UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Renata Ferreira Cajuela

Funções Trigonométricas

São José do Rio Preto
2013

Renata Ferreira Cajuela

Funções trigonométricas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
2013

Cajuela, Renata Ferreira.
Funções trigonométricas / Renata Ferreira Cajuela. -- São José do Rio Preto, 2013
51 f. : il.

Orientador: Vanderlei Minori Horita
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Trigonometria – Estudo e ensino. 3. Trigonometria - Ensino auxiliado por computador. 4. Ensino auxiliado por computador - Programas de computador. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Renata Ferreira Cajuela

Funções trigonométricas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares
USP – São Carlos

Profª. Drª. Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
19 de agosto de 2013

RESUMO

O presente trabalho trata-se de um conjunto de atividades voltadas ao ensino dos conceitos básicos da trigonometria para o ensino médio, acompanhadas de um resumo teórico da disciplina em questão.

As atividades foram elaboradas em um software de geometria dinâmica: o GeoGebra, e possuem o intuito de fazer com que aluno perceba o comportamento das razões seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, e também no círculo unitário. As demais funções trigonométricas: secante, cosecante e cotangente são definidas e apresentadas graficamente. Funções do tipo h(x)=a+b.cos(cx +d), são analisadas, enfocando como seus gráficos se comportam em relação às mudanças ocorridas em seus coeficiente reais a, b, c e d. As atividades são intercaladas por explicações teóricas, que podem usadas ou adaptadas pelo professor, de acordo com o conhecimento de seus alunos.

Palavras-chave: Matemática. Trigonometria. Ensino auxiliado por computador.

ABSTRACT

The present work is a set of activities aimed at teaching introductory notions of trigonometry to high school, accompanied by an abstract theory of the subject. The activities were developed in free and multi-platform dynamic mathematics software: GeoGebra, and have the intention to make students realize the behavior of trigonometric ratios of sine, cosine and tangent in right-angled triangle, and also on the unit circle. The other trigonometric functions: secant, cosecant and cotangent are defined and presented graphically. Functions like h (x) = a + b.cos (cx + d), are analyzed focusing on the behavior of their graphics when the real coefficients a, b, c and d vary. Activities are interspersed with theoretical explanations that can be used or adapted by the teacher, according to the knowledge of their students.

Keywords: *Mathematics. Trigonometry. Teaching by means of computer.*

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus que se mostrou presente em todos os momentos.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Ao professor Vanderlei Minori Horita, pela orientação deste trabalho.

Ao meu esposo, Weigle pelo apoio incomensurável e por acreditar em minha capacidade mesmo quando eu não acredito.

À minha filha querida, Lígia, e a todos os familiares que me apoiaram ou ajudaram de alguma forma.

Aos amigos de mestrado que, não só me auxiliaram nas disciplinas, mas também deram-me lições de persistência, força de vontade, dedicação e principalmente, bom humor mesmo em situações difícies; os nomes não ouso dizer para não me esquecer de alguém.

Aos meus amigos de trabalho: Andréia, por me incentivar a participar deste programa de mestrado, Dênis, José Augusto e Marcos, pelas dicas sobre a edição do trabalho, Susette e Gilberto, pelo apoio diário.

Às minhas coordenadoras Andréa Capelli e Luciana Walkiria, pela paciência devido às minhas faltas nas reuniões pedagógicas, quando estas coincidiam com as aulas do mestrado.

Aos meus alunos. Meus inspiradores.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

A trigonometria é um tópico de grande relevância na Matemática, que possui muitas aplicações, que vão desde as mais elementares, no dia e dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta tecnologia. No Ensino Médio, este tema é muito importante, pois possibilita que os alunos aprofundem seus conhecimentos na Geometria, nas Funções, e entendam conceitos da Física Clássica: no estudo de vetores e decomposição de forças aplicadas em um corpo, por exemplo, é necessário que eles tenham uma noção de seno e cosseno. No entanto, é perceptível a dificuldade dos alunos em trigonometria, tanto em relação aos seus conceitos básicos, quanto na resolução de problemas inerentes a este assunto.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma série de atividades para ajudar o professor a sanar essa dificuldade do aluno. Serão apresentados os principais conceitos teóricos seguidos de atividades realizadas com um *software* gratuito de Geometria Dinâmica, o GeoGebra; tais atividades estão gravadas em *CD-room* acompanhando este trabalho. O GeoGebra é um eficaz complemento às aulas expositivas no quadro negro devido ao seu caráter dinâmico: o aluno tem a possibilidade de manipular os objetos, arrastar, entender suas propriedades e fazer investigações sobre eles. É a tecnologia como aliada no processo ensino-aprendizagem.

> As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) estão, a cada dia mais, presentes no nosso cotidiano, constituindo-se num instrumento de trabalho essencial, razão pela qual exercem um papel cada vez mais importante na educação, notadamente na Educação Matemática. Pesquisas sobre o uso das TIC em sala de aula ressaltam a sua relevância no ensino de Matemática (...).(LOPES,

2011)

Outrossim, é interessante desenvolver no aluno habilidades na utilização dessas tecnologias. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), uma das habilidades a serem desenvolvidas em matemática, no que concerne à representação e comunicação é:

> Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

E, em relação a contextualização sócio-cultural temos outra habilidade:

> Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Neste trabalho serão abordados os seguintes temas: trigonometria no triângulo retângulo; o número π; a Função de Euler e a medida de ângulos; o grau e o radiano; as funções seno e cosseno; função tangente e demais funções trigonométricas e as senóides.

As seções referentes às funções seno, cosseno e tangente constituem o tema central deste texto, sendo as seções anteriores a estas, pré-requisitos para seu desenvolvimento e as posteriores, uma complementação. Espera-se que o *software* GeoGebra ajude o aluno a compreender as razões trigonométricas, o comportamento do círculo trigonométrico e das funções de maneira dinâmica e dedutiva, evitando a memorização de fórmulas e procedimentos.

1.2 Público alvo

O público alvo deste trabalho são os alunos da 2ª série do Ensino Médio, momento em que geralmente este conteúdo é abordado. Porém no 9° ano do Ensino Fundamental o aluno já entra em contato com a trigonometria no triângulo retângulo. Para este público é recomendado apenas o estudo da Seção 2.2 deste trabalho.

1.3 Pré-requisitos

A trigonometria é um assunto que requer uma série de conhecimentos prévios. Para o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, o aluno deve conhecer o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. Para estudar as funções seno, cosseno, tangente e demais funções trigonométricas, é necessário um sólido conhecimento sobre o aspectos gerais das funções como: domínio, imagem, máximos e mínimos, monotonicidade e transformações.

1.4 Materiais e tecnologias

Será necessário o uso de microcomputadores, de preferência, no máximo 2 alunos por máquina com o *software* GeoGebra instalado. O programa é gratuito e pode ser encontrado através em: $http://www.geogebra.org$. Porém, é necessário que se tenha também a linguagem Java habilitada nos computadores, através do "Java Runtime Envorinment" (JRE), que pode ser obtido gratuitamente em $http://www.java.com$.

1.5 Recomendações Metodológicas

Este trabalho tem o objetivo de apresentar ao aluno os conceitos básicos e fundamentais da trigonometria em uma ambiente de geometria dinâmica, que é muito atrativo e eficiente; portanto, temos em cada seção, **para o aluno**, uma sequência de atividades produzidas no GeoGebra, que o instigará a tirar suas próprias conclusões a respeito de conceitos imprescindíveis para o estudo da trigonometria.

Há também, em cada seção, um texto matemático que chamamos de *Fundamentação teórica*; este texto tem como alvo principal **o professor** que queira relembrar ou aprofundar os conceitos teóricos envolvidos naquela atividade. Para o professor utilizar a Fundamentação teórica em aula, ele deve adaptá-la de acordo com o nível de conhecimento da classe em que está trabalhando.

Em algumas seções, mostramos também um texto sobre a história do desenvolvimento matemático do assunto em questão. É interessante que o professor trabalhe este aspecto em sala de aula, para que os alunos vejam a matemática como uma produção humana, que se desenvolve ao longo dos anos.

As atividades contidas neste trabalho são maneiras mais eficientes de ensinar os conceitos básicos da trigonometria aos alunos sob um aspecto geométrico.

1.6 Dificuldades previstas

Uma das dificuldades que o professor pode encontrar para a execução deste trabalho é o recurso tecnológico. A escola precisa ter computadores instalados em quantidade suficiente para os alunos e, preferencialmente, alguém que dê algum suporte técnico para estas máquinas pois é necessário que sejam instalados os *softwares* citados na Seção 1.4 em todos os computadores. Se não houver alguém que faça este trabalho, esta tarefa fica destinada ao professor.

Outra questão: os alunos ficam eufóricos quando vão para o laboratório, ou sala de informática; alguns vão querer jogar, usar a internet, talvez danificar algum equipamento, etc. O professor deve ter um diálogo firme e claro sobre os propósitos da aula e orientá-los quanto a isto. Mas todo o sacrifício compensa nas expressões em seus rostos ao verem as construções se mexendo, alguns sorriem, outros ficam boquiabertos, outros brilham os olhos. Melhor ainda, os alunos começam a entender conceitos que não ficaram claros com as aulas expositivas no quadro negro; assim, estamos desenvolvendo um trabalho que traz um grande retorno no processo ensino-aprendizagem.

Capítulo 2

Desenvolvimento

2.1 A História da Trigonometria

Em sua prática na sala de aula, é interessante que o professor conte sobre a evolução histórica do conhecimento que transmite, valorizando quem o produziu :

> A educação clássica comete outro grande erro. Ela se esforça para transmitir o conhecimento em sala de aula, mas raramente comenta sobre a vida do produtor do conhecimento. As informações sobre química, física, matemática, línguas deveriam ter um rosto, um identidade. (CURY, 2003).

A seguir, temos um breve resumo sobre a História da Trigonometria e seus principais precursores.

> A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medir. Daí o seu significado: medida dos triângulos. Inicialmente, então, a trigonometria era considerada a parte da Matemática que tinha como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos). Como a trigonometria estabelece relações entre as medidas de ângulos e de segmentos, foi também considerada como uma extensão da Geometria. (DANTE, 2008)

Associa-se o desenvolvimento inicial da trigonometria ao da Astronomia.

> A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor

> da Terra, surgindo daí o interesse de relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subentendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r é o raio da circunferência, então $c = 2r. \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$. Essa é a origem da palavra seno, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo jiba (corda) com jaib (dobra, cavidade, sinus em latim). (LIMA, 1997).

Foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da trigonometria. Sabe-se que o astrônomo grego Hiparco (190 a.C.- 125 a.C), empregou, pela primeira vez, relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C. Daí ser considerado o precursor da trigonometria.

Graças a Ptolomeu (125 a.C), o mais célebre astrônomo da Antiguidade, surge o documento mais antigo que trata da trigonometria, chamado 'O almagesto'. Nele, Ptolomeu apresenta um verdadeiro tratado de trigonometria retilínea e esférica.

Importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, no final do século VIII, mostrando o quanto aquele povo estava familiriazado com esse ramo da Matemática, sendo os responsáveis pelas notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes.

No século XV, Purback, um matemático nascido na Baviera, procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, introduzindo o seno e a tangente na trigonometria e construindo a primeira tábua trigonométrica. Porém, o primeiro tratado de trigonometria feito de maneira sistemática é chamado 'De triangulis' ou 'Tratado dos triângulos' e foi escrito pelo matemático alemão Johann Muller, discípulo de Purback.

Atualmente, a trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários ramos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Encontramos também aplicações da trigonometria em Eletricidade, Mecânica Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos de atividades, aplicações estas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem a trigonometria.

2.2 Trigonometria no triângulo retângulo

Problema: distância da Terra à Lua.

Hiparco de Nicéia (190 a.C.- 120 a.C) foi o maior astrônomo da antiguidade e é considerado o inventor da trigonometria. A distância da Terra à Lua foi estimada por Hiparco em 402.500km. O valor aceito atualmente é de cerca de 360.000 km no perigeu, quando a Lua encontra-se mais próximo da Terra; e 405.000 km no apogeu, quando situa-se mais longe.

Vamos efetuar este cálculo: suponha a Terra e a Lua com formato aproximadamente esférico, com centros nos pontos T e L respectivamente. Considere um observador num ponto Z, sobre a superfície da Terra, alinhado com os pontos T e L. No mesmo instante um outro observador em H na mesma longitude de Z, vê a Lua nascer (veja a Figura 2.1). O ângulo α é a diferença de latitude entre os dois obervadores. Sabe-se que o raio da Terra r é de aproximadamente $6.371km$ e que o ângulo α é de $89,1°$. Como calcular a distância da Terra à Lua com estas informações? Vamos aplicar uma razão trigonométrica!

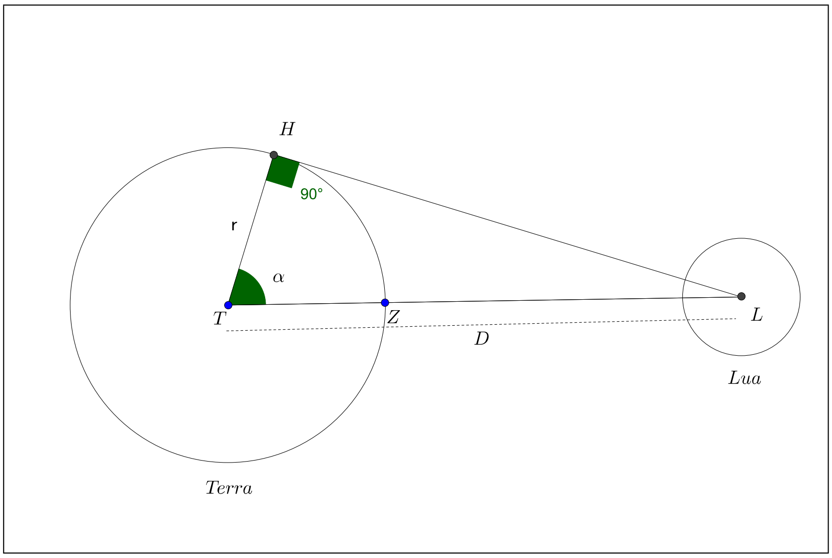

Figura 2.1: Distância da Terra à Lua

Nesta seção, serão abordados os conceitos de seno, cosseno e tangente, não de maneira que o aluno apenas memorize estas razões, mas que ele consiga visualizá-las.

Acompanhando este trabalho, há uma série de arquivos elaborados no GeoGebra (extensão .ggb), com construções geométricas a serem utilizadas com atividades para este estudo. Caso o leitor deseje conhecer os procedimentos necessários para a construção das figuras, basta acessar, no menu, o item 'Exibir', e em seguida, 'Protocolo de Construção'.

Trata-se de uma abordagem muito interessante pois, no GeoGebra, 'as figuras construídas com as propriedades que as definem, podem ser movimentadas pela tela através de rotação, translação, ampliação ou redução de seus tamanhos e elas mantém suas características intrínsecas.(...) Essa nova abordagem no estudo da geometria é conhecida como Geometria Dinâmica.' (DUCATTI, 2010).

2.2.1 Atividade 1: Razões trigonométricas

Abrir o arquivo atividade1.ggb. Na janela de visualização aparecerá um triângulo ABC, retângulo em A, com as medidas de seus ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, e $\hat{C}$, e de seus lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Faça o que se pede:

(a) Com o auxílio de uma calculadora, obtenha o resultado de $\overline{AB}/\overline{BC}$ e $\overline{AC}/\overline{BC}$.

(b) Mova o ponto A, 'ampliando' ou 'reduzindo' o triângulo; as medidas dos segmentos serão alteradas. Repita o procedimento do item (a) quantas vezes queira. O que ocorreu com as razões calculadas?

(c) O que ocorreu com os valores dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$?

Respostas esperadas:

(a) $\overline{AB}/\overline{BC} = 9,66/12,58 \approx 0,768$. $\overline{AC}/\overline{BC} = 8,05/12,58 \approx 0,639$.

(b) Ao 'ampliar' e 'reduzir' o triângulo, as medidas de seus lados se alteram, porém as razões entre eles se mantém com os mesmos valores.

(c) Os ângulos também não se alteram.

2.2.2 Fundamentação teórica

Após esta atividade, com o auxílio do professor, o aluno concluirá que as razões entre os lados, e os ângulos não se alteram qualquer que seja o tamanho do triângulo. Neste momento, o docente pode esclarecer que, as razões $\overline{AB}/\overline{BC}$ e $\overline{AC}/\overline{BC}$ são, respectivamente o seno e o cosseno do ângulo $\hat{B}$. Além disso, quando ampliamos e reduzimos o triângulo em questão, seus ângulos não se alteram e obtemos assim inúmeros triângulos semelhantes. Vamos formalizar este conhecimento.

Definição 1 *Em um triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c, como mostrado na Figura 2.2 têm-se as definições:*

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a};$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a};$$

e

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}.$$

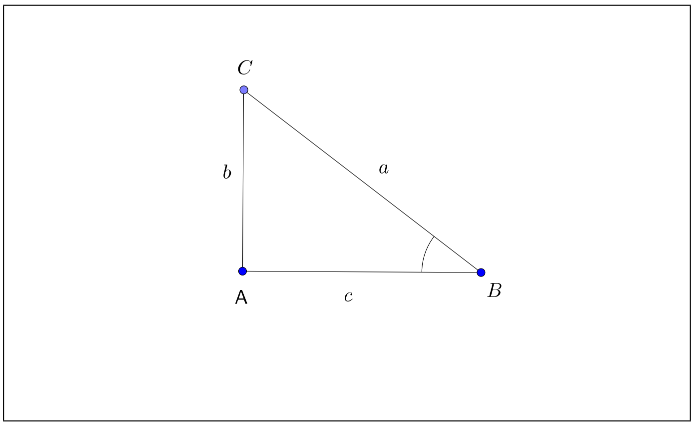

Figura 2.2: Triângulo retângulo

Observemos que $\cos\hat{B}$ e $\operatorname{sen}\hat{B}$ dependem apenas do ângulo $\hat{B}$ e não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{B}$ é um dos ângulos agudos. Com efeito, dois quaisquer triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual a $\hat{B}$ são semelhantes, como mostra a Figura 2.3.

Se esses triângulos são ABC e DEF com $\hat{E} = \hat{B}$, então a semelhança nos dá:

$$\frac{e}{d} = \frac{b}{a}$$

e

$$\frac{f}{d} = \frac{c}{a}.$$

Logo, $\operatorname{sen}\hat{E} = \operatorname{sen}\hat{B}$ e $\cos\hat{E} = \cos\hat{B}$. Portanto, o seno e o cosseno 'pertencem' ao ângulo e não ao eventual triângulo que o contém.

Resolução do problema: Distância da Terra à Lua.

Neste problema, temos um triângulo THL, retângulo em H. Sendo: $r =$ raio da terra e $D =$ distância à Lua, temos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{D} = \frac{6371}{D}.$$

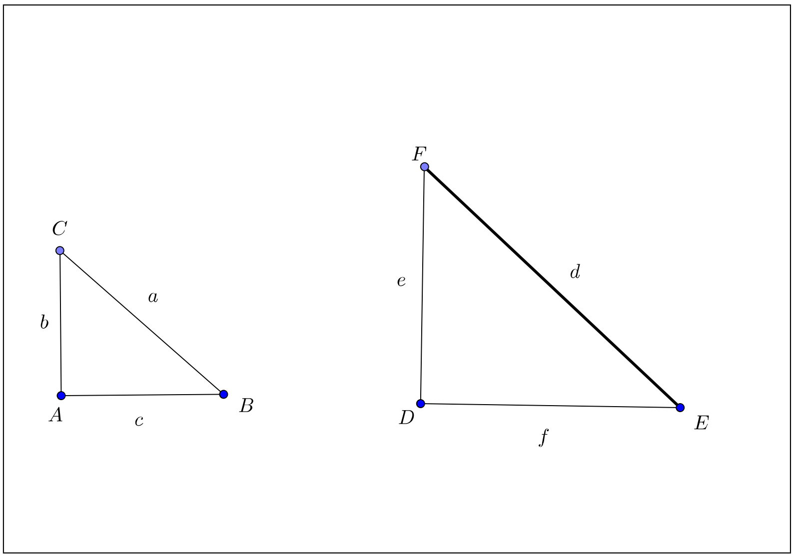

Figura 2.3: Dois triângulos semelhantes

Como $90° - \alpha = 0,9°$ cujo seno (obtido em uma calculadora) é cerca de $0,0157$, temos:

$$\frac{6371}{D} \approx 0,0157 \Rightarrow D \approx 405.796$$

Logo, a distância do centro da Terra ao centro da Lua é de aproximadamente 405.796 km.

2.2.3 Atividade 2: Ângulos complementares e relação fundamental.

Ainda no arquivo atividade1.ggb, faça o que se pede:

(a) Qual é o valor da soma entre os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$? Você sabe se existe algum nome especial para este par de ângulos?

(b) A partir da definição de seno e cosseno já dada, calcule, $\cos\hat{B}, \operatorname{sen}\hat{B}, \cos\hat{C}, \operatorname{sen}\hat{C}$.

(c) Qual a relação entre estes valores? O que você concluiu?

(d) Calcule $\operatorname{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B}$.

Respostas esperadas:

(a) $\hat{B} + \hat{C} = 90^{o}$, são ângulos complementares.

(b) $\cos\hat{B} \approx 0,768, \operatorname{sen}\hat{B} \approx 0,639, \cos\hat{C} \approx 0,639, \operatorname{sen}\hat{C} \approx 0,768$.

(c) $\cos\hat{B} = \operatorname{sen}\hat{C}$ e $\cos\hat{C} = \operatorname{sen}\hat{B}$. O cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar.

(d) $\operatorname{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$.

2.2.4 Fundamentação teórica

Neste momento, o professor pode enunciar estas interessantes propriedades já verificadas pelo aluno: a relação fundamental e seno e cosseno de ângulos complementares. Também, pode observar que o seno e o cosseno são razões que variam no intervalo real $]0,1[$; lembrando que, neste contexto, estamos trabalhando com ângulos compreendidos entre $0°$ e $90°$, com exceção destes dois valores.

Relação fundamental:

Seja o triângulo retângulo ABC com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, temos que

$$\cos^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{B} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Assim,

$$\cos^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{B} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Observação 1 *Sendo $\hat{C}$ um ângulo agudo, medido em graus, temos:*

- $\operatorname{sen}\hat{C} = \cos(90° - \hat{C})$ *e* $\cos\hat{C} = \operatorname{sen}(90° - \hat{C})$,
- $0 < \operatorname{sen}\hat{C} < 1$ *e* $0 < \cos\hat{C} < 1$.

2.3 O número π

Neste momento, é interessante o professor relembrar o significado do número π, para dar prosseguimento ao nosso estudo.

2.3.1 Atividade 3: Circunferências e o número π.

Vamos acessar o arquivo atividade3.ggb. Há três circulos com os raios medindo 1, 1,5 e 2 unidades e perímetros de aproximadamente 6,2832, 9,4248 e 12,5664 unidades, respectivamente. Em cada um deles, calcule a razão entre o perímetro e o diâmetro. Qual valor foi obtido?

Resposta esperada:

Fazendo os cálculos corretamente, o aluno perceberá que todas as razões resultam em aproximadamente 3,1416, que é uma aproximação para o número π.

2.3.2 Fundamentação teórica

Como todo o conhecimento matemático, o número π passou por uma série de evoluções ao longo da História. Desde há muito tempo (cerca de 4000 anos) notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho dessa circunferência. Este valor constante da razão $\frac{comprimento}{diametro}$ é um número que vale aproximadamente 3,141592, o qual se representa pela letra grega π. Os babilônios já tinham observado que o valor de π situa-se entre 3,125 e 3,142.

O Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos a.C. contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$, (Primeiro Livro dos Reis, VII: 23), em que está escrito: 'Fez também o mar de fundição, era redondo e media dez côvados duma borda à outra, cinco côvados de altura e trinta de circunferência'.

Desde Arquimedes, que obteve o valor $\pi = 3,1416$, matemáticos se tem ocupado em calcular π com precisão cada vez maior. O inglês Willian Shanks calculou π com 707 algarismos decimais exatos em 1873. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks errava no 527º algarismo e portanto nos seguintes. Com auxílio de uma maquininha manual, o valor de π foi então calculado com 808 algarismos decimais exatos. Depois vieram os computadores e, com seu auxílio, em 1967, na França, calculou-se π com 500.000 algarismos decimais exatos e, em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões de algarismos exatos.

Segue a definição:

Definição 2 *O número π é o comprimento de um semicírculo de raio 1.*

Desta forma, no círculo de raio 1, o comprimento c é dado por $c = 2\pi$ e consequentemente, no círculo de raio R, $c = 2\pi R$. Escrevendo $c/2R = \pi$ vemos que o número π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e o seu diâmetro, sendo aproximadamente 3,14159265.

Até aqui, o seno e o cosseno foram definidos para ângulos maiores do que 0° e menores do que 90°. Vamos estender as definições estudadas para os demais ângulos.

2.4 A Função de Euler e a medida de ângulos

Primeiramente vamos considerar a circunferência trigonométrica ou unitária, definida a seguir e ilustrada na Figura 2.4.

Definição 3 *A* ***cincunferência unitária C*** *é a circunferência de raio 1 e centro na origem de* $\mathbb{R}^2$*, ou seja,*

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

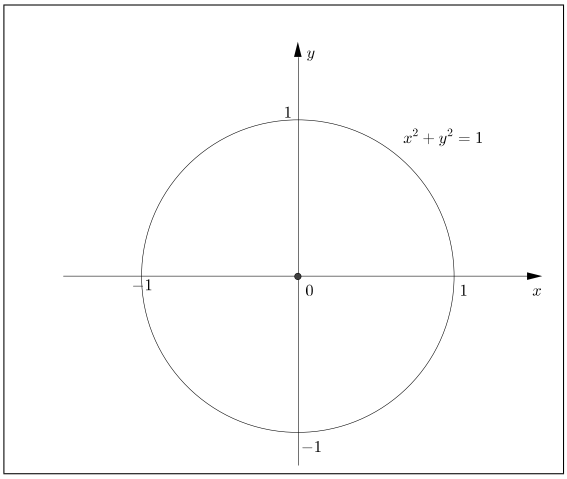

Figura 2.4: Circunferência unitária

Agora, imagine a circunferência unitária C como um carretel no qual se enrola a reta $\mathbb{R}$, de modo que o zero fique sobre o ponto $(1, 0)$. Assim, a reta real está sendo imaginada como um longo fio que deverá ser enrolado no carretel considerado. Ao enrolar o fio no carretel este coincidirá com algum arco da circunferência. É esta a idéia da função $E : \mathbb{R} \to C$, que associa cada número real t a um ponto $P = E(t)$ localizado na circunferência C conforme ilustrado na Figura 2.5. Em referência ao seu criador, o matemático suíço Leonard Euler (1707-1783)- E é chamada **Função de Euler**. Na atividade a seguir, vamos visualizar a função de Euler restrita no intervalo real $[0, 2\pi]$, e fazer uma correspondência entre o ângulo central, em graus, e a medida correspondente de seu arco em radianos.

2.4.1 Fundamentação teórica

Definição 4 *A **Função de Euler** $E : \mathbb{R} \to C$ é a aplicação que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ da circunferência unitária. Note que:*

- $E(0) = (1, 0)$.
- *Se $t > 0$ percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (anti-horário, que nos leva de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.*
- *Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (horário).*

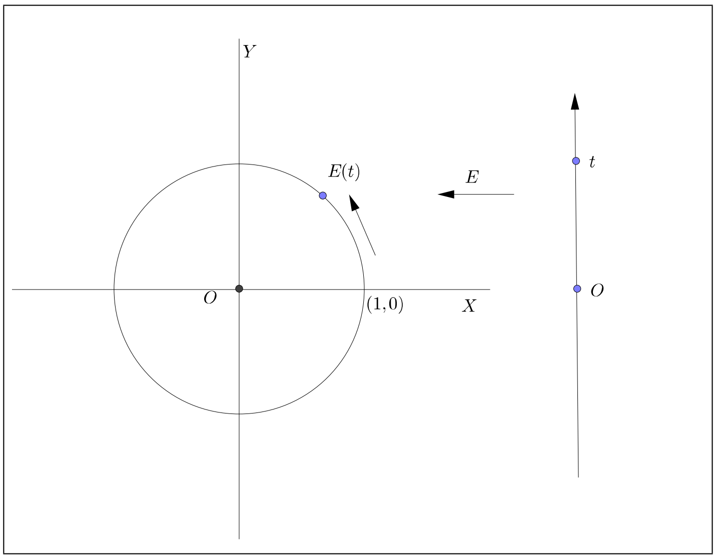

Figura 2.5: A Função Euler

A Função de Euler é periódica de período 2π, ou seja, $E(t) = E(t+2k\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1 *Tem-se $E(t') = E(t)$ se, e somente se, $t' = t + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Quando $t' \geq t$ vale $k \geq 0$; quando $t' < t$ tem-se $k < 0$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em (LIMA, 1997).

2.5 O grau e o radiano

Nesta seção e na próxima, estudaremos as unidades de medida para ângulos, grau e radiano, respectivamente. Este aspecto deve ser muito bem trabalhado em sala de aula, pois é comum os alunos não compreenderem a unidade radiano para a medida de ângulos e sempre fazerem perguntas como: Este π significa $180°$ ou $3,14$?

A intenção das próximas atividades é fazer com que o aluno saiba diferenciar o ângulo central da medida de seu arco correspondente na circunferência.

2.5.1 Atividade 4: O ângulo central e a medida de seu arco correspondente.

No arquivo atividade4.ggb, temos uma circunferência com centro em $(0, 0)$ e raio 1. Sobre ela, existe um ponto E. Conforme movemos este ponto, forma-se um arco em verde, com origem no ponto $A(1, 0)$ sobre esta circunferêcia, e também um segmento de reta em azul partindo de $(0, 0)$ e com uma extremidade no ponto T. **A medida do arco em verde, corresponde à medida do segmento em azul**. Note também que, aparece o ângulo central em vermelho, correspondente ao arco em questão. Responda, quanto mede o arco em verde $\widehat{AE}$ quando seu ângulo central correspondente vale

(a) $90°$?

(b) $180°$?

(c) $270°$?

(d) $360°$?

Repostas esperadas: Usando a contrução, o aluno chegará nos resultados $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π, respectivamente. Desta forma, ele perceberá a relação entre o ângulo central, em graus, e a medida de seu arco correspondente na circunferência unitária, escrita em função do número π. Será uma motivação para o entendimento da unidade **radiano**.

2.5.2 Atividade 5.

No arquivo atividade5.ggb existe uma construção com a Circunferência 1 de raio 4 u.c. (unidades de comprimento), e a Circunferência 2 de raio 6 u.c. Em vermelho, destacam-se os arcos $\widehat{DB}$ e $\widehat{FG}$. Conforme movemos os pontos B e G, mudamos a medida em graus dos ângulos centrais, em verde, e a medida dos arcos em unidades de comprimento. Na Circunferência 1, dê os valores aproximados:

(a) do ângulo correspondente arco de 4 u.c.

(b) do ângulo correspondente ao arco 8 u.c.

(c) do arco correspondente ao ângulo de 45°.

Da mesma forma, na Circunferência 2:

(d) do ângulo correspondente arco de 6 u.c.

(e) do ângulo correspondente ao arco de 12 u.c.

(f) do arco correspondente ao ângulo de 45°.

Respostas esperadas:

(a) Aproximadamente $57,293°$.

(b) Aproximadamente $114,596°$.

(c) Aproximadamente $3,142$ u.c.

(d) Aproximadamente $57,292°$

(e) Aproximadamente $114,589°$

(f) Aproximadamente $4,712$ u.c.

Neste momento, pelos itens (a) e (d) é provável que o aluno perceba que, quando a medida do arco da circunferência corresponde à medida de seu raio, o ângulo central equivale a aproximadamente 57,3°. Além disso, por (b) e (e), percebe-se que, quando duplicamos a medida do arco, o ângulo também duplica para aproximadamente $2 \times 57,3° = 114,6°$.

Agora, o professor também pode explicar que, o ângulo correspondente a um arco, cuja medida é igual ao raio da circunferência, é chamado de **radiano** (denota-se **rad**). E também observar que 1 rad corresponde, a aproximadamente $57,29577951°$.

Assim, na atividade 5, em (a) e (d) o ângulo central mede 1 rad, e em (b) e (e) mede 2 rad.

2.5.3 Atividade 6: valores em radianos dos ângulos de 90°, 180°, 270° e 360°.

De acordo com a definição anterior, em uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), o arco de comprimento k corresponde ao ângulo de k rad. Assim, utilizando o arquivo atividade6.ggb, dê os valores em radianos dos ângulos de 90°, 180°, 270° e 360°.

Respostas esperadas

$\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π, respectivamente.

Observação 2 *Agora, podemos dizer que* 180° *corresponde a* π *rad.*

2.5.4 Atividade 7: Medidas de ângulos em graus e radianos e medida de arcos.

(a) Na circunferência unitária, o arco de $\frac{\pi}{6}$u.c. corresponde ao ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad.

- Escreva $\frac{\pi}{6}$ na forma decimal.
- Escreva $\frac{\pi}{6}$ rad em graus.
- No arquivo atividade7.ggb, verifique que os valores se correspondem.

(b) Qual é o ângulo que corresponde ao arco de comprimento $\frac{\pi}{3}$ u.c. na circunferência unitária?

- Resposta em radiano.
- Resposta em graus.

(c) Para o ângulo de 45° determine:

- A medida do arco correspondente em decimal (utilize atividade7.ggb).
- A medida do ângulo correspondente em radianos. Faça em função de π e em decimal.
- Verifique que as medidas dos dois itens anteriores se correspondem.

Respostas esperadas:

(a)
- $3,1416/6 = 0,523$, aproximadamente.
- $180°/6 = 30°$.

- O ângulo central de 30° corresponde à medida aproximada de 0,524 do arco correspondente.

(b)
- $\pi/3$ rad.
- 60°.

(c)
- Aproximadamente $0,786$.
- Em unidades π: $\pi/4$ rad. Em decimal $3,1416/4 \approx 0,785$.

Neste momento, espera-se que o aluno consiga diferenciar as unidades de medidas graus e radianos, e entenda o significado desta última. Além disso, com o auxílio do professor, ele pode aprender como converter a medida de um ângulo de graus para radianos e vice-versa.

2.5.5 Fundamentação teórica

O RADIANO

A seguir, definimos a medida em radiano de um ângulo utilizando a Função de Euler $E(t)$.

Definição 5 ***(Medida em radiano):*** *Consideremos a circunferência unitária C, e os pontos $A = (1, 0)$ e $O = (0, 0)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ ponhamos $B = E(t)$. O ângulo $A\hat{O}B$ mede t radianos.*

Observação 3
- *Pode-se ter $B = E(t)$, com $t < 0$; é permitido a um ângulo ter medida negativa.*
- *A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é determinada por um múltiplo inteiro de 2π, ou seja, $B = E(t) = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*
- *o ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 radiano se, e somente se, o arco $\widehat{AB}$ da circunferência C, por ele subentendido, tem comprimento igual ao raio da circunferência.*

De outra forma, podemos definir a medida de um ângulo central em radianos.

Definição 6 *Um* ***ângulo central*** *de uma circunferência, é um ângulo cujo vértice encontra-se no centro da mesma.*

Definição 7 *A medida de um ângulo central em radianos, é igual à razão entre o comprimento do arco subentendido por esse ângulo e a medida do raio da circunferência.*

O GRAU

Seja C a circunferência unitária e G uma função $G : \mathbb{R} \to C$, tal que

$$G(0) = (1, 0).$$

Para $s > 0$, $G(s)$ é o ponto da circunferência unitária obtido quando se percorre no sentido positivo, a partir do ponto $(1, 0)$, ao longo de C, um caminho de comprimento $\frac{2\pi}{360}s$; e para $s < 0$, $G(s)$ é definida de forma análoga à anterior, percorrendo a circunferência no sentido negativo. Temos que

$$G(t) = E(\frac{2\pi}{360}t).$$

Definição 8 *Seja $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = G(s)$. O ângulo $A\hat{O}B$ mede s graus.*

Observação 4

- *O ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 grau quando $B = G(1)$, ou seja, quando o arco $\widehat{AB}$ da circunferência unitária tem comprimento igual a $\frac{2\pi}{360}$. O ângulo de 1 grau é aquele que subentende o arco igual a $1/360$ da circunferência.*
- *Notação: 1 grau = 1°.*
- *Como 2π rad $= 360°$, temos que 1 rad$= \frac{360}{2\pi} \approx 57,29°$.*

2.6 As funções seno e cosseno

Nesta seção, estudaremos as funções seno e cosseno, mostrando algumas de suas aplicações, seus gráficos com suas propriedades e características, e sua definição proveniente da Função de Euler.

> O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de $\cos \hat{A}$, o cosseno do ângulo $\hat{A}$, têm-se também $\cos x$, o cosseno do número real x, isto é, a função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Analogamente, tem-se as funções sen, tg, cotg, sec, cossec, completando as funções trigonométricas. Uma propriedade fundamental das

> funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômeno de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação de sangue, batimentos cardíacos, etc. (LIMA, 1997).

Vamos conhecer uma aplicação:

A altura de maré:

Em certa cidade litorânea, a altura h da maré (em metro), em função do tempo t, $0 \leq t \leq 24$, é dada pela função

$$h(t) = 2 + 0,5.\cos(\frac{\pi}{6}.t),$$

na qual o tempo é medido em hora, a partir da meia-noite. Nessa situação, aparece a função trigonométrica cosseno, que descreve um comportamento do tipo periódico.

2.6.1 Seno e cosseno no círculo unitário.

Já conhecemos a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, em que $E(t) = P$; sendo t um número real e $P = E(t)$ um ponto na circunferência unitária. Define-se nesta circunferência:

- $\cos t$ é a abcissa do ponto P,
- $\operatorname{sen} t$ é a ordenada do ponto P,
- $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

Veja a Figura 2.6.

A propósito, o ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes, analogamente ao plano cartesiano, como mostra a Figura 2.7:

Atividade 8: sinais de seno e cosseno na circunferência unitária.

Vamos para a seguinte atividade: no arquivo atividade8.ggb, temos uma circunferência unitária onde destacam-se um arco de medida t em vermelho e um ponto P, que é a imagem de $t \in R$ pela função de Euler . Conforme movemos o ponto P, alteram-se as medidas do arco $\widehat{AD}$ em azul, e do arco $\widehat{AE}$ em verde. De acordo com a definição dada acima, $\overline{AD} = \cos t$ e $\overline{AE} = \operatorname{sen} t$. Assim, escolha um arco de cada quadrante e encontre os valores do seno e do cosseno, com uma aproximação de três casas decimais (mova a 'rodinha' do mouse para aproximar a tela).

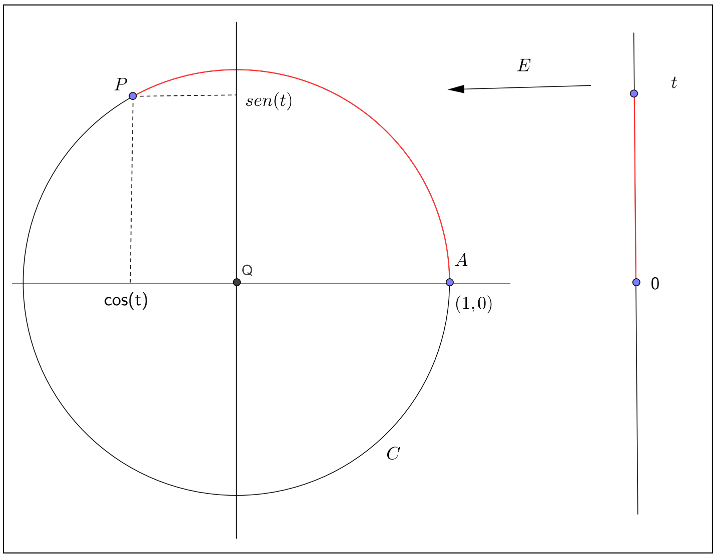

Figura 2.6: $E(t) = P$: o arco $\widehat{AP}$ tem medida t.

(a) No Quadrante 1,

(b) No Quadrante 2,

(c) No Quadrante 3,

(d) No Quadrante 4.

O que você percebeu em relação aos sinais do seno e do cosseno em cada um dos quadrantes da circunferência?

Resposta esperada:

Nos itens (a), (b), (c) e (d) o aluno escolherá aleatoriamente medidas de ângulos em cada quadrante e encontrará seu valores de seno e cosseno. Ele também deverá compreender os sinais do seno e do cosseno em cada quadrante. (Ver também Figura 2.8.)

- No Quadrante 1: $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$.
- No Quadrante 2: $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x < 0$.
- No Quadrante 3: $\operatorname{sen} x < 0$ e $\cos x < 0$.
- No Quadrante 4: $\operatorname{sen} x < 0$ e $\cos x > 0$.

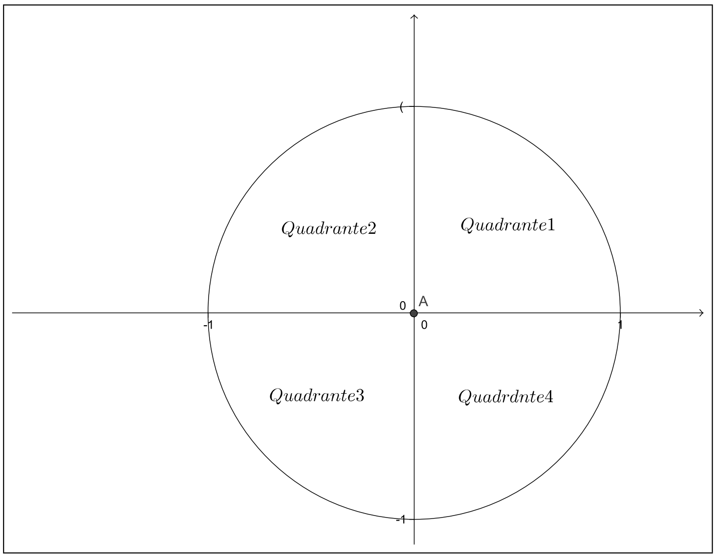

Figura 2.7: Os quatro quadrantes do ciclo trigonométrico

Atividade 9: seno e cosseno de 0, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$.

Ainda no arquivo atividade8.ggb, encontre os valores de:

(a) $\cos 0$ e $\operatorname{sen} 0$.

(b) $\cos \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$.

(c) $\cos \pi$ e $\operatorname{sen} \pi$.

(d) $\cos \frac{3\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$.

Respostas esperadas:

(a) 1 e 0

(b) 0 e 1

(c) -1 e 0

(d) 0 e -1

Atividade 10- Redução ao primeiro quadrante:

Nesta atividade, vamos identificar a simetria existente no ciclo trigronométrico, ou seja, existem arcos que, mesmo situados em quadrantes diferentes possuem seus valores para seno e cosseno iguais em módulo.

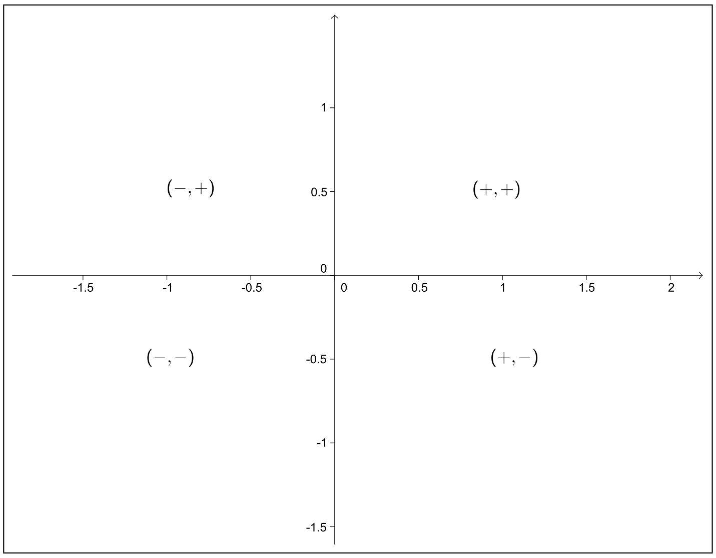

Figura 2.8: Sinais do seno e cosseno em cada quadrante

(a) No arquivo atividade10a.ggb, movimente o ponto P alterando a medida do ângulo central do arco $\widehat{BP}$ para 30°, 45°, 60°. Em cada um deles, dê a medida do ângulo correspondente no segundo quadrante. O que ocorreu com as medidas e sinais dos respectivos senos e cossenos?

(b) Faça o mesmo em atividade10b.ggb, para o 3º quadrante;

(c) Faça também em atividade10c.ggb para o 4º quadrante.

Respostas esperadas

(a) 150º, 135º e 120º. Os senos são iguais e os cossenos têm mesmo valor em módulo, com sinais diferentes.

(b) 210º, 225°, 240°. Senos e cossenos iguais em módulo mas com sinais diferentes.

(c) 330°, 315º e 300º. Os cossenos são iguais e os senos têm mesmo valor em módulo, com sinais diferentes

2.6.2 Fundamentação teórica

Consideremos a Função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$. Como já dissemos anteriormente, esta função pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta real, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ esteja sobre o ponto $(1,0) \in C$, como mostra a Figura 2.5. Assim, a Função de Euler representa um ponto bem definido da circunferência unitária C.

Por outro lado, dado um ponto $P \in C$, ele é a imagem da função E de uma infinidade de números reais, ou seja, $P = E(t)$. Todos estes números são da forma

$$t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dizemos que $t + 2k\pi$ são as várias determinações de um ângulo ou que t e $t + 2k\pi$ são **côngruos**.

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de C, e sendo $A = (1,0)$, definimos:

- $\cos t$ é a abcissa do ponto P.
- $\operatorname{sen} t$ é a ordenada do ponto P.
- $\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, se $\cos t \neq 0$

Veja a Figura 2.6.

Formalizaremos assim a seguinte definição:

Definição 9 *As funções* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, chamadas* ***função cosseno*** *e* ***função seno****, respectivamente, são definidas pondo-se para cada* $t \in \mathbb{R}$

$$E(t) = P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Podemos obter os seguintes valores: (ver também Figura 2.9)

(a) Quando $P_1 = (1,0)$, $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$;

(b) Quando $P_2 = (0,1)$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$;

(c) Quando $P_3 = (-1,0)$, $\cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$

(d) Quando $P_4 = (0,-1)$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$

(e) Como todo ponto $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ da circunferência C está a uma distância 1 da origem temos a **relação fundamental**:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

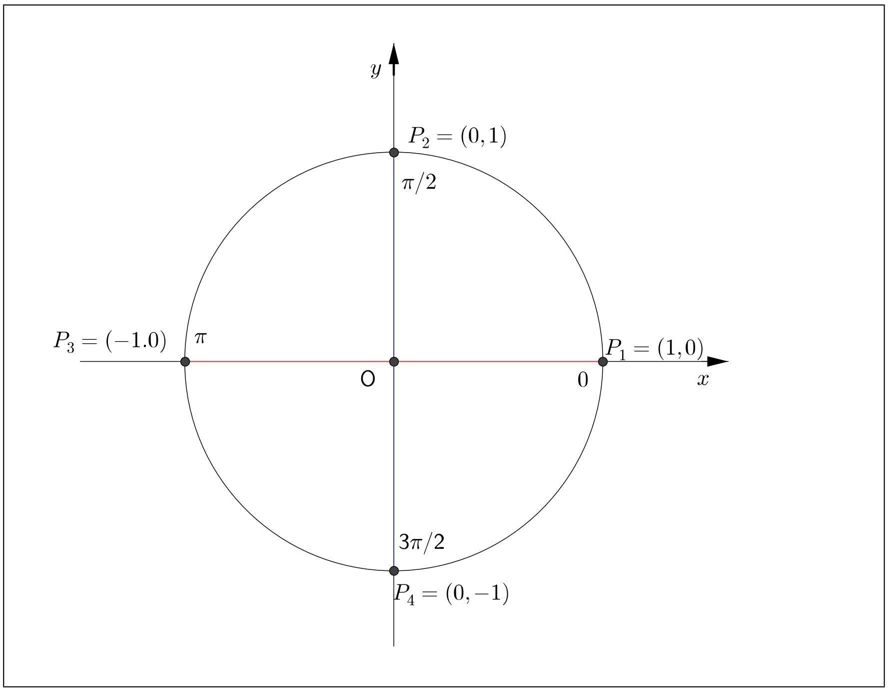

Figura 2.9: senos e cossenos nas extremidades da circunferência unitária.
2.9

Periodicidade

Definição 10 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***periódica****, se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição*

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado ***período*** *de f.*

As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, de fato, pela Proposição 1,

$$E(t + 2k\pi) = E(t).$$

Como $E(t + 2k\pi) = (\cos(t + 2k\pi), \operatorname{sen}(t + 2k\pi))$ e $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, segue que

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$$

e

$$\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen} t.$$

Assim, se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$, passamos a conhecer imediatamente como estas funções se comportam em todos os intervalos seguintes e anteriores de comprimento 2π.

Propriedades

As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram, como está esquematizado na Figura 2.8.

Na **função seno:**

(a) se $P = E(t)$ é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\operatorname{sen} t$ é positivo,

(b) se $P = E(t)$ é do terceiro ou quarto quadrante então $\operatorname{sen} t$ é negativo,

(c) se $P = E(t)$ percorre o primeiro ou quarto quadrante então $\operatorname{sen} t$ é crescente,

(d) se $P = E(t)$ percorre o segundo ou terceiro quadrante então $\operatorname{sen} t$ é decrescente.

Na **função cosseno:**

(a) se $P = E(t)$ é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos t$ é positivo,

(b) se $P = E(t)$ é do segundo ou terceiro quadrante então $\cos t$ é negativo,

(c) se $P = E(t)$ percorre o primeiro ou segundo quadrante então $\cos t$ é decrescente,

(d) se $P = E(t)$ percorre o terceiro ou quarto quadrante então $\cos t$ é crescente.

Na Figura 2.10 temos a representação do seno e do cosseno na circunferência trigonométrica.

Domínio e imagem

A **Imagem** das funções seno e cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ e $-1 \leq \cos t \leq 1$. De fato, se o ponto P está na circunferência unitária, sua abcissa e ordenada podem variar apenas de -1 a 1.

O **Domínio** destas funções é conjunto de todos os números reais; de fato, a função de Euler tem como domínio todos os números reais.

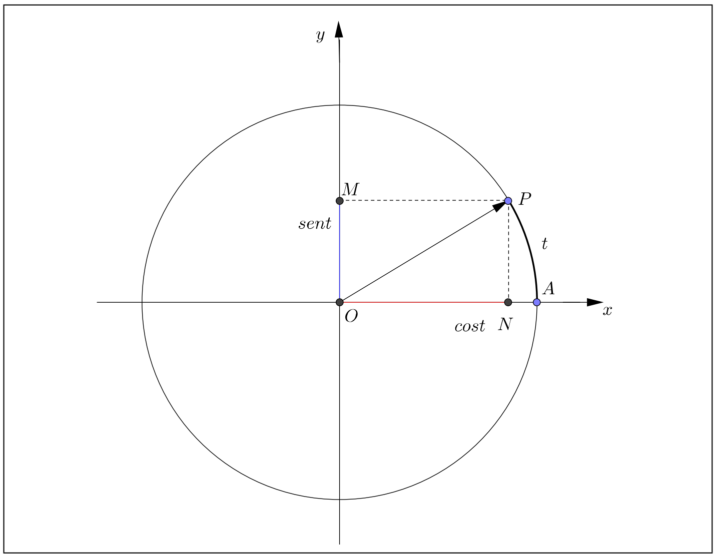

Figura 2.10: $\overline{OM} = \operatorname{sen} t$ e $\overline{ON} = \cos t$.

Gráficos

Com as informações acima, podemos esboçar o seguinte gráfico, denominado senóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ (Figura 2.11).

Analogamente, podemos esboçar o gráfico da função $f(x) = \cos x$ denominado cossenóide. (Figura 2.12).

Redução ao primeiro quadrante

Vamos mostrar como é possível determinar o valor das funções seno e cosseno em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante. Usaremos a notação $m(\widehat{AB})$ a medida do arco $\widehat{AB}$, neste caso, $m(\widehat{AB}) = t$. Consideremos separadamente os casos em que a extremidade B do arco $\widehat{AB}$, de medida t, está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

Na função seno:

(a) $B = E(t)$ está no segundo quadrante, isto é $\pi/2 < t < \pi$.

Traçamos por B uma reta r paralela ao eixo das abcissas que intersecta novamente C em B'. Observemos que $m(\widehat{AB'}) = m(\widehat{BA'}) = \pi - t$, e portanto, $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$. (Figura 2.13).

(b) $B = E(t)$ está no terceiro quadrante, isto é, $\pi < t < 3\pi/2$. Traçamos por B uma reta r passando pela origem O, que intersecta novamente

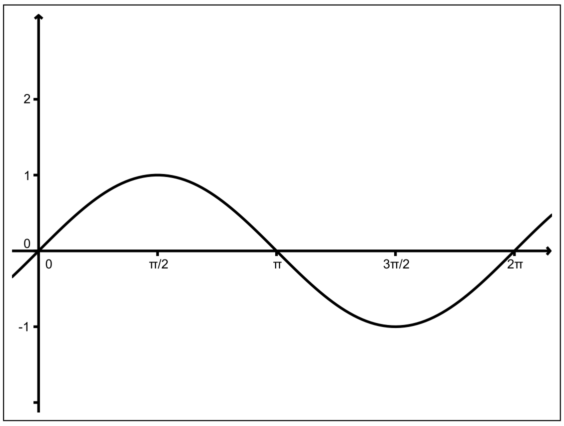

Figura 2.11: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

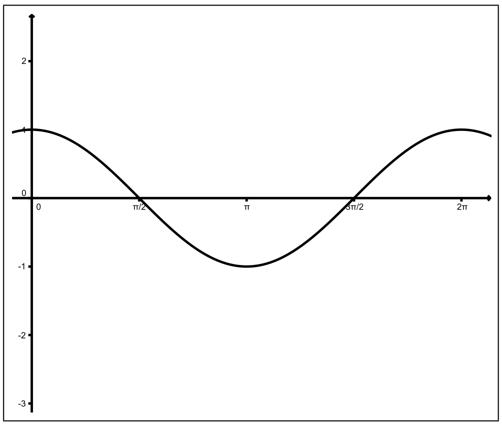

Figura 2.12: $g(x) = \cos x$

C em B'. Observemos que $m(\widehat{AB'}) = m(\widehat{A'B}) = t - \pi$. (Figura 2.14) Assim, obtemos $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(t - \pi)$.

(c) $B = E(t)$ está no quarto quadrante, isto é $3\pi/2 < t < 2\pi$.

Traçamos por B uma reta r paralela ao eixo das ordenadas, que intersecta novamente C em B'. Observemos que $m(\widehat{AB'}) = m(\widehat{BA}) = 2\pi - t$ e $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(2\pi - t)$ (Figura 2.15).

Na função cosseno

Fazemos as construções análogas à função seno, e obtemos:

(a) Se o arco de medida t está no segundo quadrante, isto é $\pi/2 < t < \pi$ então $\cos t = -\cos(\pi - t)$,

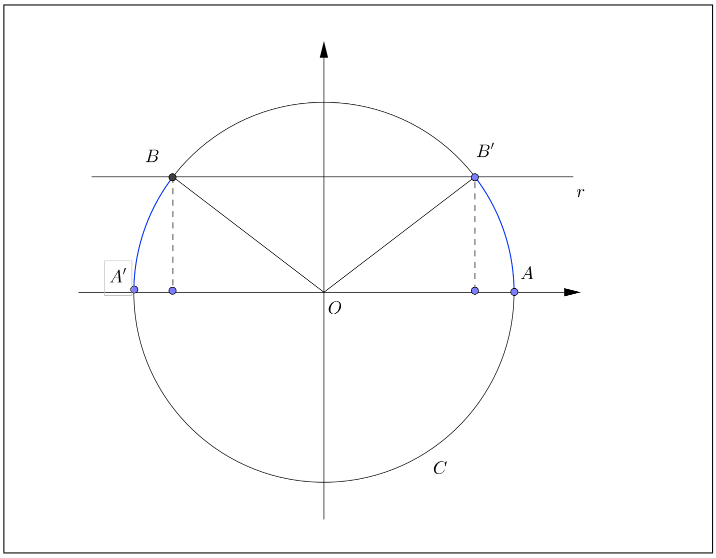

Figura 2.13: $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$

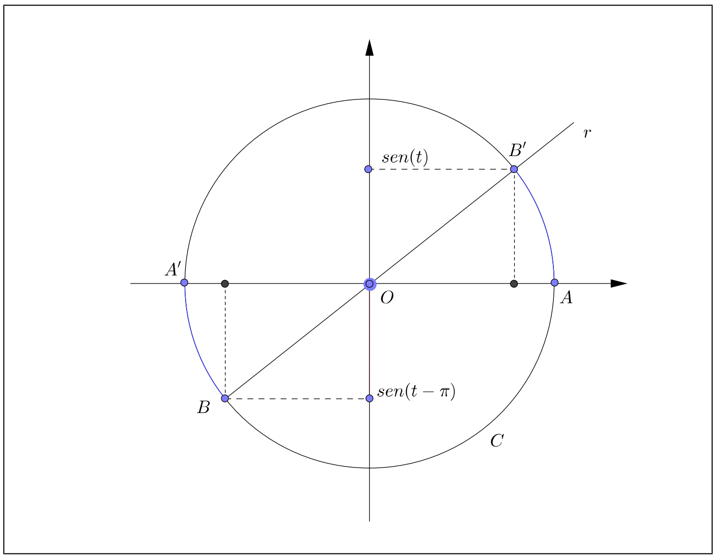

Figura 2.14: $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(t - \pi)$

(b) Se o arco de medida t está no terceiro quadrante, isto é, $\pi < t < 3\pi/2$ então $\cos t = -\cos(t - \pi)$,

(c) Se o arco de medida t está no quarto quadrante, isto é $3\pi/2 < t < 2\pi$ então $\cos t = \cos(2\pi - t)$.

Como conclusão, temos que os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

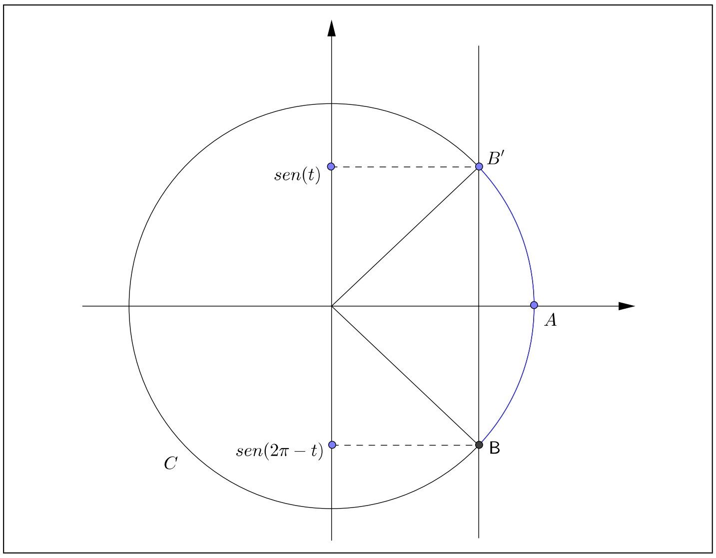

Figura 2.15: $\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(2\pi - t)$

2.6.3 Atividade 11: gráfico das funções seno e cosseno.

Neste momento vamos mostrar os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$ bem como estudar suas caracterísicas. Aqui, o aluno deve ter conhecimento básico em funções, em conceitos como monotonicidade, máximos e mínimos e raízes.

No arquivo atividade11seno.ggb, há uma construção em que, ao movermos o ponto C, aparece o desenho de um trecho (período) da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Vamos fazer um estudo desta função.

(a) Em quais intervalos a função é crescente?

(b) E decrescente?

(c) Quais são os valores máximo e mínimo desta função? E a sua imagem?

(d) Quais são as raízes da função?

Respostas esperadas:

(a) A função é crescente para $x \in [0, \pi/2]$ ou $x \in [3\pi/2, 2\pi]$.

(b) A função é decrescente para $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

(c) Os valores máximo e mínimo são 1 e -1, respectivamente. Sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

(d) As raízes são: $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

Repita a atividade para a função $g(x) = \cos x$ utilizando o arquivo atividade11cosseno.ggb.

Respostas esperadas:

(a) A função é crescente para $x \in [\pi, 2\pi]$.

(b) A função é decrescente para $x \in [0, \pi]$.

(c) Os valores máximo e mínimo são 1 e -1, respectivamente. Sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

(d) As raízes são: $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$.

2.6.4 Atividade 12: Problema- altura da maré.

Vamos retomar o problema inicial desta seção:

Altura de maré: Em certa cidade litorânea, a altura h da maré (em metro) em função do tempo $t \geq 0$, é dada pela função

$$h(t) = 2 + 0,5.\cos\left(\frac{\pi}{6}.t\right),$$

na qual o tempo é medido em hora, a partir da meia-noite. No arquivo atividade12.ggb temos o gráfico da função $h(t)$ com domínio em todos os reais, mas vamos considerar apenas a função restrita na região retangular em vermelho. Fazemos isto porque o tempo é relacionado com as horas do decorrer de um dia, devendo assim variar de 0 a 24.

(a) Utilizando a função $h(t)$, determine as alturas máxima e mínima da maré na situação dada. Lembre-se: pela Atividade 11, descobrimos que, para a função $f(x) = \cos x$ o valor máximo é 1 e o valor mínimo é -1.

(b) A partir do gráfico, responda em quais horários ocorreram as marés altas e baixas. Lembrando que $t = 0$ equivale a meia-noite, $t = 1$ a uma hora da manhã, etc.

(c) Identifique o período desta função e interprete o resultado.

Respostas esperadas:

(a) Para obter o valor máximo, nesta função, vamos substituir o termo $\cos\left(\frac{\pi}{6}.t\right)$ por 1. Assim temos:

$$h(t) = 2 + 0,5.1 = 2,5.$$

Para o obtermos o valor mínimo, temos:

$$h(t) = 2 + 0,5.(-1) = 1,5.$$

(b) As marés altas ocorreram à meia-noite e ao meio-dia. As marés baixas, às 6h da manhã e às 18h.

(c) O período é de 12h; a cada 12h as alturas da maré se repetem, ou 12h é tempo de uma oscilação para a altura.

2.7 Função tangente

Nesta seção vamos conhecer a interpretação geométrica da tangente na circunferência unitária e conhecer o gráfico de sua respectiva função.

2.7.1 Atividade 13: tangente de um arco.

No arquivo atividade13.ggb, temos uma circunferência unitária e uma reta perpendicular ao eixo das abcissas tangenciando a mesma no ponto $B(1,0)$. Inicialmente, vamos considerar um arco do primeiro qua- drante (entre 0 e $\frac{\pi}{2}$).

Traçamos a reta suporte do lado AC, e esta intersecta a reta tangente no ponto D; temos, então, o triângulo ABD. De acordo com a Definição 1, a tangente do ângulo central $B\hat{A}C$ é dada por:

$$\operatorname{tg} B\hat{A}C = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}.$$

Em breve provaremos que a tangente dos arcos em qualquer quadrante é dada pela medida do segmento $\overline{BD}$. Considerando isto faça o que se pede:

(a) Mova o ponto C para o primeiro quadrante da circunferência no sentido anti-horário. Conforme aumentamos a medida do arco, o que acontece com a medida do segmento BD? O que acontece quando o arco é de $\frac{\pi}{2}$ rad?

(b) Descreva o comportamento do segmento BD quando o ângulo central se encontra no 2º, 3º e 4º quadrantes.

(c) Quais são os arcos para os quais a tangente não existe?

Respostas esperadas

(a) A medida do segmento BD, ou seja, a tangente do ângulo aumenta, tendendo a valores muito grandes. Quando o arco é de $\frac{\pi}{2}$ rad, não existe o ponto D, que é a intersecção entre as duas retas. Logo, a tangente do arco de $\pi/2$ rad não existe.

(b) Movendo o ponto C no sentido anti-horário no 2º quadrante, percebemos que a ordenada do ponto D assume valores negativos, inicialmente muito pequenos e depois, aproximando-se cada vez mais de zero. Os arcos do 3º quadrante tem o mesmo comportamento do 1º, e os do 4º quadrante tem suas tangentes análogas aos do 2º.

(c) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

2.7.2 Atividade 14: gráfico da função tangente.

No arquivo atividade14.ggb, há uma construção em que, ao movermos o ponto C, é construído o gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ restrita no domínio

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 2\pi, x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Vamos fazer um estudo desta função.

(a) Qual é a imagem desta função? Ela possui valores máximos ou mínimos?

(b) O que ocorre com a função quando a medida do arco $\widehat{BC}$ se aproxima $\frac{\pi}{2}$rad ? e de $\frac{3\pi}{2}$rad?

(c) Em quais intervalos a função é crescente ou decrescente?

(d) Qual é o período desta função?

Respostas esperadas

(a) A imagem é o conjuntos dos números reais, a função não possui pontos de máximos ou mínimos.

(b) Quando o arco se aproxima de $\pi/2$ rad ou $3\pi/2$ rad, os valores de $f(x)$ ficam muito grandes, tendem ao infinito.

(c) A função é sempre crescente em todo o seu domínio.

(d) O período é π.

2.7.3 Fundamentação teórica

A **função tangente** é definida por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, em que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Façamos sua interpretação geométrica.

Consideremos uma reta orientada tangente à circunferência unitária pelo ponto A, como na Figura 2.16. Seja $\widehat{AB}$ um arco de medida x. A reta r que contém O e B determina B' na circunferência e T no novo eixo. Mostremos que $\operatorname{tg} x = m(AT)$, em que mAT significa a medida algébrica do segmento AT.

(a) Se B está no primeiro ou terceiro quadrante.

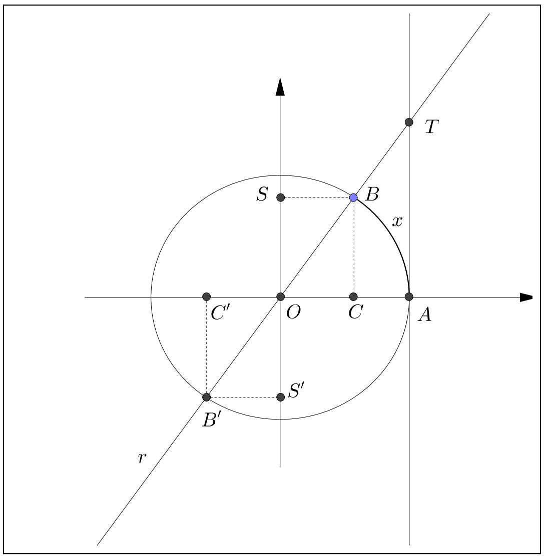

Figura 2.16: A unidade do novo eixo é o raio do círculo.

Suponhamos que x seja um arco do primeiro quadrante, e portanto, $x + \pi$, do terceiro. Os triângulos OCB, OSB, $OC'B'$ e $OS'B'$ são congruentes, e semelhantes ao triângulo OAT. Portanto,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = mAT,$$

e

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{-\overline{OC'}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = mAT.$$

(b) Se B está no segundo ou quarto quadrante.

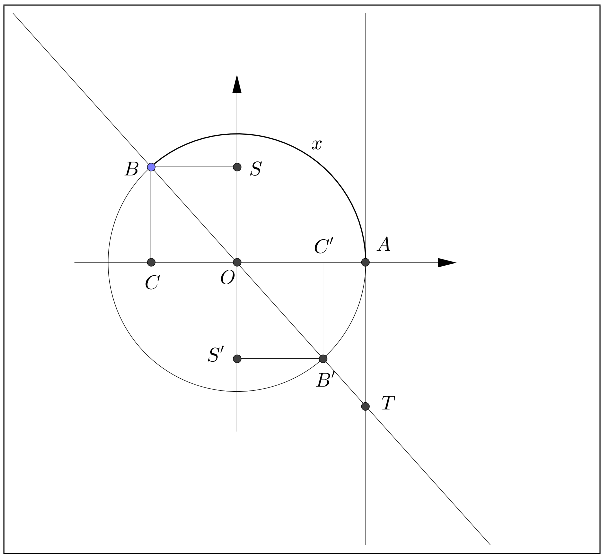

Figura 2.17:

Suponhamos que x seja um arco do segundo quadrante, e portanto, $x+\pi$, do quarto quadrante (Figura 2.17).

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\overline{OS}}{-\overline{OC}} = \frac{\overline{CB}}{-\overline{OC}} = \frac{-\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{AT}}{1} = -\overline{AT} = mAT,$$

e

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\overline{OS'}}{\overline{OC'}} = \frac{-\overline{C'B'}}{\overline{OC'}} = \frac{-\overline{AT}}{\overline{OA}} = -\overline{AT} = mAT.$$

Assim, concluímos que a $\operatorname{tg} x$ pode ser vista como a medida algébrica de um segmento AT.

Propriedades

(a) O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $\operatorname{tg} x = y$. De fato, dado $y \in R$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $mAT = y$. Construindo a reta que passa por O e T, observemos que ela intercepta o círculo unitário em dois pontos B e B', imagens dos reais x cuja tangente é y.

(c) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é positiva. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é negativa.

(d) $\operatorname{tg} x$ é crescente para todo $x \in D$.

(e) De acordo com as explicações dadas, em qualquer caso, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, para todo $x \in D$, ou seja, a tangente é uma função periódica de período π.

Gráfico

Segue um esboço do gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ na Figura 2.18.

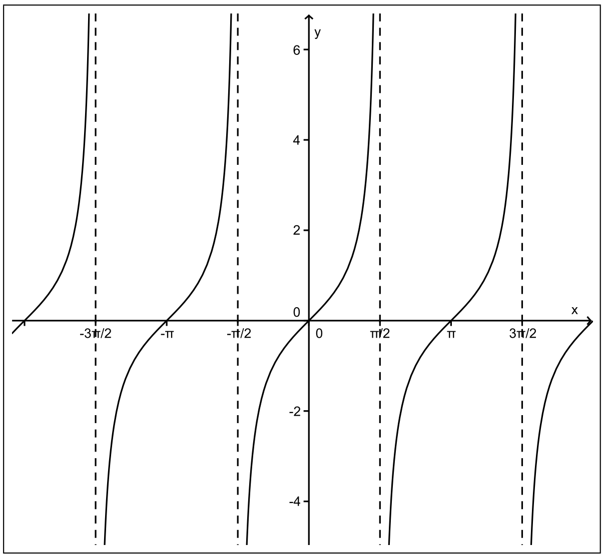

Figura 2.18: $f(x) = \operatorname{tg} x$

2.8 Demais funções trigonométricas: Fundamentação teórica.

Nesta seção, vamos estudar outras funções trigonométricas auxiliares, são elas as funções: secante, cossecante e cotangente.

2.8.1 Função secante

Dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ seja P sua imagem no círculo unitário pela Função de Euler. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos por $\sec x$) a abcissa $\overline{OS}$ do ponto S; como está representado na Figura 2.19.

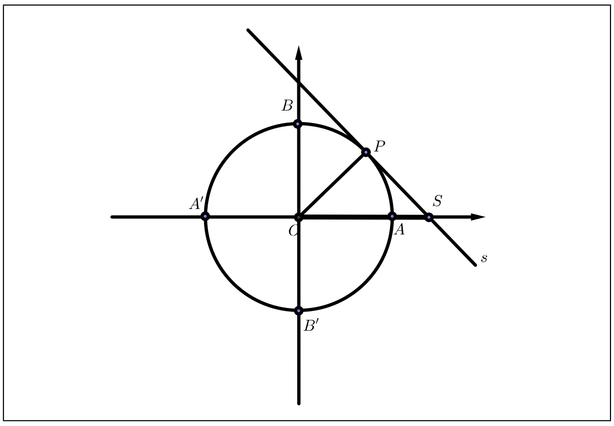

Figura 2.19: Representação geométrica da secante de x.

Denominamos função secante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ o real $\overline{OS} = \sec x$ isto é, $f(x) = \sec x$.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P é igual a B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto intersecção com o eixo das abcissas, a função $\sec x$ não está definida.

Propriedades:

(a) Se $P = E(x)$ está no 1º ou 4º quadrante, $\sec x$ é positiva; se $P = E(x)$ está no 2º ou 3º quadrante, $\sec x$ é negativa.

(b) Se $P = E(x)$ percorre o 1º ou 2º quadrante, $\sec x$ é crescente; se $P = E(x)$ percorre o 3º ou 4º quadrante, $\sec x$ é decrescente.

(c) Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

(d) Imagem: $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$.

(e) Período: 2π.

Gráfico:

O gráfico da função $f(x) = \sec x$ está representado na Figura 2.20.

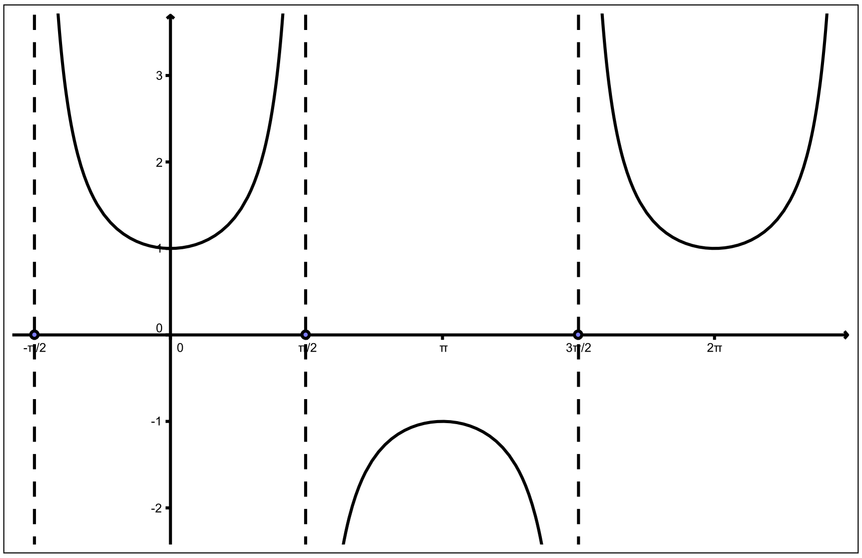

Figura 2.20: Gráfico da função $f(x) = \sec x$.

2.8.2 Função cossecante

Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no círculo unitário pela Função de Euler. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. A cossecante de x ($\text{cossec}\, x$) é a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C. (Figura 2.21).

Denominamos função cossecante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ o número real $\overline{OC} = \text{cossec}\, x$, isto é $f(x) = \text{cossec}\, x$.

Notemos que, para $x = k\pi$, P é igual a A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, a função $\text{cossec}\, x$ não está definida.

Propriedades:

(a) Se $P = E(x)$ está no é do 1º ou 2º quadrante, então $\text{cossec}\, x$ é positiva; se $P = E(x)$ está no 3º ou 4º quadrante, então $\text{cossec}\, x$ é negativa.

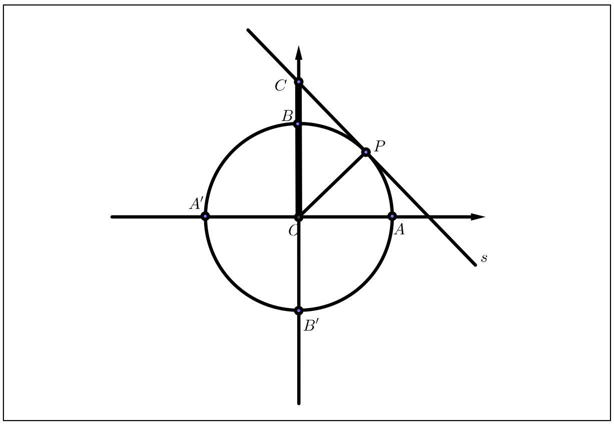

Figura 2.21: Representação geométrica da cossecante de x.

(b) Se $P = (E(x)$ percorre o 2º ou 3º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é crescente; se $P = E(x)$ percorre o 1º ou 4º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é decrescente.

(c) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Imagem: $\mathbb{R} \backslash]-1, 1[$.

(e) Período: 2π.

Gráfico:

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{cossec} x$ está representado na Figura 2.22.

2.8.3 Função cotangente

Dado um número real $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ seja P sua imagem no círculo unitário. Seja também a reta tangente ao círculo pelo ponto $(0, 1)$, paralela ao eixo das abcissas, doravante denominada eixo das cotangentes. Consideremos a reta passando por O e P e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. A cotangente de x ($\operatorname{cotg} x$) é a medida algébrica do segmento BD. (Figura 2.23)

Denominamos função cotangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ o número real $mBD = \operatorname{cotg} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Notemos que, para $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $P = E(x)$ é igual a A ou A', e a reta que passa por O e P fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto de intersecção com o eixo das cotangentes, a $\operatorname{cotg} x$ não está definida.

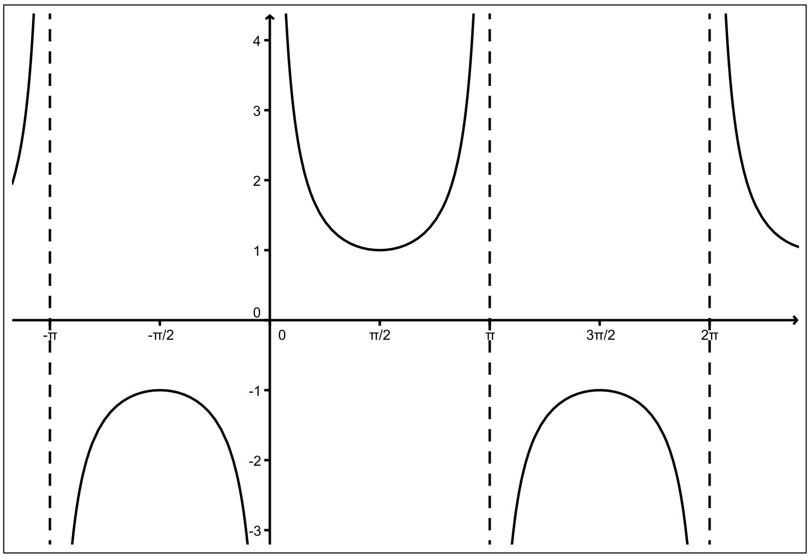

Figura 2.22: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{cossec} x$.

Propriedades:

(a) Se $P = E(x)$ é do 1º ou 3º quadrante, então $\operatorname{cotg} x$ é positiva; se $P = E(x)$ é do 2º ou 4º quadrante, então $\operatorname{cotg} x$ é negativa.

(b) Se $P = E(x)$ percorre qualquer um dos quatro quadrantes então $\operatorname{cotg} x$ é decrescente.

(c) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Imagem: $\mathbb{R}$.

(e) Período: π.

Gráfico:

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{cotg} x$ está representado na Figura 2.24.

Definições

As funções secante, cossecante e cotangente, são também, usualmente, definidas como a seguir:

- secante de x:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos x \neq 0,$$

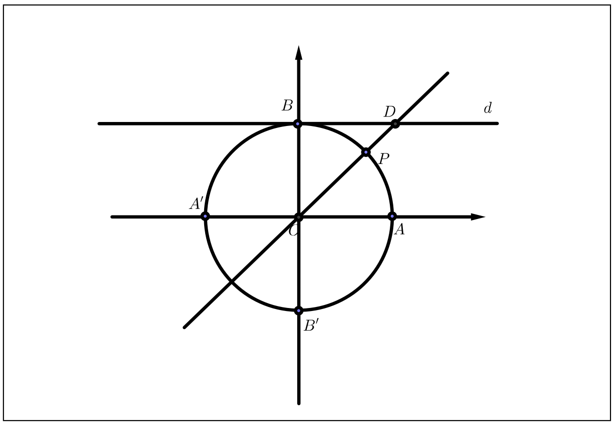

Figura 2.23: Representação geométrica da cotangente de x.

- cossecante de x:

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \operatorname{sen} x \neq 0,$$

- cotangente de x:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \operatorname{tg} x \neq 0.$$

O professor pode utilizar a próxima atividade para mostrar as construções e as propriedades das funções trigonométricas vistas nesta seção.

2.8.4 Atividade 15: gráficos das funções cossecante, cotangente e secante.

Nos arquivos atividade15sec.ggb, atividade15cossec.ggb e atividade15cotg.ggb, podemos obter os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente, respectivamente. Os gráficos estão restritos em $[0, 2\pi]$. Em cada um deles, mova o ponto C e observe a construção e o gráfico obtido.

2.9 Senóides

Nesta seção, vamos observar o comportamento das senóides, que são funções trigonométricas que envolvem o seno e o cosseno de um arco. Uma senóide tem uma expressão do tipo

$$h(x) = a + b.\cos(c.x + d),$$

ou

$$h(x) = a + b.\operatorname{sen}(c.x + d),$$

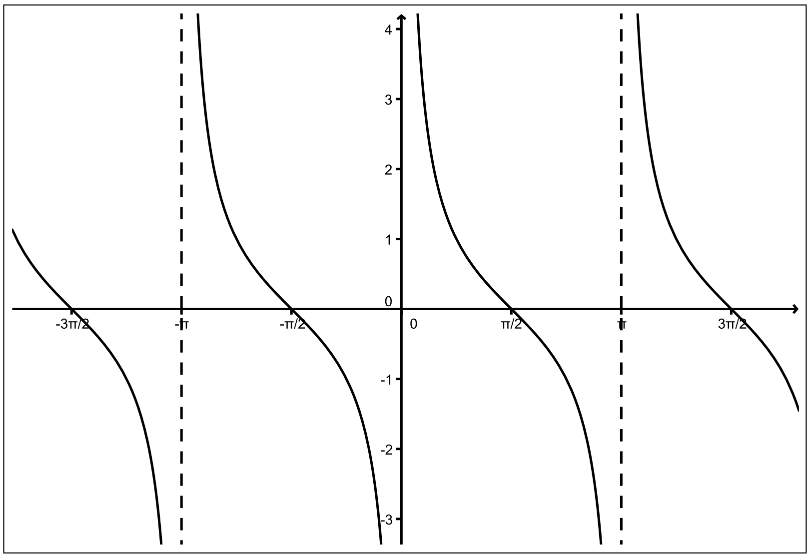

Figura 2.24: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

em que a, b, c, e d são constantes reais. O gráfico de uma senóide é obtido através de tranformações na função seno ou cosseno.

2.9.1 Atividade 16: funções do tipo

$$h(x) = a + b.\cos(c.x + d).$$

No arquivo atividade16.ggb, temos o gráfico de uma função do tipo $h(x)$, em que através de controles deslizantes do GeoGebra podemos alterar os valores dos parâmetros a, b, c, d.Vamos estudar esta função.

(a) Primeiramente, deslize os controles até obter $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. Qual foi a função obtida?

Nos próximos itens (b), (c) e (d) e (e), responda qual foi a mudança ocorrida em relação ao gráfico da função $f(x) = \cos x$:

(b) Mantenha os parâmetros $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$ e altere o valor de a.

(c) Mantenha os parâmetros $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e altere o valor d.

(d) Mantenha os parâmetros $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$ e altere o valor de b.

(e) Mantenha os parâmetros $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$ e altere o valor de c.

Respostas esperadas:

(a) $g(x) = \cos x$.

(b) Ocorreu uma translação em relação ao eixo y.

(c) Ocorreu uma translação em relação ao eixo x.

(d) Ocorreu uma dilatação ou contração do gráfico em relação ao eixo y. Há alterações na imagem da função.

(e) Ocorreu uma dilatação ou contração do gráfico em relação ao eixo x. Há alterações no período da função.

2.9.2 Fundamentação teórica

A partir da atividade 16, vamos entender o que ocorre na função

$$h(x) = a + b.\cos(cx + d)$$

com as mudanças dos parâmetros a, b, c e d.

- O gráfico de funções trigonométricas do tipo $h(x) = a + \cos x$ sofre uma translação vertical de $|a|$ unidades em relação ao gráfico original da seguinte forma: Se $a > 0$, então a translação é para cima; se $a < 0$, então a translação é para baixo.

- O gráfico de funções do tipo $h(x) = \cos(x + d)$ sofre uma translação horizontal de $|d|$ unidades em relação ao gráfico original, de tal modo que: se $d > 0$, a translação é para a esquerda e se $d < 0$, a translação é para a direita.

- O gráfico de funções do tipo $h(x) = b.\cos x$ sofre uma contração ou dilatação vertical, em relação ao gráfico original, sua amplitude é $|b|$.

- O gráfico de funções do tipo $h(x) = \cos(cx)$ sofre uma contração ou diltação horizontal em relação ao gráfico original, e têm período $\frac{2\pi}{|c|}$

O raciocínio é análogo para funções do tipo $h(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$.

Capítulo 3

Considerações finais

3.1 Relato de experiências

O presente trabalho foi aplicado em uma das classes da Escola Técnica Estadual Philadelpho Gouvêa Netto, em São José do Rio Preto, SP.

Nesta unidade escolar, sou professora de duas turmas de 2ª série de ensino médio: a turma X, no matutino, e a turma Y, no vespertino, com 40 alunos cada uma. Para fechamento de notas, as menções utilizadas em nossa U. E. são : MB (muito bom), B (bom), R (regular) e I (insuficiente). Como sempre, cada turma tem suas particularidades: em matemática, a turma X tem um desempenho discretamente melhor do que a turma Y. Em cada bimestre, a turma X apresenta, em média, 7 menções I, e a turma Y, 10; diferença não muito grande. Percebe se que isso se deve ao fato de a turma X apresentar um melhor hábito de estudo, quase todos os alunos fazem as tarefas de casa.

Por motivos diversos, algumas das atividades constantes neste trabalho foram aplicadas somente para a turma X, pois nesta classe, a matéria estava mais adiantada do que na turma Y, portanto, houve tempo em minhas aulas para realizar tais atividades. Nesta escola, tenho uma facilidade: um portal educacional. Neste portal temos uma ferramenta onde é possível ao professor postar atividades pela internet para que o aluno responda às questões, também on-line, e o docente tenha acesso a estas respostas.

Assim, foram aplicadas as atividades 11, 13, 14, 15 e 16 no horário da aula de matemática. Os alunos interagiram bastante e responderam até com certa facilidade, pois contaram com o meu auxílio e tinham a liberdade de pedir ajuda aos colegas. O tempo gasto foi de 2 aulas de 50 minutos.

Na avaliação bimestral, dentre outras questões havia o seguinte exercício: *Esboce os gráficos das funções trigonométricas:*

(a) $y = 3 \operatorname{sen} x$,

(b) $y = \operatorname{sen}(3x)$.

Uma questão simples, em que podemos avaliar se o aluno reconhece uma função seno, e se ele tem uma ideia sobre as transformações no gráfico desta função, decorrentes da variação de seus parâmetros.

A diferença de acertos entre a turma X, em que foi aplicada a atividade, e a turma Y, que não a fez, foi muito significativa. Na turma X, 13 alunos acertaram totalmente a questão, enquanto 12 acertaram parcialmente.

Na turma Y, apenas 3 alunos acertaram a questão, e parcialmente. A maioria deixou a questão em branco, alguns esboçaram gráficos muito incorretos como segmentos de retas e outras curvas estranhas. Durante as aulas ministradas nas duas turmas são utilizados os mesmos métodos de ensino e materiais didáticos. A questão exigia um conhecimento básico de funções, matéria vista na série anterior, também pelo mesmo professor nas duas classes.

Como docente, acredito que ao visualizar as funções construídas no GeoGebra o aluno tem uma facilidade maior em compreender o comportamento e o dinamismo de seus gráficos. No quadro negro, temos o hábito de construir os gráficos atribuindo pontos no plano cartesiano, é um procedimento válido, mas quando o aluno aprende somente por este caminho, ele pode se confundir ao marcar estas coordenadas incorretamente. É necessário que o discente tenha uma idéia global do gráfico da função, e essa idéia pode ser obtida através do uso de ferramentas computacionais.

3.2 Conclusão

A grande dificuldade no ensino da trigonometria ocorre na compreensão de seus conceitos fundamentais: as noções de seno, cosseno e tangente, a construção da circunferência trigonométrica, e a notação para as medidas de arcos e ângulos, muitas vezes são apresentadas aos alunos como elementos vagos, sem muitas explicações. Uma abordagem dinâmica, apoiada nos uso da Tecnologias de Informação e Comunicação é um dos meios de sanar estas dificuldades.

Isto ocorre porque nossos alunos são os chamados 'nativos digitais', desde pequenos eles têm acesso aos computadores, e portanto a um fascinante universo repleto de cores, sons movimentos e sensações. Isto sem falar nos videogames e jogos digitais, nos quais eles têm o controle sobre toda a situação, dando-lhes a sensação de poder; o interessante é que, os jogos, mesmo sendo difíceis e desafiadores, fazem com que a criança ou adolescente persista, tenha paciência e busque estratégias para vencê-los. Talvez seja este um dos caminhos para melhorar o ensino ministrado a este público: fazê-los construtores do próprio conhecimento e permitir que manipulem os objetos e tirem suas próprias conclusões. Os softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, tem esta característica, sendo uma ferramenta muito útil a ser utilizada no ensino da matemática, mais precisamente, em funções, trigonometria, geometria plana e analítica. O desafio é que nós, como 'imigrantes digitais' também entremos neste universo de tecnologia, que se transforma todos os dias, a uma velocidade surpreendente.

Referências Bibliográficas

[1] BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**, v.2. São Paulo: Moderna, 2010.

[2] CARMO, M. P. et al.**Trigonometria e números complexos**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[3] CURY, A. **Pais brilhantes, professores fascinantes**. Rio de Janeiro: Sextante, 2003.

[4] DANTE, L.R. **Matemática, volume único**. 1.ed. São Paulo: Ática, 2008.

[5] DUCATTI, M. C. **GeoGebra e Graphmatica, novos recursos para o desenvolvimento de competências na sala de aula**. São Paulo: 2010.

[6] IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**, v.3. 8.ed. São Paulo: Atual. 2009.

[7] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. v.1. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[8] LIMA, E. L. **O que é o número pi?** Disponível em:

< *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap3.pdf.* >

Acesso em: 01/08/2013.

[9] LOPES, M. M. **Contribuições do software GeoGebra no ensino a aprendizagem da trigonometria**. Natal: UFRN, 2011.

[10] MOREIRA, L. S. e GOMES, C. S. **Estudando trigonometria com applets desenvolvidos noo software GeoGebra**. Rio de Janeiro: Instituto Federal de Ciência e Tecnologia Fluminense, 2008.

[11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Disponível em:

$$< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. >$$

Acesso em 19/09/2013.

[12] PEDROSO, H. A. **História da Matemática**. São José do Rio Preto-SP: Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2009.

[13] QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010.