Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

André Luiz da Fonseca

Representação pictórica e linguagem matemática em Geometria Euclidiana na educação básica

Rio de Janeiro

2024

André Luiz da Fonseca

Representação pictórica e linguagem matemática em Geometria Euclidiana na educação básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva

Coorientadora: Prof[a]. Dra. Sueli Ferreira da Cunha

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

F676 Fonseca, André Luiz da.
Representação pictórica e linguagem matemática em Geometria Euclidiana na educação básica/ André Luiz da Fonseca. – 2024.
94 f.: il.

Orientador: Jaime Velasco Câmara da Silva
Coorientadora: Sueli Ferreira da Cunha
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria - Estudo e ensino - Teses. I. Silva, Jaime Velasco Câmara da. II. Cunha, Sueli Ferreira da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 514:37

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

André Luiz da Fonseca

Representação pictórica e linguagem matemática em Geometria Euclidiana na educação básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em 13 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof[a]. Dra. Sueli Ferreira da Cunha (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof[a]. Dra. Cristhabel Janeth Casanova Vasquez
Instituto de Matemática e Estatística - UFF

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus filhos Alice e Danilo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha existência, caso contrário nada disto estaria acontecendo.

Aos meus orientadores Jaime e Sueli, pela paciência, dedicação, profissionalismo e os “puxões de orelha” que me fizeram sair da zona de conforto e seguir acreditando que seria possível.

A todos os integrantes do grupo *Mategramática*, pelas trocas riquíssimas que tivemos, que contribuíram tanto para a produção deste trabalho quanto para a minha formação como professor de Matemática.

À minha namorada Mayra, que sempre me incentivou a querer mais.

À minha tia/mãe Marlene, que sempre me apoiou e me incentivou nas minhas escolhas. Obrigado pelas horas de conversas e conselhos que geraram muitos aprendizados. Obrigado por sempre me acolher com palavras de sabedoria e pelo suporte em todos os sentidos.

Aos colegas do grupo *Profmat Resistência* (Angelo, Isabele, Priscila, Rodrigo, Thais e Felipe), pelo apoio mútuo que desenvolvemos uns pelos outros, pelas trocas que tivemos dentro e fora UERJ. Somos resistência!

Ao professor Luiz Cerdeira (*in memoriam*), professor que conheci no pré-vestibular, que, através do seu jeito “simples” de ensinar matemática, me fez gostar ainda mais dela, de modo que segui seus passos como professor da mesma disciplina. Isto sem contar que ganhei um companheiro de profissão, de trabalho e um grande amigo.

Aos meus avós Astrogildo e Luzia (*in memoriam*) que me criaram com muito amor, fazendo o possível para que eu tivesse a melhor educação que eles puderam oferecer.

A todos os alunos que tive durante minha trajetória como professor. Obrigado por me ensinarem todos os dias.

Enquanto eu luto, sou movido pela esperança; e se eu lutar com esperança, posso esperar.

Paulo Freire

RESUMO

FONSECA, André Luiz da. **Representação pictórica e linguagem matemática em Geometria Euclidiana na educação básica.** 2024. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

A utilização de figuras no ensino de Geometria é de grande importância para a interpretação, visualização e compreensão de conceitos matemáticos. Uma figura pode levar o leitor a uma apreensão adequada ou pode levá-lo a uma construção equivocada sobre a definição de um objeto geométrico. Para se obter o resultado desejado, é necessário que a representação pictórica (ou seja, a expressão por meio de figuras) seja feita de modo adequado; caso contrário, um objeto geométrico pode ser mal compreendido. Por exemplo, se, ao representar um paralelogramo, utilizam-se sempre figuras com lados consecutivos não perpendiculares, um retângulo pode não ser visto como um tipo de paralelogramo. O uso de linguagem matemática também é discutido neste texto, uma vez que não é possível representar alguns objetos matemáticos exclusivamente por meio de figuras. Nesse sentido, este trabalho discute a importância de uma representação pictórica para expressar objetos geométricos – mais precisamente triângulos e quadriláteros, bem como alguns casos particulares destes polígonos. Além disso, discute também as contribuições para representações pictóricas adequadas para o ensino de Geometria na educação básica.

Palavras-chave: representação pictórica; educação básica; ensino de geometria; linguagem matemática.

ABSTRACT

FONSECA, André Luiz da. **Pictorial representation and mathematical language in Euclidean Geometry in basic education.** 2024. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

The use of figures in teaching Geometry is of great importance for the interpretation, visualization and understanding of mathematical concepts. A figure can lead the reader to an adequate apprehension or it can lead him to a mistaken construction about the definition of a mathematical object. To obtain the desired result, it is necessary that the pictorial representation (i.e., expression through figures) be done appropriately; otherwise, a mathematical object may be misunderstood. For example, if, when representing a parallelogram, figures with consecutive non-perpendicular sides are always used, a rectangle may not be seen as a type of parallelogram. The use of mathematical language is also discussed in this text, since it is not possible to represent some mathematical objects exclusively through figures. In this sense, this work discusses the importance of a pictorial representation to express geometric objects – more precisely triangles and quadrilaterals, as well as some particular cases of these polygons. Furthermore, it also discusses the contributions to pictorial representations suitable for teaching Geometry in basic education.

Key words: pictorial representation. basic education. teaching geometry. mathematical language.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O uso de figuras para representar conceitos geométricos possui um papel de grande importância no estudo da Geometria Euclidiana[1]. É comum materiais didáticos e professores em suas aulas utilizarem as mesmas figuras para representar um dado objeto geométrico. Esta prática pode ser notada nas representações de quadrados, por exemplo, onde dois dos seus lados figuram na horizontal (e consequentemente os outros dois na vertical). É comum, ainda, encontrar um comportamento semelhante em representações de losangos, com figuras que sugerem um “balão”. Isto se torna um problema, uma vez que um objeto geométrico é definido pelas suas características fundamentais e não pela posição da figura que o representa.

Ao expressar pictoricamente (isto é, por meio de uma figura) um objeto sempre numa mesma posição, pode-se levar o leitor (um aluno, por exemplo) a conceber a ideia de que um objeto é definido pela posição em que ele se encontra. No caso de um quadrado, se representado com dois de seus lados na horizontal, é geralmente bem aceito como um quadrado; mas se a mesma figura que o representa for girada, de forma que uma das diagonais fique na horizontal, algumas pessoas podem compreendê-la simplesmente como um losango. Este é apenas um exemplo do quanto representações inadequadas ou mal utilizadas podem prejudicar a construção da definição de um objeto geométrico.

Vale ressaltar que uma das habilidades apresentadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), já no 1º Ano do Ensino Fundamental, é identificar e nomear algumas figuras planas em diferentes disposições (habilidade EF01MA14, Ministério da Educação, 2017, p. 279). Nesta etapa escolar, os estudantes são levados a reconhecerem figuras consideradas simples (como quadrado, triângulo e retângulo) e devem saber de quais objetos geométricos se tratam, independentemente da posição em que se encontram. No 3º ano, por sua vez, figuras que representam paralelogramos e trapézios são incorporadas às já citadas e os estudantes devem saber compará-las e classificá-las de acordo com a quantidade de lados, posição relativa entre os lados, comprimento dos lados e quantidade de vértices (habilidade EF03MA15, p. 289). Por fim, ainda de acordo com a BNCC, os estudantes do 6º ano devem saber identificar características de triângulos e quadriláteros, bem como atribuir classificações

[1] A Geometria Euclidiana é assim denominada devido ao matemático grego Euclides de Alexandria (aproximadamente 300 a.C.), que organizou, sistematizou e estruturou todo o pensamento geométrico até então conhecido, estabelecendo de forma clara uma série de postulados (isto é, proposições admitidas como verdadeiras sem demonstração) que constituem a base teórica fundamental para as demonstrações dos teoremas.

em relação às medidas dos lados e dos ângulos de cada um desses objetos (habilidades EF06MA19 e EF06MA20, p. 303).

O primeiro capítulo do trabalho apresenta as definições dos objetos geométricos analisados (a saber, triângulos e quadriláteros, bem como seus tipos específicos) e, para ilustrar o que as definições expressam, são utilizadas figuras extraídas de livros didáticos do Ensino Fundamental – Anos Finais.

O segundo capítulo, por sua vez, trata dos principais problemas verificados ao se representar pictoricamente determinados objetos geométricos; são eles: *figuras repetidas ou na mesma posição* (isto é, aquelas comumente utilizadas para representar objetos geométricos, Seção 2.1), *figuras com informações incompletas* (ou seja, aquelas para as quais faltam informações fundamentais para expressá-las de forma adequada, Seção 2.2), *figuras com informações incompatíveis* (isto é, aquelas que apresentam elementos pictóricos que não refletem a natureza do objeto desejado, Seção 2.3) e *figuras representadas por meio de propriedades* (isto é, aquelas que não representam propriamente a definição do objeto tratado, mas sim propriedades, Seção 2.4).

O terceiro capítulo apresenta a escrita, em linguagem matemática, utilizada para complementar as representações pictóricas dos objetos geométricos tratados. Com o auxílio de linguagem matemática é possível, por exemplo, informar que um ângulo tem medida menor do que 90º ($A\hat{B}C < 90°$), para complementar a figura que representa um triângulo acutângulo, algo que não seria possível apenas com representação pictórica.

O quarto (e último) capítulo apresenta sugestões de figuras (não comumente utilizadas pela literatura) consideradas mais adequadas para representar alguns objetos geométricos, visando expressá-los de forma mais precisa (evitando determinados “vícios”) e possibilitando uma melhor compreensão dos referidos objetos.

Por fim, é apresentado (Apêndice A) um questionário fruto de uma pesquisa de opinião *online*, realizada, pelo autor deste texto, com professores (que lecionam Matemática) da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SMERJ).

Em suma, o intuito deste documento é discutir a importância de representações pictóricas adequadas para a compreensão da definição de um objeto geométrico e como a linguagem matemática pode auxiliar nesse processo. Como base para esta discussão, tem-se o estudo da Gramática da Linguagem Matemática (CUNHA; VELASCO, 2019), que visa identificar regras gramaticais para se ler e escrever adequadamente nessa linguagem.

1. DEFINIÇÕES DE ALGUNS OBJETOS GEOMÉTRICOS

Este capítulo trata das definições dos objetos geométricos apresentados neste trabalho; a saber, triângulos (Seção 1.1) e quadriláteros (Seção 1.2), além de seus tipos mais conhecidos. Sobre os objetos mencionados, também são apresentadas algumas propriedades consideradas importantes. Entretanto, se o leitor desejar obter mais informações, além das já citadas no trabalho, pode consultar Dolce e Pompeo (2013), Muniz Neto (2013) ou Morgado e Wagner (1998).

Para ilustrar tais conceitos, são utilizadas figuras extraídas de livros didáticos do Ensino Fundamental e que são comumente empregadas para se representar as referidas definições. Neste capítulo não são utilizadas figuras autorais, pois não é o desejo, por enquanto, apresentar representações pictóricas que causem algum tipo de estranhamento ao leitor (por não serem tão usuais), evitando, ainda, adiantar a discussão (realizada no Capítulo 4) sobre quais são as figuras consideradas adequadas para se representar os objetos geométricos. No entanto, com o intuito de decidir se as figuras empregadas neste capítulo correspondem, de fato, a uma boa representação pictórica dos objetos geométricos tratados, elas serão retomadas ao longo dos Capítulos 2 e 4, onde serão analisadas.

1.1. Triângulos

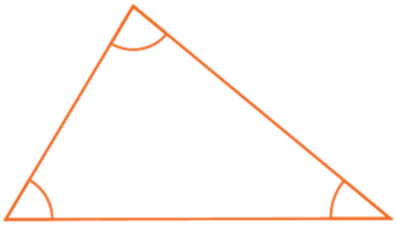
Um triângulo (Figura 1) é definido como a união dos segmentos que ligam (dois a dois) três pontos não colineares[2]; estes três pontos são ditos os *vértices* do triângulo, e os três segmentos são ditos seus *lados*. Em outros termos, triângulo é um polígono de três lados. Além disso, os ângulos compreendidos por quaisquer pares de lados são denominados *ângulos internos* do triângulo. É importante destacar que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180º.

Os triângulos podem ser classificados de acordo com dois critérios: segundo as medidas de seus lados e segundo as medidas de seus ângulos internos.

---

[2] Três pontos *não colineares* são aqueles para os quais não existe uma reta que os contém.

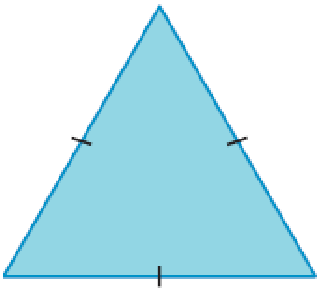
Figura 1 – Triângulo



Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 257.

Com respeito às medidas dos lados, um triângulo pode ser equilátero, isósceles ou escaleno. Um triângulo *equilátero* (Figura 2) é aquele cujos lados são congruentes (ou equivalentemente, cujos lados possuem as mesmas medidas). É importante destacar que todo triângulo equilátero é equiângulo (isto é, que todos os seus ângulos internos são congruentes). Consequentemente, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180º, cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60º.

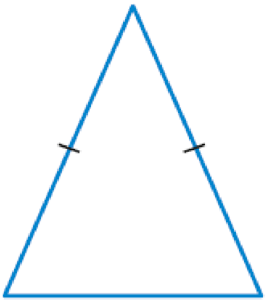
Figura 2 – Triângulo equilátero



Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 110.

Por sua vez, um triângulo *isósceles* (Figura 3) é aquele que possui pelo menos dois de seus lados congruentes (ou equivalentemente de mesma medida).

Figura 3 – Triângulo isósceles

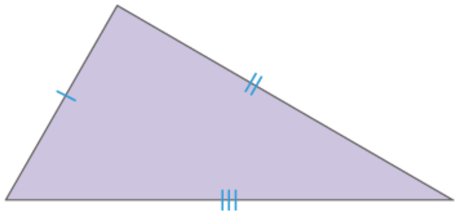


Fonte: IEZZI, 2018, p. 112.

Nota-se, em particular, que todo triângulo equilátero é isósceles. Identificados dois lados congruentes, o terceiro lado (não necessariamente congruente aos demais) é dito a *base do triângulo isósceles* e o vértice comum aos lados congruentes é dito o *vértice do triângulo isósceles*. Além disso, os dois ângulos internos de um triângulo isósceles adjacentes à sua base são denominados os *ângulos da base* desse triângulo. É possível provar que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são congruentes.

Por fim, um triângulo escaleno (Figura 4) é aquele cujos lados são, dois a dois, não congruentes (ou equivalentemente cujos lados possuem medidas, duas a duas, distintas).

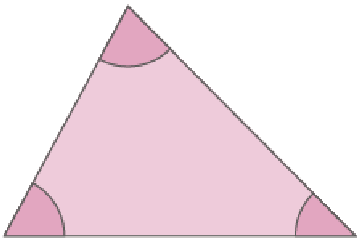
Figura 4 – Triângulo escaleno



Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 219.

Com respeito aos ângulos internos, um triângulo pode ser acutângulo, obtusângulo ou retângulo. Um triângulo *acutângulo* (Figura 5) é aquele cujos ângulos internos são todos agudos (isto é, cujas medidas são valores entre 0º e 90º). É importante destacar que todo triângulo equilátero é acutângulo (visto que cada um de seus ângulos internos mede 60º).

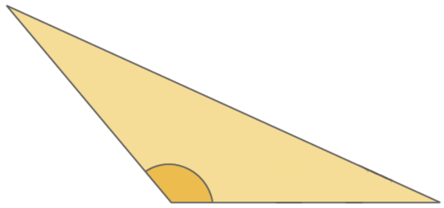
Figura 5 – Triângulo acutângulo



Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 219.

Por sua vez, um triângulo *obtusângulo* (Figura 6) é aquele que possui algum de seus ângulos internos obtuso (ou seja, cuja medida é um valor entre 90º e 180º) e, consequentemente, os demais ângulos são agudos (visto que a soma dos ângulos internos vale 180º).

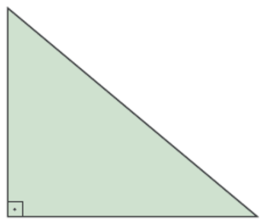
Figura 6 – Triângulo obtusângulo



Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 219.

Por fim, um triângulo *retângulo* (Figura 7) é aquele que possui algum ângulo interno reto (isto é, cuja medida é 90º). O lado oposto ao ângulo reto é dito a *hipotenusa* do triângulo retângulo. Os lados adjacentes a tal ângulo, por sua vez, são ditos seus *catetos*.

Figura 7 – Triângulo retângulo



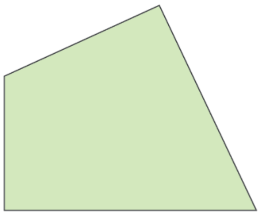
Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 111.

1.2. Quadriláteros

Um *quadrilátero*[3] (Figura 8) é a união dos quatro segmentos que ligam sucessivamente[4] uma sequência de quatro pontos não colineares três a três. Esses quatro pontos são ditos os *vértices* do quadrilátero, e os quatro segmentos que os ligam sucessivamente são ditos seus *lados*. Em outros termos, quadrilátero é um polígono de quatro lados. Além disso, os ângulos compreendidos por quaisquer pares de lados adjacentes são denominados *ângulos internos* do quadrilátero. É importante destacar que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero vale 360º. Dentre os quadriláteros mais estudados no ensino básico (denominados *quadriláteros notáveis* e que também são, portanto, objetos de estudo do presente trabalho), podem-se destacar os paralelogramos e os trapézios.

[3] Neste texto, tratam-se apenas de quadriláteros convexos, os mais abordados no ensino básico. Para uma definição precisa de polígono convexo, o leitor pode consultar Dolce e Pompeo (2013).
[4] Considerando-se também sucessivos o primeiro e o último pontos da referida sequência.

Figura 8 – Quadrilátero qualquer



Fonte: ANDRINI, 2012, p. 155.

Um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos (Figura 9). Dentre algumas propriedades, destacam-se que lados opostos, bem como ângulos opostos, são congruentes e que dois ângulos consecutivos são suplementares (ou seja, a soma de suas medidas vale 180º).

Figura 9 – Paralelogramo

Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 222.

Dentre os principais tipos de paralelogramos tratados no ensino básico, destacam-se os retângulos, os losangos e os quadrados[5].

Um *retângulo* (Figura 10) é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos. Alguns autores, como Iezzi (2018)[6], definem retângulo como um *quadrilátero* cujos ângulos são todos retos (isto é, omitem, na definição, que retângulos são paralelogramos). No entanto, é importante destacar que retângulos, assim como losangos e quadrados, são paralelogramos, pois as propriedades destes últimos também são verificadas pelos primeiros. Além disso, alguns autores, como Dolce e Pompeo (2013), definem retângulo como um quadrilátero cujos *ângulos internos são todos congruentes* (ou seja, como um quadrilátero equiângulo); isto é, além de omitirem que retângulos são paralelogramos, não destacam que cada um de seus ângulos internos é reto[7], o que também não é adequado, devido à etimologia da palavra

[5] É importante destacar que os paralelogramos não são classificados segundo esses três tipos, pois nem todo paralelogramo pertence a alguma dessas classes.
[6] O mesmo autor omite que losangos e quadrados também são paralelogramos, em suas definições.
[7] Sabe-se que um quadrilátero (convexo) equiângulo é equivalente a seus ângulos internos serem retos, devido à soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero ser igual a 360º.

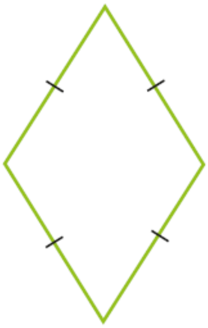
retângulo. Dentre algumas de suas propriedades, destaca-se que suas diagonais são congruentes.

Figura 10 – Retângulo

Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 263.

Um *losango* (Figura 11), por sua vez, é um paralelogramo equilátero, isto é, aquele cujos lados são todos congruentes. Dentre suas propriedades mais importantes, destaca-se que suas diagonais são perpendiculares (isto é, que formam ângulos de 90º).

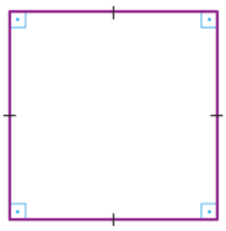
Figura 11 – Losango



Fonte: IEZZI, 2018, p. 250.

Por fim, um *quadrado* (Figura 12) é um paralelogramo cujos ângulos internos são retos e cujos lados são congruentes. Em outros termos, quadrados são os paralelogramos que são simultaneamente retângulos e losangos. Dentre as propriedades desses quadriláteros, destaca-se o fato de que as diagonais são congruentes e perpendiculares; além disso, cada diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles, cuja hipotenusa é a própria diagonal.

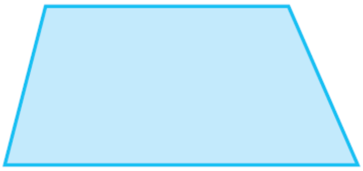
Figura 12 – Quadrado



Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 263.

Por sua vez, os *trapézios* (Figura 13) são quadriláteros que possuem apenas[8] um par de lados (opostos) paralelos, denominados *bases* do trapézio. Como consequência da definição, as bases de todo trapézio não são congruentes (sendo denominadas, portanto, *base maior* e *base menor*). Os outros dois lados são ditos as *laterais* do trapézio. Em qualquer trapézio se verifica a propriedade de que os dois ângulos adjacentes a uma mesma lateral são suplementares.

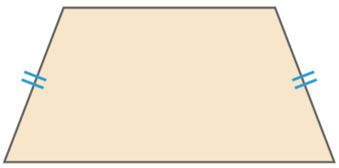
Figura 13 – Trapézio



Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 223.

Os trapézios são classificados em isósceles e escalenos. Um trapézio *isósceles* (Figura 14) é aquele cujas laterais são congruentes. Dentre as propriedades desse tipo de trapézio, destacam-se o fato de que as diagonais são congruentes e que os ângulos relativos a uma mesma base são congruentes (e, consequentemente, ângulos opostos são suplementares).

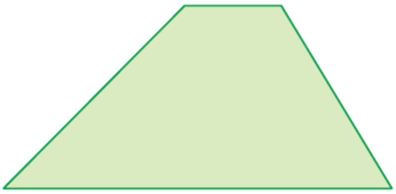
Figura 14 – Trapézio isósceles



Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 222.

Um trapézio *escaleno* (Figura 15), por sua vez, é aquele cujas laterais não são congruentes.

Figura 15 – Trapézio escaleno

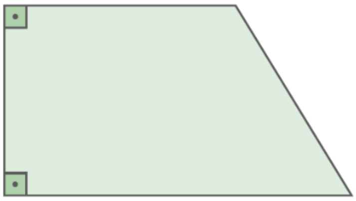


Fonte: GAY; SILVA, 2018, p. 223.

[8] Há autores (como MUNIZ NETO (2012)), que definem trapézios como quadriláteros que possuem *pelo menos um* par de lados paralelos. Sendo assim, para esses autores, todo paralelogramo é um trapézio. No entanto, neste texto, optou-se por utilizar a definição mais comum de trapézio.

Um outro tipo de trapézio é aquele em que uma de suas laterais determina ângulos retos com suas bases. Tal quadrilátero é denominado *trapézio retângulo* (Figura 16). É possível verificar que todo trapézio retângulo é escaleno.

Figura 16 – Trapézio retângulo



Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 186.

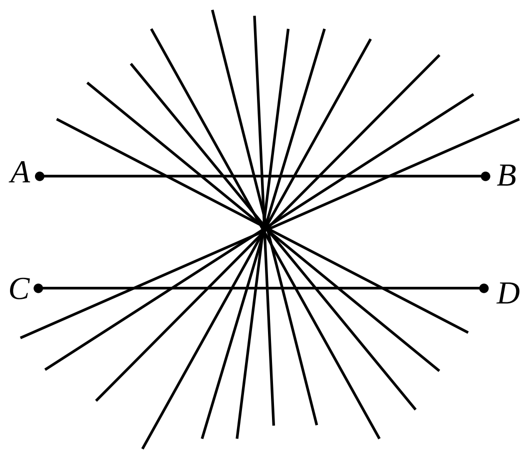
Após a apresentação dos principais conceitos relacionados a triângulos e quadriláteros, o próximo capítulo apresenta alguns problemas (identificados tanto em livros didáticos quanto na prática docente do autor deste texto) relacionados às figuras que os representam.

2. PROBLEMAS COM REPRESENTAÇÕES PICTÓRICAS

A utilização de figuras em Geometria é de grande importância para a devida visualização e interpretação de conceitos e propriedades geométricos. No entanto, é necessário que a representação pictórica (isto é, a expressão por meio de figuras) seja feita de modo adequado, sob pena de não se obter o resultado desejado.

Para isso, é fundamental que uma figura seja desprovida (sempre que possível) de elementos subjetivos, isto é, aqueles cuja interpretação dependa de cada leitor. A clareza na informação que se deseja expressar por meio de uma figura é fundamental para que ocorra a devida compreensão do objeto a ser retratado, visto que, nem sempre o bom senso ou os sentidos suscitam conclusões válidas, corretas, como pode ser percebido na Figura 17.

Figura 17 – Uma ilusão de ótica



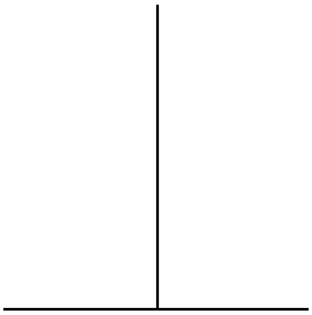
Fonte: Baseada em FERREIRA, 2002, p. 10.

Caso ela seja apresentada sem qualquer informação adicional (isto é, sem informações complementares que auxiliem em sua compreensão), é possível notar que as linhas que ligam A a B e C a D aparentam ser levemente curvadas, não “retas”. No entanto, com o auxílio de uma régua, pode-se verificar que elas, na verdade, constituem dois segmentos de reta[9]. Essa inconsistência entre o que ela aparenta (duas linhas curvas) e o que ela, de fato, representa (dois segmentos de reta), se deve ao fato de existir uma ilusão de ótica, causada pelos vários segmentos transversais cruzando ambas as linhas. Este simples exemplo ilustra que o bom

[9] Com o auxílio de um compasso ou de um par de esquadros, é possível, ainda, verificar que tais segmentos são paralelos.

senso e os sentidos nem sempre levam a conclusões precisas. Outro exemplo desse mesmo tipo de problema pode ser observado na Figura 18, onde é possível notar a presença de dois segmentos de reta.

Figura 18 – Qual é a maior linha?



Fonte: Baseada em FERREIRA, 2002, p. 10.

Aparentemente, o segmento vertical é maior do que o horizontal. No entanto, os segmentos são congruentes, o que pode ser verificado com o auxílio de uma régua, por exemplo. Tendo em vista, portanto, que as figuras podem não refletir precisamente o que se deseja informar, este capítulo visa analisar situações que podem provocar problemas de identificação do objeto geométrico a ser representado; a saber: figuras repetidas ou sempre na mesma posição (Seção 2.1); figuras incompletas (Seção 2.2); figuras incompatíveis (Seção 2.3); e figuras que representam propriedades, e não sua definição (Seção 2.4).

Vale destacar que o intuito deste capítulo é apenas apresentar alguns problemas muito comuns ao se representar pictoricamente determinados objetos geométricos, e *não discutir quais são as representações mais adequadas para eles* (tal discussão é feita no Capítulo 4). Além disso, ressalta-se que cada seção trata especificamente do problema em discussão. Sendo assim, é possível que determinadas figuras, que ilustrem certos objetos geométricos, apresentem o problema discutido, mas não os demais.

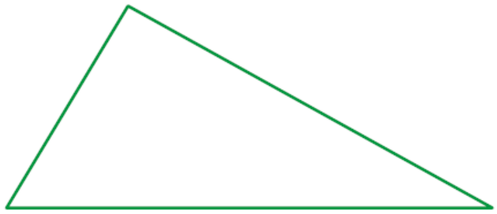
Uma pesquisa de opinião (Anexo A) foi realizada, com professores do ensino básico da rede municipal do Rio de Janeiro, visando analisar alguns dos possíveis erros aqui discutidos.

2.1. Figuras repetidas ou sempre na mesma posição

É comum que tanto materiais didáticos quanto professores utilizem figuras similares para representar pictoricamente determinado objeto geométrico. Um exemplo desta prática é o uso excessivo de representações de triângulos com um dos lados na horizontal e o terceiro vértice acima de tal lado (a Figura 1 (p. 17) e a Figura 19 ilustram essa situação).

Este tipo de representação, embora não seja incorreto (desde que sejam obedecidos os devidos critérios para se representar um triângulo), pode levar o leitor a entender que um triângulo é um polígono de três lados em que um deles deve estar sempre na horizontal; ou seja, que, *para ser um triângulo, um dos lados deve sempre estar nessa posição específica*. É notável que isso é um equívoco, visto que, triângulo é simplesmente um polígono de três lados, *independentemente da disposição* de tais lados.

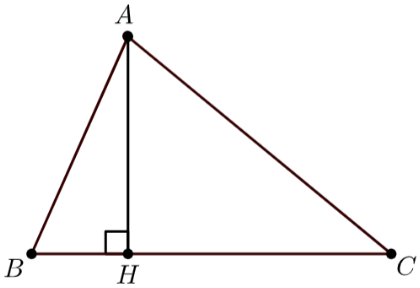
Figura 19 – Triângulo com um dos lados na horizontal



Fonte: IEZZI, 2018, p. 109.

Além de poder ocasionar problemas na compreensão adequada do conceito de triângulo, representar este objeto sempre dessa forma pode levar o leitor a acreditar que todo triângulo possui apenas uma base (justamente o lado horizontal, o segmento BC na Figura 20) e, consequentemente, apenas uma altura (na vertical, o segmento AH na mesma figura).

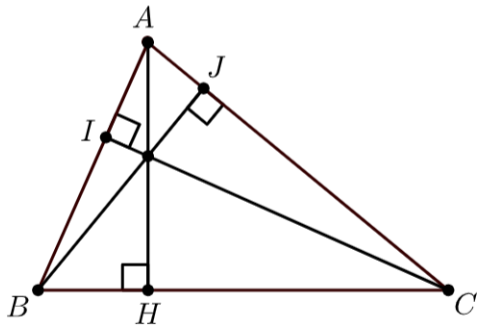
Figura 20 – Triângulo com uma de suas alturas



Fonte: O autor, 2024.

Na verdade, cada lado de um triângulo pode ser tomado como base, relativa à qual há uma altura. A Figura 21 ilustra um triângulo e suas três alturas AH, BJ e CI, relativas às bases BC, CA e AB, respectivamente.

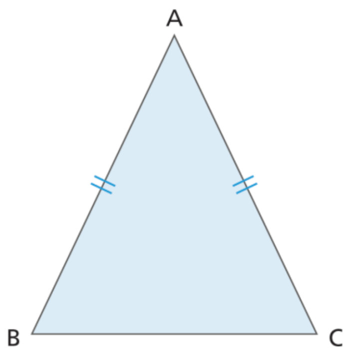
Figura 21 – Triângulo com suas três alturas



Fonte: O autor, 2024.

Um outro tipo de triângulo bastante explorado em uma mesma posição é o triângulo isósceles. Muitos materiais didáticos o representam pictoricamente por meio de uma figura na qual a base do triângulo isósceles (isto é, o terceiro lado, o qual não é necessariamente congruente aos outros dois, p. 18) está sempre na horizontal e com medida diferente dos outros dois lados (Figura 22).

Figura 22 – Triângulo isósceles

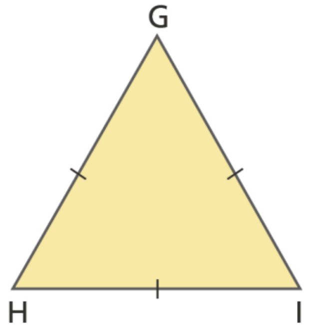


Fonte: GIOVANNI, 2018, p. 210.

Vale ressaltar que a própria Figura 3 (p. 17), apresentada neste trabalho, possui padrão semelhante. Isto pode levar a uma interpretação inadequada de que um triângulo isósceles tem sempre um lado diferente dos demais e que este está na horizontal, o que não é correto. Este tipo de triângulo pode ter ou não um lado de medida diferente dos demais, e este lado – como qualquer outro – não precisa estar na horizontal para que o triângulo seja definido como isósceles. Como dito anteriormente, o que define um triângulo – e isto se estende a qualquer outro polígono – não é a posição em que ele se encontra, mas sim suas características fundamentais (expressas na definição).

A Figura 23 (assim como a Figura 2, p. 17) apresenta uma representação pictórica para um triângulo equilátero análoga aos triângulos isósceles.

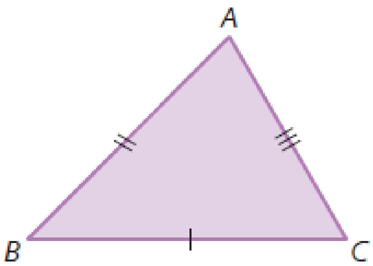
Figura 23 – Triângulo equilátero com um dos lados na horizontal



Fonte: SOUZA, 2018, p. 99.

Outro triângulo frequentemente representado com um dos lados na horizontal é o triângulo escaleno (Figura 24). Além disso, o lado horizontal é comumente apresentado como o lado de maior comprimento. Esta forma de representar um triângulo escaleno pode levar o leitor a entender que a base (entendida como o lado horizontal) desse tipo de triângulo é o maior lado.

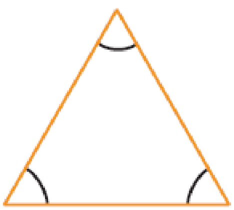
Figura 24 – Triângulo escaleno com um dos lados na horizontal



Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 220.

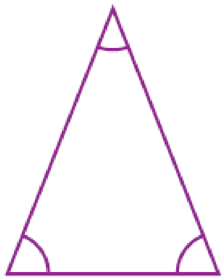
Em relação aos triângulos acutângulos, também é comum autores representá-los com um dos lados na horizontal (Figuras 25 e 26, assim como a Figura 5, p. 18).

Figura 25 – Triângulo acutângulo



Fonte: DANTE, 2018, p. 150.

Figura 26 – Triângulo acutângulo

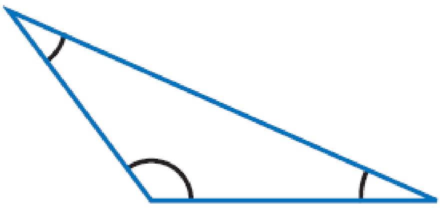


Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 258.

Além disso, muitas dessas representações são de triângulos que, a julgar pela aparência, assemelham-se a triângulos isósceles, ora com três lados congruentes (Figura 23), ora com apenas dois lados congruentes (Figura 22). Dessa forma, alguns leitores podem entender que todo triângulo acutângulo é também um triângulo isósceles.

No que diz respeito ao triângulo obtusângulo, muitos materiais didáticos o representam com uma figura em que um dos lados adjacentes ao ângulo obtuso está sempre na horizontal (Figura 27).

Figura 27 – Triângulo obtusângulo

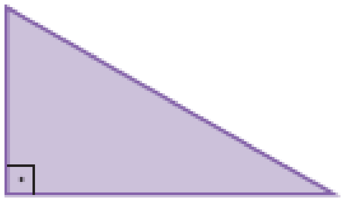


Fonte: DANTE, 2018, p. 150.

Não é comum materiais didáticos representarem esse tipo de triângulo com o ângulo obtuso acima dos demais ângulos. Além disso, é interessante observar que diferentes autores (DANTE, 2018; IEZZI, 2018; ANDRINI, 2018; SAMPAIO, 2018; GIOVANI JÚNIOR, 2018; e outros), utilizam exatamente o mesmo tipo de figura para expressar esse tipo de triângulo, ou seja, um triângulo que possui, além de um lado na horizontal, o terceiro vértice acima e à esquerda desse lado, como na Figura 27. Como mencionado anteriormente (p. 26), esta forma de representar triângulos, em particular o triângulo obtusângulo, pode levar o leitor a entender que um triângulo é obtusângulo se o ângulo obtuso está em uma das extremidades do lado horizontal.

Por sua vez, o triângulo retângulo (Figura 28, assim como a Figura 7, p. 19) é frequentemente representado com um dos catetos na horizontal, repetindo o padrão utilizado nas representações dos triângulos já citados até aqui. Este tipo de representação, além do problema citado anteriormente (p. 26), pode levar o leitor a concluir que o ângulo reto de um triângulo retângulo está sempre localizado em uma das extremidades do lado horizontal. Além disso, este tipo de representação pode levar o leitor a uma ideia equivocada de que o ângulo reto é formado sempre por um segmento horizontal e outro vertical.

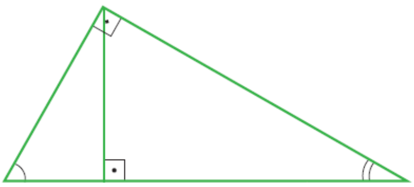
Figura 28 – Triângulo retângulo



Fonte: LONGEN, 2018, p. 190.

É importante ressaltar que é comum autores utilizarem este modelo de representação de triângulo retângulo (Figura 28) na etapa inicial do *Ensino Fundamental – Anos Finais* e representarem triângulos retângulos com a hipotenusa na horizontal (Figura 29) na etapa final, momento em que o tema *Relações métricas no triângulo retângulo* é estudado. Entretanto, tal atitude apenas reforça inadequadamente que, para se analisar uma altura de um triângulo, ela deve sempre ser relativa ao lado horizontal.

Figura 29 – Triângulo retângulo com hipotenusa na horizontal



Fonte: LONGEN, 2018, p. 172.

Assim como ocorre com os triângulos, alguns *quadriláteros* também possuem representações que são frequentemente utilizadas, como se não houvesse outras formas de representá-los, sobretudo no que diz respeito à posição dessas figuras. Os paralelogramos são um exemplo deste fato. Neste caso, são geralmente representados com um de seus lados na horizontal (sendo este, geralmente, o maior dos lados desse paralelogramo), e com os ângulos adjacentes a esse lado dispostos em ângulo agudo à esquerda e ângulo obtuso à direita (Figura 30, assim como a Figura 9, p. 20).

Figura 30 - Paralelogramo

Fonte: GIOVANNI JR, 2018, p. 221.

A prática de se representar este quadrilátero sempre dessa maneira leva alguns leitores a considerarem esta figura como “torta”, quando comparada a um paralelogramo do tipo retângulo. É comum observar estudantes afirmando que o paralelogramo é o quadrilátero “torto” e o retângulo, o “reto”. A pesquisa[10] mostra que um número significativo de professores identificou um paralelogramo por meio de uma ilustração como a Figura 30, mas não identificou este quadrilátero quando é utilizado outro tipo de representação.

Um dos paralelogramos abordados neste trabalho, o retângulo, também possui um tipo de representação que é comumente utilizada pelos materiais didáticos. Em geral, os livros apresentam um retângulo com os lados de maior comprimento na horizontal e, portanto, os lados de menor comprimento na vertical (Figura 31, assim como a Figura 10, p. 21).

Figura 31 – Retângulo

Fonte: GIOVANNI JR, 2018, p. 221.

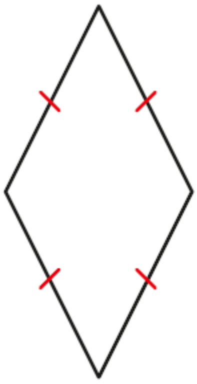
O uso repetitivo desse tipo de figura pode levar o leitor a considerar que um retângulo sempre tem lados consecutivos de medidas diferentes (geralmente com o maior lado na horizontal) e que um ângulo reto sempre tem um de seus lados na horizontal, como já citado anteriormente (Seção 2.1, p. 30). É comum, em sala de aula, estudantes afirmarem que “retângulo é a forma geométrica que tem um lado maior e outro menor”, não priorizando a característica fundamental mais importante de um retângulo que é a de possuir todos os

[10] Mais detalhes sobre este fato podem ser encontrados no Apêndice A.

ângulos retos. Esta forma equivocada de conceber um retângulo não permite a alguns estudantes identificarem que o quadrado também é um retângulo, já que todos os quadrados possuem ângulos retos (por definição).

Outro paralelogramo que é comumente representado na mesma posição é o losango. Este polígono é quase sempre ilustrado como um "balão em pé" (Figura 32, assim como a Figura 11, p. 21).

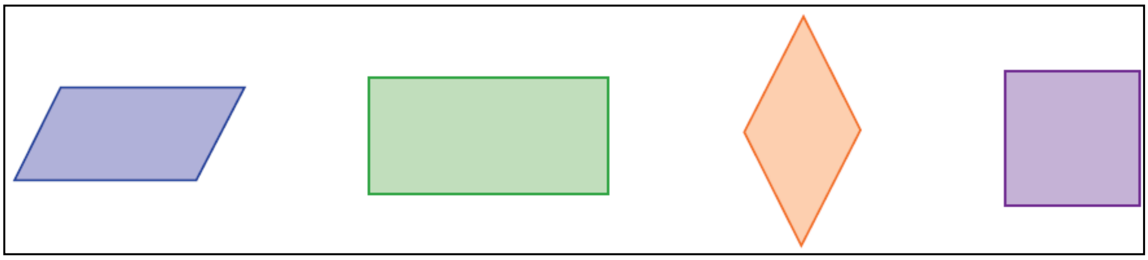
Figura 32 – Losango como um "balão em pé"



Fonte: IEZZI, 2018, p. 292.

Curiosamente, os mesmos materiais didáticos que procuram representar outros tipos de paralelogramos sempre com um dos lados na horizontal, não têm a mesma prática com os losangos (Figura 33), que, em vez de terem alguns de seus lados na horizontal, o representam como dito anteriormente.

Figura 33 – Diferentes paralelogramos com o losango em posição diferente

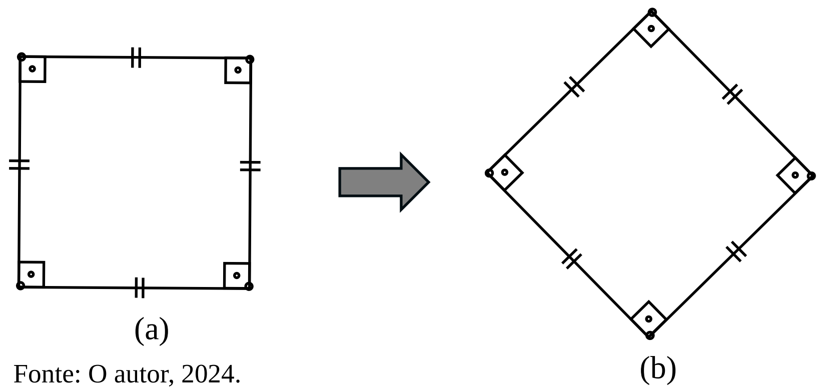


Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 114.

Ainda que, em alguns materiais didáticos, os losangos sejam tratados como paralelogramos, a mudança na forma de representação, fugindo do padrão seguido pelos demais, pode deixar o leitor confuso, já que ele foi acostumado, ainda que equivocadamente, a entender um paralelogramo como um quadrilátero que possui um par de lados paralelos na horizontal. Esta forma de representar losangos pode limitar a compreensão desse objeto, levando o leitor, em muitos casos, a não identificá-lo quando estiver em outra posição ou quando for parte de uma figura mais complexa. Ressalta-se que esta forma de representação não está errada, visto que o losango é o paralelogramo que possui quatro lados congruentes (Seção 1.2, p. 21), e isto a figura de fato representa, por meio das marcações[11] feitas em cada um dos lados. Contudo, esta prática reforça a ideia equivocada de que o losango é "aquele quadrilátero que se parece um balão", ou seja, qualquer quadrilátero que se pareça um balão é um losango.

É comum professores em suas aulas realizarem dinâmicas com seus alunos, apresentando-lhes uma superfície quadrada com um dos lados na horizontal (Figura 34-a) e, em seguida, ao girá-la de um ângulo de 45º (Figura 34-b), perguntar que objeto ele tem nas mãos[12]. Geralmente, um grupo expressivo assume que, no segundo momento (ou seja, após a rotação da superfície), o objeto passa a ser um losango, e não mais um quadrado.

Figura 34 – Quadrado em posições diferentes



Fonte: O autor, 2024.

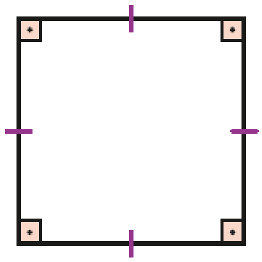
Isto significa que, para esses alunos, a posição do objeto se sobrepõe às suas características fundamentais. O objeto não deixou de ter quatro lados congruentes e nem deixou de ter quatro ângulos retos após a rotação; portanto, continua a ser um quadrado. A cultura de sempre representar alguns polígonos nas mesmas posições (em particular um losango) pode levar à construção dessa ideia. É importante destacar que, tanto na posição inicial quanto depois de ser girado, o objeto pode ser classificado como quadrado ou losango (pois, como dito anteriormente, todo quadrado é um losango), mas o fato de ele ser classificado apenas como quadrado na primeira posição e apenas como losango na segunda,

[11] Os comentários a respeito de marcações indicando congruência são realizados no Capítulo 3, p. 52.
[12] A questão 11 da pesquisa (ver Apêndice A) trata justamente sobre a rotação de um quadrado.

leva a crer que, para o aluno, não se trata do mesmo objeto. Além disso, no caso da figura rotacionada, dizer que ela representa um losango (embora não esteja incorreto) acarreta uma perda de informações, pois este não seria um losango qualquer, mas sim um losango que possui todos os ângulos retos (isto é, um quadrado). Esta supressão de uma informação importante pode ser crucial na resolução de um problema.

Por sua vez, o quadrado, assim como os demais paralelogramos (com exceção do losango), também é representado por muitos materiais didáticos com dois de seus lados paralelos na horizontal (Figura 35, assim como a Figura 12, p. 21).

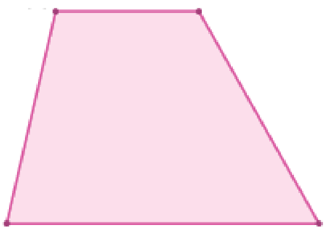
Figura 35 – Quadrado com um par de lados na horizontal



Fonte: IEZZI, 2018, p. 292.

Outra forma geométrica que é geralmente representada pelo mesmo tipo de figura é o trapézio. Sua representação pictórica mais utilizada por materiais didáticos e professores consiste em dispor as bases horizontalmente, sendo a maior delas abaixo da menor. Além disso, de modo geral, relativos a uma mesma base, ou ambos os ângulos internos adjacentes a ela são agudos ou ambos são obtusos (Figura 36). As Figuras 13 (p. 22), 14 (p. 22) e 15 (p. 22) também possuem esse padrão.

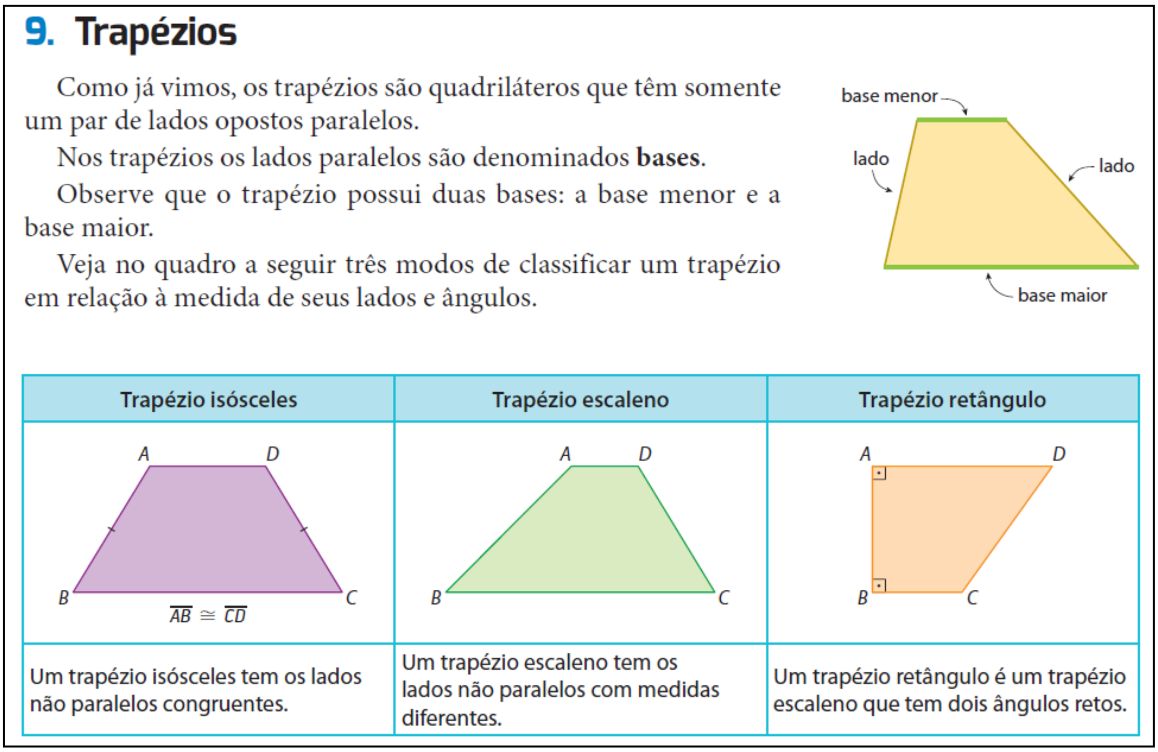
Figura 36 – Trapézio com as bases na horizontal



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 238.

Gay e Silva (2018) utilizam algumas diferentes representações de trapézios (Figura 37), uma delas para representar um trapézio qualquer e outras para representar tipos específicos de trapézios, de acordo com suas características fundamentais. Observa-se que todas as figuras apresentam um trapézio com as bases na horizontal e em nenhum deles se vê um ângulo agudo formado entre a base de comprimento menor e uma lateral.

Figura 37 – Representações de trapézios de acordo com sua classificação



9. Trapézios

Como já vimos, os trapézios são quadriláteros que têm somente um par de lados opostos paralelos.

Nos trapézios os lados paralelos são denominados **bases**.

Observe que o trapézio possui duas bases: a base menor e a base maior.

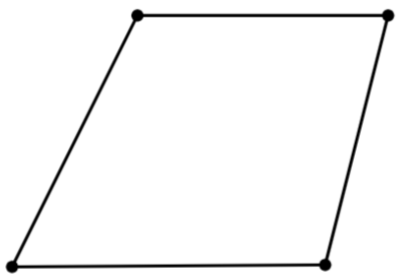
Veja no quadro a seguir três modos de classificar um trapézio em relação à medida de seus lados e ângulos.

Trapézio isósceles	Trapézio escaleno	Trapézio retângulo
A D B C $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	A D B C	A D B C
Um trapézio isósceles tem os lados não paralelos congruentes.	Um trapézio escaleno tem os lados não paralelos com medidas diferentes.	Um trapézio retângulo é um trapézio escaleno que tem dois ângulos retos.

Fonte: GAY, SILVA, 2018, p. 223.

Diante desta apresentação, o leitor pode ser induzido a entender que o quadrilátero ilustrado na Figura 38 não representa um trapézio, visto que, embora ambas as bases estejam na horizontal, os ângulos adjacentes a uma mesma base não são de mesmo tipo (isto é, ambos agudos ou ambos obtusos).

Figura 38 – Trapézio não usual



Fonte: O autor, 2024.

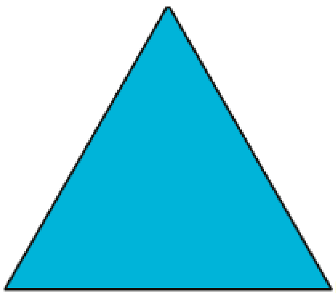
Outras formas de representação deveriam ser exploradas pelos livros didáticos e pelos professores da educação básica. Definir o trapézio como um quadrilátero que possui um único par de lados paralelos, não significa que o par de lados paralelos (as bases) precisa estar na horizontal. A representação comumente utilizada para representar um trapézio é uma das possibilidades, não a única. Quanto mais forem exploradas diferentes formas de se observar as características fundamentais de um objeto geométrico (neste caso um trapézio), maior é a compreensão sobre ele. Por outro lado, quanto mais os materiais didáticos e professores se restringirem a representar objetos geométricos sempre da mesma maneira, cada vez mais estudantes passarão a entender que a posição do objeto influi em sua definição, e não apenas suas características fundamentais.

2.2. Figuras incompletas

Em alguns casos, apenas a representação pictórica de um objeto não é suficiente para expressá-lo adequadamente. Em outros casos, faltam elementos pictóricos que determinem precisão ao objeto geométrico que se deseja representar. Nestas circunstâncias, é dito que a figura está incompleta.

Por exemplo, Pataro (2018) utiliza uma figura sem qualquer marcação para representar um triângulo equilátero (Figura 39). A autora se utiliza de uma figura que tem aparência de um triângulo equilátero, mas que não representa adequadamente este tipo de triângulo, visto que não há qualquer informação sobre os lados serem congruentes.

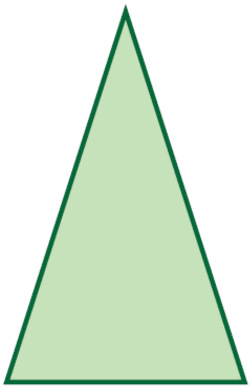
Figura 39 – Triângulo equilátero sem marcações



Fonte: PATARO, 2018, p. 159.

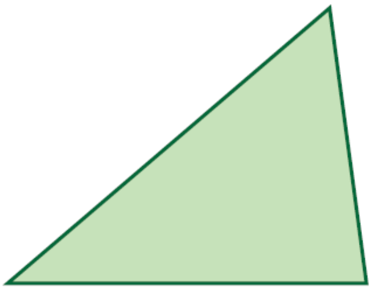
Algo semelhante ocorre com alguns materiais didáticos na tentativa de representar um triângulo isósceles. Longen (2018) utiliza uma figura sem qualquer marcação para os lados congruentes (Figura 40) e afirma se tratar de um triângulo isósceles. O autor faz o mesmo quando tenta representar um triângulo escaleno (Figura 41); apenas apresenta um triângulo que aparenta ter lados de medidas diferentes e o assume como uma representação de triângulo escaleno. Além de outros problemas que estas representações podem trazer, destaca-se o fato de que, não havendo qualquer marcação (no caso dos triângulos equilátero e isósceles) ou informação em linguagem matemática que anuncie a não congruência entre os lados (no caso do triângulo escaleno), o leitor pode entender que quaisquer triângulos parecidos com estes (Figuras 39, 40 e 41) podem ser classificados como equilátero, isósceles e escaleno, respectivamente.

Figura 40 – Tentativa de representação de um triângulo isósceles



Fonte: LONGEN, 2018, p. 139.

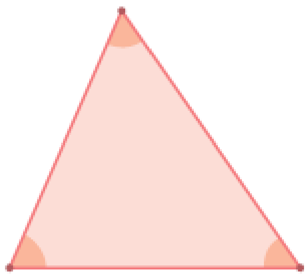
Figura 41 – Tentativa de representação de um triângulo escaleno



Fonte: LONGEN, 2018, p. 139.

Por sua vez, na tentativa de representação de um triângulo acutângulo, é necessário que a informação sobre os ângulos agudos seja apresentada de alguma forma; caso contrário, a figura estará tratando apenas de um triângulo qualquer. Chavante (2018), por exemplo, utiliza uma representação para triângulo acutângulo (Figura 42) que não traz qualquer informação sobre as medidas de seus ângulos internos (a Figura 5 (p. 18) e a Figura 26 (p. 29) possuem essa mesma característica). A figura utilizada pelo autor para representar este tipo de triângulo apresenta um dos lados na horizontal, o que permite ao leitor supor que os ângulos dessa base (o lado horizontal) são agudos, já que os outros dois lados formam com essa base uma abertura visivelmente menor do que 90º. Ainda que se possa concluir (visualmente) que os ângulos da base mencionada sejam agudos, não é possível concluir que o ângulo oposto a ela também o seja. Este último pode ser um ângulo agudo, reto ou obtuso, já que existem inúmeras possibilidades de medidas para esses três ângulos, de forma que sua soma seja 180º.

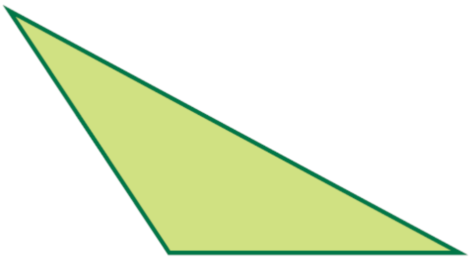
Figura 42 – Triângulo acutângulo



Fonte: CHAVANTE, 2018, p. 237.

A mesma prática adotada na representação anterior é utilizada por Longen (2018). A figura utilizada pelo autor para representar um triângulo obtusângulo não apresenta qualquer informação que permita identificá-la como tal (Figura 43). Não há qualquer indicação na figura ou alguma outra informação que identifique a presença do ângulo obtuso. Assim como na Figura 42, o fato de um dos lados figurar na horizontal, sugere qual seria o ângulo obtuso. A figura apenas sugere um triângulo obtusângulo, mas deixa a cargo do leitor entendê-la como tal, ou seja, o leitor conclui que se trata de um triângulo obtusângulo pelo fato de a figura parecer ser.

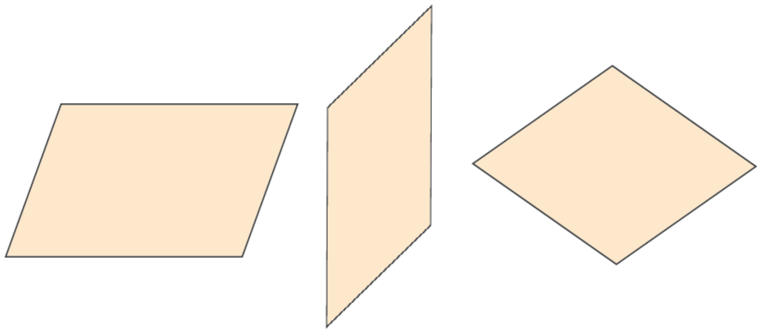
Figura 43 – Triângulo obtusângulo



Fonte: LONGEN, 2018, p. 140.

Em relação aos quadriláteros, especificamente o paralelogramo, alguns autores o representam com figuras sem qualquer informação sobre os lados opostos paralelos, característica fundamental desse objeto geométrico. Andrini (2012), por exemplo, afirma que “paralelogramos são quadriláteros que apresentam 2 pares de lados paralelos” e utiliza três quadriláteros diferentes para representar este objeto (Figura 44), contudo não indica quais são os pares de lados paralelos.

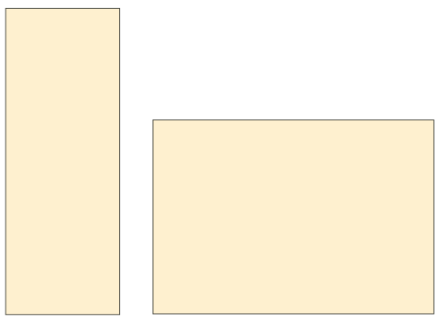
Figura 44 – Tentativa de representação de um paralelogramo



Fonte: ANDRINI, 2012, p. 155.

O mesmo ocorre quando o paralelogramo tratado é o retângulo. Alguns autores o representam com figuras que não destacam sua característica fundamental, ou seja, os quatro ângulos retos (Seção 2.1, p. 31). Novamente, Andrini (2012), apresenta dois quadriláteros com aparência de retângulo (Figura 45), mas não utiliza marcações de ângulos de 90º nos vértices dos polígonos, o que os tornam representações de dois quadriláteros quaisquer.

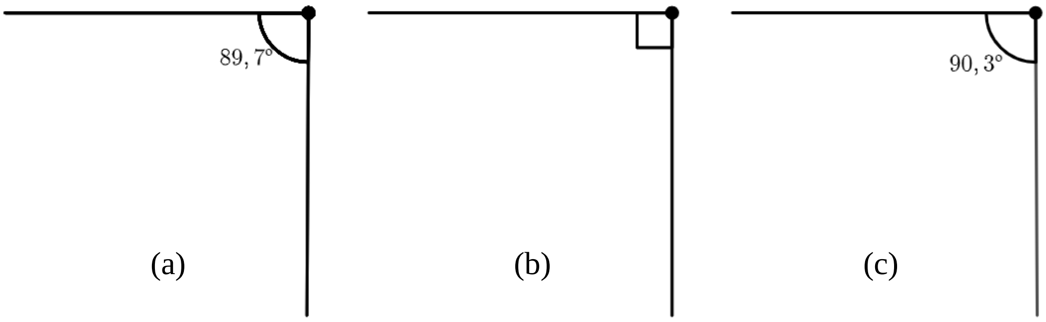
Figura 45 – Retângulo sem marcações



Fonte: ANDRINI, 2012, p. 156.

É importante destacar que ângulos de medidas próximas possuem suas respectivas representações pictóricas parecidas; por isso, o uso de marcações ou linguagem matemática, quando for o caso, para eliminar qualquer possibilidade de confusão, é essencial. Por exemplo, na Figura 46, são apresentados três ângulos: um agudo (de medida 89,7º, Figura 46-a), um reto (Figura 46-b) e um obtuso (de medida 90,3º, Figura 46-c). Nota-se que os três são praticamente idênticos e difíceis de se distinguir a olho nu (ou seja, sem instrumentos específicos para medir ângulos).

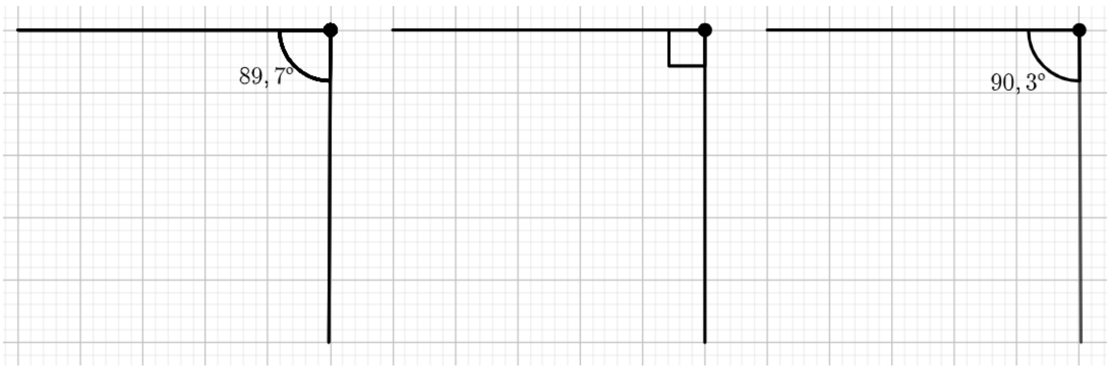
Figura 46 – Um ângulo agudo, um reto e um obtuso



Fonte: O autor, 2024.

É possível notar ainda (Figura 47) que, mesmo exibindo-se a malha quadriculada do *Geogebra*, é difícil de distinguir tais ângulos com respeito a suas medidas.

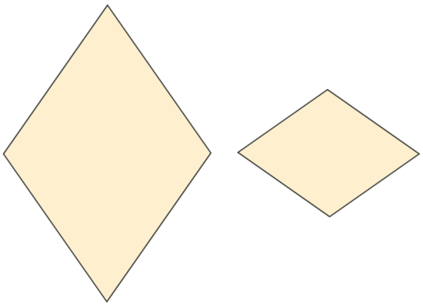
Figura 47 – Um ângulo agudo, um reto e um obtuso sobre uma malha quadriculada



Fonte: O autor, 2024.

Andrini (2012), ao tratar do losango, também utiliza dois quadriláteros para representá-lo (Figura 48). Em geral, muitos materiais didáticos utilizam figuras que sugerem a posição de um “balão em pé” para representar losangos (como dito anteriormente, p. 32) e alguns desses materiais o fazem sem indicar a congruência entre os lados, podendo levar o leitor a entender que toda figura com este formato representa um losango; ou seja, tem a característica de ter os quatro lados congruentes (como discutido na Seção 2.1, p. 32).

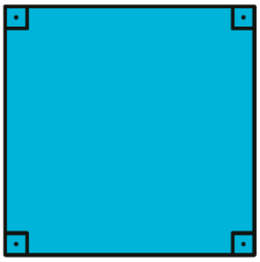
Figura 48 – Losango sem marcações



Fonte: ANDRINI, 2012, p. 156.

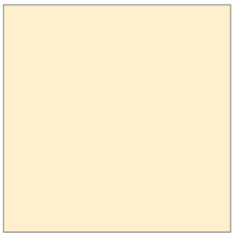
Por sua vez, o quadrado, também é representado em alguns materiais didáticos por um quadrilátero que não apresenta marcações indicando congruência entre os seus lados (Figura 49). Esta prática pode levar o leitor a entender que um retângulo que tenha lados não congruentes, porém com medidas próximas, representam um quadrado. Há também materiais didáticos que, na tentativa de representar um quadrado, apresentam um quadrilátero com aparência de quadrado, contudo sem marcações de congruência entre os lados e sem marcações indicando ângulos de 90º (Figura 50), o que é ainda mais inadequado, pois esse tipo de representação pode levar o leitor a entender que qualquer quadrilátero que se pareça um quadrado, representa um quadrado.

Figura 49 – Quadrado sem marcações de congruência



Fonte: PATARO, 2018, p. 163.

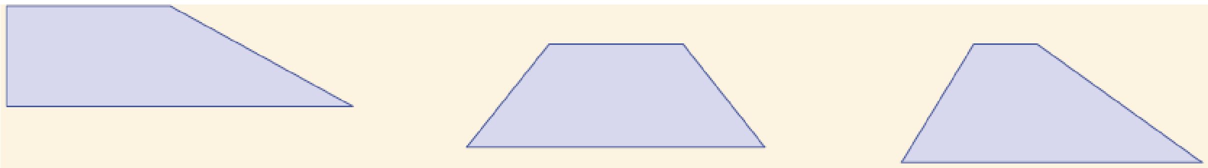
Figura 50 – Quadrado sem marcações de ângulos retos



Fonte: ANDRINI, 2018, p. 156.

Em relação aos trapézios, é muito comum utilizar figuras que apenas induzam que dois de seus lados são paralelos, sem que essa informação esteja explicitamente apresentada (assim como ocorre nos paralelogramos, conforme discutido anteriormente, p. 38). A Figura 51 apresenta um exemplo dessa situação. É possível notar que, nas três figuras utilizadas para representar os três tipos de trapézios mais conhecidos (retângulo, isósceles e escaleno), não é possível identificar claramente que existe um par de lados paralelos (lembrando que o fato de dois lados *parecerem* paralelos não significa que, de fato, o sejam).

Figura 51 – Principais tipos de trapézios



Fonte: SOUZA, 2018, p. 100.

É importante destacar que as três imagens que compõem a Figura 51 são muito comuns de serem utilizadas na representação dos três tipos mais conhecidos de trapézios. No entanto, é possível notar a ausência de outras informações importantes que são específicas para cada um dos três tipos. Para o trapézio retângulo (primeira figura), faltam indicações de que dois ângulos internos adjacentes a uma mesma lateral são retos. Para o trapézio isósceles, por sua vez, faltam informações que indiquem que suas laterais *são* congruentes. Por fim, para o trapézio escaleno, de modo semelhante, faltam informações de que as laterais *não são* congruentes.

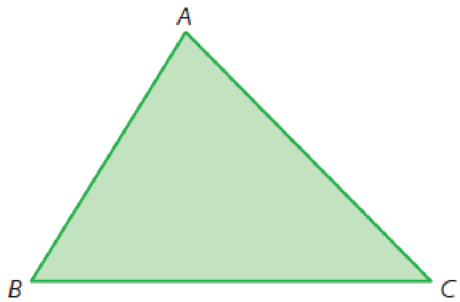
De um modo geral, a falta de informações que caracterizem tipos específicos de quadriláteros (como marcações indicando congruência ou marcações indicando ângulos retos, por exemplo) pode gerar dúvidas no leitor a respeito de qual objeto geométrico está sendo representado. Portanto, é imprescindível que materiais didáticos utilizem figuras que representem precisamente o objeto geométrico que se deseja representar, assim como não seja dada ao leitor a responsabilidade de julgar qual objeto está sendo representado apenas pela aparência da figura utilizada.

2.3. Figuras incompatíveis

Um outro problema identificado em alguns materiais didáticos é o uso de figuras que não são compatíveis com o objeto que se deseja representar, ou seja, figuras que não representam as características fundamentais do objeto.

Decorre da definição (Seção 1.1, p. 16) que triângulo é a união de três segmentos de reta, não constituindo, portanto, uma superfície plana. Consequentemente, ao sombrear a região interior ao triângulo, muitos autores induzem a representação de uma *superfície triangular*, não de um triângulo. Silveira (2018), por exemplo, visando ilustrar um triângulo qualquer (Figura 52), utiliza uma superfície triangular (e não um triângulo), prática essa que se estende às representações dos demais tipos de triângulos e de polígonos, em geral.

Figura 52 – Superfície triangular



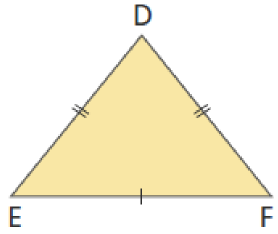
Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 220.

Quanto aos tipos específicos de triângulos, é comum verificar representações equivocadas para alguns casos, como por exemplo o de triângulos isósceles com marcações que não são compatíveis com a natureza desse tipo de triângulo. Muitos autores, equivocadamente, utilizam marcações iguais em dois dos lados do triângulo e uma marcação diferente das demais no terceiro lado (Figura 53). Este tipo de representação pode levar a uma interpretação equivocada do conceito de triângulo isósceles, pois o leitor pode ser induzido a entender que esse terceiro lado possui necessariamente medida diferente[13] dos outros dois (que são congruentes), o que não é obrigatoriamente verdadeiro (visto que, como apresentado na Seção 1.1, p. 17, um triângulo isósceles é aquele que possui *pelo menos* dois lados congruentes, e não *apenas* dois lados congruentes). Tal interpretação equivocada pode,

[13] Vale observar que este é o mesmo problema identificado na Figura 22 (p. 27), pois, ainda que não tenha uma marcação diferente no terceiro lado (o lado não congruente aos demais), a recorrente posição deste lado o “identifica” como sendo sempre diferente.

também, levar o leitor a não considerar que o triângulo equilátero também é um triângulo isósceles.

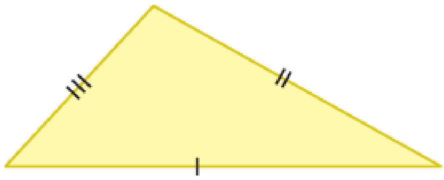
Figura 53 – Triângulo Isósceles com um dos lados diferentes



Fonte: SOUZA, 2018, p. 99.

Aliás, é muito comum na literatura encontrar essa ideia de que *marcações diferentes indicam medidas diferentes*, como no caso de representações de triângulos escalenos (Figura 54, assim como Figura 24, p. 28).

Figura 54 – Triângulo escaleno

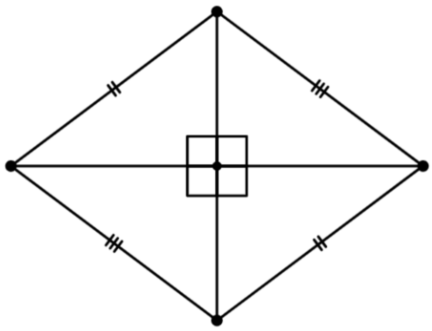


Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 110.

No entanto, essa convenção não é adequada, visto que, embora marcações iguais indiquem sempre medidas iguais, *marcações diferentes não indicam necessariamente medidas diferentes*. Por exemplo, caso se deseje ilustrar um “quadrilátero com lados opostos congruentes e diagonais perpendiculares”, deve-se necessariamente fazer uma imagem como na Figura 55 (isto é, com marcações iguais em seus lados opostos e com marcações diferentes em seus lados adjacentes, visto que não se sabe, *a priori*, que os lados adjacentes são congruentes).

Porém, mantendo-se a noção de que *marcações diferentes indicam medidas diferentes*, o leitor pode ser levado a deduzir que tal quadrilátero possui lados adjacentes não congruentes, o que não é verdade, pois é possível provar que tal quadrilátero é um losango (isto é, que todos os seus lados são congruentes). Em particular, por esse mesmo motivo, não se deve representar pictoricamente um triângulo escaleno como na Figura 54.

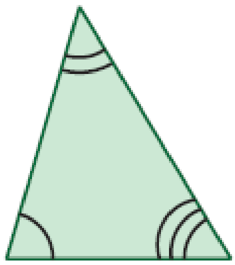
Figura 55 – Quadrilátero com lados opostos congruentes e diagonais perpendiculares



Fonte: O autor, 2024.

Há um outro tipo de marcações diferentes que também é utilizado de forma equivocada por alguns autores. Tais marcações são arcos feitos nos ângulos internos de um triângulo para indicar que os ângulos são agudos. Sampaio (2018), ao ilustrar um triângulo acutângulo (Figura 56), utiliza marcações diferentes nos ângulos[14] (o autor utiliza quantidades diferentes de arcos para cada ângulo), uma prática que pode levar o leitor a entender que um triângulo acutângulo possui sempre ângulos internos de medidas diferentes e, nesse sentido, um triângulo equiângulo não seria considerado acutângulo, o que não procede.

Figura 56 – Triângulo acutângulo



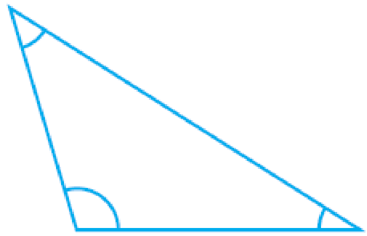
Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 111.

Como já citado anteriormente (Seção 2.3, p. 38), alguns autores utilizam as marcações com arcos para destacar um ângulo específico. Nesse sentido, no caso de um triângulo acutângulo, os três ângulos devem ser destacados, já que todos são agudos. No caso de o triângulo ser do tipo obtusângulo, apenas um dos ângulos deve ser destacado, visto que

[14] Esta prática também é adotada pelo mesmo autor na ilustração de um triângulo escaleno (Figura 54), na tentativa de ilustrar que seus lados possuem medidas diferentes.

apenas um dos ângulos é obtuso. Contudo, alguns materiais didáticos ilustram esse tipo de triângulo, equivocadamente, com marcações em todos os ângulos (Figura 57), o que pode confundir o leitor, permitindo a ele considerar que se trata de um triângulo com três ângulos obtusos ou, ainda, que se trata de um triângulo com ângulos de mesma medida.

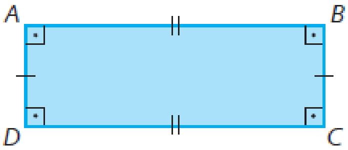
Figura 57 – Triângulo obtusângulo



Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 258.

Em relação aos quadriláteros, é comum verificar representações de retângulos que podem confundir o leitor a respeito desse objeto matemático. Silveira (2018) ilustra um retângulo com marcações diferentes[15] em seus lados, o que, equivocadamente, sugere que um retângulo sempre tem lados com medidas diferentes (Figura 58). Desta forma, o quadrado não pode ser considerado um retângulo, o que é um equívoco, já que todo quadrado possui ângulos retos e que, portanto, é um retângulo (como discutido na Seção 2.1, p. 31).

Figura 58 – Retângulo não equilátero



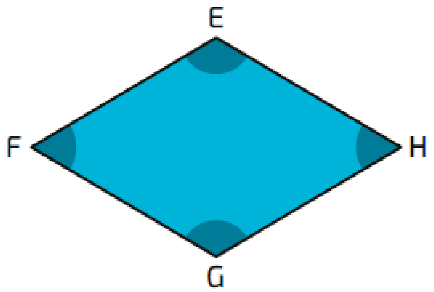
Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 223.

A forma como o retângulo é representado (Figura 58) não coloca em evidência apenas suas características fundamentais, pois apresenta, também, informações sobre as medidas dos lados, o que não deveria ser levado em consideração, visto que não existe uma relação definida entre elas, ou seja, podem ser iguais ou não. Algo semelhante, porém ao contrário, é observado na Figura 59, que ilustra um losango. Nesta representação, Pataro (2018) não indica a característica fundamental deste paralelogramo, que são os lados congruentes, o que

[15] Vale lembrar que Silveira (2018) considera que marcações diferentes indicam medidas diferentes, conforme Figura 24, p. 28.

pode levar o leitor a concluir que não existe uma relação definida entre as medidas dos lados de um losango. Além disso, a autora destaca os quatro ângulos internos deste quadrilátero do mesmo modo (todos têm a mesma aparência), o que pode levar o leitor a concluir que um losango sempre possui ângulos de mesma medida.

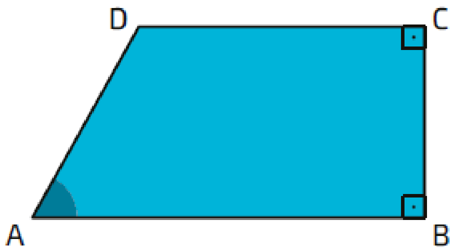
Figura 59 – Losango com marcações nos ângulos



Fonte: PATARO, 2018, p. 163.

A mesma autora define trapézio como um "quadrilátero que tem apenas um par de lados paralelos", porém, ao ilustrar este quadrilátero, utiliza um trapézio do tipo retângulo (Figura 60).

Figura 60 – Um trapézio



Fonte: PATARO, 2018, p. 162.

Como visto na Seção 1.2, p. 22, existem diferentes tipos de trapézios e o trapézio retângulo é apenas um deles; contudo, representar um trapézio qualquer com uma figura que representa um caso particular pode levar o leitor a concluir que trapézios sempre possuem ângulos retos. Além disso, o interior do ângulo agudo é sombreado, mas o mesmo não ocorre com o ângulo obtuso, não deixando clara a intenção que leva ao destaque dado ao ângulo agudo. Tal fato pode levar o leitor a considerar que existe alguma relação existente entre o trapézio o seu ângulo agudo, visto que, com exceção dos ângulos retos (destacados equivocadamente), foi o único ângulo sombreado.

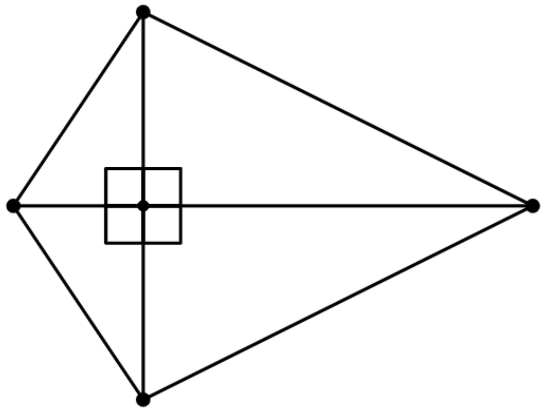
2.4. Figuras que representam propriedades

O presente trabalho tratou, até aqui, do uso repetitivo de algumas figuras (Seção 2.1), do fato de que algumas delas não apresentam informações suficientes para a representação adequada de um objeto geométrico (Seção 2.2) e o uso de figuras incompatíveis com os objetos os quais elas representam (Seção 2.3). Esta seção discute figuras que representam propriedades em vez de representar *apenas os* elementos que retratam as características fundamentais (isto é, aqueles oriundos da própria definição) do objeto geométrico representado.

Este problema é mais comum ocorrer entre professores e alunos do que em materiais didáticos, visto que ao discutirem sobre determinado objeto geométrico, em muitos casos, as propriedades que o envolvem se tornam mais relevantes do que a definição do objeto em si. Esta prática pode levar a uma confusão entre o conceito do objeto e suas propriedades.

Deve-se ressaltar que algumas representações por propriedades são *equivalentes* à definição em si. Por exemplo, se, para expressar um paralelogramo, alguém faz uma figura que represente lados opostos congruentes, isso é equivalente a ser paralelogramo, pois todo quadrilátero convexo, cujos lados opostos são congruentes, é obrigatoriamente um paralelogramo. Por outro lado, se para representar um losango, utiliza-se uma figura que represente um quadrilátero convexo com diagonais perpendiculares, ainda que isto seja uma propriedade de qualquer losango, ela não é equivalente a ser losango, pois não é verdade que todo quadrilátero convexo, cujas diagonais são perpendiculares, seja um losango, como pode ser verificado na Figura 61.

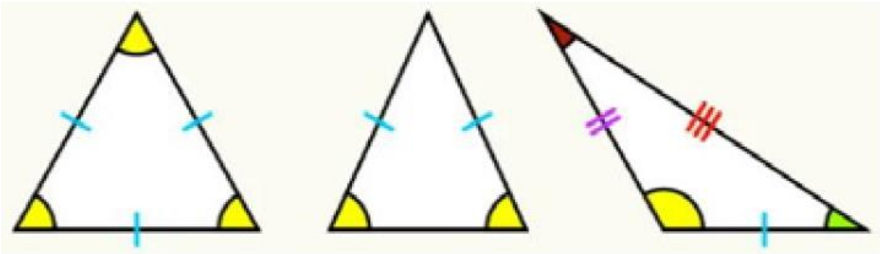
Figura 61 – Quadrilátero com diagonais perpendiculares



Fonte: O autor, 2024.

O *Material RioEduca* (SMERJ, 2024), material didático fornecido aos estudantes da Prefeitura do Rio de Janeiro, ao classificar os tipos de triângulos *quanto aos lados*, os ilustra dando destaques aos lados e aos ângulos internos (Figura 62).

Figura 62 –



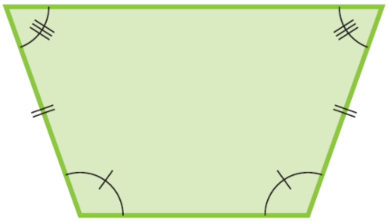
Diferentes tipos de triângulos

Fonte: Secretaria Municipal de Educação, 2024, p.115.

O destaque, neste caso, deveria ser exclusivo aos lados, contudo as figuras também ilustram relações entre medidas de ângulos. Neste caso, ângulos sombreados com a mesma cor, em um mesmo triângulo, significam medidas iguais; caso contrário, significam medidas diferentes. No caso do triângulo equilátero, por exemplo, é fato que os ângulos internos possuem medidas iguais, mas isso é uma propriedade que decorre do fato de os lados serem congruentes. A característica fundamental de um triângulo equilátero é possuir lados congruentes, e não ângulos congruentes.

O mesmo acontece com a representação do triângulo isósceles. O fato de os ângulos da base possuírem medidas iguais decorre do fato de os lados opostos a esses ângulos serem congruentes. A característica fundamental de um triângulo isósceles é possuir pelo menos dois lados congruentes, e não dois ângulos congruentes. Por fim, o que ocorre na representação do triângulo escaleno é análogo aos demais casos, ou seja, há destaques nos ângulos com o intuito de chamar a atenção para suas medidas, o que é um equívoco quando o que está em discussão são os lados. Algo semelhante ocorre na representação do trapézio isósceles da Figura 63.

Figura 63 – Representação de um trapézio isósceles



Fonte: SILVEIRA, 2018, p. 223.

Silveira (2018), ao representar este tipo de trapézio, o faz dando, também, destaques aos ângulos das bases. É possível observar marcações iguais nos ângulos adjacentes a uma mesma base, de onde se conclui que ângulos adjacentes a uma mesma base possuem medidas iguais.

O fato de os ângulos adjacentes a uma mesma base serem congruentes é uma propriedade decorrente do fato de o trapézio possuir laterais congruentes e, ao se representar um trapézio desta natureza, o que a figura deve ilustrar, além de um único par de lados paralelos, são as laterais congruentes, e não qualquer propriedade que decorra deste fato.

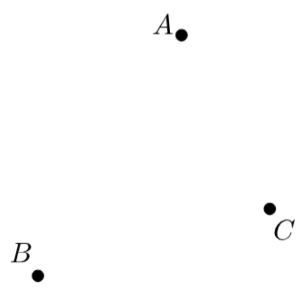
3. REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA E LINGUAGEM MATEMÁTICA

Tão importante quanto representar pictoricamente os objetos geométricos de forma adequada, é nomeá-los de forma correta em linguagem matemática. Nesse sentido, este capítulo apresenta parte da linguagem matemática básica utilizada para se expressar um objeto (Seção 3.1), segundo os estudos da gramática da linguagem matemática (CUNHA; VELASCO, 2019), além de expressar os objetos geométricos tratados no Capítulo 1, do ponto de vista dessa linguagem (Seção 3.2). Como é apresentado no Capítulo 4, uma boa escrita pode inclusive auxiliar na confecção de figuras adequadas para os objetos geométricos tratados neste texto.

3.1. Elementos básicos

Os *pontos* são usualmente representados, em linguagem matemática, por letras latinas maiúsculas; por exemplo, A, B e C (Figura 64).

Figura 64 – Três pontos no plano

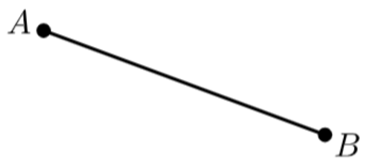


Fonte: O autor, 2024.

Os *segmentos de reta*, por sua vez, são nomeados por meio da justaposição dos nomes de seus extremos. Sua medida, por sua vez, pode ser nomeada através do acréscimo do suprafixo[16] “$-$” ao nome do segmento. Por exemplo, o segmento de reta de extremos A e B (Figura 65) pode ser nomeado tanto por AB quanto por BA e sua medida, por exemplo, por $\overline{AB}$ (ou por $m(AB)$).

[16] “Em português, o prefixo ‘supra’ indica acima de. Um suprafixo na linguagem matemática é uma palavra que é colocada ‘acima’ de outra palavra” (CUNHA; VELASCO, 2019, p. 47).

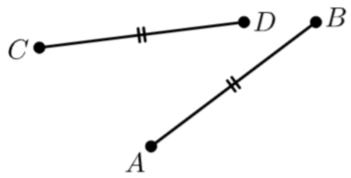
Figura 65 – Segmento de reta AB



Fonte: O autor, 2024.

Para indicar a *congruência de dois segmentos*, utiliza-se a palavra “$\equiv$”. Por exemplo, $AB \equiv CD$ significa que os segmentos de reta AB e CD são congruentes. Vale lembrar que isto equivale a dizer que os segmentos AB e CD têm a mesma medida (isto é, $\overline{AB} = \overline{CD}$). Pictoricamente, utiliza-se uma mesma marcação[17] no interior de dois ou mais segmentos para indicar que eles são congruentes (Figura 66), como dito anteriormente.

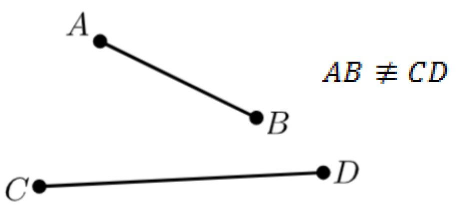
Figura 66 – Segmentos AB e CD congruentes



Fonte: O autor, 2024.

Para representar, em linguagem matemática, que dois segmentos não são congruentes, acrescenta-se o sobrefixo[18] de negação “$/$” à palavra “$\equiv$” (CUNHA; VELASCO, 2019, p. 47). Por exemplo, $AB \not\equiv CD$ significa que os segmentos de reta AB e CD não são congruentes (Figura 67). Vale ressaltar que isto é equivalente a tais segmentos possuírem medidas distintas (isto é, $\overline{AB} \neq \overline{CD}$).

Figura 67 – Segmentos AB e CD não congruentes



Fonte: O autor, 2024.

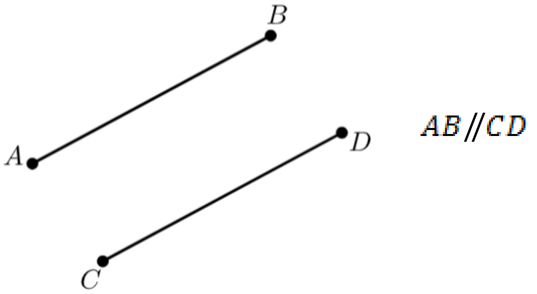
---

[17] Uma mesma marcação, como a utilizada na Figura 66, não pode estar sozinha, pois o seu objetivo é comparar, em congruência, pelo menos dois segmentos. Dessa forma, é necessário que dois ou mais segmentos sejam congruentes para que uma mesma marcação seja utilizada.

[18] “Em português, o prefixo ‘sobre’ indica *em cima de*. Um sobrefixo na linguagem matemática é uma palavra que é colocada ‘em cima’ de outra palavra” (CUNHA; VELASCO, 2019, p. 47).

O paralelismo de dois segmentos (ou de duas retas, ou de dois planos, por exemplo) é indicado por "$/\!/$". Sendo assim, a expressão como $AB /\!/ CD$ significa que os segmentos de reta AB e CD são paralelos (Figura 68).

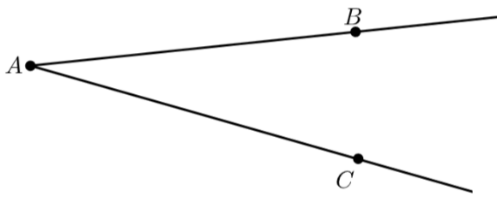
Figura 68 – Segmentos de reta paralelos



Fonte: O autor, 2024.

Os *ângulos* costumam ser nomeados conhecendo-se o seu vértice e os pontos (distintos do vértice) pelos quais seus lados passam. Sendo assim, o ângulo de vértice A, cujos lados passam por B e C, pode ser nomeado por $\angle BAC$ (Figura 69). Sua medida, por sua vez, pode ser nomeada por $B\hat{A}C$ ou $\overline{\overset{\frown}{BAC}}$.

Figura 69 – Ângulo $\angle BAC$



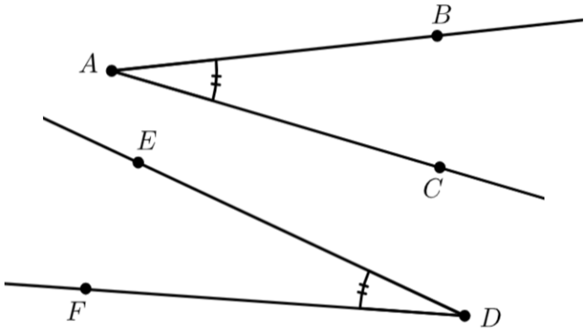
Fonte: O autor, 2024.

Assim como para segmentos congruentes, para indicar que dois ângulos são congruentes, também se utiliza a palavra "$\equiv$". Por exemplo, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ significa que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ são congruentes. Vale lembrar que isto equivale a dizer que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ têm a mesma medida (isto é, $B\hat{A}C = E\tilde{D}F$). Pictoricamente, utiliza-se uma mesma marcação no interior da abertura de tais ângulos para indicar que eles são congruentes (Figura 70).

Os *polígonos*, por sua vez, são nomeados por meio da justaposição dos nomes de seus vértices, *segundo a ordem em que eles estão ligados*. Por exemplo, a Figura 71-a ilustra um pentágono, de vértices A, B, C, D e E, que estão ligados A a B, B a C, C a D, D a E e E a A.

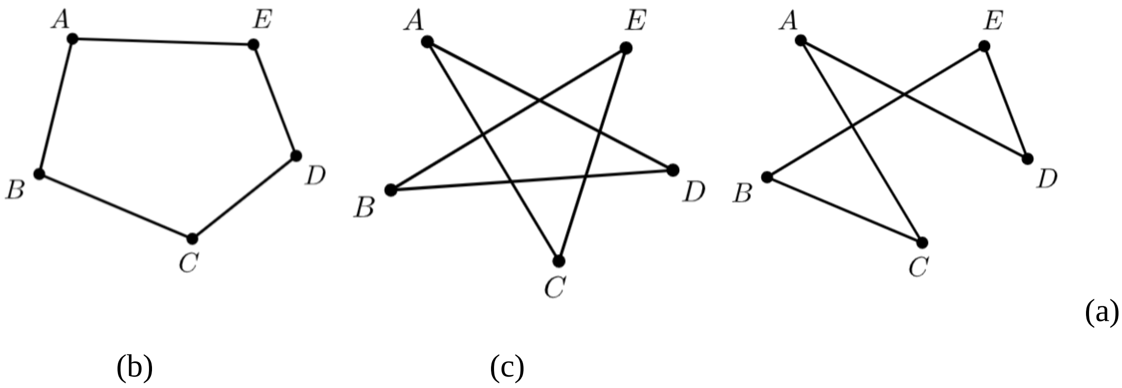
Portanto, o nome desse pentágono pode ser, por exemplo, $ABCDE$. Por outro lado, considerando os mesmos vértices, os pentágonos $ACEBD$ e $ACBED$ são diferentes do anterior, sendo ilustrados, respectivamente, nas Figuras 71-b e 71-c.

Figura 70 – Ângulos congruentes



Fonte: O autor, 2024.

Figura 71 – Diferentes pentágonos



Fonte: O autor, 2024.

3.2. Triângulos e quadriláteros

Após a apresentação da linguagem matemática e da representação pictórica relativas aos elementos geométricos básicos (apresentados na seção anterior), é possível retornar aos objetos geométricos abordados no Capítulo 1 (a saber, triângulos e quadriláteros) do ponto de vista da linguagem matemática, o que auxilia na identificação de figuras adequadas para representar cada conceito (como apresentado adiante, no Capítulo 4). Nesta seção, optou-se por não utilizar figuras para ilustrar conceitos, pois estes já foram devidamente exemplificados no Capítulo 1.

Como polígonos são usualmente nomeados pela justaposição dos nomes de seus vértices, os triângulos seguem esse mesmo padrão. Portanto, dados três pontos não colineares A, B e C, a palavra ABC nomeia o triângulo de vértices nesses três pontos, cujos lados são os segmentos AB, BC e CA (com medidas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente). Além disso, os ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ são seus ângulos internos, cujas medidas são $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, respectivamente. É muito comum encontrar na literatura a palavra ΔABC para nomear um triângulo. Embora não esteja incorreto, o acréscimo da letra "Δ" é desnecessário (considerado, portanto, um pleonasmo, uma redundância), devido ao padrão de nomeação de um polígono qualquer.

Com respeito à classificação de triângulos em relação a seus lados (Seção 1.1, p. 17), um triângulo equilátero ABC é aquele que $AB \equiv BC$, $BC \equiv CA$ e $CA \equiv AB$ (isto é, seus lados são dois a dois congruentes). Devido à transitividade[19] da congruência de segmentos, pode-se escrever, de forma sinônima, que $AB \equiv BC \equiv CA$. Um triângulo isósceles ABC, por sua vez, é aquele que $AB \equiv BC$ ou $BC \equiv CA$ ou $CA \equiv AB$ (isto é, pelo menos dois de seus lados são congruentes). Um triângulo escaleno ABC, por fim, é aquele que $AB \not\equiv BC$, $BC \not\equiv CA$ e $CA \not\equiv AB$ (ou seja, seus lados são dois a dois não congruentes). É importante destacar que, como a negação da relação de congruência não é transitiva, *não se pode escrever*, de forma equivalente, que $AB \not\equiv BC \not\equiv CA$ (pois, se $AB \not\equiv BC$ e $BC \not\equiv CA$, não necessariamente $AB \not\equiv CA$, conforme exemplo ilustrado na Figura 22); no entanto, a expressão $AB \not\equiv BC \not\equiv CA \not\equiv AB$ indica, de forma sinônima, que os lados do triângulo ABC são dois a dois não congruentes.

Já com respeito a seus ângulos internos (Seção 1.1, p. 18), um triângulo acutângulo ABC é aquele que $C\hat{A}B < 90°$, $A\hat{B}C < 90°$ e $B\hat{C}A < 90°$ (isto é, todos os seus ângulos internos são agudos). Pode-se ainda escrever, de forma sinônima, a expressão $C\hat{A}B, A\hat{B}C, B\hat{C}A < 90°$. Um triângulo obtusângulo ABC, por seu turno, é aquele que, ou $C\hat{A}B > 90°$ ou $A\hat{B}C > 90°$ ou $B\hat{C}A > 90°$ (ou seja, algum de seus ângulos internos é obtuso). Um triângulo retângulo ABC, por sua vez, é aquele que, ou $C\hat{A}B = 90°$ ou $A\hat{B}C = 90°$ ou $B\hat{C}A = 90°$ (isto é, algum de seus ângulos internos é reto).

[19] Se um segmento é congruente a um segundo e este é congruente a um terceiro, então o primeiro é congruente ao terceiro.

Com relação aos quadriláteros, dados A, B, C e D quatro pontos não colineares três a três, $ABCD$ nomeia o quadrilátero de vértices nesses quatro pontos, cujos lados são os segmentos AB, BC, CD e DA (com medidas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente). Além disso, os ângulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são seus ângulos internos, cujas medidas são $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$, respectivamente.

Um paralelogramo (p. 20) $ABCD$ é um quadrilátero em que $AB /\!/ CD$ e $BC /\!/ DA$ (isto é, cujos lados opostos são paralelos). Dentre os paralelogramos notáveis, um retângulo (p. 21) $ABCD$ é um paralelogramo de forma que $D\hat{A}B = 90°$, $A\hat{B}C = 90°$, $B\hat{C}D = 90°$ e $C\hat{D}A = 90°$ (isto é, cujos ângulos internos são retos). De forma sinônima, $D\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A = 90°$. Já um losango (p. 21) $ABCD$ é um paralelogramo de modo que $AB \equiv BC$, $BC \equiv CD$, $CD \equiv DA$ e $DA \equiv AB$ (ou seja, cujos lados são dois a dois congruentes). Novamente, devido à transitividade da congruência de segmentos, pode-se escrever, de forma sinônima, $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$. Por fim, um quadrado (p. 21) $ABCD$ é um paralelogramo de modo que $AB \equiv BC$, $BC \equiv CD$, $CD \equiv DA$ e $DA \equiv AB$ e $D\hat{A}B = 90°$, $A\hat{B}C = 90°$, $B\hat{C}D = 90°$ e $C\hat{D}A = 90°$ (ou seja, cujos lados são dois a dois congruentes e cujos ângulos internos são retos). De forma sinônima, $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ e $D\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A = 90°$.

Por outro lado, um trapézio (p. 22) $ABCD$ é um quadrilátero em que, ou $AB /\!/ CD$ ou $BC /\!/ DA$ (isto é, que possui apenas um par de lados paralelos). Para o que se segue, supõe-se que o trapézio possui os lados AB e CD paralelos. Um trapézio isósceles (p. 22) $ABCD$ é aquele que $BC \equiv DA$ (isto é, cujas laterais são congruentes). Um trapézio escaleno (p. 22) $ABCD$, por sua vez, é aquele que $BC \not\equiv DA$ (ou seja, cujas laterais não são congruentes). Um trapézio retângulo (p. 23) $ABCD$, por fim, é aquele que, ou $D\hat{A}B = C\hat{D}A = 90°$ ou $A\hat{B}C = B\hat{C}D = 90°$ (isto é, alguma de suas laterais determina ângulos retos com as bases).

4. SUGESTÕES DE FIGURAS PARA TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Depois de apresentadas as definições dos objetos geométricos (Capítulo 1) e alguns problemas com suas respectivas representações (Capítulo 2), este capítulo apresenta uma proposta de figuras (representações pictóricas) consideradas adequadas para a ilustração das definições dos referidos objetos geométricos.

Para isso, é importante que, para cada objeto, sejam apresentadas diferentes figuras e em posições distintas, com o intuito de priorizar as características do objeto em detrimento da posição em que ele se encontra. Esta prática visa minimizar a ocorrência do primeiro problema tratado no Capítulo 2, a saber, a utilização de figuras repetitivas e na mesma posição (Seção 2.1), o que pode levar o leitor a considerar que a posição define o objeto (não as características fundamentais que ele possui) e, portanto, o que deve ser destacado em uma figura são as informações relevantes à classificação que esta recebe.

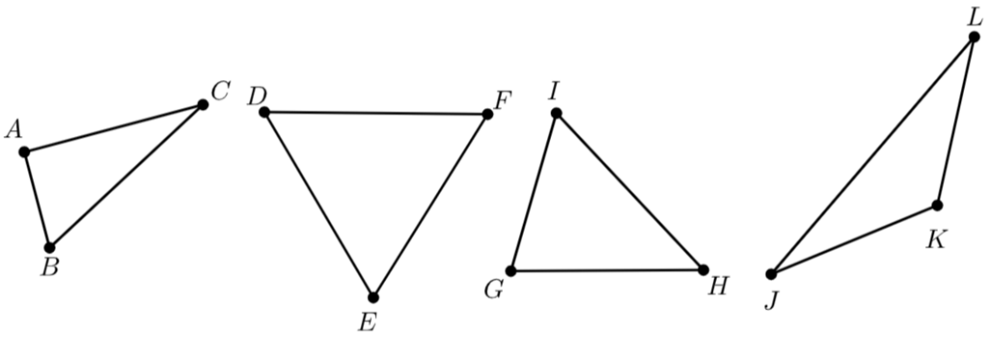
Complementarmente, *para representar o conceito de determinado objeto*, deve-se ainda evitar acrescentar informações desnecessárias, como propriedades que ele possui, mas que são apenas consequências da definição (e não oriundas diretamente desta). Tal atitude pode minimizar o quarto problema identificado no Capítulo 2, a saber, a representação de propriedades em vez de apenas a definição propriamente dita (Seção 2.4). Como visto, isso pode causar distorções na compreensão da definição do objeto, levando a um aprendizado inadequado deste.

Para que as figuras possam expressar adequadamente um conceito, elas precisam ser completas (isto é, devem expor de forma clara e precisa todos os elementos que constituem a definição), de modo que o leitor não seja induzido a interpretações equivocadas do que está ilustrado. Tal atitude pode minimizar a ocorrência do segundo problema (Seção 2.2). Para isso, pode-se fazer uso tanto de elementos pictóricos específicos (como as marcações de congruência e de ângulo reto, por exemplo) quanto de linguagem matemática (de acordo com o abordado no Capítulo 3). Também deve-se evitar utilizar elementos que não constituem o objeto que se deseja representar (como por exemplo, sombrear a região limitada por um polígono), atitude que pode minimizar a ocorrência do terceiro problema (Seção 2.3). Com todas essas intervenções, pretende-se reduzir a ocorrência de todos os problemas identificados no Capítulo 2. Sendo assim, este capítulo apresenta diferentes representações adequadas de triângulos (Seção 4.1) e de quadriláteros (Seção 4.2), a fim de que a representação pictórica do objeto tratado reflita de forma clara o seu conceito.

4.1. Triângulos

Como discutido no Capítulo 1, triângulos são polígonos que possuem três lados. Não há, nesta definição, uma imposição de que algum lado tenha que ficar na horizontal. Portanto, sugere-se que sejam apresentadas figuras que o ilustrem em diferentes posições (Figura 72). Pode-se, inclusive, utilizar a representação tradicional (a saber, com um lado horizontal e o terceiro vértice acima de tal lado, como o triângulo GHI) como uma delas; o que se desaconselha é usar apenas esta. Além disso, é importante utilizar triângulos de diferentes formatos (de diferentes naturezas), mesmo que tais conceitos ainda não tenham sido apresentados.

Figura 72 – Representações diferentes de triângulos



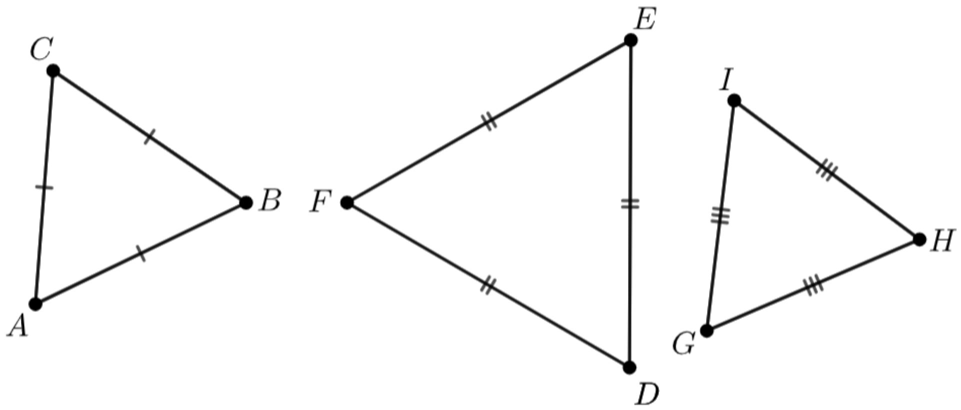
Fonte: O autor, 2024.

A julgar apenas pela aparência (visto que não existem elementos complementares, pictóricos ou em linguagem matemática, que levem o leitor a concluir precisamente qual a natureza de tais triângulos, como marcações de ângulo reto ou mesmo de congruência), os triângulos ABC, DEF, GHI e JKL, se parecem com um triângulo escaleno retângulo, um triângulo equilátero (e, portanto, acutângulo), um triângulo escaleno acutângulo e um triângulo isósceles obtusângulo, respectivamente. Esta variedade de figuras é importante para que o leitor não crie a ideia de que triângulos possuem apenas um formato ou que devem ser apresentados sempre com os lados na mesma posição.

Em relação aos tipos específicos de triângulos, são tratadas, a seguir, as representações pictóricas sugeridas para cada uma das classes com respeito aos lados.

Particularmente em relação aos triângulos equiláteros, sua representação pictórica deve deixar claro que todos os lados são congruentes (isto é, que possuem o mesmo comprimento). Para tal, podem ser utilizadas as marcações de congruência (isto é, pequenos traços no interior dos segmentos). A quantidade dos pequenos traços é indiferente, desde que a mesma quantidade seja praticada em cada um dos lados de um mesmo triângulo. Nesse caso, não é necessário acrescentar qualquer informação adicional (em linguagem matemática, por exemplo) para dizer que os lados são congruentes, bem como qualquer informação sobre outros elementos do triângulo, como as medidas de seus ângulos, por exemplo. O fato de não ser necessária a utilização de linguagem matemática para complementar a figura não impede que seja escrito, ao lado do triângulo, a informação de que os lados são congruentes, como forma de explicitar o significado dos traços feitos nos lados do triângulo. No entanto, deve-se, sempre que possível, construir figuras limpas e com o menor número de informações possível, para facilitar sua compreensão. A Figura 73 apresenta algumas sugestões de representação para este tipo de triângulo.

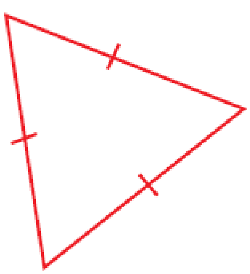
Figura 73 – Representações de triângulos equiláteros



Fonte: O autor, 2024.

Bianchini (2018), ao ilustrar um triângulo equilátero, utiliza uma única figura (Figura 74).

Figura 74 – Triângulo equilátero



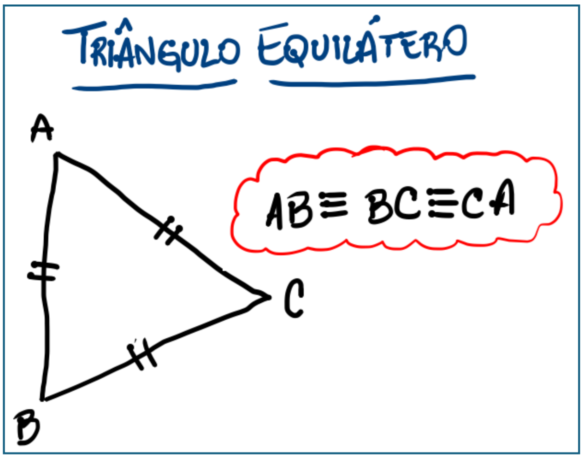
Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 257.

Esta figura pode ser considerada uma boa sugestão de representação, já que não apresenta sua região interna sombreada e não apresenta lados na horizontal, descaracterizando a ideia de que um triângulo seja uma superfície e de que um dos seus lados deve sempre figurar na horizontal.

Ao representar figuras em materiais didáticos (como livros, por exemplo), é comum a utilização de *softwares* (como o *Geogebra*) que auxiliam na construção de tais figuras. Com isso, é possível produzir ilustrações com grande qualidade, refletindo perfeitamente o que se deseja expressar pictoricamente. Por exemplo, triângulos equiláteros feitos nesse tipo de *software* possuem, de fato, lados congruentes. No entanto, em um ambiente de sala de aula, nem sempre o professor (ou mesmo o aluno) dispõe de materiais (como régua e compasso) que os auxiliam na construção de figuras. Dessa forma, mesmo a mão livre, espera-se que a figura seja construída o mais parecido possível com o objeto que se queira representar, respeitando-se, evidentemente, o nível de habilidade de quem faz o desenho.

Neste caso, é possível que o desenho construído não tenha linhas precisamente retas e congruentes. Isto não é um problema, pois este desenho é uma representação de um objeto e, no caso do triângulo equilátero, as marcas feitas nos lados são o mais importante para a sua compreensão. Contudo, deve-se atentar para que um lado não fique muito maior do que o outro, pois, ainda que sejam utilizadas marcas nos lados para representar a congruência entre eles, a discrepância entre o que se deseja representar e a figura pode gerar dúvidas. A Figura 75 representa um triângulo construído com o auxílio de uma mesa digitalizadora, feito a mão livre, com o intuito de simular um triângulo equilátero feito por um professor em sua aula (ou mesmo por um aluno, em seu caderno).

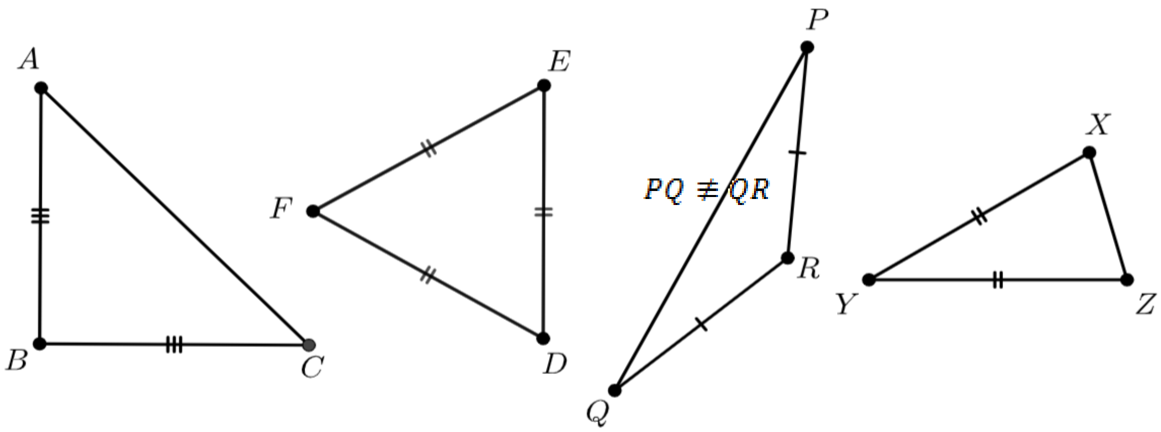
Figura 75 – Representação de um triângulo equilátero com o auxílio de mesa digitalizadora



Fonte: O autor, 2024

Já para os triângulos isósceles, o fundamental que deve ser expresso é que ele possui pelo menos dois de seus lados congruentes. Além disso, algumas questões devem ser consideradas ao representá-lo, como evitar desenhar o terceiro lado na horizontal, a fim de não se construir a ideia de que um triângulo isósceles sempre tem um lado de medida diferente dos demais e que este deve estar na horizontal. Outra questão que deve ser explorada na representação é o fato de que entre dois lados congruentes pode haver um ângulo agudo, obtuso ou reto, mas, nesses casos, não há necessidade de identificá-los como tal, visto que pelo menos dois lados congruentes é a característica fundamental do triângulo isósceles. Outro ponto que deve ser levado em consideração é o fato de que esse tipo de triângulo pode possuir três lados congruentes ou pode possuir apenas dois lados congruentes. Sendo assim, é interessante que sejam feitas figuras que ilustrem ambos os casos. A Figura 76 apresenta sugestões de representações pictóricas de triângulos isósceles de diferentes tipos.

Figura 76 – Representações diferentes de triângulo isósceles



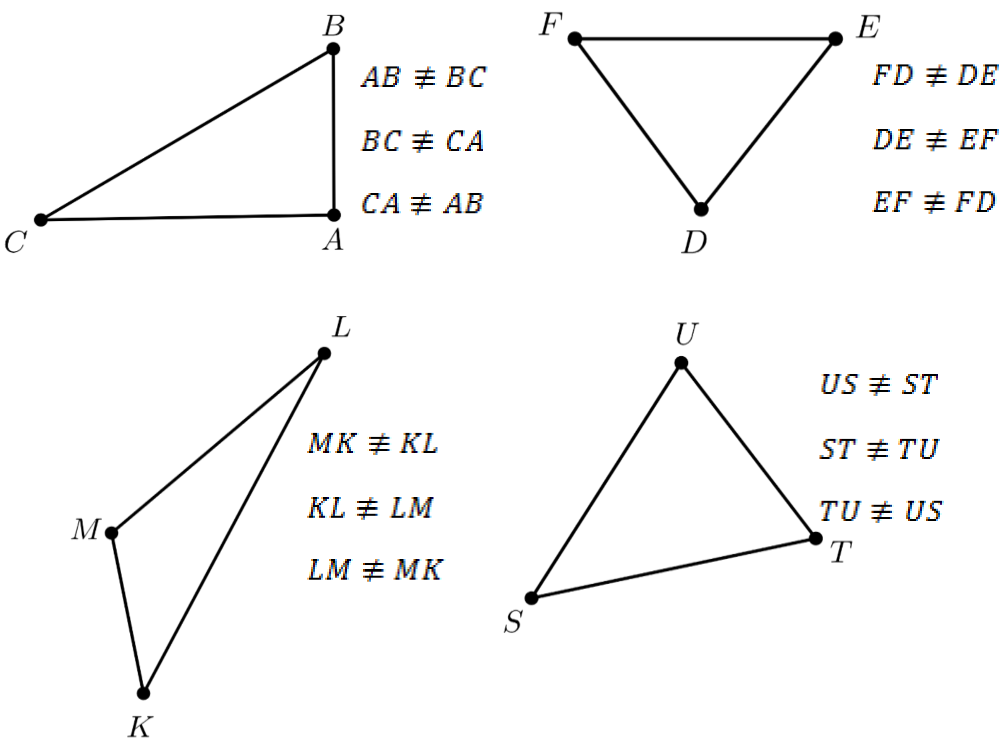
Fonte: O autor, 2024.

Todos os triângulos ilustrados na Figura 76 são isósceles, pois, em cada um deles, existem pelo menos duas marcações de congruência. A presença do triângulo equilátero DEF é importante para enfatizar que triângulos desse tipo também são isósceles. A informação, em linguagem matemática, para dizer que o lado PQ possui medida diferente dos demais (no triângulo PQR) é interessante, pois, neste caso, trata-se de um triângulo isósceles com apenas dois lados congruentes, fato que não ocorre com os triângulos ABC e XYZ, que possuem pelo menos dois lados congruentes. A julgar *apenas pela aparência* (visto que não existem informações a respeito dos ângulos internos), ABC, PQR e XYZ se parecem com um triângulo isósceles retângulo, um triângulo isósceles obtusângulo e um triângulo isósceles acutângulo, respectivamente. Novamente, essa variedade de figuras é importante para que o leitor não assimile a ideia (errônea) de que triângulos isósceles são sempre do mesmo tipo ou que estão sempre na mesma posição. Embora o triângulo XYZ possua um lado na horizontal (a saber, o lado YZ), este não é o *terceiro lado* (isto é, aquele eventualmente não congruente aos demais), evitando assim o posicionamento padrão.

Para os triângulos escalenos, foi visto na Seção 2.3 (p. 44) que não é adequado usar marcas diferentes para indicar medidas diferentes. Portanto, neste tipo de triângulo, o uso de linguagem matemática é essencial para que a informação de que os lados são dois a dois não congruentes seja transmitida de forma clara e inequívoca. Para isso, basta que se acrescente esse dado próximo à figura.

É importante ainda utilizar diferentes figuras para compreender o conceito de triângulo escaleno, já que segmentos de comprimentos diferentes podem ter tanto medidas próximas umas das outras quanto bastante diferentes. A exemplo deste fato, um triângulo de lados medindo 10 cm, 10,1 cm e 10,2 cm, se representado com as medidas reais, pode não deixar claro que se trata de um triângulo escaleno, pois ele se assemelha muito a um triângulo equilátero. Já um triângulo com medidas 5 cm, 9 cm e 13 cm, se representado com as medidas reais, é provável que seja identificado como um triângulo escaleno. A Figura 77 apresenta sugestões de representações pictóricas para triângulos escalenos.

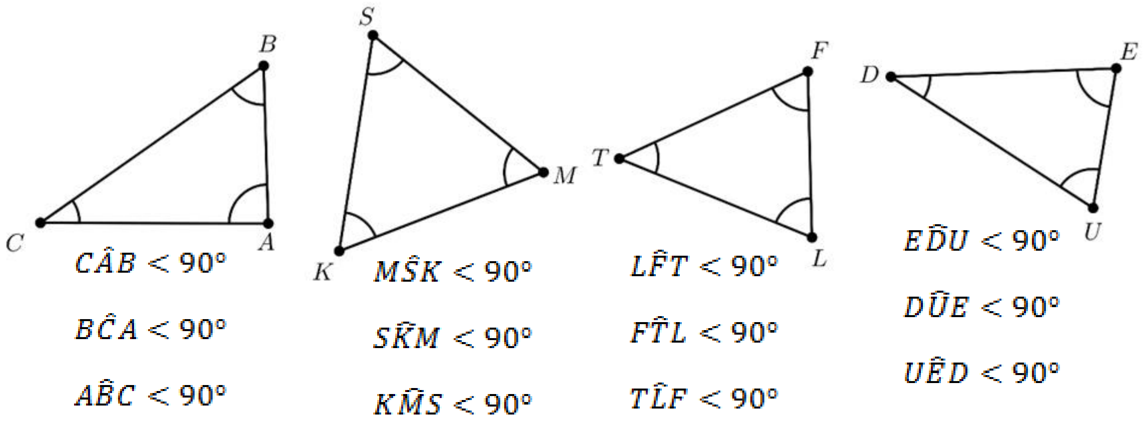
Figura 77 – Diferentes representações de triângulos



Fonte: O autor, 2024.

Agora, com respeito à classificação relativa aos ângulos internos, como visto na Seção 2.2 (Figura 46, p. 40), é importante lembrar que alguns ângulos agudos se assemelham muito a ângulos retos, ou até mesmo a ângulos obtusos. Sendo assim, particularmente para triângulos acutângulos, e considerando esse tipo de situação, é necessário que exista uma representação pictórica que possa ser utilizada *para qualquer triângulo acutângulo*, independentemente da existência de algum ângulo interno que se pareça com um ângulo reto ou não. Nesse sentido, para que se informe, de forma inequívoca, que um triângulo é acutângulo, deve-se acrescentar a informação, em linguagem matemática, de que os ângulos internos são todos agudos. A Figura 78 ilustra algumas sugestões de representações pictóricas para triângulos acutângulos.

Figura 78 – Representações diferentes de triângulos acutângulos



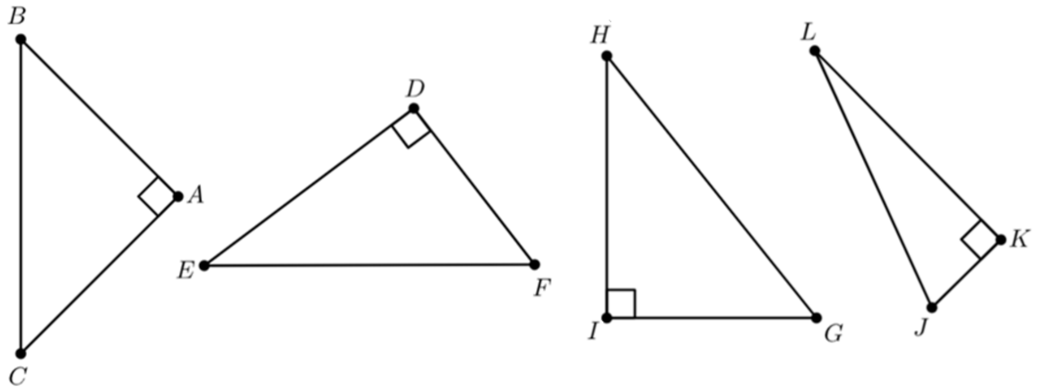
Fonte: O autor, 2024.

Como não existem informações a respeito das medidas dos lados, a julgar pela aparência, os triângulos KMS, FTL e EDU se assemelham a um triângulo equilátero (e, portanto, acutângulo), um triângulo isósceles acutângulo e um triângulo escaleno acutângulo, respectivamente. O triângulo ABC se assemelha a um triângulo retângulo (visto que a medida do ângulo $\angle CAB$ é próxima de 90º). Contudo, a informação, em linguagem matemática, de que $C\hat{A}B < 90°$, elimina qualquer dúvida sobre a figura. Embora não seja objeto de estudo deste trabalho discutir as propriedades que envolvem as medidas dos ângulos internos de um triângulo, e como, em Geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º, a quantidade de ternos de medidas de 0º a 90º e que somam 180º é infinita (visto que podem ser considerados valores inteiros ou não). Isto permite que triângulos acutângulos sejam representados de várias formas diferentes. Nesse sentido, o uso de linguagem matemática para eliminar qualquer possibilidade de dúvida é imprescindível.

É possível notar ainda na Figura 78 que foram utilizadas as indicações de abertura nos ângulos internos (que não devem ser confundidas com as marcações de congruência). Tal atitude, embora seja dispensável, pode servir para chamar a atenção do leitor para as informações que são relevantes nos triângulos, isto é, as informações que estão sendo consideradas (a saber, neste caso, que seus três ângulos internos são agudos).

Em relação aos triângulos retângulos, a complementação, em linguagem matemática, de que algum de seus ângulos é reto é desnecessária, visto que já existe um elemento pictórico específico para indicar que um ângulo é reto. A Figura 79 ilustra sugestões de figuras representativas de triângulos retângulos.

Figura 79 – Representação de diferentes triângulos retângulos



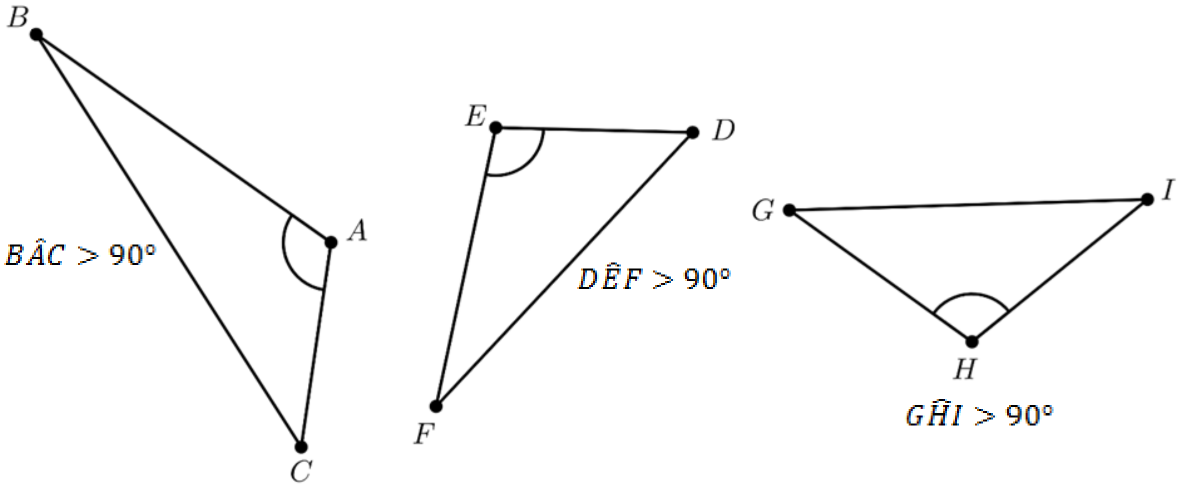
Fonte: O autor, 2024.

Novamente, a julgar pela aparência, o triângulo ABC se assemelha a um triângulo isósceles retângulo. Os demais, por sua vez, se parecem com triângulos escalenos retângulos.

Para os triângulos obtusângulos, a discussão é semelhante à feita para os acutângulos. O ideal é que se transmita a informação da presença de um ângulo obtuso de forma clara, acrescentando-a em linguagem matemática. A Figura 80 apresenta sugestões de figuras ilustrativas de triângulos obtusângulos.

Novamente, a julgar pela aparência, o triângulo GHI parece um triângulo isósceles obtusângulo, e os demais se assemelham a triângulos escalenos obtusângulos. Assim como para os triângulos acutângulos, foi utilizada a indicação de abertura no ângulo interno obtuso para chamar a atenção do leitor para essa informação.

Figura 80 – Representações diferentes de triângulos obtusângulos

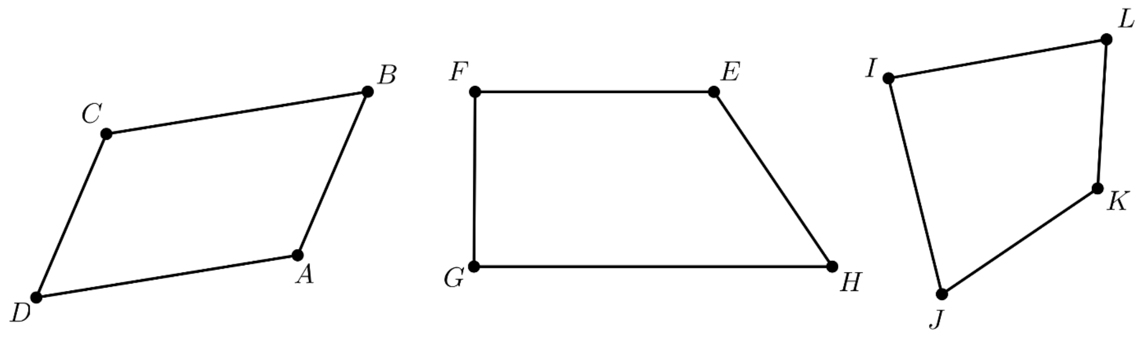


Fonte: O autor, 2024.

4.2. Quadriláteros

Após a definição de quadrilátero, sugere-se que sejam apresentadas figuras que o ilustrem em diferentes posições e formatos (Figura 81). Pode-se, inclusive, utilizar quadriláteros que se assemelhem aos tipos mais tratados (como paralelogramos e trapézios, por exemplo), com o intuito de já induzir os tipos especiais desse tipo de polígono. No entanto, sugere-se que não sejam apresentadas apenas figuras que representem os quadriláteros notáveis nesse primeiro momento, visando não induzir (erroneamente) que quadriláteros são sempre desses tipos específicos.

Figura 81 – Representações diferentes de quadriláteros



Fonte: O autor, 2024.

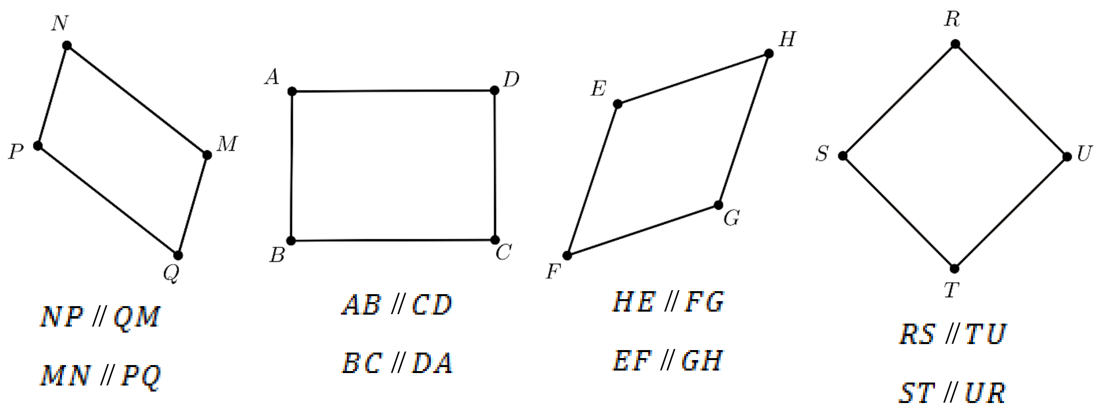
A julgar pela aparência (visto que não existem elementos complementares que levem o leitor a concluir precisamente qual a natureza de tais quadriláteros, como marcações de ângulo reto ou mesmo de congruência, ou indicações de paralelismo entre lados), o quadrilátero $IJKL$ da Figura 81 aparenta ser um quadrilátero de nenhuma natureza específica, enquanto os quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$ se parecem, respectivamente, com um paralelogramo e um trapézio retângulo.

Em relação aos tipos específicos de quadriláteros, são tratadas a seguir as representações pictóricas sugeridas para cada um deles.

Para a representação de um paralelogramo, o uso de linguagem matemática é indispensável. A ausência de linguagem matemática, neste caso, não permite que um paralelogramo seja adequadamente representado, visto que a informação de que os lados opostos são paralelos não é possível de ser dada de forma clara apenas com figuras e com elementos pictóricos específicos.

Além do uso de linguagem matemática, é importante apresentar outras figuras que não sejam a mais comum de todas (a saber aquela que apresenta um de seus maiores lados na horizontal, com os ângulos relativos a esse lado dispostos em um ângulo agudo à esquerda e um ângulo obtuso à direita, conforme visto na Seção 2.1, p. 33. Ao representar um paralelogramo com uma única figura, esta deve ser evitada. A sugestão é utilizar diferentes representações, inclusive as que se pareçam com tipos específicos de paralelogramo, como o retângulo, o quadrado e o losango. A Figura 82 apresenta algumas sugestões.

Figura 82 – Representações diferentes de um paralelogramo

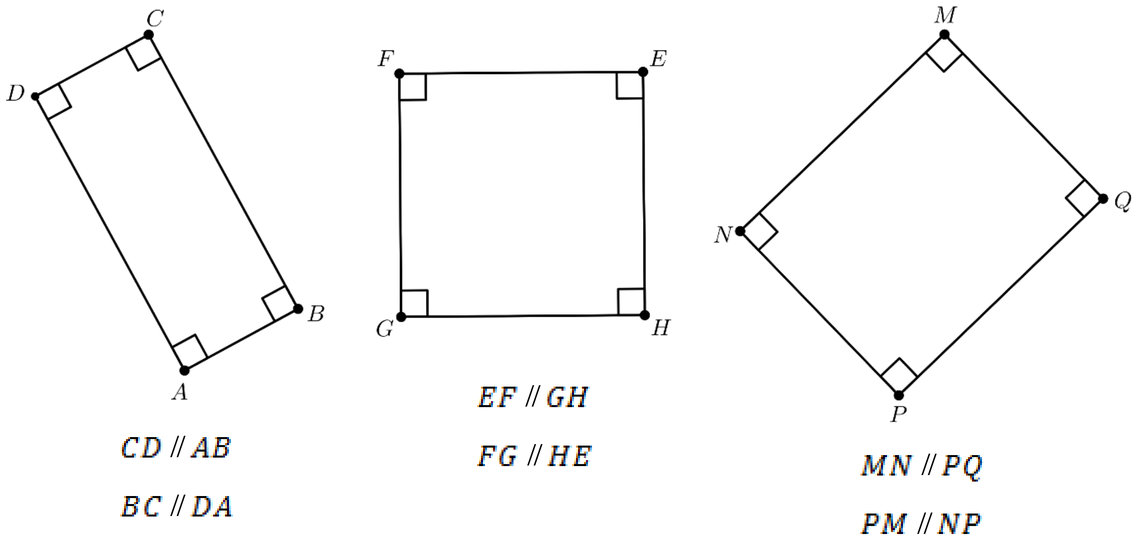


Fonte: O autor, 2024.

Devido à ausência de informações a respeito de congruência de lados e de medidas de ângulos internos, a julgar pela aparência, os quadriláteros $ABCD$, $EFGH$ e $RSTU$ se assemelham a um retângulo, um losango e um quadrado, respectivamente.

Particularmente em relação aos retângulos, é importante que, *em um primeiro momento*, sua representação pictórica seja acompanhada da informação (em linguagem matemática) de que seus lados opostos são paralelos (pois, de acordo com sua definição, retângulo é um *paralelogramo* cujos ângulos internos são retos). Além disso, a informação clara de que os quatro ângulos internos são retos (realizada por meio do acréscimo de elemento pictórico específico) não pode ser dispensada. A Figura 83 ilustra algumas sugestões de representações de retângulos.

Figura 83 – Diferentes representações de retângulos



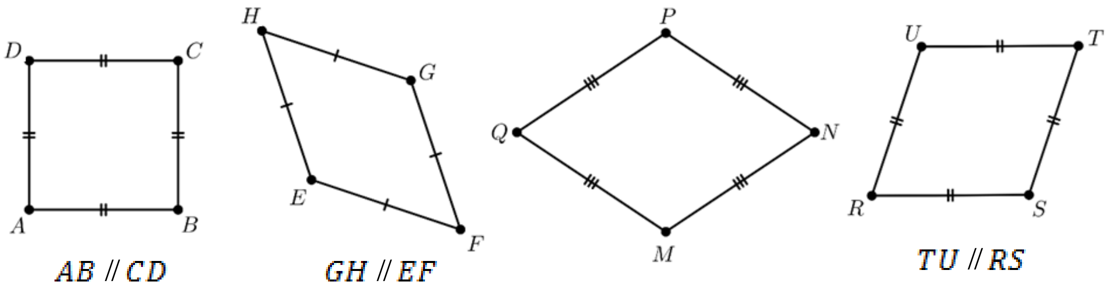
Fonte: O autor, 2024.

Nota-se que, a julgar pela aparência (visto que não existem informações relativas às medidas dos lados), o retângulo $EFGH$ se assemelha a um quadrado. Colocá-lo como um exemplo possível de representação de um retângulo é importante, pois todo quadrado é um retângulo.

É importante destacar que a informação de que seus lados opostos são paralelos pode ser suprimida *a partir do momento que ela se tornar natural* (principalmente para os alunos). No entanto, como dito anteriormente, sugere-se mantê-la quando a definição for apresentada.

Com respeito aos losangos, é sabido que sua forma e posição usuais de representação são tipo um “balão em pé” (como dito anteriormente, Seção 2.1, p. 32). Sendo assim, sugere-se, ao representar esse quadrilátero, que se evite essa figura, sob pena de se reforçar inadequadamente uma mesma forma para ele. Além disso, assim como para os retângulos, *em um primeiro momento*, sugere-se acrescentar a informação (em linguagem matemática) de que seus lados opostos são paralelos. Quanto ao fato de que seus lados são congruentes (isto é, que esse quadrilátero é equilátero), é fundamental o acréscimo dos elementos pictóricos específicos de marcações de congruência. A Figura 84 ilustra algumas sugestões de losangos.

Figura 84 – Representações diferentes de losangos



$AB \mathbin{/\!/} CD$ $\quad$ $DA \mathbin{/\!/} BC$

$GH \mathbin{/\!/} EF$ $\quad$ $HE \mathbin{/\!/} FG$

$PQ \mathbin{/\!/} MN$ $\quad$ $NP \mathbin{/\!/} QM$

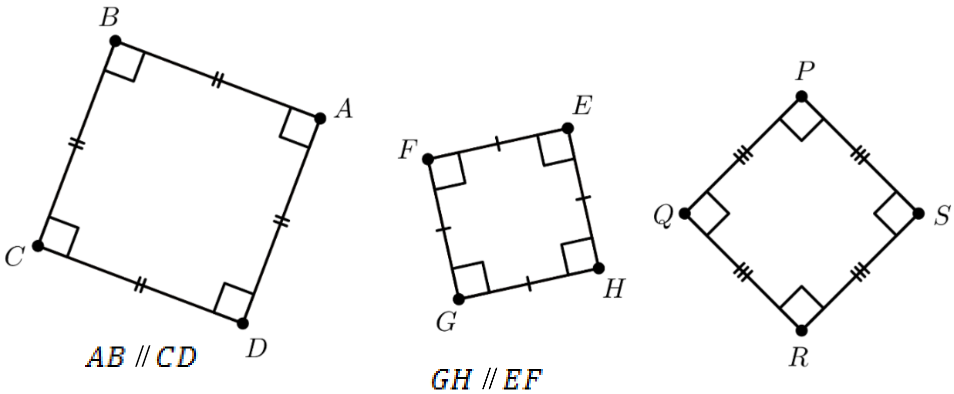
$TU \mathbin{/\!/} RS$ $\quad$ $UR \mathbin{/\!/} ST$

Fonte: O autor, 2024.

A julgar pela aparência (visto que não existem elementos que garantam que os ângulos são retos), o losango $ABCD$ se assemelha a um quadrado (um caso particular de losango). Novamente, assim como para os retângulos, a informação de que os lados opostos de um losango são paralelos pode ser suprimida *a partir do momento que ela se tornar natural*.

Já em relação aos quadrados, as sugestões de representações pictóricas devem ser condizentes às de losangos e retângulos, visto que quadrados são também polígonos desses dois tipos. Além disso, como os quadrados são polígonos regulares (isto é, aqueles que são equiláteros e equiângulos), um só difere do outro pelo tamanho de seus lados (em outros termos, dois quadrados quaisquer são semelhantes entre si). A Figura 85 ilustra exemplos de representações de quadrados.

Figura 85 – Diferentes representações de quadrados



$AB \mathbin{/\!/} CD$ $\quad$ $BC \mathbin{/\!/} DA$

$GH \mathbin{/\!/} EF$ $\quad$ $FG \mathbin{/\!/} HE$

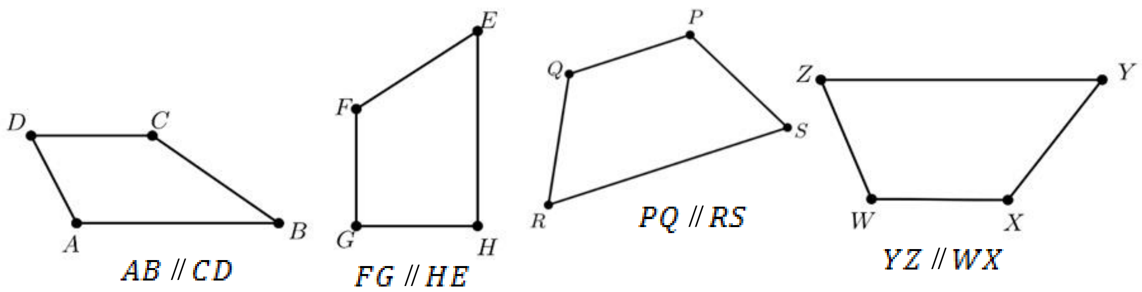
$PQ \mathbin{/\!/} RS$ $\quad$ $QR \mathbin{/\!/} SP$

Fonte: O autor, 2024.

Assim como para retângulos e losangos, a informação de que os lados opostos de um quadrado são paralelos pode ser suprimida *a partir do momento que ela se tornar natural*.

Por fim, em relação ao trapézio, é sabido que muitos materiais didáticos ilustram esse quadrilátero com as bases sempre na horizontal, não importando o tipo de trapézio que esteja sendo representado. Dessa forma, é importante apresentar trapézios de diferentes naturezas (isósceles, escaleno ou retângulo), mesmo sem apresentar informações que retratem tais tipos. Além disso, também é indispensável apresentar um exemplo de trapézio cujos ângulos relativos a uma mesma base sejam um agudo e um obtuso (pois este é um exemplo muito pouco conhecido), como o trapézio escaleno $ABCD$ da Figura 86. Também é imprescindível acrescentar a informação, em linguagem matemática, de que as bases são segmentos paralelos. A Figura 86 ilustra alguns exemplos.

Figura 86 – Representação de diferentes trapézios



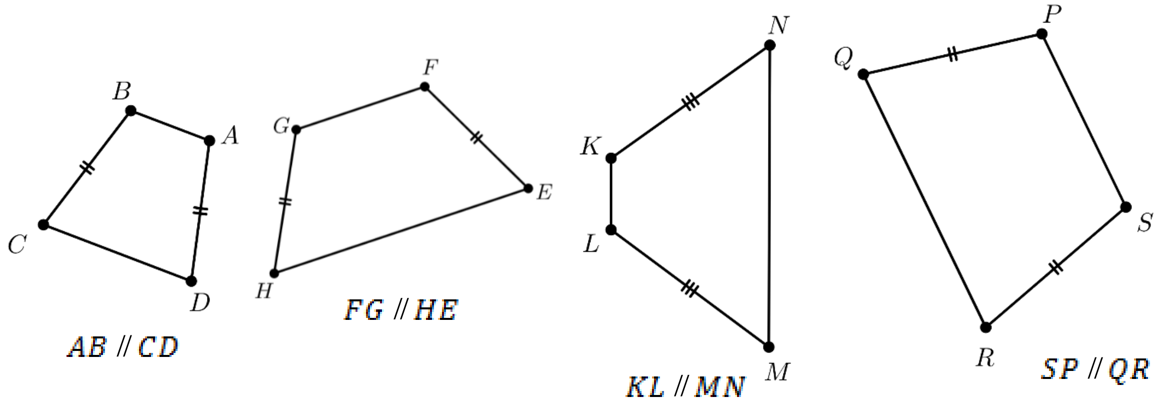
Fonte: O autor, 2024.

A julgar pela aparência (visto que não há qualquer informação expressa pictoricamente ou em linguagem matemática), os trapézios $ABCD$, $EFGH$ e $XYZW$ se assemelham a um trapézio retângulo (e, portanto, escaleno), um trapézio isósceles e um trapézio escaleno, respectivamente.

Particularmente em relação ao trapézio isósceles, além da escrita, em linguagem matemática, de que dois de seus lados são paralelos (por esse polígono ser um trapézio), é necessário ilustrar que suas laterais são congruentes, o que pode ser feito acrescentando-se a tais lados uma mesma marcação indicativa de congruência.

Assim como para os demais polígonos, é aconselhável explorar figuras em diferentes posições, a fim de que este objeto possa ser reconhecido não pela posição, mas pelo paralelismo entre as bases e pelas laterais congruentes. A Figura 87 apresenta sugestões de figuras.

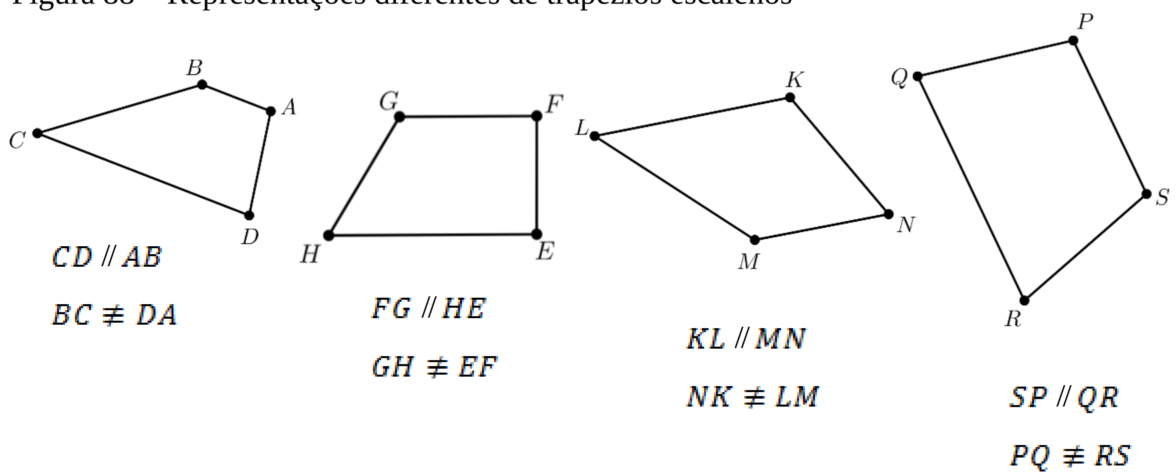
Figura 87 – Diferentes representações de trapézios isósceles



Fonte: O autor, 2024.

De forma análoga aos trapézios isósceles, para uma figura representar um trapézio escaleno, é necessário informar que dois de seus lados (as bases) são paralelos e que suas laterais são não congruentes. Como isto não é possível de ser feito apenas com representação pictórica, faz-se necessário o uso de linguagem matemática a fim de complementar a figura que representa este objeto. A Figura 88 apresenta algumas sugestões.

Figura 88 – Representações diferentes de trapézios escalenos

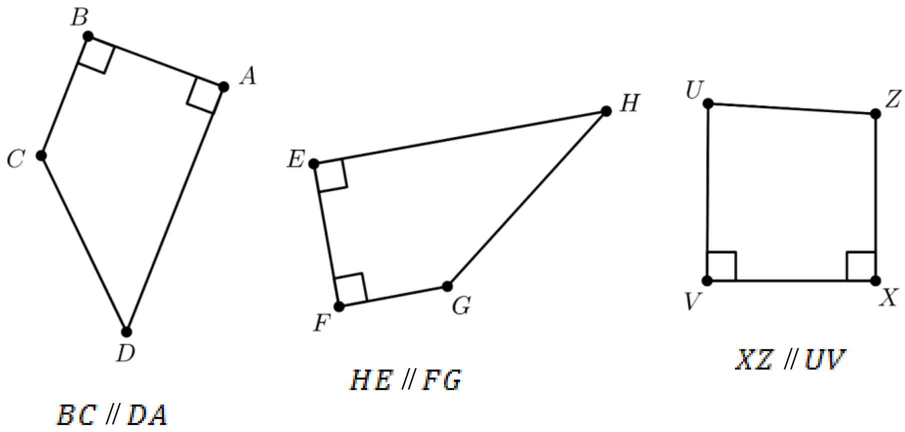


Fonte: O autor, 2024.

A julgar pela aparência, o trapézio $EFGH$ se assemelha a um trapézio retângulo. Além disso, o trapézio $PQRS$ aparenta ser um trapézio isósceles (desconsiderando a escrita em linguagem matemática que completa a figura). Isto porque os lados PQ e RS possuem medidas próximas uma da outra. Nesse sentido, a falta da informação de que as laterais não são congruentes deixaria a dúvida sobre qual tipo de trapézio se trata.

Por fim, para representar um trapézio retângulo, a figura deve mostrar que esse quadrilátero possui dois ângulos retos adjacentes a uma de suas laterais (o que pode ser feito utilizando-se elemento pictórico específico), bem como informar que suas bases são paralelas (em linguagem matemática, como dito anteriormente). Vale ressaltar que o fato de haver dois ângulos retos adjacentes a uma das laterais, faz com que as bases sejam inevitavelmente paralelas. Entretanto, faz-se necessário informar que as mesmas são paralelas, pois isso é uma característica fundamental de qualquer trapézio. A Figura 89 apresenta algumas sugestões.

Figura 89 – Representações diferentes de trapézios retângulos



Fonte: O autor, 2024.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetos geométricos (como ponto, reta, polígono, circunferência, etc.) são abstratos. Portanto, para que possam ser compreendidos de modo mais efetivo, as representações pictóricas desempenham um importante papel. Por isso, é imprescindível que a figura utilizada seja bem elaborada e que tenha informações precisas, de modo que não deixe dúvida sobre o objeto que ela representa, sob pena de não se obter o resultado que se deseja.

Ao longo deste trabalho, é possível perceber o quão importantes são a linguagem matemática e a representação pictórica na representação de objetos geométricos. É necessário que a pessoa que elabora uma figura o faça com responsabilidade, entendendo que ela é, para a pessoa que a lê, o objeto abstrato materializado. Um traço mal feito ou um sombreado equivocado pode levar o leitor a construir para si uma definição igualmente mal feita ou equivocada.

A Matemática começa a ser ensinada formalmente já nos anos iniciais e isto é feito, em grande parte, por professores que não têm formação na área, o que pode ser um fator relevante para que as figuras utilizadas neste momento sejam repetitivas e por vezes equivocadas. Este trabalho apresenta um pequeno resultado de uma pesquisa de opinião feita com professores que ensinam matemática (Apêndice A) e por meio desse resultado é possível perceber que uma parcela considerável de professores utiliza figuras inadequadas para representar alguns objetos geométricos ou não consegue enxergar outras possibilidades de figuras para representar um mesmo objeto. Isto pode indicar a necessidade de materiais didáticos passarem por uma reformulação no que diz respeito à elaboração das figuras no campo da Geometria.

Além disso, é importante que professores tenham acesso a materiais adequados, ou pelo menos aqueles que sejam mais responsáveis neste sentido. Além disso, como os materiais didáticos utilizados em sala de aula são elaborados por professores, é importante que eles revejam suas práticas, participando de formações e encontros onde há trocas envolvendo outros profissionais da área, a fim de obterem um retorno daquilo que está sendo produzido. A partir dessas trocas, espera-se que mudanças possam ser realizadas no sentido de melhorar a qualidade das representações pictóricas produzidas, o que pode refletir na melhoria do ensino na área de Geometria, sobretudo no ensino de triângulos e quadriláteros.

É importante ressaltar que as representações pictóricas não se limitam a esses dois tipos de polígonos, do mesmo modo que não se limita à Geometria Plana. Portanto, esta responsabilidade deve ser estendida à elaboração de qualquer figura que seja construída para representar um objeto geométrico. Nesse sentido, espera-se que este trabalho possa servir de estímulo para que discussões como as feitas aqui possam ainda ser realizadas em diferentes contextos, como no estudo de outros tipos de polígonos e de quaisquer assuntos relacionados a Geometria, que requeiram a utilização de figuras.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A. Praticando matemática 6º ano. 3ª ed. São Paulo. Editora do Brasil. 2012.

BIANCHINI, E. Matemática. Volumes 6º, 7º e 8º. 9ª ed. São Paulo. Editora Moderna. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acessado em: 20 out. 2024.

CHAVANTE, E. Convergências Matemáticas 6º ano. 2ª ed. São Paulo. Edições SM, 2018.

CUNHA, S., VELASCO, J. Introdução à Gramática da Linguagem Matemática. 1ª ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2019.

DANTE, L. Teláris matemática, 6º ano. 3ª ed. São Paulo. Ática, 2018.

DOLCE, O., POMPEO, J. Fundamentos de matemática elementar. 9ª ed. São Paulo. Atual, 2013.

FERREIRA, F., NETO, F., RIOS, I. Geometria Básica: v.1. 2ª ed. Rio de Janeiro. Fundação CECIERJ. 2002.

GAY, M., SILVA, W. Araribá mais: matemática 7º ano. 1ª ed. São Paulo. Editora Moderna. 2018.

GIOVANNI, J. A conquista da matemática. Volumes 6º, 7º e 8º. 4ª ed. São Paulo. Editora FTD. 2018.

IEZZI, G. Matemática e realidade. Volumes 6º, 7º e 8º. 9ª ed. São Paulo. Atual Editora, 2018.

LONGEN, A. Apoema: matemática 6. 1ª ed. São Paulo. Editora do Brasil, 2018.

MORGADO. Geometria. 5ª ed. Rio de Janeiro. Francisco Alves, 1990.

MUNIZ NETO, Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana. 1ª ed. Rio de Janeiro. SBM, 2012.

PATARO, P. Matemática Essencial 6º ano. 1ª ed. São Paulo. Scipione, 2018.

SAMPAIO, F. Trilhas da matemática Sampaio 7º ano. 1ª ed. São Paulo. Editora Saraiva. 2018.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO. Material RioEduca 2024. Rio de Janeiro, 2024. Disponível em < https://multirio.rio.rj.gov.br/materialrioeduca/#> Acesso em 20.out.2024.

SILVEIRA, E. Matemática: compreensão e prática Silveira 6º ano. 5ª ed. São Paulo. Editora Moderna. 2018.

SOUZA, J. Matemática realidade & tecnologia 6º ano. 1ª ed. São Paulo. Editora FTD. 2018.

APÊNDICE – Pesquisa de opinião realizada com professores da SMERJ

Este apêndice apresenta o resultado de uma pesquisa de opinião feita com 106 professores da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SMERJ), realizada de forma *online*, de 25 a 29 de março de 2024. Atendendo ao pedido do autor deste trabalho por meio de um grupo em uma rede social, cada participante respondeu às 15 perguntas de forma voluntária, acessando um *link* direcionado à plataforma *Google Formulários*. O objetivo da pesquisa foi saber como os professores que lecionam Matemática representam objetos geométricos, como triângulos e quadriláteros, bem como analisar seus conhecimentos acerca dos conceitos desses objetos. Ao longo do texto são apresentadas as questões, na íntegra, seguidas de comentários relacionados aos resultados obtidos.

A Questão 1 não está relacionada ao tema da pesquisa propriamente dito, mas sim a que tipo de formação possui cada professor participante (se é professor do Ensino Fundamental Anos Iniciais ou Ensino Fundamental Anos Finais). Do grupo participante, 64% possuem Licenciatura em Matemática e lecionam esta componente curricular para turmas de Ensino Fundamental Anos Finais (6º ao 9º ano) e 36% lecionam em turmas do Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º ao 5º ano) [20].

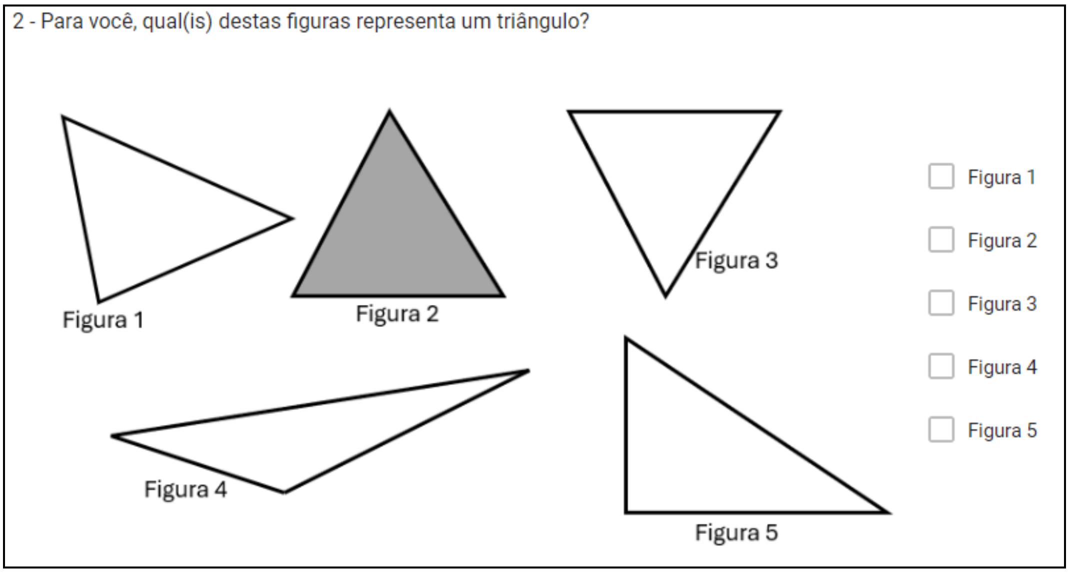
A Questão 2 (Figura 90) tem o intuito de investigar se os professores identificam as figuras dadas como triângulos. Cinco figuras são apresentadas e todas têm contornos de triângulos. Uma delas (a Figura 2), além do contorno, apresenta a região limitada por ele sombreada. Esta figura, em particular, não representa um triângulo, mas sim uma superfície triangular.

Dos 106 professores que responderam ao questionário, apenas um – professor dos Anos Iniciais – não identificou esta representação como sendo de um triângulo. A superfície triangular em questão (Figura 2) está numa posição que usualmente é representada nos livros didáticos e, talvez, por isso, praticamente todos os professores indicaram esta representação como sendo de um triângulo. Todas as figuras, com exceção da Figura 2, representam um triângulo, mas o fato de algumas dessas figuras não apresentarem um dos lados na horizontal ou não apresentarem lados que ao menos pareçam ter medidas iguais, parece causar confusão. As Figuras 1, 4 e 5, por sua vez, foram as que receberam menos indicações pelos professores

[20] Alguns professores do Ensino Fundamental Anos Iniciais também lecionam Matemática para turmas do *6º ano experimental* (essas turmas possuem um único professor para lecionar as diferentes componentes curriculares que compõem a grade curricular, como por exemplo, Matemática, Língua Portuguesa, Ciências, História e Geografia).

(87%, 86% e 87%, respectivamente). Dentre os professores de Matemática, 7% não identificaram as Figuras 1, 4 e 5 como sendo representações de um triângulo.

Figura 90 – Questão 2

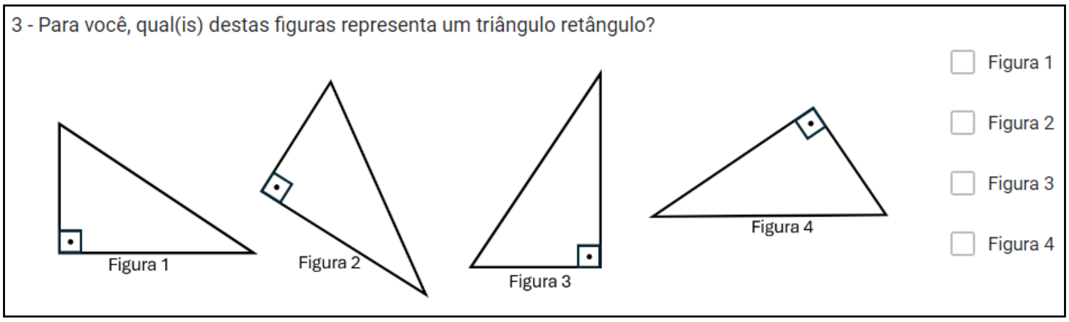


Fonte: O autor, 2024.

Esta questão mostra que algumas formas geométricas (em particular, o triângulo) são reconhecidas apenas quando as figuras que as representam se encontram em uma posição específica (problema esse discutido na Seção 2.1, p. 26). Quando as figuras são construídas em posições diferentes da posição comumente utilizada, alguns professores deixam de reconhecer o objeto geométrico representado. Uma pergunta sem complexidade como esta pode revelar o quão importante é, na educação básica, usar de diferentes representações para uma mesma figura.

A Questão 3 (Figura 91) apresenta quatro triângulos retângulos, e tem o objetivo de identificar como os professores enxergam esse tipo de polígono. Todas as figuras estão representadas de maneira a não deixar dúvidas sobre se tratar de um triângulo retângulo, visto que todas elas apresentam a marcação do ângulo reto. A diferença mais evidente entre elas é que estão em posições diferentes umas das outras. Esperava-se que todos os professores indicassem todas as figuras como sendo uma representação de um triângulo retângulo, mas o resultado mostrou que alguns professores entendem que pelo menos uma das figuras não representa um triângulo retângulo.

Figura 91 – Questão 3

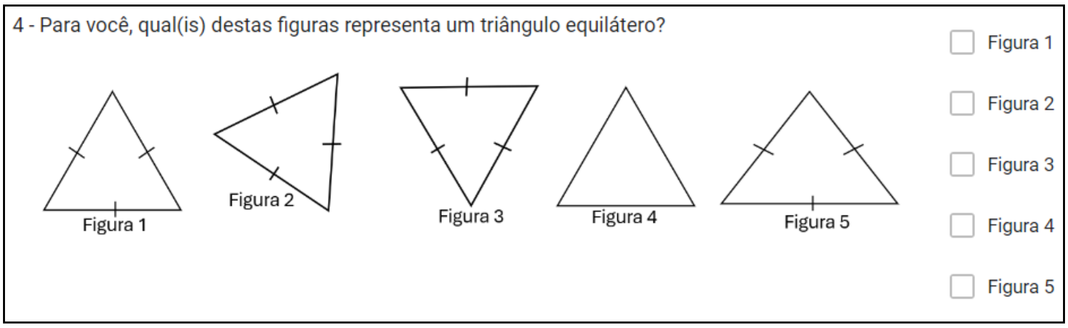


Fonte: O autor, 2024.

Do total de professores, 10% identificaram apenas um dos triângulos como sendo uma representação de triângulo retângulo, 15% dos professores não identificaram uma ou mais representações como sendo uma representação de um triângulo retângulo e a figura que os professores mais entenderam como sendo uma representação de um triângulo retângulo (94%) foi a Figura 1, sinalizando, mais uma vez, que o fato de a figura ter um dos lados na horizontal é uma característica que se destaca quando se trata de representar triângulos. A Figura 4 foi a figura menos indicada pelos professores. Do grupo participante, 12% entendem que esta figura não representa um triângulo retângulo, sendo que 15% deste grupo são professores de Matemática. Isto é interessante, pois a Figura 4 é justamente a representação pictórica de um triângulo retângulo mais utilizada por materiais didáticos e professores quando da apresentação das relações métricas de um triângulo retângulo.

A Questão 4 (Figura 92), por sua vez, apresenta cinco representações de triângulos, e objetiva saber se os professores os identificam como triângulos equiláteros ou não.

Figura 92 – Questão 4



Fonte: O autor, 2024.

Quatro dessas representações utilizam-se de uma mesma marcação de congruência em cada um dos lados para informar que se tratam de triângulos equiláteros, e uma das representações (a Figura 4) apresenta um triângulo que, embora pareça ser um triângulo equilátero, não apresenta marcações nos lados; ou seja, a Figura 4 representa um triângulo qualquer e, portanto, não deve ser utilizada como uma representação de um triângulo equilátero. Esperava-se que os professores indicassem todas as figuras como representativas de triângulos equiláteros, com exceção da Figura 4, contudo 22% dos professores consideram que esta figura representa um triângulo equilátero e destes, 35% são professores de Matemática.

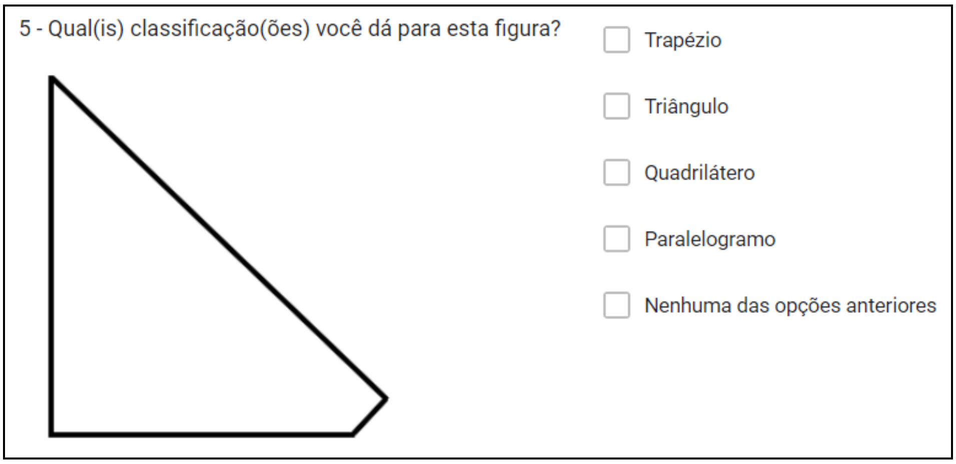
A figura que os professores mais consideram ser uma representação de um triângulo equilátero é a Figura 1, que recebeu indicações de 92% do grupo participante, reafirmando a ideia de que representações de triângulos com um dos lados na horizontal são mais utilizadas.

Do total de participantes, 9% e 10%, respectivamente, responderam que as Figuras 2 e 3 não representam um triângulo equilátero, mesmo que estas estejam com marcações que indicam que os lados são congruentes. Para estes professores, a posição da figura é mais importante do que as marcações, ou seja, a posição é mais importante do que as características fundamentais que ela possui. Dentre as figuras que receberam marcações nos lados, como indicação de um triângulo equilátero, a Figura 5 não apresenta aparência de triângulo equilátero; ou seja, embora esta figura apresente um dos lados na horizontal, ela está levemente achatada verticalmente, induzindo os professores a considerarem que não se trata de um triângulo equilátero. Este fato é interessante, pois mostra que alguns professores dão mais importância à aparência do que as representações pictóricas, como os traços feitos nos lados, indicando se tratar de um triângulo equilátero. Do total de professores, 14% não consideram esta figura como uma representação de um triângulo equilátero e deste grupo, 33% consideram a Figura 4 como uma representação de um triângulo equilátero.

A Questão 5 (Figura 93) apresenta uma representação de um quadrilátero qualquer, e tem o intuito de analisar se os professores o reconhecem como algum outro tipo de polígono. Eles deveriam selecionar uma ou mais opções, de acordo com a classificação do polígono representado. A única que deveria ser marcada é a opção “Quadrilátero”, visto que não há qualquer representação pictórica (marcações de congruência nos lados ou de ângulos retos) ou mesmo em linguagem matemática que informe se tratar de um tipo específico de quadrilátero.

Do grupo de professores participantes, 5% responderam que a figura representa um trapézio, dos quais 60% têm formação em Matemática. Um professor do Ensino Fundamental Anos Iniciais respondeu que a figura representa um triângulo (é possível que este professor tenha selecionado esta opção pelo fato de um dos lados ser muito menor do que os demais lados do quadrilátero), além de também responder que se trata de um paralelogramo, ignorando o fato de que o paralelogramo é um tipo de quadrilátero, e não de triângulo.

Figura 93 – Questão 5

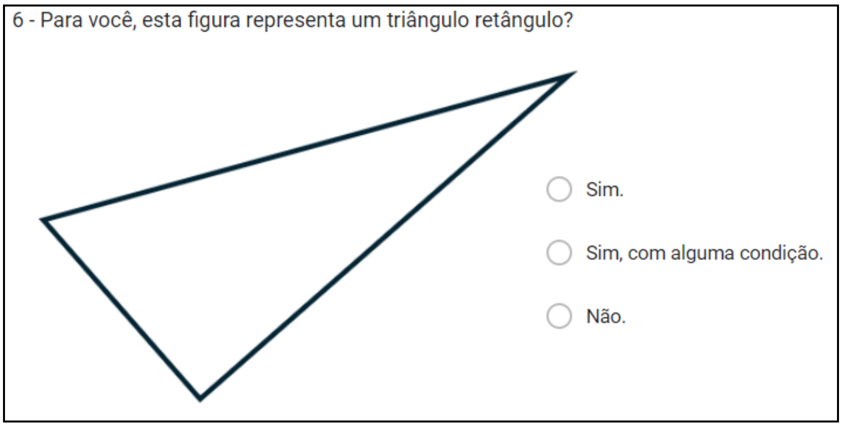


Fonte: O autor, 2024.

A maioria dos participantes (83%) respondeu que a figura representa um quadrilátero. Dos 17% que não a consideram uma representação de quadrilátero, 72% selecionaram a opção “Nenhuma das opções anteriores”, considerando que a figura não representa nenhum dos polígonos apresentados nas opções.

A Questão 6 (Figura 94) apresenta um triângulo qualquer, que se parece com um triângulo retângulo (nota-se a ausência de elemento pictórico indicativo de ângulo reto). O intuito é verificar se os professores identificam esta como uma possível representação de um triângulo desse tipo.

Figura 94 – Questão 6



Fonte: O autor, 2024.

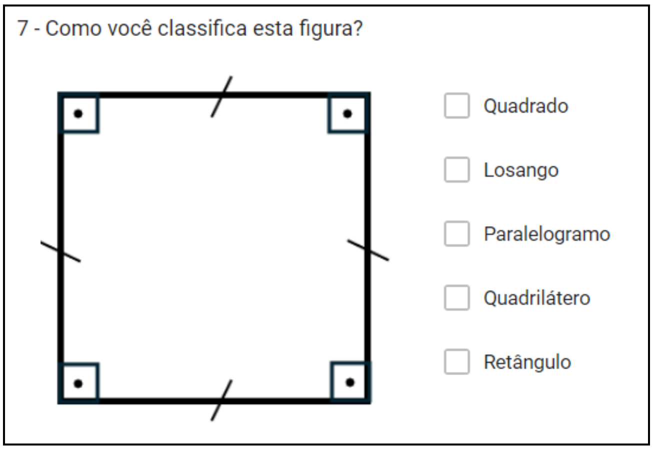
Das três alternativas sugeridas, a alternativa “Sim” é a única que não deveria ser selecionada, tendo em vista, como mencionado, que a figura representa um triângulo qualquer. Como também já dito anteriormente, o fato de parecer ser um triângulo retângulo não significa que de fato o seja. Para que a figura represente um triângulo retângulo, deveria existir a marcação do ângulo reto em um dos seus vértices, o que não há. Dos professores participantes, 27% afirmaram que a figura representa um triângulo retângulo (respondendo, portanto, “Sim” à pergunta), sendo que 83% deste grupo não são professores com formação em Matemática.

A alternativa “Sim, com alguma condição” tem o intuito de identificar aqueles que percebem que o triângulo ilustrado se assemelha a um triângulo retângulo, mas que é necessário acrescentar algo à figura, com o intuito de completá-la, obtendo assim uma representação adequada e completa para esse tipo de triângulo. Do grupo participante, 48% selecionaram a alternativa “Sim, com alguma condição”, dos quais 80% são professores com formação em Matemática.

A alternativa “Não”, por sua vez, visa identificar aqueles que não observaram a possibilidade de se completar a figura de modo adequado. Dentre todos os professores participantes da pesquisa, 35% afirmaram que a figura não representa um triângulo retângulo, o que também é compreensível, visto que a figura, embora se pareça com um, não traz qualquer informação sobre um tipo específico de triângulo. Deste grupo, 16% não possuem formação em Matemática.

A Questão 7 (Figura 95) ilustra uma figura geralmente utilizada por materiais didáticos para representar um quadrado. O intuito dessa questão é identificar se os professores a veem como uma possível representação de outros tipos de quadriláteros.

Figura 95 – Questão 7



Fonte: O autor, 2024.

Do grupo participante, apenas 8% afirmaram que a figura não representa um quadrado, dos quais 22% são professores de Matemática. Embora seja um grupo pequeno (menos de 10% dos participantes), a afirmação feita pelo grupo não vai ao encontro do que é esperado, tendo em vista que a figura é usualmente utilizada por materiais didáticos para a representação de um quadrado.

Do total de participantes, 28% consideram a figura uma representação de um losango. Isto é um dado preocupante, pois mostra que o losango é conhecido como a figura do "balão" e não como o quadrilátero que possui lados congruentes (ou mesmo um paralelogramo de lados congruentes). Desse grupo, 87% têm formação em Matemática e lecionam em turmas de Ensino Fundamental Anos Finais.

Poucos participantes (32%) também consideram que a figura não representa um paralelogramo. Isto é aceitável, visto que não há informações na figura que tratam do paralelismo entre os lados, bem como pelo fato de que esta não é a figura comumente utilizada pelos materiais didáticos para representar um paralelogramo. O fato de os lados consecutivos serem perpendiculares acarreta que os lados opostos sejam paralelos, mas isso é uma consequência do perpendicularismo entre os lados. O enfoque trazido pela figura não é o paralelismo, mas a congruência entre os lados e a existência de ângulos retos. Por esta razão, alguns professores não considerem esta figura como uma representação de um paralelogramo, mas é importante que tenham em mente que se trata de um.

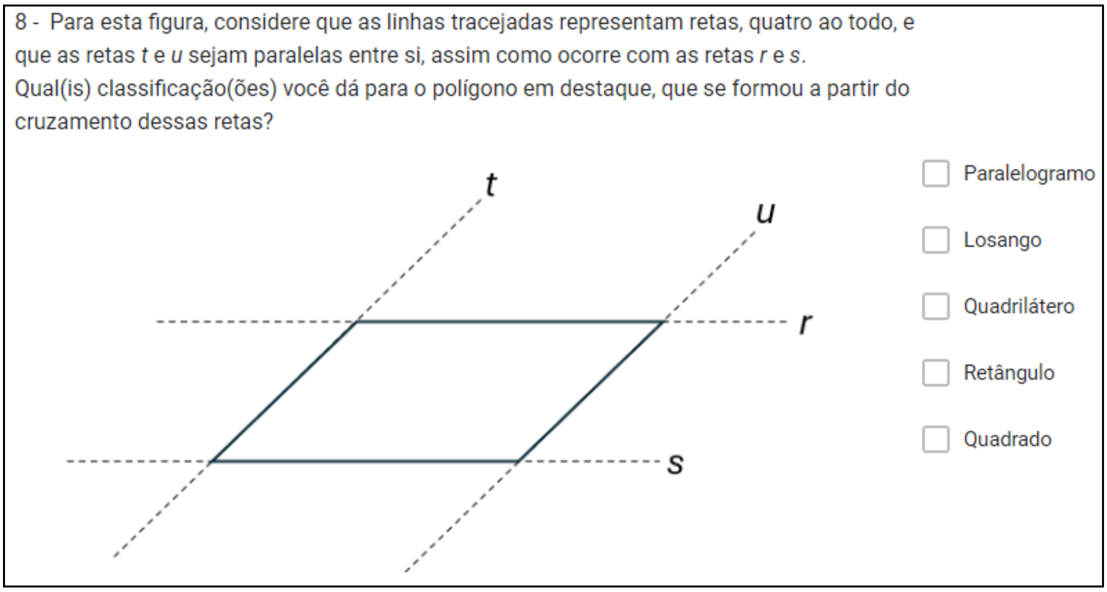
Uma alternativa que também foi pouco selecionada é a que retrata a figura como um quadrilátero. Do grupo participante, apenas 45% afirmaram se tratar de um quadrilátero. O uso repetitivo de algumas figuras para representar objetos geométricos é tão prejudicial à aprendizagem que acaba se sobrepondo à percepção do significado de um simples vocábulo como *quadrilátero*, que quer dizer "quatro lados". Esperava-se que a grande maioria dos professores selecionasse esta alternativa, visto que, independentemente dos comprimentos dos lados ou das medidas dos ângulos, o polígono representado possui quatro lados.

Um dado interessante é que o grupo de professores citados no parágrafo anterior, apenas um não selecionou a opção "quadrado" como uma representação para a figura. Todos os demais professores consideram que a figura representa um quadrado, mas não representa um quadrilátero.

Apenas 32% do total de professores (85% desse grupo são professores de Matemática) consideraram a figura como uma representação de retângulo. A forma geométrica comumente utilizada em materiais didáticos para representar retângulos apresenta lados de comprimentos diferentes, o que acaba deturpando o significado dessa forma geométrica, que é assim chamada por ter ângulos retos. A figura representada na questão traz representações pictóricas do ângulo reto, mas isso foi ignorado pela maioria dos professores.

A Questão 8 (Figura 96) ilustra um paralelogramo obtido por meio das possíveis interseções entre dois pares de retas paralelas.

Figura 96 – Questão 8



Fonte: O autor, 2024.

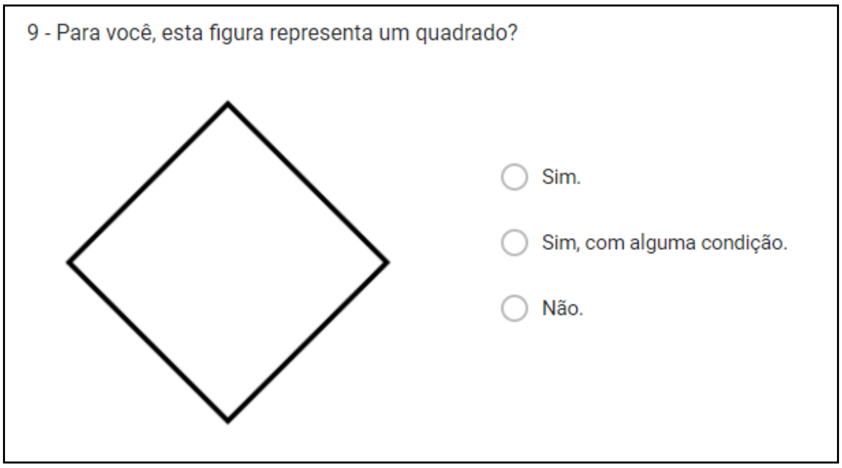
Esta forma de apresentar a figura permite que ela seja classificada, dentre as opções apresentadas, apenas como paralelogramo ou quadrilátero. Não há qualquer informação que permita que ela seja classificada como outro objeto que não sejam esses.

Do total de participantes, 90% afirmaram que se trata de um paralelogramo. Nenhum dos participantes classificou a figura como sendo uma representação de retângulo; 4% dos participantes afirmaram que se trata de um quadrado; e 10% afirmaram se tratar de um losango.

Os que consideram que a figura representa um quadrilátero totalizam 60% dos professores, um número pouco expressivo, visto que, para um polígono ser considerado um quadrilátero, basta ter quatro lados. A figura se assemelha à mais utilizada por materiais didáticos para apresentar um paralelogramo, o que justifica cerca de 90% dos participantes terem selecionado a opção “Paralelogramo”. Por outro lado, é impressionante perceber que muitos (40% dos professores) não a consideram um quadrilátero, mostrando, mais uma vez, que ou a disposição da figura se sobrepõe às características que ela possui, ou se desconhece o conceito de paralelogramo (um *quadrilátero* cujos lados opostos são paralelos). Para alguns professores, casos particulares de quadriláteros (como por exemplo o paralelogramo e o quadrado) não retratam estes objetos. Isto pode ser observado ao analisar, também, as Questões 5 e 7, onde 83% consideram a Figura 93 (Questão 5) como um quadrilátero, ao passo que a Figura 95 (Questões 7) é identificada como um quadrilátero por apenas 45% dos professores.

Assim como na 6ª questão, a Questão 9 (Figura 97) apresenta uma figura construída com características que a associam ao polígono mencionado no enunciado. Neste caso, a figura apresenta ângulos que se assemelham a retos e lados que parecem congruentes, sem, no entanto, que essas informações tenham sido dadas de forma clara.

Figura 97 – Questão 9



Fonte: O autor, 2024.

Do total de participantes, 25% responderam que a figura representa um quadrado (respondendo "Sim" à pergunta). Esta resposta traz um lado positivo e outro negativo. O lado positivo é que esses professores não enxergam o quadrado como o polígono que possui dois de seus lados sempre na horizontal. O lado negativo é que não é interessante usar uma figura para representar um polígono apenas pelo fato de ela se parecer com o objeto representado.

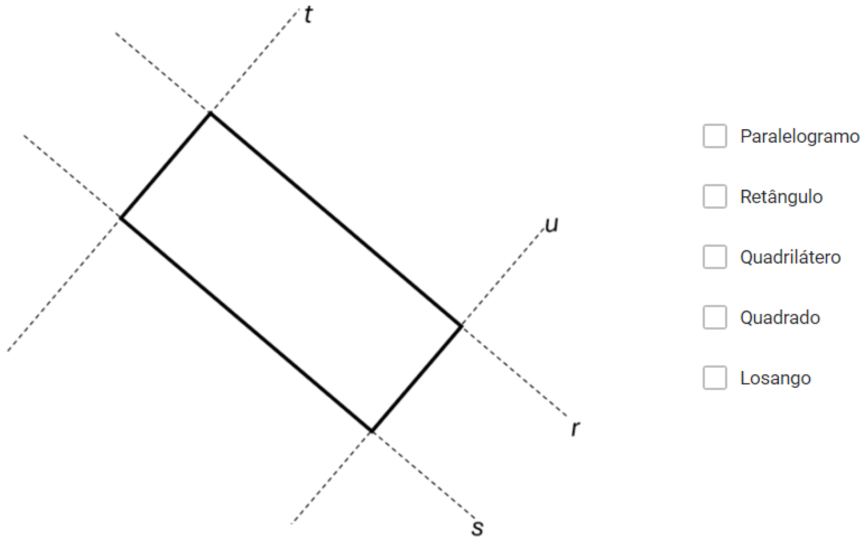
Igualmente, 25% dos professores responderam que a figura não representa um quadrado (respondendo "Não" à pergunta). Esta é uma resposta plausível, tendo em vista que não há qualquer informação sobre as medidas dos lados ou sobre as medidas dos ângulos. Também é possível que alguns professores tenham marcado esta opção pelo fato de a figura não apresentar dois lados na horizontal.

Aproximadamente metade dos participantes (49%) afirmou que a figura pode, sim, representar um quadrado, desde que se estabeleça alguma condição. Esta condição pode ser uma informação em linguagem matemática ou uma representação pictórica que afirme que os ângulos sejam retos e que os lados sejam congruentes. A escolha pela figura pode se dar pelo fato de ela se assemelhar a um quadrado, devido as características que possui, como já mencionado anteriormente.

A Questão 10 (Figura 98) é semelhante à Questão 8, adicionando-se a informação de que, quando duas das retas se intersectam, a interseção se dá segundo um ângulo reto.

Figura 98 – Questão 10

10 - A figura a seguir é formada por quatro retas (*r*, *s*, *t* e *u*) e um polígono formado pelos cruzamentos dessas retas. Considere que:
i) as retas *t* e *u* são, entre si, paralelas;
ii) as retas *r* e *s* são, entre si, paralelas; e
iii) o cruzamento entre duas retas sempre forma um ângulo reto (ângulo de medida igual a 90º).
Para você, que classificação(ões) o polígono formado pode receber?



Fonte: O autor, 2024.

O polígono representado possui, em decorrência das hipóteses, lados opostos paralelos e lados consecutivos perpendiculares, sendo, portanto, um retângulo (e consequentemente quadrilátero e paralelogramo). Embora a figura não retrate um retângulo com um dos lados na horizontal, “Retângulo” foi a opção mais selecionada pelos professores participantes, totalizando 95%.

“Quadrado” e “Losango”, por sua vez, foram as opções menos selecionadas pelos participantes (2% e 3%, respectivamente), o que é um resultado positivo, tendo em vista que não há qualquer informação que indique a presença desses dois tipos de quadriláteros. Além de não apresentar informações sobre os lados, como por exemplo o fato de serem congruentes, a figura não aparenta representar um polígono de lados congruentes, portanto é considerável que pouquíssimos professores tenham selecionado esta opção.

Um pouco mais da metade dos professores participantes (58%) afirmou se tratar de uma representação de um paralelogramo. O fato de o enunciado mencionar que o polígono representado foi formado por retas paralelas não induziu boa parte do grupo a afirmar que se tratava de um paralelogramo. Esta falta de adesão pode ser atribuída ao fato de que paralelogramos são comumente representados em materiais didáticos por figuras que apresentam dois dos lados na horizontal e ângulos agudos e obtusos. Vale ressaltar, a critério de comparação, que, na Questão 8, onde também se representou um paralelogramo, a maioria dos professores (90%) afirmou que a figura retrata um paralelogramo. Outra possível causa para que boa parte dos professores não tenham respondido paralelogramo está na usual (e inadequada) desconexão que muitos alunos e professores estabelecem entre os conceitos de paralelogramo e retângulo (como se fossem objetos distintos quando, na verdade, todo retângulo é um paralelogramo).

Do total de participantes, 29% não consideram a figura uma representação de um quadrilátero, o que é um dado preocupante, mostrando novamente que, quando se trata de um caso particular de quadrilátero, o polígono deixa de ver visto como tal.

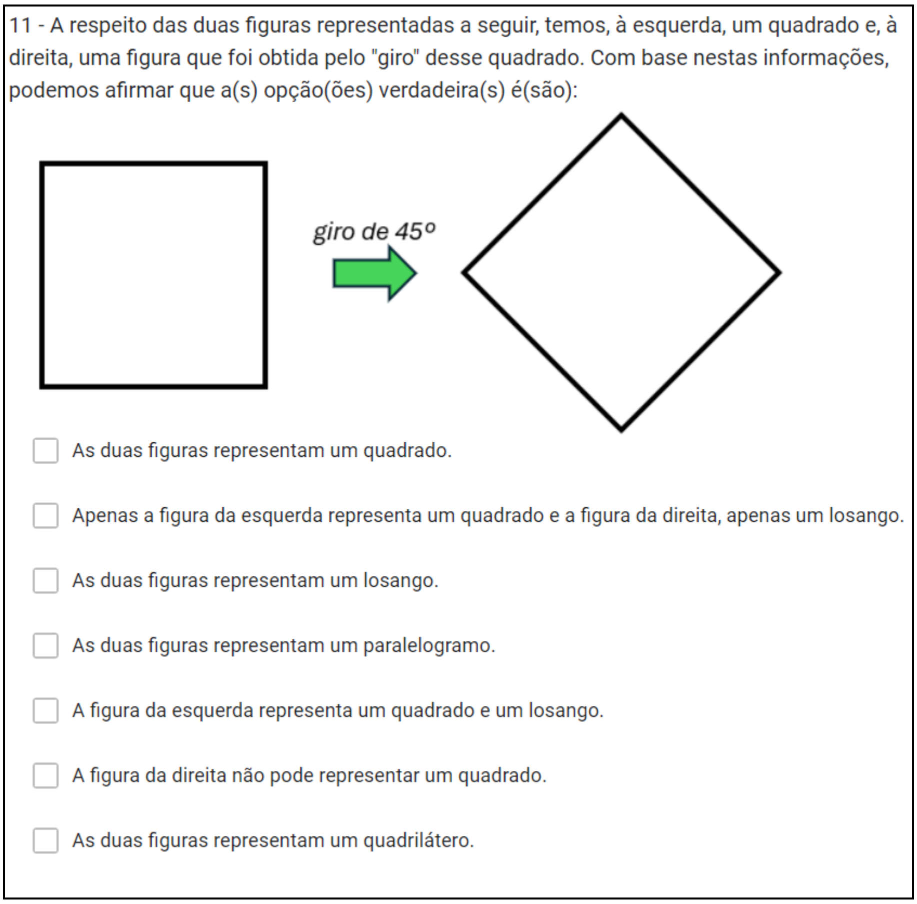
A Questão 11 (Figura 99) visa reproduzir o exemplo apresentado na p. 33, resgatando uma dinâmica que alguns professores de Matemática fazem em suas aulas, que é mostrar aos estudantes um mesmo objeto (neste caso, um quadrado) em diferentes posições.

É comum os estudantes responderem que, após ser girado, o objeto passa a representar um losango e não mais um quadrado. É importante ressaltar que, embora não haja marcações que retratem lados congruentes e marcações de ângulos retos, o enunciado da questão menciona que o quadrilátero da esquerda se trata de um quadrado.

A maioria dos professores participantes (87%) respondeu que as duas figuras representam um quadrado, enquanto 49% dos professores responderam que as duas ilustram um losango, um número bem menor do que o anterior, mostrando que o losango é comumente identificado pela posição que lembra um balão.

Do grupo de professores de Matemática, 3% afirmaram que a figura da esquerda representa apenas um quadrado e que a figura da direita representa apenas um losango. A metade dos professores participantes afirmou que as duas figuras não retratam, ao mesmo tempo, um losango, e que apenas a figura da direita o retrata. Quando perguntados sobre o fato de as duas figuras representarem um paralelogramo, 39% do total de professores afirmaram que não, dentre os quais 37% são professores de Matemática. Sobre o fato de as duas figuras serem consideradas um quadrilátero, apenas 60% dos professores responderam que sim, dos quais 64% são professores de Matemática.

Figura 99 – Questão 11


11 - A respeito das duas figuras representadas a seguir, temos, à esquerda, um quadrado e, à direita, uma figura que foi obtida pelo "giro" desse quadrado. Com base nestas informações, podemos afirmar que a(s) opção(ões) verdadeira(s) é(são):

- [ ] As duas figuras representam um quadrado.
- [ ] Apenas a figura da esquerda representa um quadrado e a figura da direita, apenas um losango.
- [ ] As duas figuras representam um losango.
- [ ] As duas figuras representam um paralelogramo.
- [ ] A figura da esquerda representa um quadrado e um losango.
- [ ] A figura da direita não pode representar um quadrado.
- [ ] As duas figuras representam um quadrilátero.

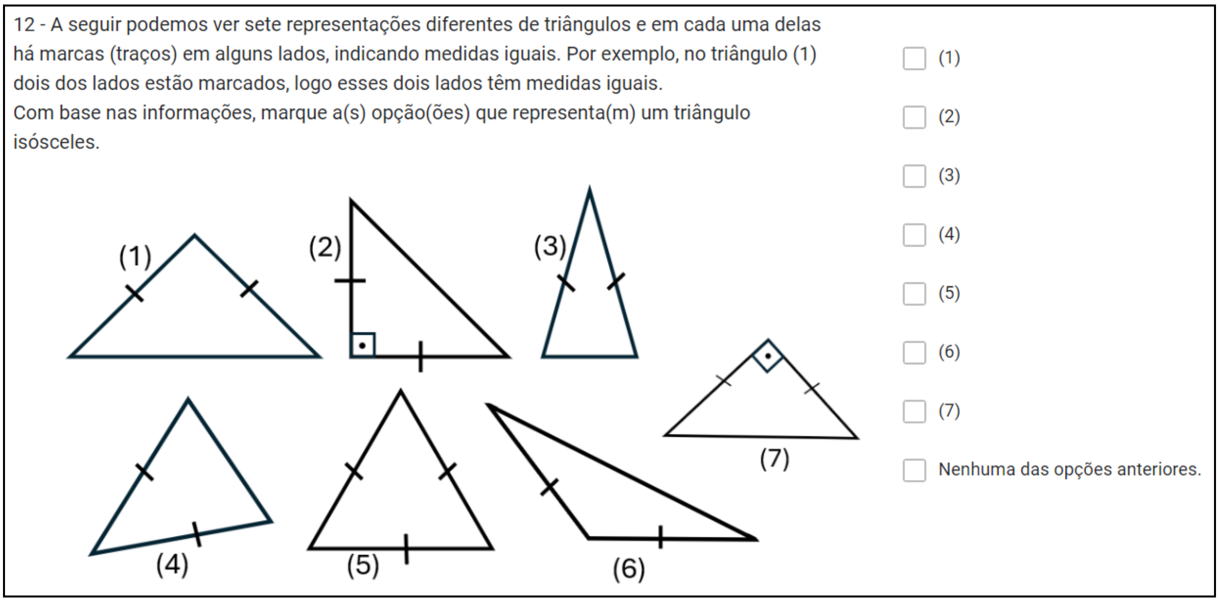
Fonte: O autor, 2024.

Com estes dados é possível verificar o quanto é prejudicial para o ensino é o uso repetitivo de algumas figuras utilizadas para a construção de um conceito, e o quanto esta prática prejudica um aprendizado significativo sobre alguns conceitos matemáticos.

A Questão 12 (Figura 100) apresenta sete ilustrações de triângulos. O objetivo é saber, na opinião dos professores pesquisados, quais representam triângulos isósceles. É sabido que um triângulo isósceles pode ter dois ou três lados congruentes. É possível notar que, em cada uma das figuras (com exceção da Figura 5), há a informação de que dois dos lados são congruentes, mas nada é dito a respeito do terceiro lado.

Era esperado que todos os participantes identificassem todos os triângulos como sendo isósceles; contudo, menos da metade (41%) o fizeram. A figura que mais professores selecionaram foi a Figura 3 (88% dos professores, reafirmando que a representação pictórica mais usual é justamente esta) e a figura menos escolhida foi a Figura 5 (40% dos professores, dentre os quais, 90% são professores de Matemática, indicando que um número expressivo de professores consideram que o triângulo equilátero não é um triângulo isósceles; ou seja, para esses professores, um triângulo isósceles tem apenas dois lados congruentes).

Figura 100 – Questão 12



Fonte: O autor, 2024.

Um fato interessante é que as Figuras 2 e 7 foram escolhidas por um número expressivo de professores (81% e 84%, respectivamente), indicando que o fato de serem triângulos retângulos não impede que sejam isósceles. Outro fato interessante é que a Figura 4 foi considerada por 82% dos professores uma representação de triângulo isósceles, mesmo que nenhum de seus lados figurem na horizontal, o que é muito comum em livros didáticos. Do total de participantes, 6% dos professores consideram que apenas a Figura 3 representa um triângulo isósceles.

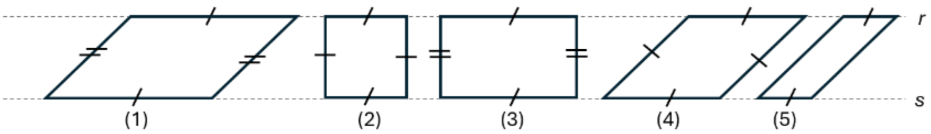
Os dados obtidos através desta questão revelam que, em se tratando do triângulo equilátero, muitos professores não o consideram como um triângulo isósceles.

A Questão 13 (Figura 101) ilustra cinco quadriláteros contruídos tomando-se como bases duas retas paralelas. O intuito é que os professores identifiquem quais deles representam paralelogramos.

Esta questão visa analisar duas situações, a saber, as características fundamentais de um quadrilátero (ou seja, aquilo que o constitui como tal, segundo sua definição; por exemplo, se um quadrilátero possui lados opostos paralelos, trata-se de um paralelogramo), e as propriedades que este objeto possui (equivalentes à definição e que, por vezes, sua verificação permite saber de que objeto se trata; por exemplo, se um quadrilátero possui dois pares de lados opostos congruentes, trata-se de um paralelogramo).

Figura 101 – Questão 13

13 - A imagem a seguir mostra cinco quadriláteros, todos construídos com dois de seus lados sobre as retas *r* e *s*, que são paralelas entre si. Observe que há marcas (traços) nos lados. Algumas figuras receberam a mesma quantidade de traços em cada lado, indicando que são medidas iguais (figuras 2 e 4); outras, receberam quantidades diferentes de traços nos lados (figruas 1 e 3); e a figura 5 recebeu quantidades iguais de traços em apenas dois de seus lados.
Com base nas informações, marque a(s) opção(ões) que representa(m) um paralelogramo.



☐ (1) ☐ (2) ☐ (3) ☐ (4) ☐ (5)

☐ Nenhuma das opções anteriores.

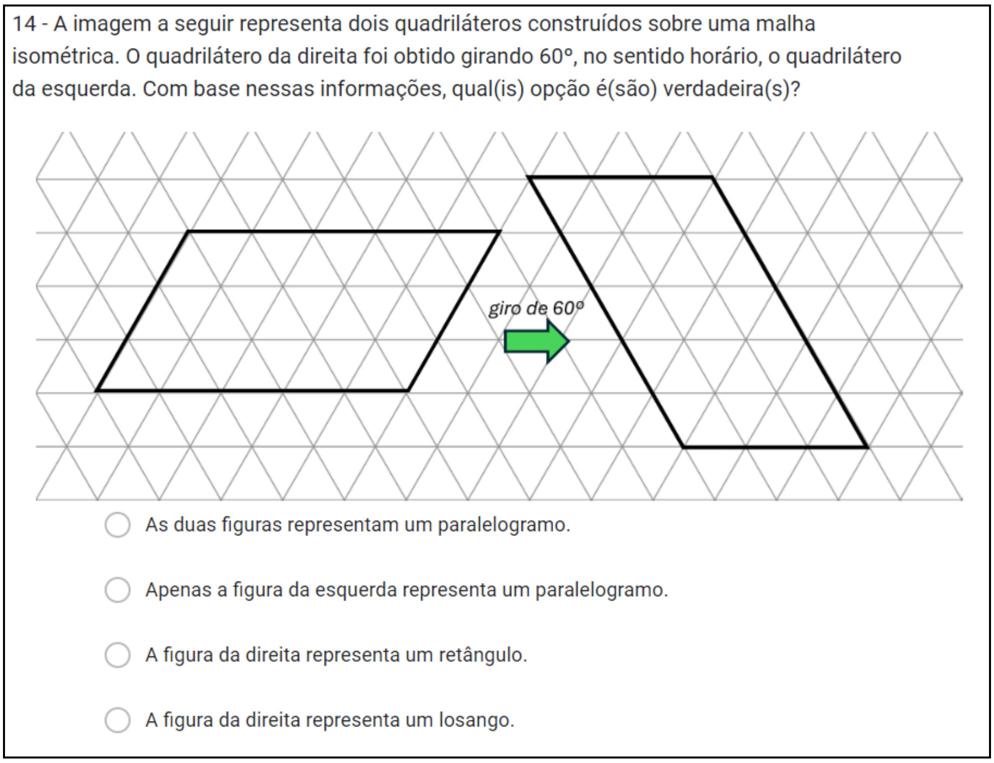
Fonte: O autor, 2024.

Todos os cinco quadriláteros aparentam ser paralelogramos. Contudo, a informação de que os lados opostos são paralelos (característica fundamental dos paralelogramos) não é dada. Porém, segundo as informações fornecidas, as Figuras 1, 2, 3 e 4 representam de fato paralelelogramos, pois todas elas indicam quadriláteros convexos com dois pares de lados opostos congruentes (que é equivalente a ser paralelogramo). A Figura 5, por sua vez, ilustra um quadrilátetro convexo que possui um par de lados opostos *paralelos e congruentes*, sendo, portanto, também um paralelogramo (embora nada tenha sido dito com respeito aos outros dois pares de lados).

Do total de participantes, 49% afirmaram que todos os quadriláteros representam um paralelogramo, o que indica que este grupo considera que quadrados e retângulos também o sejam, o que não é muito comum. A figura que mais professores consideram um paralelogramo é a Figura 1 (92%), seguida pela Figura 4 (85%), destacando o fato de que esse formato de figura é muito utilizado em materiais didáticos. Ainda que seja um número expressivo (66% dos professores), a minoria dos professores considera a Figura 5 uma representação de um paralelogramo, seguida da Figura 2 (69% dos professores), que, a julgar pela aparência, se parece com um quadrado. Apenas 4% dos professores consideram somente a Figura 1 uma representação de um paralelogramo e 12% identificaram que apenas as Figuras 1, 4 e 5 representam um paralelogramo. Este dado pode significar que esse grupo de professores escolheram tais figuras pela aparência, já que possuem um formato que se aproxima do utilizado em muitos materiais didáticos. O paralelogramo é considerado por muitos o quadrilátero “torto”, enquanto o retângulo é o quadrilátero “reto”. Esta concepção se apresenta nos dados desta questão, já que dentre os quadriláteros que podem ser identificados através das informações dadas, os quadriláteros com aparência de retângulo (Figuras 2 e 3) foram os menos selecionados pelos professores. Do total de participantes que não consideram a Figura 2 como sendo uma representação de um paralelogramo (31%), sendo, 27%, dentre esses, professores de Matemática. Do total de professores, 74% afirmaram que a Figura 3 representa um paralelogramo. Dos 26% de professores que não consideram a Figura 3 uma representação de um paralelogramo, 32% são professores de Matemática. Do total de participantes, 3% consideram que nenhuma das figuras representam um paralelogramo.

A Questão 14 (Figura 102) ilustra uma situação semelhante à praticada na Questão 11 (Figura 99).

Figura 102 – Questão 14



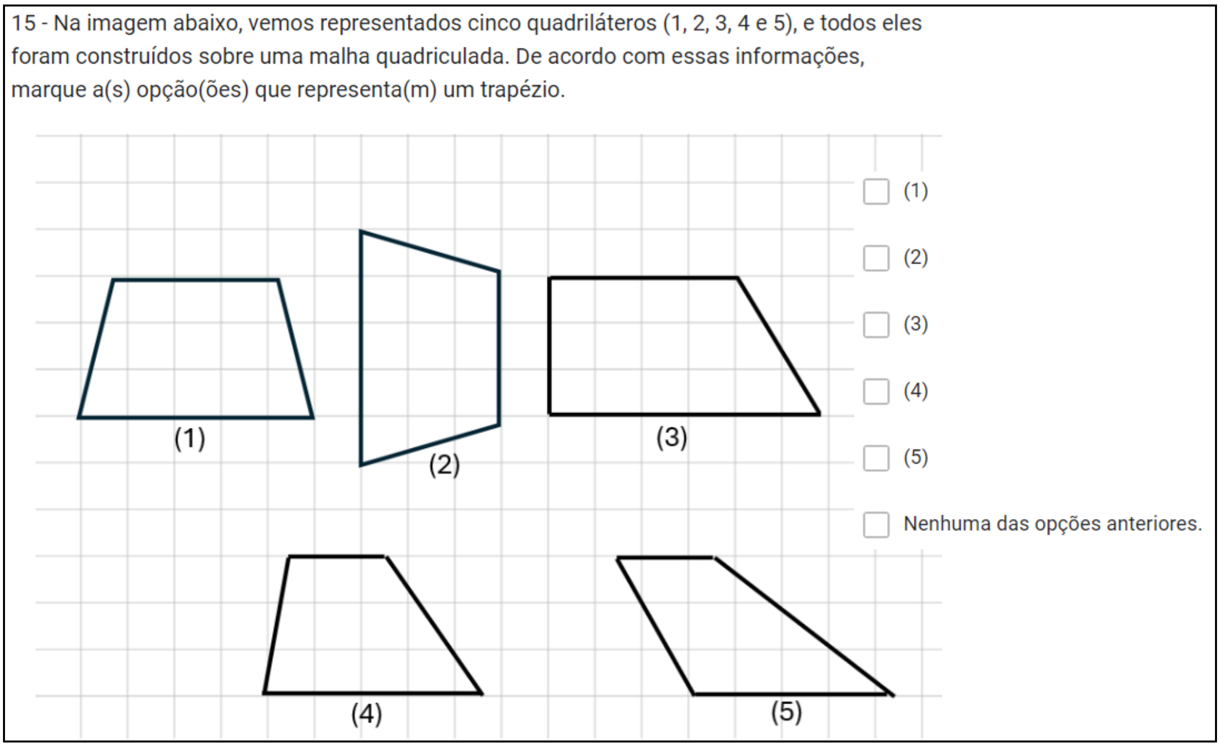
Fonte: O autor, 2024.

Embora um número expressivo de professores (93% do total) tenha marcado a primeira opção (a correta), esperava-se que todos marcassem esta alternativa, visto que o paralelogramo representado pela figura à esquerda está na posição usual, e que a figura da direita representa esse mesmo paralelogramo, porém em posição diferente, ou seja, os dois possuem as mesmas características.

Do total de participantes, 4% dos professores afirmaram que a figura da direita representa um retângulo (todos eles professores do Ensino Fundamental Anos Iniciais) e 3% dos professores afirmaram que apenas a figura da esquerda representa um paralelogramo (todos eles professores do Ensino Fundamental Anos Iniciais). Nenhum dos participantes afirmou que a figura da direita representa um losango, o que era esperado, visto que a figura não se apresenta como um "balão", nem possui lados congruentes, o que pode ser conferido por meio da malha.

A Questão 15 (Figura 103), por fim, apresenta cinco quadriláteros construídos sobre uma malha quadriculada. O intuito é investigar o conhecimento que os professores participantes possuem sobre trapézios, como um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos, independentemente da posição em que ele se encontra.

Figura 103 – Questão 15



Fonte: O autor, 2024.

Esperava-se que a maioria dos professores marcasse a Figura 1 como uma representação de trapézio. Do grupo participante, 92% afirmaram que esta figura representa um trapézio, seguida pela Figura 2, com 88% dos participantes. Do total de professores que consideram a Figura 1 um trapézio, 8% não consideram o mesmo sobre a Figura 2 (destes, 25% são professores de Matemática). Em relação à Figura 3, 81% dos professores afirmaram se tratar de uma representação de um trapézio, número menor do que os expressados para as Figuras 1 e 2.

A Figura 4, embora não represente um trapézio retângulo, representa um trapézio escaleno (o trapézio retângulo também é escaleno), e o número de professores que consideram esta figura uma representação de trapézio está bem próximo do anterior, 79% dos professores. A figura que menos teve aceitação pelos professores foi a Figura 5, que também representa um trapézio, com 75% dos professores. Apesar de estar abaixo dos demais percentuais, 75% é um número expressivo, considerando que este tipo de trapézio é pouco ilustrado nos livros didáticos.

Dos 106 professores participantes, 69% afirmaram que todas as figuras representam um trapézio, indicando que são mais esclarecidos acerca desse tipo de quadrilátero. Nenhum professor selecionou a opção “Nenhuma das opções anteriores”. Todos os trapézios representados figuram com as bases, ou na horizontal, ou na vertical. A escolha por trapézios nessas posições se deu pelo fato de que não se optou por apresentar informações em linguagem matemática para afirmar os paralelismos entre os lados de cada trapézio que representam suas respectivas bases. Por esta razão, a malha quadriculada foi utilizada, pois, por meio dela, seria possível verificar o paralelismo (quando fosse o caso) entre as bases. Talvez, se algumas figuras utilizassem de bases em outras posições, o resultado obtido poderia ter sido outro, já que, como visto, também em outras questões aqui apresentadas, figuras com lados na horizontal são mais aceitas como representações dos quadriláteros abordados.