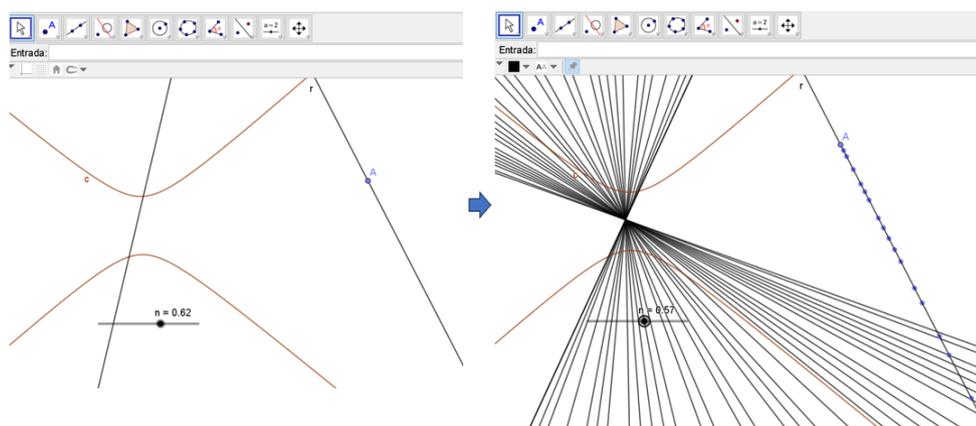


Figura 4.31

Ao variar os valores do controle deslizante, é possível analisar simultaneamente como os pontos na reta r se relacionam com suas respectivas retas polares que se interseccionam em um único ponto, conforme Figura 4.31. A construção anterior facilita a compreensão do princípio de dualidade no estudo das cônicas no plano projetivo, permitindo uma visualização mais dinâmica e intuitiva das propriedades polares.

4.3.1 Construção das cônicas por correspondência polar via Geogebra

Conforme discutido na Seção 3.2 do Capítulo 3, a correspondência polar é uma ferramenta poderosa para a construção e estudo de cônicas. Com o auxílio do software GeoGebra, podemos obter um método para construir, junto com os alunos, as chamadas

curvas polares. De acordo com a Definição 3.6, essas curvas são formadas pelo conjunto dos polos de todas as tangentes à curva.

Considere inicialmente dois círculos, α e β , na janela de visualização do GeoGebra. Vamos construir a curva polar seguindo os passos descritos abaixo:

Descrição dos passos:

1. Selecione um ponto A sobre um dos círculos, digamos β .
2. Usando a ferramenta *Reta Tangente* , clique no ponto A e em β para criar a reta tangente que passa por A .

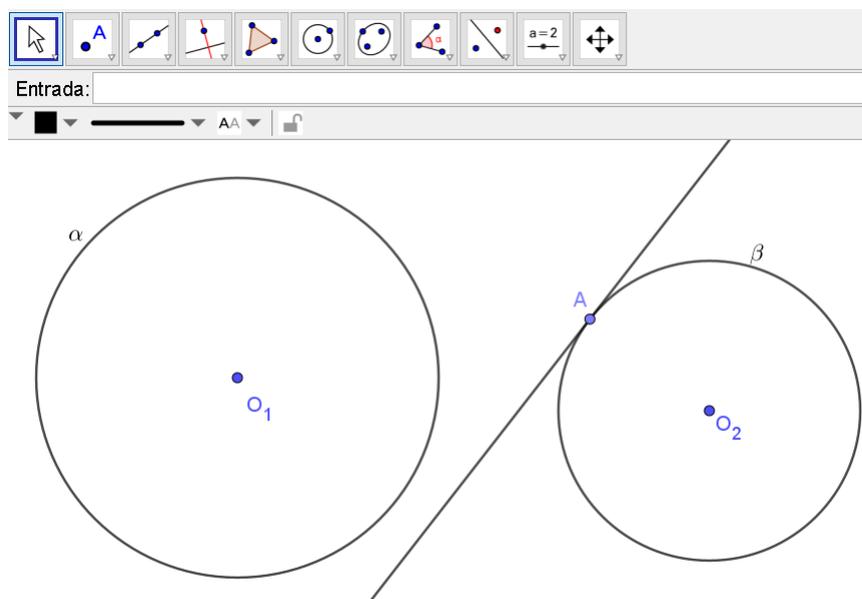


Figura 4.32

3. Selecione a ferramenta *Reta Polar ou Diametral* , clique no ponto A e, em seguida, no círculo α . Isso exibirá a reta polar de A . Em seguida, clique na reta tangente em A e no círculo α para gerar a reta diametral d .
4. Marque o ponto de interseção B entre a reta diametral e a reta polar de A . Este ponto é o polo da reta tangente em A , conforme estabelecido na Proposição 2.13 e pela definição 2.14.

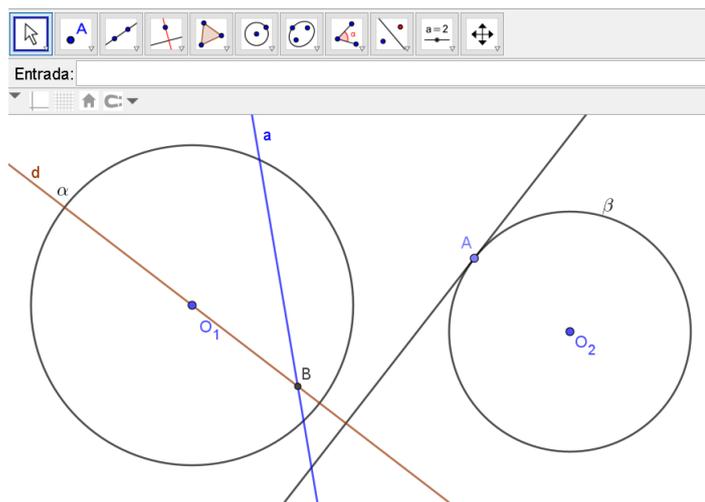


Figura 4.33: A reta diametral d intersecta a reta polar a no ponto B .

5. No campo de entrada, utilize o comando *LugarGeométrico*(*<Ponto do Lugar Geométrico>*, *<Ponto>*) e insira *LugarGeométrico*(B , A) para gerar a curva polar desejada.

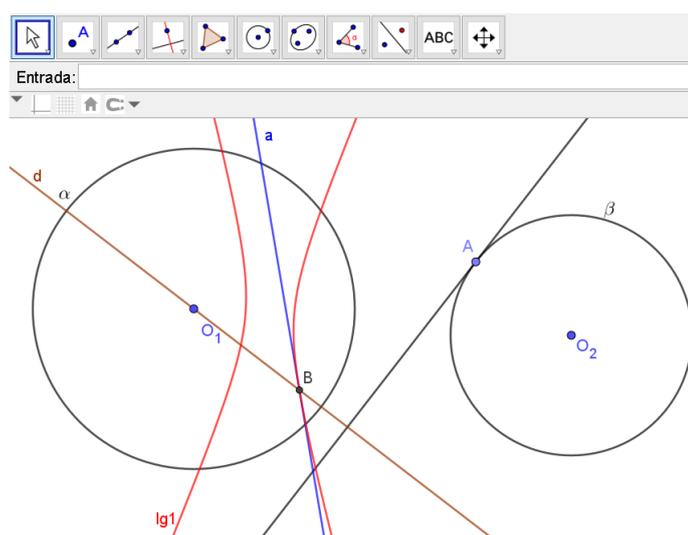


Figura 4.34: $lg1$ é o lugar geométrico dos polos de todas as tangentes ao círculo β .

Para este caso, observe que a curva polar resultante é, na verdade, uma cônica. Além disso, ao mover um dos círculos, podemos visualizar uma variedade de cônicas diferentes.

Uma abordagem didática para explorar esse conceito, aproveitando a construção anterior realizada até o passo 4, é incentivar os alunos a investigar através de questionamentos, como: "Que tipo de trajeto o ponto B está percorrendo ao movermos o ponto A ? É uma curva? Se sim, que tipo de curva é essa?"

Esses tipos de perguntas estimulam a curiosidade, a reflexão e promovem uma investigação mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

Após essa análise inicial, podemos clicar com o botão direito sobre a reta polar de A e selecionar *Habilitar Rastro* , repetindo o mesmo procedimento para o ponto A . Dessa

forma, ao mover o ponto A , é possível visualizar um conjunto de retas polares dos pontos do círculo α , e seus respectivos polos na círculo β , ilustrando o conceito de curva polar.

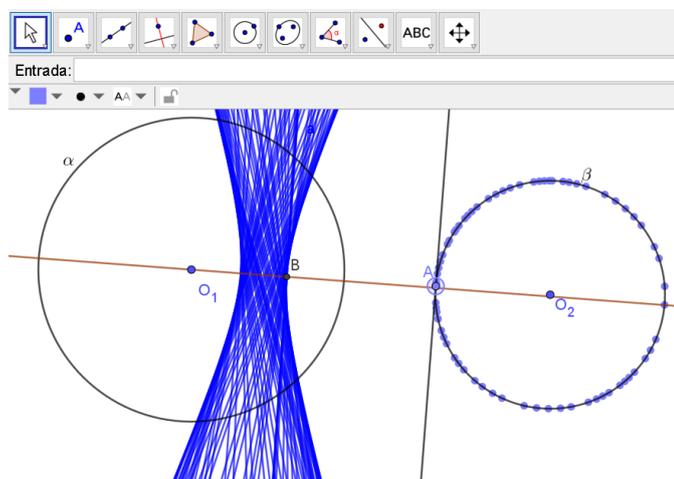


Figura 4.35: As retas azuis são a retas polares dos polos no círculo β

Uma outra situação é desabilitar o rastro de A e de sua polar, e habilitar o rastro do ponto B e da reta tangente em A . Assim, ao mover o ponto A , obtemos um conjunto de pontos que representam os polos das tangentes ao círculo α . Essa construção destaca, mais uma vez, o princípio de dualidade entre pontos e retas, facilitando a compreensão desse conceito.

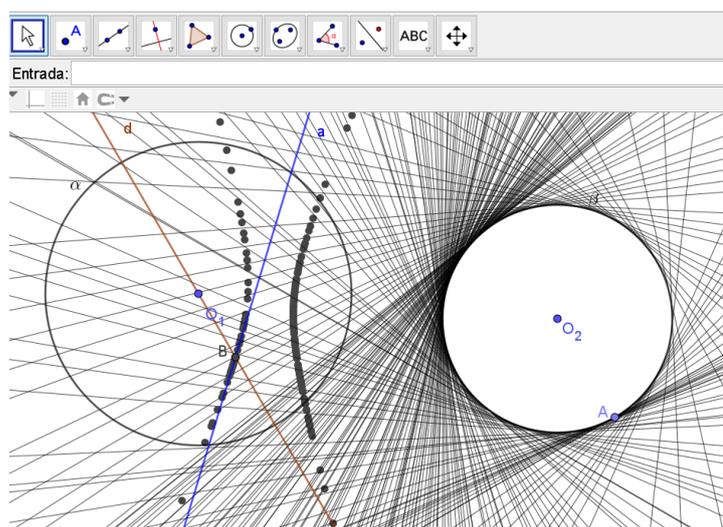


Figura 4.36: A imagem mostra alguns pontos, que são os polos das tangentes ao círculo β

Continuando, desabilite o rastro do ponto A e siga o passo 5 da construção anterior para gerar o lugar geométrico **lg1** dos pontos gerados por B , quando movemos o ponto A em α . Insira cinco pontos sobre **lg1** (incluindo o ponto B) e, em seguida, oculte **lg1**.

Com a ferramenta *Cônicas por Cinco Pontos*  selecionada, clique nos cinco pontos que estão sobre **lg1**, que está oculto, para gerar a mesma curva que **lg1**.

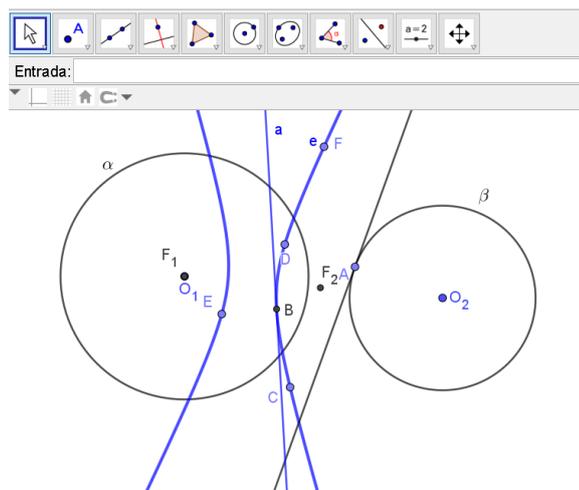
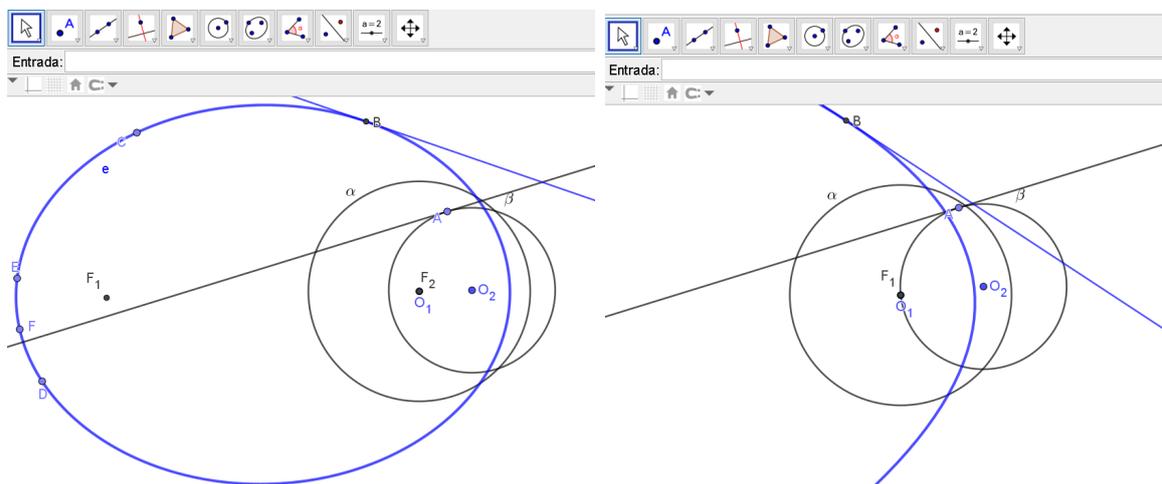


Figura 4.37: A imagem apresenta uma cônica e com focos F_1 e F_2 , formada a partir de cinco pontos B, C, D, E e F , utilizando a ferramenta *Cônicas formada por cinco pontos*. Esta cônica é única, conforme o Teorema 2.9 do Capítulo 2.

Em seguida, os focos dessa cônica podem ser inseridos utilizando o comando $Foco(<Cônica>)$ no campo de entrada, digitando $Foco(e)$, onde e é o rótulo da cônica gerada. Assim, os focos da cônica serão exibidos na construção.

Portanto, ao mover o círculo α , podemos observar as diferentes cônicas que são geradas. Dessa forma, quando o centro do círculo α está exterior a β , obtemos uma hipérbole, como mostrado na Figura 4.37. Se o centro de α estiver no interior de β , a cônica será uma elipse (Figura 4.38a). Já quando o centro de α está exatamente sobre o círculo β , a cônica resultante é uma parábola (Figura 4.38b).



(a) Quando centro do círculo α está no interior de β , a curva polar é uma elipse. (b) Quando centro do círculo α está sobre β , a curva polar é uma parábola.

Figura 4.38: Transformação por correspondência polar.

A construção de cônicas por meio da correspondência polar, utilizando dois círculos no GeoGebra, proporciona uma análise mais interativa no estudo das cônicas. Esse método permite que os alunos explorem e compreendam de maneira prática e visual os conceitos envolvidos.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os avanços tecnológicos, o uso das ferramentas digitais em sala de aula tornou-se essencial para auxiliar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Vários softwares educacionais foram desenvolvidos para servir como ferramentas pedagógicas, proporcionando aos estudantes melhor visualização dos conteúdos que são abordados em sala de aula, incentivando a reflexão sobre o que estão aprendendo em relação aos objetos de conhecimentos.

Neste trabalho, apresentamos propostas de atividades para o estudo da Geometria Projetiva das Cônicas no Ensino Médio utilizando o software dinâmico GeoGebra. O uso desta tecnologia permite uma visualização mais clara e intuitiva, principalmente, no estudo de Geometria Projetiva. Com o GeoGebra, é possível manipular objetos geométricos em tempo real, o que facilita a compreensão de propriedades específicas das parábolas, elipses e hipérbolas, e permite explorar como essas propriedades se alteram sob diferentes transformações projetivas.

Para a implementação dessa proposta, é fundamental que as escolas contem com uma infraestrutura tecnológica adequada, como laboratórios de informática equipados com as tecnologias necessárias, possibilitando que professores e professoras desenvolvam as atividades aqui sugeridas. Além disso, é necessário assegurar formação continuada tecnológica para os docentes, capacitando-os para o uso de ferramentas digitais e garantindo que tenham segurança para aplicar as atividades propostas em sala de aula.

No desenvolvimento desta proposta, foram abordados inicialmente os conceitos fundamentais das cônicas no plano euclidiano e suas principais propriedades. Em seguida, exploramos as transformações projetivas, demonstrando que, por meio de um centro de projeção, um círculo projetado em um plano pode ser transformado em uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou outro círculo. Este trabalho mostrou como o uso do GeoGebra permite que as cônicas e suas propriedades possam ser compreendidas sem o uso de coordenadas, como ocorre tradicionalmente na Geometria Analítica. Dessa forma, a abordagem dinâmica por meio desse software facilita o entendimento e incentiva a participação ativa dos estudantes, permitindo que façam uma análise mais profunda dos conceitos e sua propriedades envolvidas.

É importante destacar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta o estudo das transformações geométricas no Ensino Fundamental e Ensino Médio, incluindo transformações isométricas, que preservam forma e tamanho, e transformações homotéticas, que envolvem ampliação e redução de figuras. As atividades propostas neste trabalho ampliam o entendimento dos alunos sobre esses temas, ao incorporar à teoria da Geometria Projetiva das Cônicas o uso do GeoGebra, o que permite ir além das abordagens

tradicionais da Geometria Euclidiana. Foram apresentados o passo a passo dos processos de construção e orientações de como trabalhar em sala de aula a transformação de retas em retas, de retas em círculos, de círculos em círculos e retas, por meio de inversão, e de círculos em cônicas por correspondência polar, destacando o Princípio da Dualidade. Estas construções e instruções visam possibilitar a participação ativa dos estudantes e o aprofundamento dos conceitos abordados.

Assim, o presente trabalho contribui para a prática pedagógica ao proporcionar uma nova abordagem das cônicas por meio da Geometria Projetiva, favorecendo um ambiente de aprendizagem que valoriza tanto a participação ativa dos estudantes quanto o desenvolvimento de suas habilidades críticas e analíticas. Acreditamos que o uso de tecnologias como o GeoGebra pode servir de auxílio no estudo da Matemática, atendendo as necessidades e interesses dos alunos e tornando o aprendizado mais envolvente e significativo.

Referências Bibliográficas

- [1] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 1ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.
- [3] NETO, A. C. M. **Geometria Coleção PROFMAT**. 1ª Ed. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] GLAESER, G.; STACHEL, H.; ODEHNAL, B. **The Universe of Conics: From the ancient Greeks to 21st century developments**. Berlin: Springer, 2016.
- [5] AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A. A. **Geometry of Conics**. Vol. 26. MATHEMATICAL WORLD. American Mathematical Society, 2007.
- [6] ASKWITH, E. H. **A Course of Pure Geometry**. Cambridge: University Press, 1903.
- [7] CASTRO, L.G.M. **Introdução à Geometria Projetiva**. Nível Avançado, Artigo baseado em aula ministrada na III Semana Olímpica, Piracicaba - SP. Disponível on-line: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/geometria.pdf>. Acessado em 16/07/2023.
- [8] AYRES, F. J. **Schaum's Outline of Theory and Problems of Projective Geometry**. New York: Schaum Publishing Company, 1967.
- [9] Ewart, P. **OPTICS**, Notas de Aula, Oxford University. Disponível on line: <https://users.physics.ox.ac.uk/~ewart/Optics%20Lectures%202007.pdf>. Acessado em 26/06/2024.
- [10] SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. de B. . **Geometria Euclidiana Plana**, Notas de Aula, Universidade Federal de Sergipe (UFS), 2011. Disponível on-line: https://www.professor.ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf. Acessado em 08/09/2024.
- [11] CÍCERO T. **Polos Olímpicos de Treinamento - Curso de Geometria Nível 2, Aula 14: Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus**. Disponível on-line: https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf. Acessado em 08/09/2024.
- [12] SANTOS, J. A.; FREITAS, P. V. S.; JÚNIOR, G. S. F.; TANAKA, T. Y.. **Explorando os Teoremas de Menelaus e Ceva em Questões de**

- Olimpíadas de Matemática**, Revista Professor de Matemática Online, Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, 2021. Disponível on-line: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2021/06/art32_PMO_SBM_FLUX02021.pdf. Acessado em 08/09/2024.
- [13] FULTON, W. **Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry**. 28 de janeiro de 2008. Disponível on-line: <https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>. Acessado em 03/05/2024.
- [14] LINARES, J. L. **Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática**. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 22, n. 1, jul. 2022. ISSN 2316-9664. Disponível on-line: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v22n1a03-transformacao-de-inversao.pdf>. Acessado em 22/09/2024.
- [15] FILHO, D. C. de M.; ARAÚJO, A. G.; SILVA, J. G. da S.; FREITAS, Lorena Brizza Soares. **Revelando um segredo das parábolas**. Grupo PET-Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, 2010. Disponível on-line: https://www.mat.ufcg.edu.br/pet/arquivos/parabolas_2010.pdf. Acessado em 28/09/2024.
- [16] COXETER, H.S.M. **The real projective plane**. 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [17] ÁVILA, G. **A hipérbole e os telescópios**. Revista do Professor de Matemática - RPM, n. 34. Disponível em online: <http://rpm.org.br/cdrpm/34/5.htm> Acessado em 29/06/2024.
- [18] COSTA, G. A. T. F. da. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4**, 2007. Disponível em online: <http://www.orm.mtm.ufsc.br/revista.php> Acessado em 01/07/2024.
- [19] BOYADZHIEV, I. **Dandelin Spheres**. Plataforma GeoGebra. Disponível on-line: <https://www.geogebra.org/m/EcFmZR24>. Acessado em 20/08/2024.
- [20] LEITE, D. G.. **Girard Desargues e o desenvolvimento da geometria projetiva**. GD05 - História da Matemática. Disponível on-line: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd5_douglas_leite.pdf. Acessado em 07/11/2024.
- [21] AUFFINGER, A. C. T. de C. & VALENTIM, F. J. da S. **Introdução à geometria Projectiva**. Departamento de Matemática da Universidade Federal do Santo; Vitória, Setembro de 2003.
- [22] HEFEZ, A. **Introdução à história da geometria projetiva**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. Disponível on-line: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n03_Artigo03.pdf. Acesso em: 26/06/2024.
- [23] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 2018. Disponível on-line: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acessado em 07/11/2024.