

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

Eder Bentes Mar

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM
MATEMÁTICA

Eder Bentes Mar

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

MANAUS
2013

EDER BENTES MAR

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em Junho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata
Membro

Prof. Dr. Waldir Sabino da Silva Júnior
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, cuja luz me permitiu concluir esta jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral, pela disponibilidade, simpatia, paciência e valorosa colaboração.

Aos meus pais e irmãos: que seria de mim sem minha família?

Aos nobres amigos de mestrado, cuja amizade tornou mais aprazível a caminhada e aos estimados amigos cujo incentivo foi constante.

Agradeço ao meu filho, Rafael, que mesmo sem saber me impulsionou com sua sempre contagiante alegria.

E à minha amada esposa, Jordana Coutinho Caliri, maior incentivadora e companheira de todas as horas. Amor, esta vitória é nossa!

RESUMO

Neste trabalho fazemos um estudo de um dos mais belos teoremas da Geometria: o Teorema de Euler para Poliedros Convexos, que relaciona o número de vértices V , de arestas A e de faces F por meio da fórmula $V - A + F = 2$. O foco do trabalho é sua utilização como suporte ao professor do Ensino Médio. Para isto é apresentada um pouco da história do teorema e são dadas 3 demonstrações com abordagens distintas. Além disso, é feita uma breve análise de como está sendo feito o ensino de Geometria Espacial, particularmente o Teorema de Euler, no Ensino Médio. Por fim, faz-se uma sugestão para utilização de recursos computacionais para o ensino do Teorema de Euler através do *software* Uma Pletora de Poliedros, *software* aberto da Universidade Federal Fluminense (UFF).

Palavras-chave: Teorema de Euler, Poliedros, Uma Pletora de Poliedros, Poliedros Convexos.

ABSTRACT

In this work we study one of the most beautiful theorems of the Geometry: Euler's Theorem for Convex Polyhedra, that associates the number of vertices V , number of edges A and number of faces F through the formula $V - A + F = 2$. The focus of this work is its use as a base for the High school teacher. For this, is presented a few of the theorem's history and are given 3 proofs with different approaches. Furthermore, we do a brief analysis of how it's been made the teaching of the Spatial Geometry, particularly Euler's Theorem, in High school. It is also intended give as a suggestion use computational resources for the teaching of Euler's theorem by using the software Uma Pletora de Poliedros, free software from the Universidade Federal Fluminense.

Keywords: Euler's Theorem, Polyhedra, A Plethora of Polyhedra, Convex Polyhedra.

Sumário

Introdução	1
1 Generalidades	4
1.1 Introdução	4
1.2 Poliedro	4
1.2.1 Poliedros Convexos	7
1.2.2 Achatamento de Poliedro	9
1.3 Geodésica em uma Esfera	11
1.3.1 Triângulo geodésico	11
1.4 Teorema de Girard	13
1.5 Conclusão	18
2 Demonstrações do Teorema de Euler	20
2.1 Introdução	20
2.2 A Conjectura de Euler	21
2.3 O Caso Espacial do Teorema de Euler	24
2.3.1 Achatando o poliedro - A demonstração segundo Cauchy	24
2.3.2 Legendre e a esfera	29
2.3.3 Prof. Azambuja: Elegância e Precisão de Argumentos .	32
2.4 Caso Plano do Teorema de Euler	36
2.5 Conclusão	37
3 O Teorema de Euler e a Educação Básica	38
3.1 Introdução	38
3.2 Ensino do Teorema de Euler	38
3.3 Uso de Computador no Ensino do Teorema de Euler	40
3.4 Conclusão	44
4 Considerações Finais	45
Referências Bibliográficas	46

Introdução

Uma dos temas que compõem o programa da disciplina Matemática no ensino básico é a geometria espacial. A principal motivação deste trabalho é levar aos professores, alunos e demais interessados, diferentes formas de se demonstrar a validade de um dos mais belos teoremas da Geometria Espacial, o Teorema de Euler, o qual afirma ser válida, em poliedros convexos, a relação

$$V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

Diante da necessidade de um diálogo mais aproximado entre a comunidade acadêmica e os professores do ensino básico, a abordagem feita neste trabalho visa permitir, dentre seus objetivos, a aplicação das demonstrações do Teorema de Euler para Poliedros no dia a dia de uma sala de aula de Ensino Médio, de forma a possibilitar uma reflexão sobre o processo de aprendizagem acerca da Geometria Espacial, particularmente sobre o teorema em questão.

Além disso, busca-se também apresentar uma possível estratégia de ação a ser utilizada pelo professor quando da apresentação do referido tema, de modo que os seus alunos possam verificar uma relação existente entre alguns elementos componentes do poliedro, para em seguida ter contato com sua demonstração formal. Acreditamos que dessa forma a construção do conhecimento ocorrerá de maneira mais natural. Para alcançar este objetivo, descrevemos como sugestão utilizar o apoio de recursos como o computador, que poderá servir como facilitador do aprendizado, uma vez que permite uma melhor visualização dos poliedros e sua manipulação no meio virtual.

Consideramos importante ampliar a abordagem do tema proposto no que diz respeito aos conhecimentos a serem adquiridos pelos alunos do Ensino Médio. Neste sentido, apresentamos também ideias que não costumam ser vistas nas turmas de Ensino Básico, como o caso da Geometria Esférica, abordada neste trabalho de um modo sutil, de forma que possam ser bem compreendidas e servir como estímulo àqueles que se interessem por conhecer outras geometrias diferentes da Euclidiana.

Ao nosso ver, apresentar algo da história acerca dos estudos sobre poliedros e das controvérsias relacionadas à definição serão bastante enriquecedores, podem estimular o interesse e facilitar a compreensão do teorema.

O trabalho está organizado em 3 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos os conceitos e definições preliminares que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Na Seção 1.2 é apresentado o poliedro e sua definição, assim como a definição de poliedro convexo. Mostramos uma forma de obter um modelo plano do poliedro realizando o que chamamos de achatamento do poliedro.

A Seção 1.3 é dedicada a alguns conceitos em Geometria Esférica, abordados de um modo que possam ser aplicados em sala de aula, no Ensino Básico. Nesta seção definimos *geodésica* em uma esfera e, a partir daí, podemos definir triângulo geodésico. Este conceito será útil logo em seguida, quando trataremos do Teorema de Girard, do excesso angular no triângulo esférico.

Na Seção 1.4 apresentamos o Teorema do excesso angular no triângulo esférico, de Albert Girard, para o qual apresentamos duas demonstrações, sendo as duas bastante acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Por este teorema, mostra-se que existe uma relação entre a área de um triângulo esférico e a soma de seus ângulos internos.

O Capítulo 2 trata do Teorema de Euler para poliedros e suas demonstrações. Na Seção 2.3 apresentamos três demonstrações para o caso espacial do Teorema de Euler. Cada uma destas demonstrações apresenta uma característica que a torna interessante para um trabalho com os alunos. A primeira, na Subseção 2.3.1 tem por base os argumentos usados na demonstração de Cauchy, que usa uma representação plana do poliedro, chamado de achatamento.

Outra demonstração, proposta por Adrien-Marie Legendre, é apresentada na Subseção 2.3.2. Esta demonstração faz uso do Teorema de Girard, apresentado na Seção 1.4 do Capítulo 1. Para isso, projeta-se o poliedro em uma esfera e divide-se este poliedro projetado em triângulos geodésicos.

Na Subseção 2.3.3 é apresentada a demonstração conforme as ideias de Zoroastro Azambuja. Entretanto, para obter uma maior compreensão, é sugerida a utilização de um *software* educacional, com o intuito de tornar a demonstração mais atraente para os alunos de Ensino Médio. Esta demonstração se baseia em uma projeção ortogonal do poliedro e em duas formas de se obter a soma dos ângulos internos do poliedro.

Na Seção 2.4 apresentamos uma demonstração do Teorema de Euler no caso plano. Esta demonstração é feita usando o Princípio de Indução.

O Capítulo 3 deste trabalho é dedicado ao ensino do Teorema de Euler na Educação Básica. Para essa análise, na Seção 3.2 verificamos algumas

pesquisas sobre o tema e as análises de estudiosos. Pretendemos com isso ter uma visão mais próxima de como o ensino de Geometria, de um modo geral, e mais particularmente o Teorema de Euler, vem sendo tratado nas escolas.

Com base nesta análise, na Seção 3.3 é sugerido o uso do computador como ferramenta facilitadora de aprendizado, focando na interatividade do aluno com o poliedro no ambiente virtual e a mediação do professor. Apresentamos o *software Uma Pletora de Poliedros*, disponível no site da Universidade Federal Fluminense [1].

Capítulo 1

Generalidades

1.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos e definições dos elementos que utilizaremos nas demonstrações do Teorema de Euler que estarão no Capítulo 2.

Apresentamos uma definição para poliedros na Seção 1.2, onde também mostramos que, de acordo com a definição adotada, pode-se restringir o conjunto dos objetos com características de poliedro conforme se deseje. Aparentemente, este foi um recurso usado sempre que se encontravam sólidos que não cumpriam $V - A + F = 2$.

Ainda nesta seção, mostramos como obter uma representação plana do poliedro fazendo o achatamento do mesmo. Esta ideia foi sugerida por Augustin-Louis Cauchy, quando o mesmo fez sua demonstração para o Teorema de Euler [17].

As Seções 1.3 e 1.4 são dedicadas a conceitos em Geometria Esférica. Definimos *geodésica* na esfera, o conceito de triângulo esférico (geodésico) e utilizamos estes conceitos na demonstração do Teorema de Girard, do excesso angular no triângulo geodésico.

1.2 Poliedro

A palavra *poliedro* teve diferentes significados através dos tempos, variando conforme as pessoas que se dedicavam ao seu estudo. Na verdade, por muito tempo não houve, aparentemente, muito interesse em se definir de forma clara o que é um *poliedro*.

Em princípio, a propriedade mais óbvia é a de que poliedros são figuras tridimensionais delimitadas por faces poligonais. São muito facilmente

encontrados em nosso dia-a-dia, seja através de formas construídas (produzidas) pelo homem, nas artes, na arquitetura, entre tantas outras, seja na natureza, como os cristais, que se desenvolvem segundo formas poliédricas, ou, ainda, os radiolários, um tipo de protozoário amebóide pertencente ao plâncton marinho, cuja estrutura esquelética tem formas de poliedros [2].



Figura 1.1: Poliedros na natureza: calcopirita (forma tetraédrica) e Circogonia icosaedra

Uma definição em aberto como esta pode ser interpretada de muitas formas. Não há restrição quanto ao modo de colocar os polígonos juntos ou mesmo que tipo de polígono pode ser usado. Ou seja, para que se possa obter propriedades matemáticas e suas consequências a respeito dos poliedros, é extremamente necessário que se tenha uma definição precisa para o mesmo.

Entretanto, durante muito tempo foram encontrados problemas nas demonstrações de resultados a respeito das propriedades dos poliedros, tais como imprecisões e inconsistências nas provas. Estes problemas se devem em grande parte à falta de uma definição precisa capaz de determinar para quais objetos é válido tal teorema.

Chegar a um consenso sobre uma definição que seja adequada é algo difícil. Para que se tenha uma ideia da dificuldade de se ter uma definição rigorosa de poliedro, temos historicamente uma divergência quanto a poliedro ser um ente sólido ou oco. Enquanto encontramos com mais frequência a ideia de corpo sólido, outros matemáticos imaginaram o poliedro como uma superfície própria (como encontramos na demonstração dada por Cauchy, por exemplo).

Uma definição simplista, definindo poliedro como uma figura delimitada por faces poligonais, em que cada aresta é a interseção de exatamente duas faces, e no qual cada vértice é o encontro de pelo menos três arestas, pode parecer razoável.

Entretanto, como podemos ver pela Figura 1.2, os objetos apresentados satisfazem nossa pouco exigente definição, mas não parecem satisfazer ao senso comum do que vem a ser um poliedro. A Figura 1.2(a) possui um buraco em seu interior mas, de acordo com muitos matemáticos, é um poliedro.

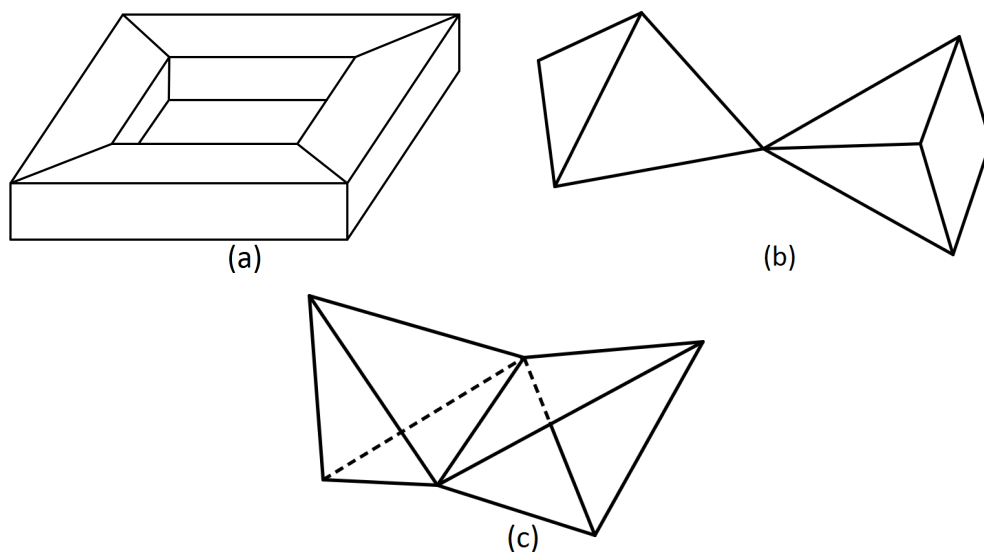


Figura 1.2: Sólidos que não satisfazem o senso comum de poliedro

Já as Figuras 1.2(b) e 1.2(c) não podem ser considerados poliedros, de acordo com a maioria das definições encontradas na literatura.

Daremos, então, uma definição com um maior rigor possível, dentro dos conceitos atuais e que são de maior consenso entre os matemáticos.

Antes disso, definamos *polígono plano*:

Definição 1.2.1 *Um polígono plano é uma região do plano delimitada por linhas retas (segmentos de retas). É uma figura geométrica formada por segmentos consecutivos que recebem o nome de lados.*

Definição 1.2.2 *Poliedro é a união de um conjunto finito de polígonos planos com as propriedades que seguem:*

- (i) *A interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum ou é vazia. O lado comum é chamado de **aresta**. O polígono é chamado **face**.*
- (ii) *Cada aresta é lado de exatamente dois polígonos.*
- (iii) *É sempre possível ir do interior de um polígono ao interior de qualquer outro polígono por um caminho inteiramente contido no poliedro.*
- (iv) *Seja V um vértice qualquer do poliedro e F_1, F_2, \dots, F_n os n polígonos que se encontram em V . Pode-se ir de qualquer polígono F_i até qualquer polígono F_j , com $i, j = 1, 2, \dots, n$, sem passar pelo vértice V .*
- (v) *Se dois polígonos são adjacentes, então não são coplanares.*

Com esta definição, objetos como os da Figura 1.2(b) e 1.2(c) não podem ser considerados poliedros, pois não satisfazem as condições (iv) e (ii), respectivamente.

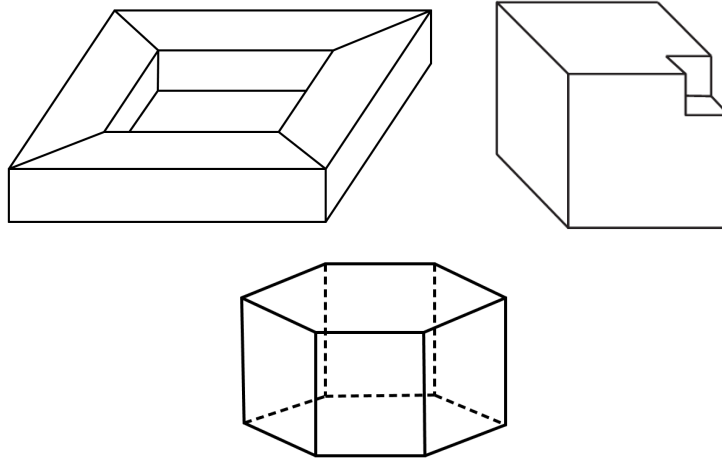


Figura 1.3: Objetos considerados poliedros conforme a Definição 1.2.2

1.2.1 Poliedros Convexos

Como vimos, um poliedro é um objeto limitado por polígonos que chamamos faces. Um poliedro pode ser classificado como *convexo* e *não convexo* (côncavo).

Antes de definirmos *poliedro convexo*, definamos o que é um conjunto convexo:

Definição 1.2.3 Dizemos que um conjunto K do plano ou do espaço é *convexo* se, dados dois pontos A e B quaisquer de K , o segmento de reta que liga estes dois pontos está inteiramente contido em K .

No sentido da Definição 1.2.3, um poliedro é chamado *convexo* quando o mesmo delimita um sólido convexo. Deste modo, podemos definir um poliedro convexo como:

Definição 1.2.4 Um poliedro P é *convexo* se:

- Duas faces quaisquer não são coplanares.
- O plano que contém uma face, dividindo o espaço em dois semi-espaços, deixa todas as outras faces em um mesmo semi-espaço.

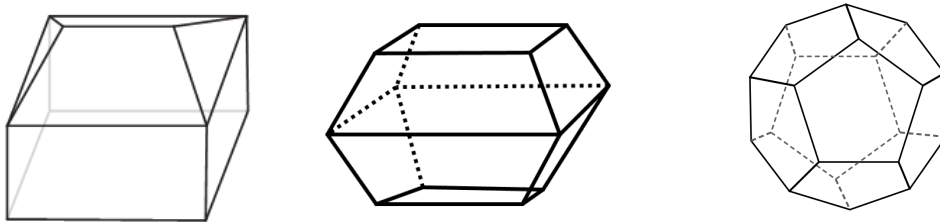


Figura 1.4: Poliedros convexos

Portanto, não são convexos objetos como os dois primeiros da Figura 1.3.

Na Figura 1.5 abaixo, temos um poliedro no qual o segmento que liga os pontos A e B dados ‘fura’ o poliedro, ou seja, não está completamente dentro do mesmo.

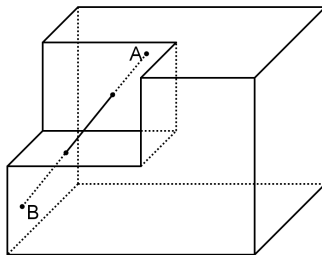


Figura 1.5: Poliedro não-convexo

Entre os poliedros convexos chamam bastante a atenção os poliedros *regulares*. Matemáticos de todas as épocas sempre se fascinaram com estes objetos pela sua beleza e simetria.

Definição 1.2.5 *Definimos poliedro regular como sendo um poliedro que tem as seguintes propriedades:*

- (1) *É um poliedro convexo*
- (2) *Cada face do poliedro é um polígono regular*
- (3) *Todas as faces são congruentes*
- (4) *Cada vértice é cercado pelo mesmo número de faces.*

Existem apenas cinco poliedros que cumprem estes requisitos: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro, que possuem, respectivamente, quatro faces triangulares, seis faces quadradas, oito faces triangulares, doze faces pentagonais e vinte faces triangulares.

A prova de que existem exatamente cinco destes poliedros foi dada por Euclides no Livro XIII de sua obra *Elementos*. Estes poliedros são também conhecidos por *Poliedros de Platão*, pois o grego Platão desenvolveu uma



Figura 1.6: Os cinco sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

teoria na qual os poliedros regulares são a base de toda matéria. Em sua teoria, Platão associou o tetraedro ao Fogo, o cubo à Terra, o octaedro ao Ar, o dodecaedro ao Cosmos e o icosaedro à Água, sendo estes os elementos fundamentais da natureza.

1.2.2 Achatamento de Poliedro

Para obtermos uma representação planar de um poliedro, podemos nos utilizar do artifício de retirar uma face do mesmo e transportar todas as outras faces para esta que foi retirada, não alterando o número de faces remanescentes. A figura plana que obtemos contida neste contorno é constituída por um conjunto de polígonos, que são as faces restantes do poliedro.

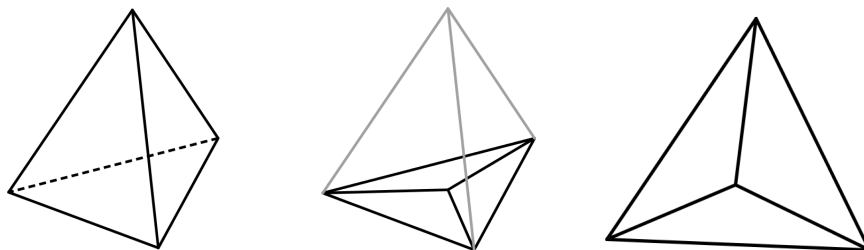


Figura 1.7: Processo de achatamento de um tetraedro

De fato, sempre é possível realizar este achatamento se o poliedro em questão é homeomorfo a uma esfera, pois retirando um ponto tornamos a esfera homeomorfa ao plano.

Observação: Dizemos que duas figuras M e N são homeomorfas quando existe uma bijeção $f : M \rightarrow N$, contínua, tal que sua inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$, seja também contínua.

Podemos empíricamente visualizar um poliedro homeomorfo à esfera imaginando como se o mesmo fosse feito de borracha e começássemos a enchê-lo de ar, até que ele seja transformado em uma esfera. Naturalmente, o poliedro não deve ser rasgado ou sofrer sobreposições.

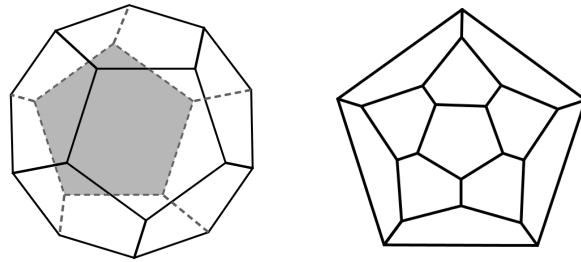


Figura 1.8: Exemplo de achatamento de um dodecaedro

Na Figura 1.8, temos um exemplo de achatamento de um dodecaedro. De um modo geral, todo poliedro convexo é homeomorfo à esfera e, portanto, pode ser achatado mantendo a relação entre vértices, arestas e faces do poliedro original (com uma face retirada).

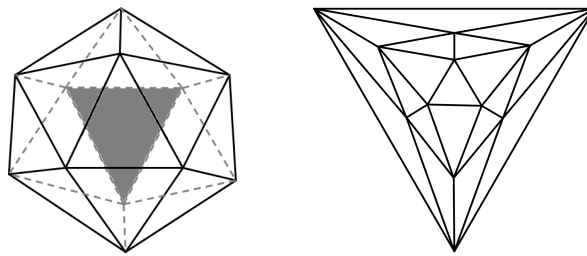


Figura 1.9: Icosaedro e sua representação plana

Um outro modo de se obter uma representação planar do poliedro é imaginar como se as faces dele fossem transparentes e aproximássemos um foco luminoso de uma dessas faces. Assim, a sombra das arestas do poliedro será o nosso modelo plano para o mesmo.

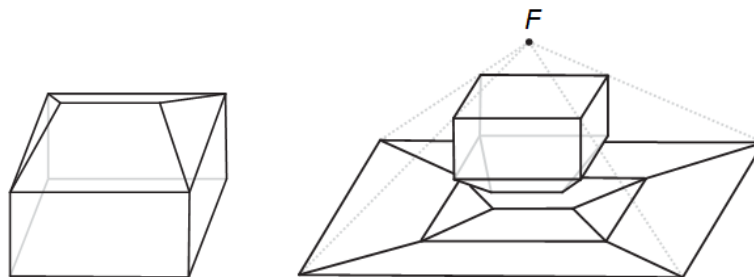


Figura 1.10: Sombra das arestas de um poliedro

Na Figura 1.10, temos como exemplo um poliedro convexo sendo iluminado por um foco luminoso F . Notemos que, quanto mais próximo um ponto

das arestas do poliedro se encontra em relação ao foco de luz, mais afastado do centro está o seu correspondente no modelo plano do poliedro.

1.3 Geodésica em uma Esfera

Dada uma esfera \mathcal{E} e um plano Γ , a interseção entre \mathcal{E} e Γ , quando este é secante, é um círculo. Se, em particular, este plano passa pelo centro da esfera, então o círculo que se obtém possui raio igual ao da esfera. Assim, chamamos de *círculo máximo* a qualquer círculo na esfera que possua o maior raio possível, ou seja, o raio da esfera.

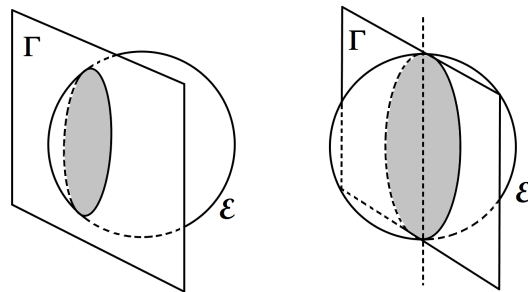


Figura 1.11: Interseção entre plano e esfera

Definição 1.3.1 *Um círculo máximo da esfera \mathcal{E} é também denominado uma Geodésica na esfera.*

As *geodésicas* são curvas importantes na geometria, seja por serem usadas como ferramentas no desenvolvimento de estudos de certas superfícies, seja para seu estudo em si.

Podemos comparar uma *geodésica* em uma esfera com uma reta no plano. Isto significa que as *geodésicas* tem a propriedade de minimizar distâncias. Assim, dados dois pontos na esfera e as curvas ligando estes pontos, o caminho mais curto entre eles é uma *geodésica*.

Note-se que, dados dois pontos A e B em uma esfera, a interseção do plano determinado pelos pontos A, B e O (centro da esfera) com a esfera \mathcal{E} é uma geodésica.

1.3.1 Triângulo geodésico

O conceito de triângulo geodésico será importante neste trabalho quando apresentarmos a demonstração do Teorema de Euler dada por Legendre

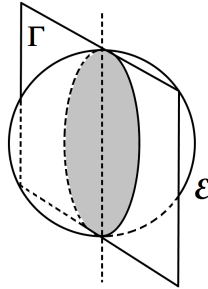


Figura 1.12: Círculo máximo ou geodésica

(Seção 2.3.2), pois a mesma utiliza o Teorema de Girard (do excesso angular no triângulo esférico, na Seção 1.4), que se baseia no conceito de triângulo geodésico na esfera em sua demonstração.

Definição 1.3.2 *Uma figura sobre a esfera é chamada de triângulo esférico quando a mesma é delimitada por três geodésicas.*

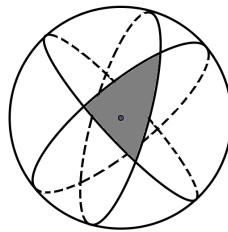


Figura 1.13: Triângulo geodésico na esfera

Observação: Por este motivo, é mais preciso chamar estas figuras de *triângulos geodésicos*.

O conhecimento de triângulos geodésicos é bastante antigo. Menelau de Alexandria, que viveu por volta do ano 100 e ao que se sabe escreveu várias obras que se perderam sobre trigonometria e geometria, teve preservada sua obra *Sphaerica*, na qual apresenta uma teoria esférica similar à geometria plana.

Em seu trabalho, Menelau de Alexandria mostra que vários teoremas para triângulos no plano valem também para triângulos geodésicos. Entretanto, um resultado muito importante encontrado por Menelau de Alexandria é que, em triângulos geodésicos, a soma dos ângulos internos é sempre maior que 180° .

Outra característica da geometria esférica é que não existe noção de semelhança. Diferentemente dos triângulos planos, que podem ser ampliados ou reduzidos, não se pode obter um triângulo geodésico maior e outro menor com as mesmas medidas de ângulos (na mesma esfera). Podemos dizer que em um triângulo geodésico os ângulos determinam sua área e, portanto, seu tamanho e forma, e vice-versa. Quanto maior é o triângulo, mais sofre a ação da curvatura da esfera.

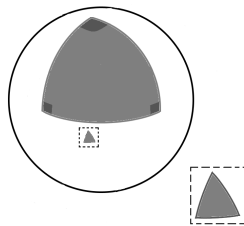


Figura 1.14: Triângulos geodésicos não são semelhantes

Observar que, quanto menor o triângulo, mais os seus lados se aproximam de segmentos de reta. Por consequência, os ângulos do triângulo mudam, o que não nos permite a comparação entre os ângulos do triângulo original e sua possível redução. Por esse motivo os triângulos não são semelhantes.

1.4 Teorema de Girard

Antes de enunciarmos o Teorema, daremos algumas definições necessárias para a demonstração do mesmo.

Definição 1.4.1 *Dada uma esfera \mathcal{E} de centro O e raio r . Dizemos que:*

- (a) *Um fuso ϕ é uma região da esfera que se encontra entre duas geodésicas.*
- (b) *Os vértices do fuso ϕ são os pontos em comum dessas geodésicas, os quais são diametralmente opostos.*
- (c) *O ângulo θ do fuso ϕ é o ângulo que está entre as duas geodésicas.*

Um fuso, cujo ângulo $\theta = \pi$, é um hemisfério e possui área $2\pi.r^2$. De fato, a área da casca da esfera é $4\pi.r^2$ e quando $\theta = \pi$ a esfera é dividida em dois hemisférios que possuem mesma área. Daí a área de cada hemisfério é $2\pi.r^2$.

De forma geral, a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo, isto é, se o ângulo mede θ radianos, sua área é igual a $2.\theta.r^2$.

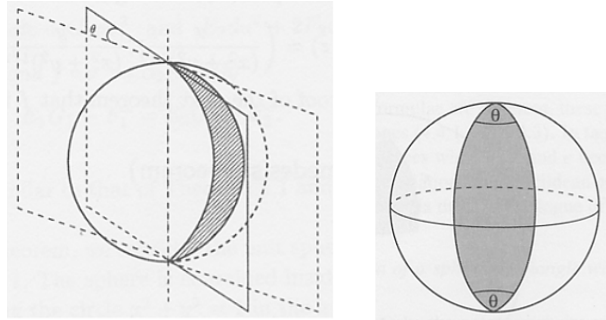


Figura 1.15: Fuso e seu ângulo

Definição 1.4.2 Dado um ponto qualquer A da esfera, chamaremos de antípoda de A , e o indicaremos por A' , ao ponto que é diametralmente oposto a ele, único. Isto quer dizer que o segmento de reta que une A a A' contém o ponto O , centro da esfera.

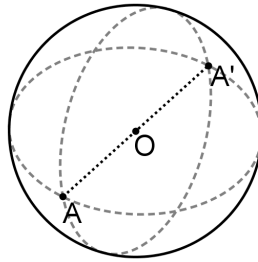


Figura 1.16: Pontos antípodas na esfera são diametralmente opostos.

Como cada ponto da esfera tem um antípoda único, o conjunto dos antípodas de um dado fuso φ é também um fuso φ' , o fuso antípoda de φ . A reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se um fuso completo.

Teorema 1.4.3 Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.

A demonstração que apresentaremos é extraída de [12].

Demonstração: Basta provar que R e R' têm a mesma área porque então área de $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 \cdot (\text{área de } R)$ e daí área de $R = \text{metade da área de } \Phi = 2 \cdot \alpha \cdot r^2$.

Ora, R e R' são figuras *antípodas*, isto é, cada ponto de R' é o antípoda de um ponto de R e vice-versa. Mais precisamente, $R = s \cup t$ é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice em comum e $R' = s' \cup t'$ é a reunião dos triângulos antípodas de s e t . Basta, portanto provar que um triângulo esférico t e seu antípoda t' têm mesma a área. Observamos que t e t' têm ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, mas t e t' não são congruentes: não é possível por um movimento rígido mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, a menos que t (e conseqüentemente t') seja isósceles. As figuras abaixo mostram duas tentativas de sobrepor t e t' . Numa delas fazem-se coincidir os três vértices. Na outra, coincide-se um ângulo de t com outro ângulo igual de t' .

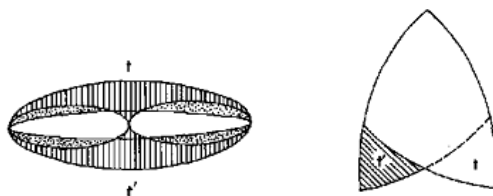


Figura 1.17: Tentativas de sobrepor t e t'

Na segunda tentativa, observamos que se t (e portanto t') for isósceles, então t é congruente ao seu antípoda t' , logo estes dois triângulos esféricos têm a mesma área. No caso geral, procede-se do seguinte modo: Os pontos A, B, C , vértices de t , determinam um pequeno círculo e portanto uma calota esférica que contém o triângulo t . Seja P o polo dessa calota (P é o ponto de interseção da calota com a perpendicular ao plano ABC tirada pelo centro do círculo). Os arcos de *círculo máximo* PA , PB e PC têm o mesmo comprimento, logo os triângulos esféricos PAB , PBC e PAC são isósceles. Se o polo P estiver no interior do triângulo $t = ABC$ teremos área de $t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC)$. Ora, uma construção absolutamente análoga pode ser efetuada com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$, decompondo-o como reunião justaposta dos triângulos isósceles $P'A'B'$, $P'B'C'$ e $P'A'C'$, cada um deles antípoda do seu correspondente em t . Segue-se que área de $t = \text{área de } t'$.

Pode ocorrer, entretanto, que o polo P esteja situado fora do triângulo t . Neste caso, área de $t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC)$. Uma situação análoga ocorre com t' e concluímos como antes que área de $t = \text{área de } t'$.

O resultado a seguir é devido ao matemático francês Albert Girard (1595-1632). Nele encontramos uma importante relação entre os ângulos internos

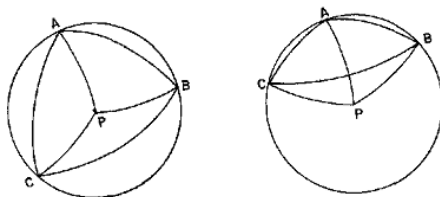


Figura 1.18: O polo do triângulo ABC pode estar dentro ou fora de ABC

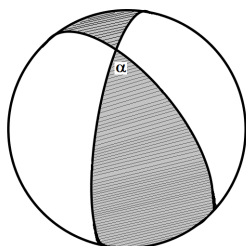


Figura 1.19: A região hachurada R , contida no hemisfério H

de um triângulo geodésico e sua área. Cabe observar que, diferentemente do plano, a soma dos ângulos internos do triângulo vale mais que π .

Teorema 1.4.4 (Girard) *Se α, β e γ são os ângulos internos de um triângulo geodésico, medidos em radianos, então*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$$

onde A é a área desse triângulo.

Demonstração: Considere uma esfera \mathcal{E} dividida em dois hemisférios, H e H' . Vamos nos fixar no hemisfério H contendo o triângulo dado. O fuso φ_α é aquele cujos lados são o prolongamento dos lados do ângulo α . Considerando apenas o hemisfério H , obtemos uma região $R_\alpha \subset H$, como mostra a Figura 1.20. Como vimos no Teorema 1.4.3, a área desta região mede $2\alpha r^2$.

Procedendo de forma análoga com os ângulos β e γ , o que obtemos são regiões R_β e R_γ , com áreas medindo $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente. A reunião destas três regiões é o hemisfério H , tendo o triângulo em questão sido contado duas vezes a mais.

Observando isso, temos que a soma das três regiões, R_α, R_β e R_γ , equivale a área do hemisfério H mais duas vezes a área A do triângulo dado. Ou seja,

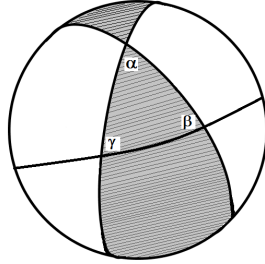


Figura 1.20: Hemisfério H contendo o triângulo geodésico

temos que $2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2A$, pois a área de um hemisfério é $2\pi r^2$. Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 &= 2\pi r^2 + 2A \\ r^2(\alpha + \beta + \gamma) &= \pi r^2 + A \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{A}{r^2} \end{aligned}$$

Podemos demonstrar este teorema de outro modo, fazendo uso, neste caso, da noção de simetria, cujo conceito está relacionado com o de isometria. Isto é, uma transformação geométrica na qual, uma vez aplicada a uma figura geométrica, mantém suas características essenciais, em particular distâncias entre pontos e amplitudes angulares. Vamos à demonstração.

Demonstração: Sejam A, B e C os vértices de um triângulo geodésico, correspondendo respectivamente aos ângulos α, β e γ . As três geodésicas que contém os lados do triângulo dividem a esfera em três fusos completos, um deles com ângulo α e vértices em A e A' (antípoda de A), um com ângulo β e vértices B e B' (antípoda de B) e outro com ângulo γ e vértices C e C' (antípoda de C).

Um dos fusos cujo ângulo mede α contém o triângulo $ABC = t$. O outro fuso de ângulo α contém o triângulo $A'B'C' = t'$. Este fuso completo será chamado Φ_α . Analogamente, com relação aos fusos com ângulos β e γ , encontramos os fusos completos Φ_β e Φ_γ . Portanto, temos que

$$\Phi_\alpha \cap \Phi_\beta = \Phi_\alpha \cap \Phi_\gamma = \Phi_\beta \cap \Phi_\gamma = t \cup t'$$

Observando que $\mathcal{E} = \Phi_\alpha \cup \Phi_\beta \cup \Phi_\gamma$, com os triângulos t e t' sendo contados três vezes cada (duas vezes a mais que devia), temos que a soma das áreas

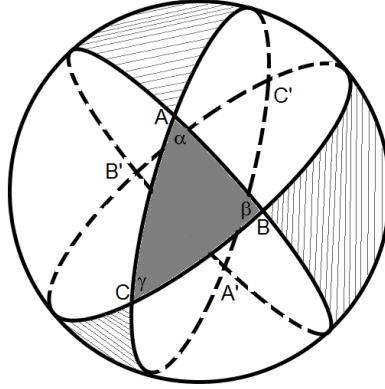


Figura 1.21: A esfera dividida em fusos

dos três fusos completos é igual à área da esfera mais duas vezes a área de $t \cup t'$. Portanto, temos:

$$\mathcal{A}(\Phi_\alpha) + \mathcal{A}(\Phi_\beta) + \mathcal{A}(\Phi_\gamma) = \mathcal{A}(\mathcal{E}) + 2.(\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}(t')).$$

Entretanto, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t')$, pois temos que os triângulos t e t' são simétricos, uma vez que cada ponto P de t possui um antípoda (único) P' em t' . Portanto, ambos tem mesma área. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Phi_\alpha) + \mathcal{A}(\Phi_\beta) + \mathcal{A}(\Phi_\gamma) &= \mathcal{A}(\mathcal{E}) + 4\mathcal{A}(t) \\ 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 &= 4\pi r^2 + 4\mathcal{A}(t) \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2} \end{aligned}$$

1.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições preliminares que serão úteis para o desenvolvimento dos demais capítulos deste trabalho.

Na Seção 1.2 foi apresentada uma definição de poliedro, a qual iremos adotar no decorrer deste trabalho. Demos, ainda, definição de poliedro convexo e um modo de obter uma representação plana de um poliedro convexo através do achatamento do mesmo.

Na Seção 1.3 foi dada alguma noção de geometria na esfera, definindo o que é *geodésica* em uma esfera e, em seguida, apresentando o conceito de triângulo geodésico.

Finalmente, na Seção 1.4 foram apresentadas duas demonstrações para o Teorema do excesso angular no triângulo geodésico, de Albert Girard. Assim como a Seção 1.3, esta seção foi tratada de modo a servir como base para o professor do Ensino Básico.

Capítulo 2

Demonstrações do Teorema de Euler

2.1 Introdução

Neste capítulo, abordaremos três demonstrações diferentes para o Teorema de Euler, no espaço. Com isto, esperamos dar suporte ao professor que poderá utilizar o resultado mais apropriado ao contexto de sua sala de aula. Além disso, esperamos oferecer a possibilidade de que o professor faça uso de recursos computacionais, se houver disponibilidade, para tornar mais atraente a demonstração deste teorema, para o aluno.

A primeira demonstração é devida a Cauchy (1789-1857), matemático nascido em Paris. Sua demonstração foi inovadora à época por trazer uma visão de poliedro como um ente oco, que pode ser sobreposto em um plano, diferente de seus contemporâneos. Como este foi um de seus primeiros trabalhos na matemática (o mesmo era engenheiro), há mais de virtuosismo que grandes conceitos matemáticos envolvidos. Portanto, não é de se surpreender que o mesmo tenha deixado de perceber a profundidade de sua demonstração.

A segunda demonstração que apresentamos foi feita por Legendre (1752-1833). É uma demonstração elegante que faz uso de conceitos inusitados: geometria esférica e propriedades métricas. Para sua demonstração é necessário que se conheça o Teorema de Girard, que relaciona a área de um triângulo esférico (triângulo formado por arcos de círculo máximo) com a soma dos seus ângulos internos. Apesar disso, é uma demonstração que traz um raciocínio bastante acessível. Essa demonstração para o Teorema de Euler está incluída no seu livro *Eléments de géométrie*¹, publicado em 1794, quando Legendre já ocupava uma posição de destaque. Tornou-se um livro

¹LEGENDRE, A.M. *Eléments de Géométrie*, apud LIMA [12].

bastante popular pela clareza e simplicidade com que o autor aborda seus temas. Este livro é comparado por muitos aos Elementos, de Euclides. Na verdade, muitas das proposições de Euclides são apresentadas reformuladas e simplificadas.

Por fim, a demonstração dada por Zoroastro Azambuja Filho. Uma demonstração que traz uma argumentação muito elegante, precisa e, acima de tudo, acessível a quem tiver um nível elementar de conhecimento matemático. Neste trabalho, fazemos uma mudança na demonstração original, a fim de torná-la, na medida do possível, mais atual. Para isso, fazemos uso de um *software* que nos dá uma vista ‘aérea’ do objeto estudado, nos fornecendo uma projeção ortogonal deste objeto. Na demonstração original de Azambuja, ele se utiliza de ideias muito simples, como a de um sol brilhando a pino sobre o poliedro, sendo seus raios, retas verticais perpendiculares a um plano previamente tomado.

Apresentamos, ainda, uma demonstração que nos atesta a validade do Teorema de Euler no caso plano. Neste caso, o poliedro será substituído por uma região, subdividida em outras regiões e faremos uso do Princípio de Indução para obtermos o resultado buscado.

2.2 A Conjectura de Euler

Em novembro do ano de 1750, Leonhard Euler, em correspondência com Christian Goldbach (1690-1764), anunciou ter notado algumas relações nas suas investigações a respeito de poliedros. Euler pretendia classificar os “sólidos limitados por faces planas” de acordo com suas características, assim como são classificados os polígonos: se tem 3 lados é um triângulo, se tem 4 lados é um quadrilátero, se tem 5 é um polígono, etc.

Leonhard Euler nasceu na Basileia, Suíça, em abril de 1707. Seu pai, que aprendeu matemática com Jacob Bernoulli (1654-1705) e seu irmão Johann (1667- 1748), foi responsável pelo seu primeiro contato com a matemática. Desde cedo, Euler demonstrou ter grandes habilidades matemáticas e, contando com a intervenção de Bernoulli, teve permissão do pai para seguir nesta área - seu pai queria que seguisse a carreira de ministro religioso.

Euler foi o matemático mais produtivo da história. Suas publicações, entre artigos e livros, somam 866 itens, muitos deles tendo sido publicados durante anos após sua morte, ocorrida em 1783. Mesmo tendo ficado cego em 1771, sua produção não se tornou menos intensa. Há uma vasta quantidade de áreas em que Euler tem trabalhos publicados: ótica, astronomia, mecânica, música, etc. Na matemática, dentre tantos, tem trabalhos sobre curvas, séries, cálculo infinitesimal, teoria dos números, geometria, álgebra,

topologia...

Na carta dirigida a Goldbach, Euler diz:

Recentemente me ocorreu determinar propriedades gerais de sólidos limitados por faces planas, pois não há dúvidas de que teoremas gerais seriam encontrados, assim como para figuras retilíneas planas, cujas propriedades são: (1) que em toda figura plana o número de lados é igual ao número de ângulos, e (2) que a soma de todos os ângulos é igual ao dobro de tantos ângulos retos quantos lados existirem menos quatro.

Enquanto para figuras planas apenas lados e ângulos precisam ser considerados, para o caso dos sólidos mais partes devem ser levadas em conta.²

Neste sentido, Euler identifica os elementos componentes do sólido. Segundo seus termos, as partes importantes são chamadas de:

- H (*hedrae*) o número de faces;
- S (*angulorum solidorum*) o número de ângulos sólidos (vértices do poliedro);
- A (*acies*) o número de arestas;
- L (*latus*) a soma dos lados das faces;
- P (*angulorum planorum*) a soma dos ângulos planos (vértices das faces).

Com estes termos, Euler introduziu um elemento que até então não havia sido definido na literatura matemática: a aresta. E com este novo elemento, Euler afirma que:

Conjectura 2.2.1 (Euler) *Em qualquer sólido limitado por faces planas, a soma do número de ângulos sólidos e o número de faces excede em dois o número de arestas.*

Segundo seus termos, teremos, então

$$S + H = A + 2,$$

²Tradução baseada na versão para o inglês de N.L. Biggs, E.K. Lloyd e R.J. Wilson, Oxford, 1976.

ou, usando nossa linguagem, $V + F = A + 2$, que reescrevendo nos dá

$$V - A + F = 2.$$

Euler mostrou-se surpreso pelo fato de ninguém haver notado este importante resultado anteriormente. Entretanto, após verificar a validade desta relação em vários casos particulares de poliedros, Leonhard Euler admite não ter conseguido provar sua validade para o caso geral, escrevendo a Goldbach que aquela relação era tão difícil de demonstrar que ele mesmo ainda não havia encontrado uma prova satisfatória para a mesma.

Somente muitos meses depois de apresentada a fórmula $V - A + F = 2$ por Euler a Goldbach, o mesmo deu uma demonstração da validade geral da mesma. Cabe ressaltar que até este momento não havia sido feita distinção entre os tipos de poliedros (convexos e não-convexos). Na verdade, não havia uma definição explícita para estes objetos, como vimos na Seção 1.2.

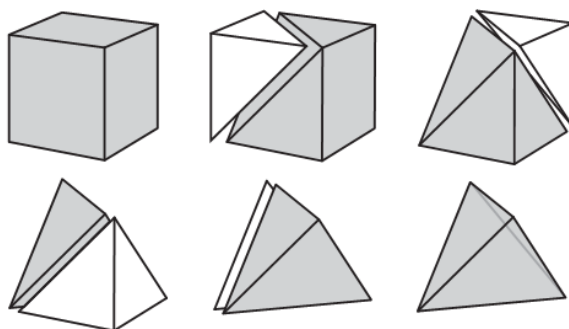


Figura 2.1: Exemplo da demonstração dada por Leonhard Euler

Porém, como podemos ver em [17] apesar de muito inteligente, a demonstração apresentada por Euler não atende aos padrões de rigor matemático atuais.

Em sua demonstração, Euler sugere que sejam retirados, um a um, os vértices do poliedro original, obtendo-se um novo poliedro que mantém ainda o mesmo valor de $V - A + F$. O resultado final destas retiradas é uma pirâmide triangular, cujas propriedades são conhecidas, permitindo concluir que o poliedro original possui $V - A + F = 2$.

Há muitas demonstrações bem mais claras e diretas que esta dada por Euler, algumas das quais apresentaremos a seguir. Esta demonstração é bem pouco conhecida e ainda menos usada, até por que possui algumas deficiências no seu “processo”, como vemos em [9].

Como não há uma regra definida para a retirada dos vértices, pode-se obter como resultado um poliedro que não mantém o valor de $V - A + F$. Por

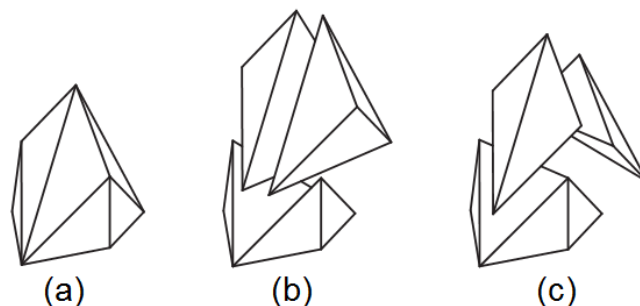


Figura 2.2: Existem falhas na demonstração dada por Euler

exemplo, na Figura 2.2 (b), obtemos um objeto que não atende a definição de poliedro, além de não manter a relação original, pois $V = 6$, $A = 11$ e $F = 8$, ou seja, $V - A + F = 3$, e não 2.

Entretanto, há outras demonstrações mais viáveis, como veremos a seguir, e que exploram bem mais esta valiosa contribuição dada por Euler.

2.3 O Caso Espacial do Teorema de Euler

2.3.1 Achatando o poliedro - A demonstração segundo Cauchy

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema de Euler devida a Cauchy. Augustin-Louis Cauchy nasceu no ano de 1789, na cidade de Paris, na França. Já muito cedo teve contato com grandes nomes da matemática como Pierre-Simon Laplace e Joseph-Louis Lagrange. Este último demonstrando um grande interesse no aprendizado matemático de Cauchy. Formou-se no ano de 1807, na *École Polytechnique* e em seguida cursou Engenharia na *École des Ponts et Chaussées*. No ano de 1815 dá início à sua carreira como professor na *École Polytechnique*.

Sua produção é extensa e suas contribuições mais profundas se dão em diversas áreas. Uma enorme quantidade de termos matemáticos levam seu nome, como, por exemplo, *Integral de Cauchy*, *Equações de Cauchy-Riemann*, *Sequências de Cauchy*, dentre tantos outros. Além disso, o mesmo era um grande defensor do rigor matemático.

Nos interessa sua demonstração da fórmula de Euler para poliedros, que faz parte dos seus primeiros trabalhos na matemática, feitos quando o mesmo ainda atuava como Engenheiro.

Relembremos que a Conjectura 2.2.1 afirma que em todo poliedro de faces

planas tem-se

$$V - A + F = 2,$$

onde:

- V é o número de vértices;
- A é o número de arestas;
- F é o número de faces do poliedro.

Demonstração: primeiramente retiramos uma face do poliedro. Feito isso, o número de faces F terá diminuído de uma unidade, mas o número de arestas A e o número de vértices V permanecem o mesmo, pois cada aresta pertence a duas faces e cada vértice, a mais de duas arestas. Portanto, a retirada de uma face não terá afetado suas quantidades.

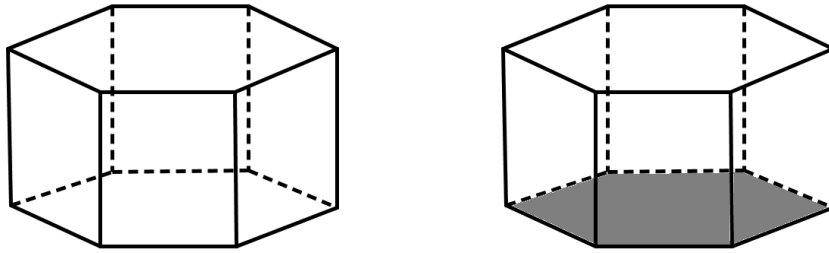


Figura 2.3: Um poliedro convexo e sua face retirada

A Figura 2.3 ilustra o que afirmamos. Nela temos um poliedro em que o número de arestas é $A = 18$, de vértices é $V = 12$ e de faces é $F = 8$, ou seja, $V - A + F = 2$. Ao retirarmos uma face (que agora aparece sombreada), teremos $F = 7$, mas permanecem $A = 18$ e $V = 12$. Conseqüentemente, $V - A + F = 1$.

Portanto, o que devemos verificar é se, neste poliedro modificado, vale a relação $V - A + F = 1$. Para isso, a partir desta abertura feita no poliedro, vamos esticá-lo sobre um plano, como se o mesmo fosse elástico.

Obtemos, assim, uma figura plana, um “mapa”, composto por polígonos da mesma espécie que os originais, ou seja, com mesmo número de vértices, ângulos e arestas.

Vamos agora triangularizar as faces. Para isso, nas faces do poliedro planificado, a partir de um vértice, tracemos as diagonais possíveis. Nesta ação, ao traçarmos uma diagonal, considerando cada diagonal como uma nova

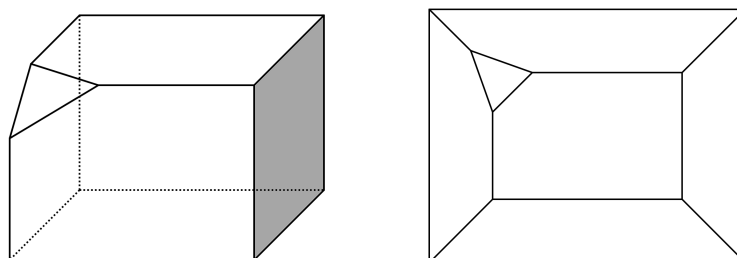


Figura 2.4: Face retirada e poliedro achatado

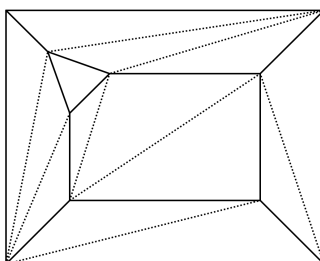


Figura 2.5: Faces decompostas em triângulos

aresta, aumentamos em uma unidade o número A , mas também o número F , sem mudar o número V . Portanto, o valor de $V - A + F$ continua inalterado.

A figura que ora temos em mãos é toda composta de triângulos, os quais são de três tipos, considerando suas adjacências: os que fazem fronteira com um triângulo(I), com dois outros triângulos(II) e com três outros triângulos(III).

Vamos proceder a retirada dos triângulos, conforme o procedimento a seguir: caso haja triângulo que faz fronteira com apenas um outro triângulo, este deve ser retirado prioritariamente. Com isso, estamos retirando uma face, duas arestas e o vértice entre elas, ou seja, estamos fazendo

$$(V - 1) - (A - 2) + (F - 1).$$

Portanto,

$$V - A + F$$

é ainda o mesmo. Após essa operação, é possível que surja outro triângulo de tipo I. De fato, se o triângulo vizinho ao retirado fazia fronteira com dois triângulos, agora faz com um. Procede-se deste modo até que se esgotem todos os triângulos do tipo I.

Retiramos, agora, um de tipo II. Neste caso, é retirada uma aresta e, consequentemente, uma face. Como nenhum vértice é retirado, estamos fazendo

$$\begin{aligned} V - (A - 1) + (F - 1) &= V - A + 1 + F - 1 \\ &= V - A + F, \end{aligned}$$

ou seja, não alteramos o valor inicial. Se, durante o processo, voltar a surgir um triângulo do tipo I, este deve ser o próximo a ser retirado.

Prossegue-se com a rotina até que reste apenas um triângulo. Agora, com apenas um triângulo, em que certamente $V = A$, temos que

$$V - A + F = 1,$$

concluindo a prova.

Exemplo: A sequência de figuras abaixo nos fornece um exemplo de como fazer a retirada de triângulos.

Nesta primeira sequência, ao retirarmos um triângulo de tipo II, aparece um triângulo de tipo I (passo 1).

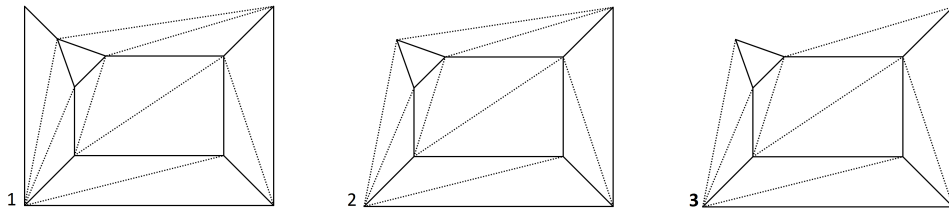


Figura 2.6: Sequência de retirada dos triângulos

Obtemos, agora, um triângulo de tipo I, que deve ser retirado com prioridade. Na sequência, retiramos um de tipo II e aparece outro de tipo I.

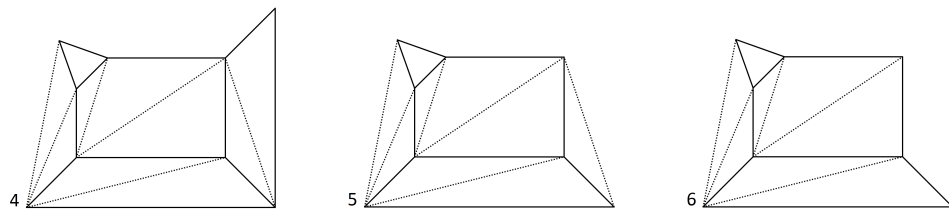


Figura 2.7: Sequência de retirada dos triângulos

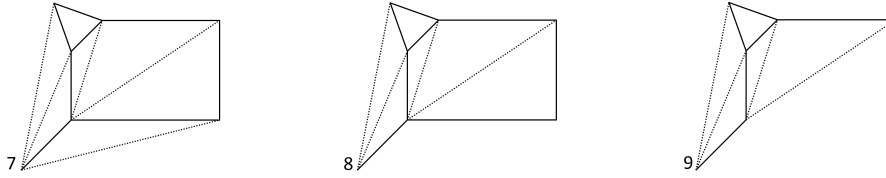


Figura 2.8: Sequência de retirada dos triângulos

Seguindo, nos passos (8) e (9) vemos um exemplo de como, ao retirarmos um triângulo de tipo I, outro do mesmo tipo pode aparecer.

Assim, fazendo a retirada de triângulos como foi exposto, ao final iremos obter um único triângulo, sem que a figura inicial tenha se partido e mantendo o valor inicial de $V - A + F$.

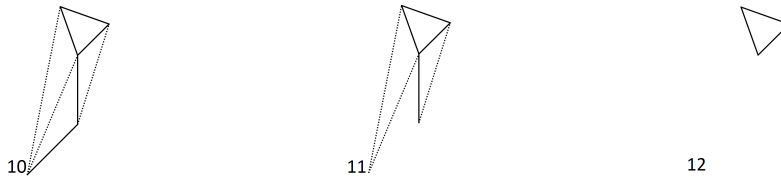


Figura 2.9: Sequência de retirada dos triângulos

A ordem de retirada dos triângulos é necessária, pois sem esse cuidado pode ocorrer a ‘quebra’ da figura, não mantendo a relação que se quer provar. Na Figura 2.10, a sequência proposta nos leva a uma malha onde $V = 10$, $A = 15$ e $F = 7$, ou seja, $V - A + F = 2$, sendo que, como retiramos uma face no início, deveríamos obter $V - A + F = 1$.

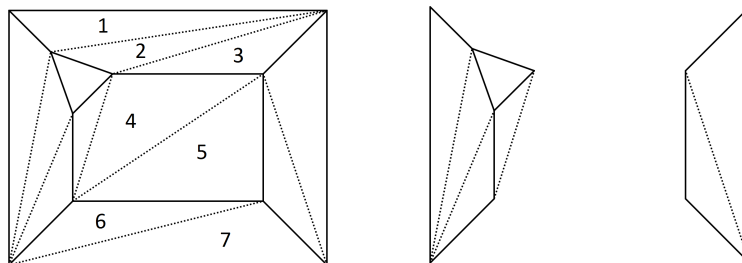


Figura 2.10: Exemplo de quebra na malha do poliedro

É interessante notar que, para sua demonstração, Cauchy enxergava o poliedro não como um sólido, mas como um ente oco, diferentemente de outros matemáticos de sua época, inclusive Euler. Porém, esta forma de abordagem foi utilizada apenas para justificar seu modo de demonstrar o teorema e não era uma mudança no conceito do que viria a ser um poliedro.

Em se tratando de Ensino Médio, esta demonstração apresentada por Cauchy será bastante convincente e não deverá trazer muitas dúvidas, dada a sua ‘simplicidade’ de visualização. Entretanto, à época em que foi apresentada, logo surgiram críticas à sua demonstração [6]. Algumas pelo fato de que a demonstração original não deixava claro o cuidado especial que se deve ter com a sequência de retirada das faces triangulares.

Além disso, foram apresentados vários exemplos de poliedros para os quais a relação $V - A + F = 2$ não é válida. Entretanto estes poliedros são não-convexos. Na verdade, o erro não estaria na demonstração, mas na falta de definição do que é *poliedro*.

Contudo, a maior contribuição que se pode retirar da demonstração de Cauchy é que, se um poliedro pode ser aberto em um plano, a partir de uma face retirada, sem ser rasgado e sem sobreposições, então ele satisfaz à fórmula de Euler. Particularmente, os poliedros convexos cumprem estes requisitos. Mas não somente eles. Apesar de não estar claro se Cauchy percebeu ou não, sua demonstração pode ser aplicada a muitos outros poliedros.

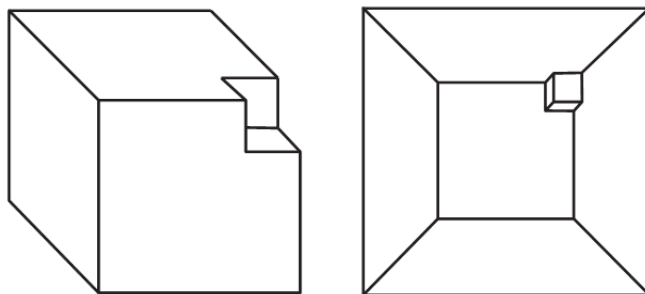


Figura 2.11: Poliedro não convexo, no qual se aplica a prova de Cauchy

2.3.2 Legendre e a esfera

Sabe-se muito pouco sobre a infância de *Adrien-Marie Legendre*, mesmo porque ele sempre enfatizou o desejo de ser conhecido apenas pelas suas obras. Apesar de seu local de nascimento ser normalmente colocado como Paris, em 1752, há algumas evidências de que o mesmo possa ter nascido em Toulouse, tendo sua família se deslocado para Paris enquanto Legendre era

ainda muito jovem. Foi membro da *Académie des Sciences*, da França, e da *Royal Society of London*, do Reino Unido.

Quando o mesmo publicou o seu *Eléments de géométrie*, no ano de 1794, já gozava de grande reputação no meio acadêmico. Esse livro teve tão grande repercussão e tornou-se tão popular que o mesmo substituiu, para muitos, os *Elementos* de Euclides, como podemos ver em [17]. Nesta publicação, Legendre incluiu sua demonstração para o Teorema de Euler para Poliedros, dando ainda mais visibilidade para este importante fato. É a primeira prova publicada com maior rigor matemático.

Relembremos que a conjectura de Euler (2.2.1) para poliedros diz que $V - A + F = 2$.

A demonstração de Legendre usa como suporte uma fórmula demonstrada por Girard, em 1629, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, chamando de θ_1 , θ_2 e θ_3 estes ângulos, é dada por

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi + \frac{A}{r^2},$$

em que A é a área do triângulo e r o raio da esfera.

Vamos, agora, proceder a demonstração.

Demonstração: Considere um poliedro convexo P com V vértices, A arestas e F faces. Colocamos este poliedro dentro de uma esfera, de modo que o centro da esfera seja interior ao poliedro. Agora, a partir do centro, projetamos as arestas e vértices do poliedro na esfera.

Podemos imaginar como se o centro da esfera fosse um ponto luminoso e o poliedro, feito de arame.

A sombra obtida na esfera é a projeção das arestas e vértices. Com isso, a sombra de cada face do poliedro é um polígono esférico.

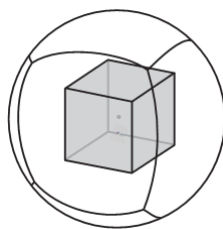


Figura 2.12: A projeção de um poliedro na esfera

Podemos determinar a área de cada polígono esférico dividindo o polígono em triângulos esféricos, bastando, para isso, traçar diagonais a partir de um

vértice. Ao dividir um polígono p em triângulos, a partir de um vértice, obtemos $n_p - 2$ triângulos.

Sem perda de generalidade, suponha que a esfera tenha raio 1. Note que esta hipótese não afeta a validade do que estamos buscando. Usando o Teorema de Girard neste polígono, calculamos a soma de seus ângulos internos como sendo

$$S_p = (n_p - 2)\pi + A_p,$$

onde S_p é a soma dos ângulos internos do polígono e A_p é a área total do polígono, soma das áreas dos triângulos. Ou seja,

$$A_p = S_p - (n_p - 2)\pi.$$

Lembrando que são F polígonos (as faces do poliedro), então temos que $p = 1, 2, \dots, F$ e, com isso, podemos obter a área do poliedro esférico somando as áreas desses F polígonos. Assim,

$$\begin{aligned} A_P &= A_1 + A_2 + \dots + A_F \\ &= [S_1 - (n_1 - 2)\pi] + \dots + [S_F - (n_F - 2)\pi] \\ &= \sum_{p=1}^F [S_p - (n_p - 2)\pi] \\ &= \sum_{p=1}^F S_p - \sum_{p=1}^F n_p\pi + 2\pi F \end{aligned}$$

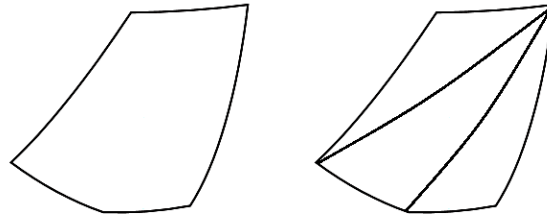


Figura 2.13: Polígono esférico dividido em triângulos

Quanto à soma dos ângulos em todos os polígonos, verificamos que é equivalente à soma dos ângulos em cada vértice do poliedro esférico. Para cada um deles, temos 2π . Assim,

$$\sum_{p=1}^F S_p = 2\pi V.$$

A soma dos n_p lados dos polígonos é equivalente ao número de arestas, apenas deixando claro que, como cada aresta pertence a duas faces, ela é contada em dobro. Assim, temos que

$$\sum_{p=1}^F n_p \pi = 2\pi A.$$

Portanto, obtemos que

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F.$$

Dividindo tudo por 2π , obtemos

$$2 = V - A + F,$$

a *Fórmula de Euler*.

Comparada a outras demonstrações, em particular à de Euler, essa prova dada por Legendre tem uma abordagem totalmente nova e traz algo surpreendente: o uso de *geometria esférica*. Surpreendente principalmente pelo fato de que, no enunciado do teorema, em momento algum é citada alguma propriedade geométrica, tampouco que se possa sugerir o uso de *geometria esférica*.

Observação: Esta demonstração dada por Legendre não se restringe, na verdade, somente aos poliedros convexos. *Louis Poinsot* verificou que qualquer poliedro que possa ser projetado radialmente em uma esfera, de tal modo que um ponto na esfera seja imagem de um único ponto do poliedro, satisfaz a *Fórmula de Euler*.

2.3.3 Prof. Azambuja: Elegância e Precisão de Argumentos

Pouco se sabe sobre o autor desta demonstração. Segundo Elon Lages Lima “Zoroastro Azambuja Filho foi professor de Matemática no Estado e na rede particular no Rio de Janeiro. Tendo começado muito cedo, aposentou-se ainda em pleno vigor e, nos últimos anos, vive num sítio em Jacarepaguá, onde cuida da horta, de seus discos e seus livros.”[12]

A demonstração dada a seguir segue as ideias expressas pelo professor Zoroastro Azambuja Filho [8], depois rerepresentadas pelo professor Elon Lages Lima [13].

Demonstração: Consideremos um poliedro convexo P e uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P . Tomemos, também, um plano H ,

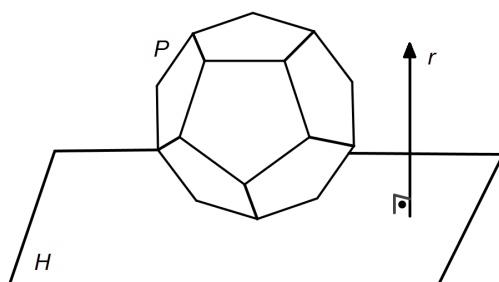


Figura 2.14: Um poliedro, o plano horizontal H e uma reta perpendicular r

que chamaremos plano horizontal, o qual não intersecta P e é perpendicular a r .

Com isso, qualquer reta paralela a r só poderá intersectar o poliedro P em, no máximo dois pontos (estamos considerando apenas as faces do poliedro, não seu interior).

Para melhor compreender essa ideia, imagine o sol brilhando a pino acima do poliedro P , de tal modo que os raios sejam retas verticais, isto é, paralelas a r . Com isso, a sombra do poliedro P é formada por pontos que representam um ou dois pontos de P , conforme estejam no contorno ou no interior da sombra.

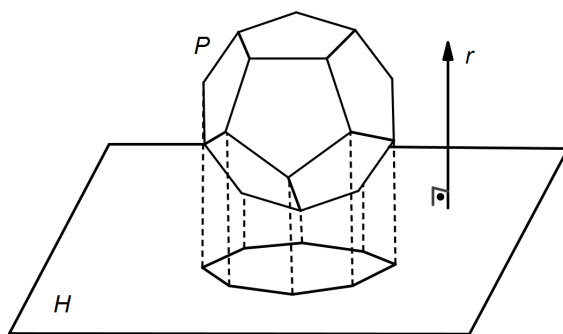


Figura 2.15: A sombra do poliedro P se forma no plano H

Essas considerações nos remetem a uma projeção ortogonal do poliedro P em relação ao plano H . Utilizando um *software* (por exemplo *projeções ortogonais*, da UFF) e posicionando o poliedro convenientemente, podemos visualizar o que foi chamado por Azambuja *faces iluminadas e faces sombrias*. Aqui, denotaremos por *faces superiores e faces inferiores*.

Devemos tomar uma posição tal que nenhuma das faces esteja contida em um plano perpendicular ao plano H , da projeção.

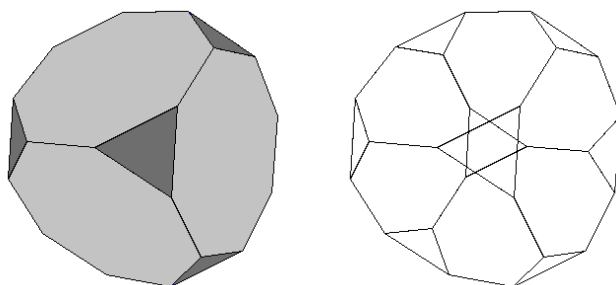


Figura 2.16: Cubo truncado e uma projeção ortogonal

Notemos que a projeção ortogonal do poliedro tem um polígono em seu contorno, ao qual chamaremos K . Qualquer ponto tomado em K é imagem de apenas um ponto no poliedro, ao passo que qualquer ponto interior a K é imagem de dois pontos no poliedro, um pertencente a alguma face superior, o outro a alguma face inferior.

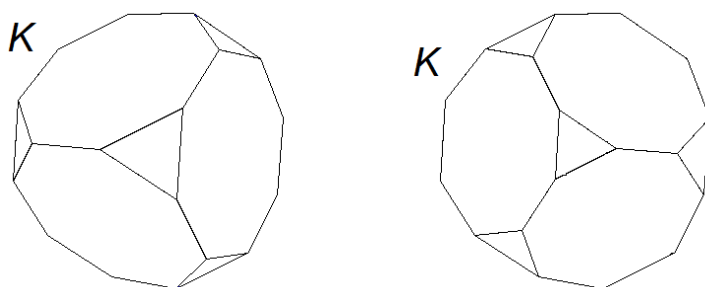


Figura 2.17: Projeção das faces superiores e projeção das faces inferiores

Postas estas observações, lembremos que a soma dos ângulos de um polígono convexo pode ser escrita como $\pi(n-2)$. Como o poliedro em questão é convexo, então suas faces são polígonos convexos. Então, numerando as faces do poliedro de 1 até F e sendo n_i o número de lados da i -ésima face, temos que a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro P é dada por:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2)$$

que podemos escrever como

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)].$$

Visto que cada aresta do poliedro é a interseção de exatamente duas faces, temos que a soma $(n_1 + n_2 + \dots + n_F)$ representa o dobro do número de arestas do poliedro. E a outra soma, por possuir F parcelas, é igual a $2F$. Sendo assim, temos que:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (2.1)$$

Para continuar a demonstração, vamos observar que a soma dos ângulos internos de cada face do poliedro P é a mesma soma dos ângulos internos do seu correspondente projetado no plano, pois ambos possuem mesma quantidade de lados (são do mesmo gênero). Observemos também que, na projeção, temos três tipos de vértices: aqueles que pertencem ao contorno K , que chamaremos de V_0 , os que são projeções das faces superiores e aqueles que são projeções das faces inferiores, que chamaremos V_1 e V_2 , respectivamente. Portanto, o número de vértices do poliedro é $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Podemos calcular novamente a soma dos ângulos internos das faces do poliedro P , considerando primeiramente a projeção das faces superiores. Nela, vemos que há uma quantidade V_0 de vértices do contorno K e uma quantidade V_1 da projeção dos vértices das faces superiores. A soma dos ângulos no contorno K , é $\pi(V_0 - 2)$, pois o contorno K é um polígono plano e V_0 é a mesma quantidade de lados. Os V_1 pontos interiores contribuem, cada um, com 2π . Portanto, a soma calculada é:

$$S_1 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1. \quad (2.2)$$

De modo análogo, considerando a projeção das faces inferiores, obtemos que

$$S_2 = \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2. \quad (2.3)$$

Portanto, para obtermos a soma de todos os ângulos no poliedro, basta somar 2.2 e 2.3. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= [\pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1] + [\pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2] \\ &= 2\pi(V_0 - 2) + 2\pi V_1 + 2\pi V_2 \\ &= 2\pi(V_0 + V_1 + V_2 - 2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$S = 2\pi(V - 2) \quad (2.4)$$

Comparando (2.1) e (2.4), e dividindo tudo por 2π , obtemos que $A - F = V - 2$, ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

2.4 Caso Plano do Teorema de Euler

Para que possamos fazer essa demonstração, precisamos nos garantir de que o objeto estudado tenha as características de poliedro. Seja uma região do plano, dividida em outras regiões. Cada região é uma face e cada curva que é fronteira de uma região é uma aresta. No encontro de duas ou mais arestas temos os vértices. Uma condição essencial é que nenhuma região esteja por inteiro dentro de outra. Vamos também considerar o exterior como uma região (face) ilimitada, por conveniência.

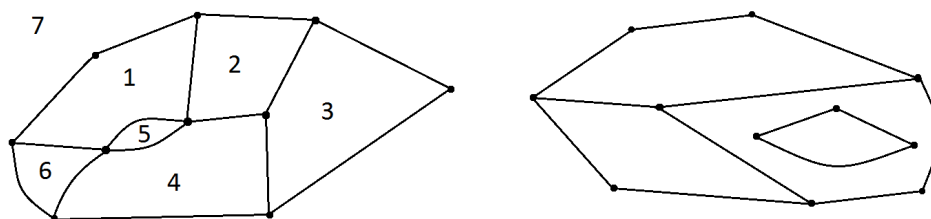


Figura 2.18: Divisão do plano em regiões e uma divisão proibida

Afirmamos que, nas condições que foram postas, considerando o plano dividido em F regiões justapostas, com A arestas como fronteiras, as quais concorrem em V vértices, é válida a relação

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração: No caso em que temos apenas um polígono sobre o plano, a relação $V - A + F$ é satisfeita, pois temos n lados do polígono, consequentemente são também n vértices e, de acordo com as condições iniciais, 2 regiões (interior e exterior). Ou seja, $A = V = n$ e $F = 2$ e, portanto,

$$V - A + F = 2.$$

Vamos mostrar, usando o princípio de indução, que se a relação de Euler é válida no caso de uma divisão do plano em F regiões, então também será válida para $F + 1$ regiões.

Seja uma decomposição do plano em F regiões justapostas, por meio de A arestas concorrendo em V vértices, satisfazendo a relação $V - A + F = 2$. Para acrescentarmos uma nova região, no exterior das regiões já existentes iremos desenhar uma seqüência de arestas, ligando dois vértices quaisquer do contorno anterior, conforme vemos na Figura 2.19. Com isso, ao acrescentarmos m arestas estamos acrescentando $m - 1$ vértices e uma região.

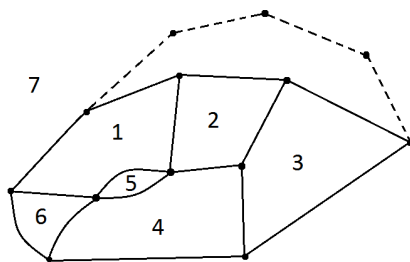


Figura 2.19: Acréscimo de uma nova região no exterior das demais.

Portanto, obtemos

$$(V + m - 1) - (A + m) + (F + 1) = V - A + F = 2,$$

o que nos mostra que a relação de Euler é ainda válida, concluindo a demonstração.

2.5 Conclusão

Há várias formas de se demonstrar o Teorema de Euler para poliedros. Para este capítulo, foram escolhidas três demonstrações para o caso espacial, as quais podem ser aplicadas em uma turma de Ensino Médio.

Na Seção 2.3.1 foram apresentados os argumentos de Cauchy, cujas ideias foram baseadas em um tipo de planificação do poliedro, feita através do achatamento deste, que verificamos ser uma transformação.

Nas Seções 2.3.2 e 2.3.3 foram apresentadas as demonstrações segundo Legendre e Azambuja, respectivamente. Vimos que a primeira, por envolver geometria esférica, pode estimular a busca de novos conhecimentos. A segunda, ao sugerirmos o uso do computador, pode ser bastante atrativa aos alunos.

A Seção 2.4, em que é demonstrado o caso plano do Teorema de Euler, mostra que a validade do Teorema é mais ampla que o que normalmente é mostrado aos alunos.

Capítulo 3

O Teorema de Euler e a Educação Básica

3.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma análise de como está se dando o ensino do Teorema de Euler no Ensino Básico. Para isso, na Seção 3.2 são tomadas algumas pesquisas e trabalhos como fontes de informação, nas quais se busca verificar como o Teorema de Euler é abordado nos livros didáticos do Ensino Médio e se o mesmo tem uma abordagem em sala de aula que favoreça o aprendizado.

Na seção 3.3 apresentamos uma sugestão para o ensino do Teorema de Euler utilizando um *software* educacional denominado *Uma Pletora de Poliedros* (UFF), associando a interação dos alunos com o ambiente virtual, a mediação e intervenção do professor e a demonstração formal do Teorema de Euler.

3.2 Ensino do Teorema de Euler

O estudo da Geometria Espacial é de fundamental importância para o desenvolvimento do raciocínio teórico e prático do estudante, além de que o mesmo tem um amplo leque de aplicações práticas. Portanto, o não ensino dos temas de Geometria Espacial, ou até mesmo sua abordagem seca e desvinculada de sentido, constitui um grande obstáculo a todos os envolvidos na Educação, em particular os professores.

Muitas pesquisas e trabalhos tem dado conta do abandono do ensino de geometria nas escolas brasileiras. Por muitas vezes os conteúdos de geometria são deixados para o final do ano letivo, com o objetivo, mesmo que incons-

ciente, de que o mesmo não possa ser tratado por falta de tempo letivo. De acordo com PAVANELLO[16], é uma preocupação dos educadores matemáticos brasileiros este abandono gradativo do ensino de Geometria, que apesar de ser um fato geral, está mais claro nas escolas públicas.

Verificou-se que os objetivos quanto ao ensino de Geometria não são satisfatoriamente atingidos, como está evidenciado nos trabalhos de LORENZATO [14], PAVANELLO[16] e CARVALHO[3].

Podemos tomar como análise uma pesquisa realizada com professores por Luis Carlos de Carvalho pela PUC de São Paulo para obtenção de seu doutoramento no ano de 2008 [3]. Seu trabalho teve como objetivo analisar a organização de uma série de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, tendo como referência a Geometria Espacial Métrica, sendo um dos itens pesquisados o ensino do Teorema de Euler, analisando de que forma as atividades propostas pelos livros auxiliava no desenvolvimento do tema entre os alunos, ou seja, de que forma os livros constituíam-se enquanto mecanismos de aprendizagem. Para subsidiar a análise dos livros didáticos, foi realizada uma pesquisa, com a aplicação de um questionário a 21 professores de matemática do Ensino Médio de 17 escolas públicas e privadas do ABC paulista e da Capital.

De acordo com os resultados, constata-se que uma boa parte não utiliza o livro didático, alguns dos quais não trabalham esses tópicos por diversos motivos.

Muitos dos professores pesquisados, 14 dos 21, recorrem à geometria demonstrativa, mas não usam o laboratório de informática e somente 11 consideravam que a figura é indispensável para uma melhor compreensão por parte dos alunos. Observou-se, ainda, que os professores apresentaram dificuldades para identificar alguns conceitos básicos.

Essas observações vêm de encontro ao que afirma Lorenzato, quando diz que “Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la”[14].

O Teorema de Euler para poliedros, tema deste trabalho, é considerado por muitos como um dos mais belos teoremas da Geometria Espacial. Mas o mesmo é fascinante também por ser uma questão controversa, constituindo por si só, uma história da Matemática. Entretanto, é tratado muito resumidamente no Ensino Básico, inclusive nos livros didáticos. Segundo MANSAN[15], “o ensino da geometria [...] pode ser favorecido pela história das teorias (incluindo aqui as conjecturas explicitadas, os problemas resolvidos e os não resolvidos, o processo de formalização) que constituem esse campo de conhecimento.”

Entretanto, na pesquisa feita por Luis Carlos de Carvalho, com respeito aos livros didáticos, o que se verificou foi que em alguns dos livros analisados

a abordagem dada ao tema vai direto à fórmula, não permitindo ao aluno participação para descobrir a relação que existe entre os elementos do poliedro. Ou seja, a fórmula é apresentada sem nenhuma justificativa, dificultando a construção do conhecimento por parte do aluno.

Faz-se necessário, então, buscar meios alternativos ao simples uso do livro didático para o ensino dos temas de Geometria no ensino básico, meios esses que possam ser atrativos ao professor e ao mesmo tempo instiguem a curiosidade do aluno.

Tomando por base todas as observações feitas até aqui, apresentamos a seguir uma sugestão de atividades utilizando um *software* educacional que foge ao que sempre é exposto nos livros didáticos e possibilita a participação do aluno como agente de seu aprendizado.

3.3 Uso de Computador no Ensino do Teorema de Euler

É nítido o aumento do uso de computadores no nosso dia a dia. A utilização desta tecnologia e de seus recursos para auxiliar o desenvolvimento e aprendizado dos alunos constitui um desafio para professores e todos aqueles envolvidos na Educação.

De acordo com VALENTE[19], o uso de recursos computacionais para a educação pode ser um valioso colaborador na exploração e no aprendizado de certos temas. Em particular, para o ensino de geometria, a utilização destes recursos simplifica a visualização e manipulação de objetos geométricos, pois “O computador pode ser um importante recurso para promover a passagem da informação ao usuário ou facilitar o processo de construção de conhecimento” [19].

Neste sentido, sugerimos a utilização de um *software* chamado Uma Plethora de Poliedros, disponível no *site*: *Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística*, do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (IM-UFF) [1], como ferramenta de auxílio no ensino do Teorema de Euler para Poliedros.

Em trabalho apresentado por HUMMES e BREDA[10], notou-se que a utilização deste *software* interativo contribui significativamente para a compreensão do referido tema, uma vez que estimula o processo investigativo do aluno, tornando mais valioso o processo ensino-aprendizagem.

A interface do *software* está apresentada na Figura 3.1.

Como exemplo de utilização do *software*, vamos usá-lo para verificar a relação do Teorema de Euler.



Figura 3.1: Interface do software Uma Pletora de Poliedros

Inicialmente, escolhemos um poliedro, dentre os vários disponibilizados pelo *software* (platônicos, arquimedianos, prismas, pirâmides, etc.). Sugerimos iniciar pelos de mais fácil visualização, como o cubo ou tetraedro, por exemplo, e depois avançar para os mais complexos.

Vamos, agora, fazer a contagem do número de vértices do poliedro. Para isso, no *software*, deixamos marcada apenas a caixa Exibir vértices (Figura 3.2). No nosso exemplo, o número de vértices $V = 6$.



Figura 3.2: Uso do recurso Exibir vértices

Igualmente, para contarmos o número de arestas, usamos o recurso de exibição de arestas, desmarcando as outras caixas, como mostra a Figura 3.3. Temos, neste caso, $A = 12$.

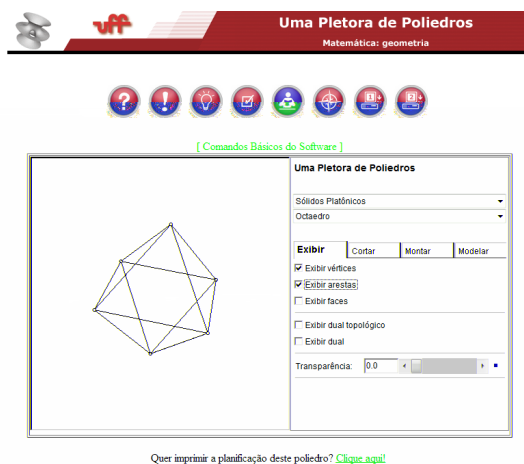


Figura 3.3: Uso do recurso Exibir arestas

Para contar o número de faces do poliedro, pode-se utilizar o recurso montar. Para isso, marca-se a caixa Exibir faces e, logo em seguida, na aba Montar, marca-se a caixa Habilitar montagem. Através do controle deslizante Parâmetro, abre-se o poliedro de modo que se possa melhor visualizar as faces e contá-las, como vemos na Figura 3.4. Verificamos que o número de faces do exemplo é $F = 8$.



Figura 3.4: Uso dos recursos Exibir faces e Montar

Pode ser necessário posicionar de forma mais adequada a figura obtida com o uso do recurso Montar. Para isso, basta posicionar o apontador do *mouse* sobre a figura e, com o botão direito pressionado, arrastá-lo.

Após fazer a contagem destes elementos em cada um dos poliedros selecionados, os alunos podem ser conduzidos a verificar o valor de $V - A + F$. Ao perceberem que, para todos os poliedros selecionados, o valor desta relação é sempre igual a 2, sugerimos que seja apresentado a eles o Teorema de Euler, podendo, então, ser demonstrado com rigor.

O professor pode, como introdução, trazer um pouco da história do teorema, situando os alunos quanto às controvérsias e dificuldade de se obter uma demonstração satisfatória. A sugestão que damos para a prova do Teorema de Euler é aproveitar o uso do computador e seus recursos, com os quais já houve contato por parte dos alunos e fazer a demonstração usando os argumentos do Prof. Azambuja. Na demonstração apresentada na Seção 2.3.3 foi usada a figura de um *cubo truncado* retirado do *software* Uma Pletora de Poliedros.

No trabalho que foi apresentado por HUMMES e BREDA [10], verificou-se que a manipulação dos poliedros via *software*, tendo o professor como mediador das atividades, auxiliou mesmo os alunos que não eram capazes de definir inicialmente poliedro como uma figura tridimensional a compreenderem que entre estes sólidos há uma característica na qual o número de vértices somado com o número de faces subtraído do número de arestas resulta na constante igual a dois.

Para tornar ainda mais enriquecedor pode-se mostrar contra-exemplos, em que o valor $V - A + F \neq 2$. No próprio *software* utilizado, encontram-se algumas classes de poliedros não-convexos que podem servir de exemplo, como na Figura 3.5, onde temos um toróide com um buraco quadrado, no qual se verifica que $V = 12$, $A = 24$ e $F = 12$, o que nos dá $V - A + F = 0$. Para este exemplo foi usado o recurso **Transparência**.

Pode-se usar para a demonstração do Teorema de Euler um outro *software* que também está disponível no *site* *Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística*, denominado *Projeções Ortogonais*.



Figura 3.5: Exemplo de um poliedro para o qual $V - A + F \neq 2$

3.4 Conclusão

Neste Capítulo tratou-se sobre o ensino do Teorema de Euler para poliedros. Na Seção 3.2 expomos alguns dados tomados de pesquisas e verificamos que o Teorema de Euler está sendo, juntamente com o ensino da Geometria de um modo geral, sendo deixado em segundo plano ou, quando visto, é tratado de modo superficial e sem justificativas, dificultando que o aprendizado seja satisfatório.

Na Seção 3.3 é sugerido o uso do computador, através do ambiente virtual *Uma Pletora de Poliedros* (UFF), como meio de interação do aluno com os objetos de estudo, o que poderá ser um facilitador do aprendizado, como apontam alguns trabalhos citados.

Capítulo 4

Considerações Finais

O ensino de Geometria na escola é de grande importância, uma vez que esta está presente no nosso dia-a-dia, mesmo sem que, muitas vezes, nos demos conta. Portanto, seu ensino não pode ser tratado com descaso.

Está claro que, em meio às dificuldades no ensino dos temas de geometria, como foi exposto neste trabalho, faz-se necessário encontrar novas formas de apresentar estes conteúdos. Com isso, pode-se trazer novamente o aluno para participar como agente do seu próprio aprendizado.

Neste trabalho, teve-se a preocupação de abordar os conceitos matemáticos envolvidos de uma forma que permita ao professor utilizá-lo como meio auxiliar no ensino do Teorema de Euler para uma turma de Ensino Médio. Ao apresentarmos diferentes demonstrações deste Teorema - uma através de planificação do poliedro, outra usando geometria esférica e outra através da projeção ortogonal do poliedro (por meio virtual) - esperamos ter fornecido alternativas para que o professor possa explorar o tema de acordo com o nível de desenvolvimento da turma em que leciona.

No que tange ao ensino de Geometria na escola, em particular o Teorema de Euler, o que foi evidenciado pelos trabalhos analisados é que muitos dos alunos egressos do Ensino Médio saem sem atingir as metas planejadas, necessitando de um maior desenvolvimento do seu raciocínio lógico dedutivo.

Pode-se notar que parte desse problema é causado pela falta de motivação por parte dos alunos, pelo fato de os conteúdos serem lançados sem nenhuma conexão entre eles, apenas como fórmulas prontas a serem utilizadas. Outra causa apontada é a dificuldade do aluno em visualizar um objeto tridimensional contando apenas com uma representação plana apresentada no livro.

Neste sentido, acreditamos que o uso da ferramenta virtual *Uma Pletora de Poliedros* pode contribuir de modo significativo para o aprendizado do aluno. Auxiliado por esta ferramenta e com a mediação do professor, o aluno poderá verificar a existência de uma relação associando o número de vértices

(V), o número de arestas (A) e o número de faces (F), através da fórmula $V - A + F = 2$, visualizando e manipulando virtualmente o poliedro e os elementos vértices, arestas e faces.

Além disso, um contato com um pouco mais de atenção sobre a história do estudo dos poliedros e do Teorema de Euler trarão mais sentido e podem favorecer a compreensão dos conceitos envolvidos. Podemos notar nos trabalhos analisados, que quando o aluno tem maior proximidade com os objetos estudados aliado à utilização de um recurso largamente utilizado pelos alunos fora do âmbito escolar, que é o caso do computador, obtém-se um ambiente facilitador na construção do conhecimento.

Referências Bibliográficas

- [1] BORTOLOSSI, H. J. Uma Pletora de Poliedros, 2008. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/pdp/>. Acesso em: 15 jan 2013.
- [2] BORTOLOSSI, H. J. Os Sólidos Platônicos na Natureza, 2009. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 15 jan 2013.
- [3] CARVALHO, L. C. de. Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos. 2008. 164f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, USP, São Paulo, 2008.
- [4] COLLI, Eduardo. Poliedros. Disponível em <http://www.ime.usp.br/matemateca/textos/poliedros>. Acessado em 23 janeiro 2013.
- [5] CORREIA, A. M. A. ; FERREIRA, B. L. . Poliedros Platônicos: Dualidade Simétrica. Graf Tec (Florianópolis), 2009.
- [6] CROMWELL, P. R. Polyhedra. One The Most Charming Chapters of Geometry. Cambridge University Press, 1997.
- [7] EVES, H.. Introdução à História da Matemática, Editora da Unicamp, p. 471-475, 2004.
- [8] FILHO, Zoroastro Azambuja. Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática N°3, 1983.
- [9] FRANCESE, C.; RICHESON, D. The flaw in Euler's proof of his polyhedral formula. The American Mathematical Monthly, vol. 114. p. 286-296, 2007.

- [10] HUMMES, V. B. ; BREDA, A. Abordando a relação de Euler através do objeto de aprendizagem Uma Plethora de Poliedros. *RENOTE. Revista Novas Tecnologias na Educação*, v.9, nº 2, dez. 2011. Disponível em <http://seer.ufrgs.br/renote/article/download/25152/14631>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.
- [11] LEMOS, B. M., CARVALHO, C. V., Uso da Realidade Aumentada para Apoio ao Entendimento da Relação de Euler. *RENOTE. In: Revista Novas Tecnologias na Educação*. V. 8, p. 1-10, 2010.
- [12] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.
- [13] LIMA, E. L. et al - *A Matemática do Ensino Médio*. vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM. 6ª ed. RJ, 2006.
- [14] LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em revista*. São Paulo, ano III, n.4, 1995.
- [15] MANSAN, G. *Perspectivas históricas de alguns tópicos de geometria: avaliando alternativas de ensino*. TCC (Licenciatura em Matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- [16] PAVANELLO, R. M. O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. In: *Zetetiké*, n.1, p. 07-17, Unicamp, 1993.
- [17] RICHESON, D. S. *Euler's Gem. The Polyhedron Formula and The Birth of Topology*. Princeton University Press, 2008.
- [18] SIQUEIRA, R. M. . História, Tradição e Pesquisa sob Disputa: o caso dos poliedros na geometria. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 09, p. 45-55, 2009.
- [19] VALENTE, José Armando. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na Educação. Em J.A. Valente (Org.), *O Computador na Sociedade do Conhecimento* (pp. 71-84). Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1999.