UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Ilca Maria Brisante

Fractais no Ensino Médio

São José do Rio Preto
2013

Ilca Maria Brisante

Fractais no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Horita

São José do Rio Preto
2013

Brisante, Ilca Maria.
Fractais no ensino médio / Ilca Maria Brisante. -- São José do Rio Preto, 2013
42 f. : il.

Orientador: Vanderlei Horita
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Fractais – Estudo e ensino. 3. Sequências (Matemática) I. Horita, Vanderlei. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Ilca Maria Brisante

Fractais no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Horita
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza
UFTM - Uberaba

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores do curso pela dedicação e disposição em orientar essa nova oportunidade de aprendizagem.

Agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Vanderlei Horita, pela paciência, pelos ensinamentos e sugestões de pesquisa que acabaram por constituir-se neste trabalho.

Agradeço aos colegas de curso pela amizade e companheirismo.

Agradeço à minha família, meu companheiro Renan e minha filha Lara, pelo apoio, compreensão e incentivo sempre.

Agradecimento especial aos meus pais pelo exemplo incansável de superação.

Agradeço, profundamente, à minha amiga Moema Guiduce Nogueira, pela leitura minuciosa, valiosas sugestões e preciosa correção deste trabalho.

Agradeço muito aos meus queridos alunos que se dispuseram a estudar, apesar dos seus compromissos diários, para que eu pudesse “testar” e terminar as atividades deste trabalho.

RESUMO

A proposta deste trabalho é oferecer algumas atividades para desenvolvimento em sala de aula, com alunos de educação básica, envolvendo os fractais geométricos. A caracterização dessas figuras é feita através de duas de suas principais características: a autossemelhança e a dimensão não necessariamente inteira, o que possibilita a abordagem de temas como sequências numéricas e noções de limites com alunos de ensino médio. Tais atividades também podem ser utilizadas como complemento às aulas de progressões aritméticas e geométricas, logaritmos e área de triângulos equiláteros.

Palavras-Chave: Fractais Geométricos, Sequências, Ensino Médio.

ABSTRACT

The purpose of this work is to provide some activities to be developed in the classroom with students from basic education, involving geometric fractals. The characterization of these objects is made through two of its main features: self-similarity and its dimension not necessarily entire, which enables the approach to issues such as numerical sequences and notions of limits with high school students. Such activities may also be used as a supplement to lessons of arithmetic and geometric progressions, logarithms and area of equilateral triangles.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por muitos séculos, a Geometria Euclidiana – com seus objetos e seus conceitos – era considerada como a única forma de descrever o mundo. Isso foi assim até a descoberta de geometrias que introduziram novos objetos na representação de certos fenômenos do Universo, como é o caso dos fractais. Nesse sentido, a Geometria dos Fractais é mais precisa, por exemplo, para descrever a natureza, uma vez que descreve situações e estuda propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a euclidiana.

Um estudo que priorize as características, classificações e as principais propriedades dos fractais, ou seja, um saber científico, possibilita o entendimento de como eles podem ser trabalhados como um saber escolar. Assim, o estudo da Geometria dos Fractais na sala de aula se justifica pois dá aos alunos a oportunidade e a capacidade de investigarem tópicos da Matemática Tradicional por um novo ângulo, por caminhos não analíticos.

Dessa forma, o presente trabalho objetiva levar ao aluno do ensino médio um primeiro contato com os fractais, pois “esses objetos são criações relativamente recentes na matemática e, apesar de constituírem um campo de investigação de vanguarda, têm algumas propriedades capazes de ser compreendidas e apreciadas pelas mentes curiosas de crianças e jovens” (retirado do artigo O Fractal de Grossman – Revista do Professor de Matemática nº 72, 2º quadrimestre de 2010, pág. 23, Ana Lúcia Braz Dias).

Um paradoxo bem curioso que envolve o estudo dos fractais é o fato de que, apesar de não ser fácil defini-lo formalmente, é muito simples entender seu conceito. Desse modo, neste trabalho, a caracterização dos fractais é feita pela propriedade da autossemelhança e a *dimensão* não necessariamente inteira. O modo como foi introduzido este último conceito é uma simplificação da *dimensão de Hausdorff* e *capacidade limite* (*box dimension*) e, claro, coincide com ambos nos exemplos apresentados. A definição rigorosa e razões pelas quais são chamadas de dimensões fogem inteiramente aos objetivos deste texto e podem ser encontradas, por exemplo, no livro de K. Falconer, Fractal Geometry, Johm Wiley & Sons Ltd., 1990.

Ao realizar atividades com fractais, o aluno pode aplicar, aprofundar e relacionar os diversos conceitos matemáticos estudados no ensino médio além de ter a oportunidade de um primeiro contato com sequências infinitas e seus limites. Assim, o Capítulo 1 retoma esses conceitos, apresentando-os sob a perspectiva que os relaciona com o objeto de estudo deste trabalho: os fractais.

No Capítulo 2, tendo em vista que as representações geométricas dos fractais, normalmente, encantam por sua beleza, apresentam-se os fractais clássicos, como a curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, o tapete de Sierpinski, o conjunto de Cantor e a curva de Peano.

Como o tema “fractais” se relaciona com vários outros do conteúdo de matemática do ensino fundamental e médio, no Capítulo 3 são propostas atividades envolvendo cálculo de áreas e de perímetros, progressões geométricas e logaritmos. Encontram-se, nesta parte do trabalho, questões que podem ser discutidas ao se tratar de cada um dos fractais citados. Por exemplo, ao tratar do Conjunto de Cantor, podem ser discutidos: intervalos reais abertos e fechados; união e interseção de intervalos reais; noções bem elementares de limite; cardinalidade de um conjunto. O estudo da Curva de Koch possibilita tratar de PG; área de triângulos equiláteros; noções bem elementares de limite. Quanto ao Triângulo de Sierpinski, discutem-se triângulos equiláteros; noções bem elementares de limite; Triângulo de Pascal.

A última parte do trabalho, “Considerações Finais”, traz uma discussão geral do tema tratado em relação ao que foi proposto inicialmente.

CAPÍTULO 1
NOÇÕES DE SEQUÊNCIA PARA O ESTUDO DOS FRACTAIS

O estudo dos fractais envolve alguns conceitos matemáticos trabalhados no ensino médio. Tais conceitos são aplicados e aprofundados pelos alunos ao serem retomados com as atividades relacionadas aos fractais. Ainda, os alunos têm a oportunidade de um primeiro contato com sequências infinitas e seus limites.

Desse modo, para que as atividades com os fractais propostas neste trabalho possam ser aplicadas, são apresentados a seguir os conceitos matemáticos sob a perspectiva que os relaciona com os fractais.

1. Sequência: noções básicas

Uma *sequência* é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais *N*. Considerando-se apenas sequências de números reais, há, então, funções de *N* em *R*.

As notações usuais para uma sequência são (x_1, x_2, x_3, ... , x_n, ...) ou $(x_n)_{n\in N}$ ou ainda (x_n), que podem ser notadas nos exemplos seguintes:

(1) (3, 6, 9, 15, ...) é a sequência dos múltiplos positivos de 3.

(2) (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...) é a sequência dos números primos positivos.

(3) (2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, ...) é a sequência definida pela lei $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = x_{n-1} + 2n, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

(4) (2, 4, 16, 256, 65 536, ...) é a sequência dada pela recorrência $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = (x_{n-1})^2, \forall\, n \geq 2 \end{cases}$.

O presente estudo trata de um tipo particular de sequência, as progressões aritmética e geométrica - apresentadas a seguir - pois entende-se que são esses os conceitos relevantes para o desenvolvimento das atividades sobre fractais.

1.1 Progressão Aritmética

A *progressão aritmética* (doravante P.A.) é uma sequência dada pela recorrência $\begin{cases} x_1 = x \\ x_n = x_{n-1} + r, \forall\, n \in N,\ n \geq 2 \end{cases}$ onde x (o primeiro termo) e r (a razão) são números reais dados. Dessa forma, percebe-se que:

Há outras formas de se expressar um termo qualquer dessa progressão, fazendo como a seguir, por exemplo:

$x_n = x_{n-1} + r = x_{n-2} + r + r = ... = x_1 + r + r + ... + r$, ou ainda,

$x_n = x_1 + (n-1)r$, denominada expressão do termo geral de uma P.A.

Uma expressão para a soma (S_n) dos n primeiros termos dessa progressão será determinada, a seguir, usando-se apenas argumentos de conteúdo do ensino médio[1].

Seja $S_n = x_1 + x_2 + x_3 ... x_{n-1} + x_n$, pode-se reescrever tal soma das seguintes maneiras:

$$S_n = x_1 + \underbrace{x_1 + r}_{x_2} + \underbrace{x_1 + 2r}_{x_3} + ... + \underbrace{x_1 + (n-2)r}_{x_{n-1}} + \underbrace{x_1 + (n-1)r}_{x_n} \quad (1)$$

$$S_n = \underbrace{x_1 + (n-1)r}_{x_n} + \underbrace{x +_1 (n-2)r}_{x_{n-1}} + ... + \underbrace{x_1 + 2r}_{x_3} + \underbrace{x_1 + r}_{x_2} + x_1 \quad (2)$$

Somando as duas expressões, obtém-se:

$2.S_n = n \cdot [x_1 + x_1 + (n-1)r] \Rightarrow S_n = \dfrac{n \cdot [x_1 + x_1 + (n-1)r]}{2}$, ou ainda, $S_n = \dfrac{n(x_1 + x_n)}{2}$.

[1] No anexo 1, encontra-se uma demonstração mais geral para tal soma.

1.2 Progressão Geométrica

Entende-se por *progressão geométrica* (P.G.) a sequência dada pela recorrência $\begin{cases} x_1 = x \\ x_n = x_{n-1}q, \forall\, n \in N,\ n \geq 2 \end{cases}$ em que x (o primeiro termo) e q (a razão) são números reais dados.

Analogamente ao que se observa em uma P.A., pode-se escrever o termo geral de uma P.G. em função da razão e do primeiro termo, fazendo:

$$x_n = x_{n-1}q = x_{n-2}qq = \ldots = x_1 qq \ldots q\text{, isto é,}$$

$$x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Também é possível determinar uma expressão para a soma dos n primeiros termos (S_n) de uma P.G. da seguinte forma[2]:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \Rightarrow S_n = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 \ldots + x_1 q^{n-1} \ (1)$$

multiplicando-se todos os temos da expressão 1 pela razão q, $q \neq 0$, obtém-se:

$$S_n \cdot q = x_1 \cdot q + x_2 \cdot q + \ldots + x_n \cdot q \Rightarrow S_n \cdot q = x_1 \cdot q + x_1 q^2 + x_1 q^3 \ldots + x_1 q^n$$

Subtraindo-se então, $S_n \cdot q - S_n$, obtém-se:

$$S_n \cdot q - S_n = x_1 \cdot q + x_1 q^2 + x_1 q^3 \ldots + x_1 q^{n-1} + x_1 q^n - (x_1 + x_1 \cdot q + x_1 q^2 + \ldots + x_1 q^{n-1})$$

$$S_n \cdot q - S_n = x_1 q^n - x_1 \Rightarrow S_n \cdot (q-1) = x_1 (q^n - 1) \Rightarrow S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}\text{, ou então}$$

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q},\ se\ q \neq 1.$$

A seguir, são considerados alguns aspectos sobre limite e convergência de sequências para que se possa, efetivamente, calcular a soma dos termos de uma P.G., quando esta possui infinitos termos.

[2] No anexo 2, encontra-se outra demonstração, mais geral, para essa soma.

2. Noções de limite de uma sequência

2.1 Sequência limitada

Uma sequência (x_n) é dita limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo n natural.

É possível compreender esse conceito por meio de alguns exemplos, assim, considerando as sequências

(5) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

é fácil ver que $x_n \in [0,1]$, para todo $n \in N$, então, basta considerar um valor real de c > 1, por exemplo, c = 1,2, para escrever que $|x_n| < 1{,}2$ para todo $n \in N$. Logo, a sequência é limitada.

Já em (6),

(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

$x_n \in (0,1)$, para todo $n \in \mathrm{N}$. Considera-se, então, c = 1. Segue que $|x_n| < 1$ para todo $n \in N$. Novamente, há uma sequência limitada. Em contrapartida, a sequência

(7) $(n) = (1, 2, 3, \ldots)$

não é limitada, pois claramente não existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo n natural. Para a sequência

(8) $\left(sen\frac{n\pi}{2}\right) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$

vale $x_n \in [-1,1]$ para todo $n \in N$. Dessa forma, novamente, basta considerar um valor qualquer de c > 1, tomando agora c = 2, segue que $|x_n| < 2$ para todo $n \in \mathrm{N}$. Mais uma vez, há uma sequência limitada.

2.2 Sequência convergente

Uma sequência (x_n)tem limite L e é escrita $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se for possível tornar os termos x_n tão próximos de L quanto se queira ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existir, entende-se que a sequência é convergente. Caso contrário, entende-se que a sequência diverge.

Intuitivamente, isso significa que uma sequência é convergente e que seu limite é o número real *L*, quando, a partir de certo número (bem grande) de elementos dessa sequência, esses elementos se aproximam tanto de *L*, que "não é possível" calcular a diferença entre eles e o número real *L*.

Considerando, novamente, as sequências $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ e $\left(sen\frac{n\pi}{2}\right) = (1,0,-1,0,1,0,-1,\ldots)$, chega-se a conclusão, intuitivamente, que a primeira é convergente, e seu limite é zero, enquanto a segunda não o é.

Para que o campo da intuição possibilite tal conclusão, torna-se imprescindível uma outra maneira de se descrever a definição acima. Assim, uma sequência (x_n) tem limite L e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro correspondente N tal que se n > N então $|x_n - L| < \varepsilon$.

Essa definição permite argumentar de maneira convincente sobre a convergência de uma sequência. Mais uma vez, retomando o exemplo (5),

(5) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

é efetivamente possível mostrar que o limite desta sequência é zero, pois, seja $\varepsilon > 0$, um número real qualquer e seja $N \geq 1$um número natural *suficientemente grande* de modo que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, então $\frac{1}{N} = \left|\frac{1}{N} - 0\right| < \varepsilon$, ou ainda $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N}, \forall n > N$, ou $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, para todo n > N,

logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Da maneira análoga, retomando o exemplo (6),

(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

é possível mostrar que o limite desta sequência também é zero, pois, seja $\varepsilon > 0$, um número real qualquer e seja $N > \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}} > 0$, então $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \frac{1}{2^{\frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}}}} = \varepsilon$, para todo n > N,

logo $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Em geral, nota-se que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, para todo q ϵ R, com $|q| < 1$. Basta tomar $N > \frac{\log \varepsilon}{\log q}$ acima.

Por outro lado, retomando a sequência (8),

(8) $\left(sen \frac{n\pi}{2}\right) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$

é efetivamente possível mostrar que, embora limitada, não é convergente, pois:

i) $x_n \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $n \in N$;

ii) seja L um número real qualquer e considerando o número real ε, tal que $0 < \varepsilon < 1$.

Segue que não pode ocorrer $\left|sen \frac{n\pi}{2} - L\right| < \varepsilon < 1$, para todo *n* natural, a partir de um certo índice N, pois os valores de $x_n = sen \frac{n\pi}{2}$ oscilam em $x_n = 0$ para n da forma 4k - 2, $x_n = 1$ para n da forma 4k - 3 e $x_n = -1$ para n da forma 4k – 1, com $k \in N$. Assim, é possível afirmar que sempre haverá termos dessa sequência, cuja diferença $|x_n - L|$ seja maior do que ε.

Uma sequência particularmente interessante é a soma *(S_n)* dos termos de uma P.G. de razão *q*, com $0 < q < 1$, lembrando que a expressão que permite calcular tal soma é

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q},\ se\ q \neq 1.$$

Como $0 < q < 1 \Rightarrow 1 - q > 0$ e $0 < 1 - q^n < 1$, então, $S_n \leq |S_n| \leq \left| x_1 \frac{1-q^n}{1-q} \right| < \frac{|x_1|}{1-q}$,

ou seja *(S_n)* é limitada e seu limite quando *n* tende ao infinito $(n \to \infty)$ é dado pelo quociente $\frac{x_1}{1-q}$, ou ainda, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}$ se $|q| < 1$.

3. Relação entre áreas de triângulos equiláteros e quadrados

Dado um triângulo equilátero de lado ***a***, sua área é $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$, e um triângulo equilátero de lado $\frac{a}{n}$ tem área $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{n^2} = A \cdot \frac{1}{n^2}$.

Relação análoga pode ser verificada em quadrados, a área de um quadrado de lado ***a*** é $A = a^2$ e a de um quadrado de lado $\frac{a}{n}$ é $A_n = \frac{a^2}{n^2} = A \cdot \frac{1}{n^2}$.

Após a exposição dos tópicos matemáticos que são motivados pela Geometria Fractal e integrados a ela, o capítulo seguinte apresenta os fractais clássicos como forma de subsídio para as atividades a serem aplicadas em sala de aula.

CAPÍTULO 2

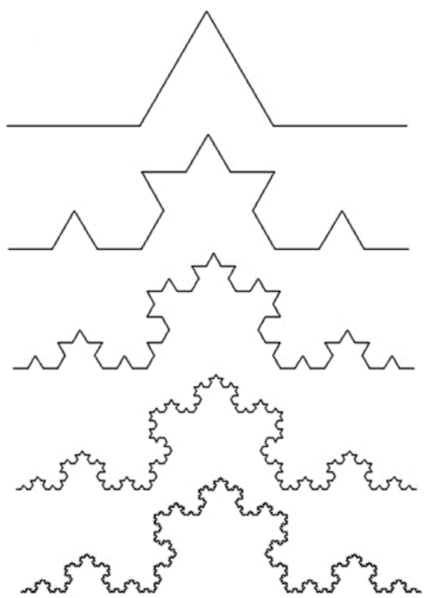
OS FRACTAIS

1. Proposta de definição

No final do século XIX e início do século XX, matemáticos como Cantor, Koch, Sierpinski, Peano e Hilbert investigavam figuras (também chamadas de objetos) cujas propriedades não eram satisfatoriamente explicadas pela geometria euclidiana. Tais objetos foram designados fractais.

Não há uma definição exata e pronta para fractais, em geral, são figuras construídas a partir de um procedimento recursivo (usualmente muito simples e direto) que gera, em cada passo (iteração), uma melhor aproximação do fractal. Em caráter ilustrativo, tem-se, a seguir, o procedimento para a construção da Curva de Koch.

A curva, que hoje é conhecida por Curva de Koch, foi publicada em 1904, pelo matemático sueco, Helge Von Koch (1870–1924) e sua construção pode ser descrita da seguinte maneira: toma-se um segmento de reta e divide-se tal segmento em outros três segmentos congruentes. Em seguida, substitui-se o segmento central por um triângulo equilátero sem a base. Repetem-se, então, indefinidamente os passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura. A curva obtida no limite desse processo é a Curva de Koch.

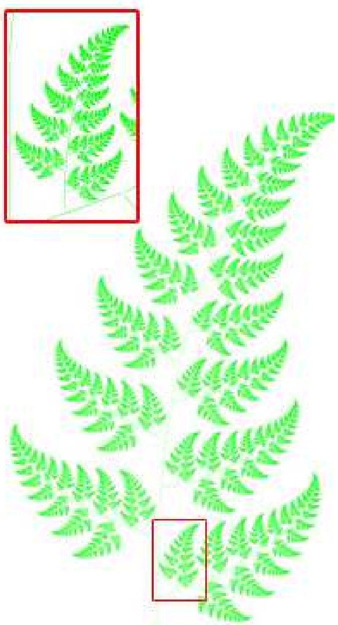


Naturalmente, é necessário, de alguma maneira, definir essas formas geométricas. Desse modo, será feita uma caracterização dessas figuras por meio de algumas de suas propriedades: a autossemelhança e a dimensão não inteira.

2. Autossemelhança

A autossemelhança se traduz na apresentação (dos fractais) de cópias de si mesmo em várias escalas, tão pequenas quanto se queira. Uma figura é autossemelhante se qualquer uma de suas partes é uma cópia exata do todo.

Alguns autores consideram fractais os objetos da natureza como a couve-flor, o brócolis, as nuvens e as folhas. Para esses objetos a autossemelhança é dita aproximada ou estatística; para as figuras geométricas geradas por processos recursivos, diz-se autossemelhança exata.



(http://www.todateoria.com.br/old/fractais)

(http://www.mises.org.br/Article.aspx)

(http://pt.dreamstime.com)

Neste trabalho, são estudados apenas os fractais gerados por processos recursivos. Serão destacadas, nas próximas páginas, algumas das figuras mais significativas no estudo dos fractais, conhecidas como Fractais Clássicos. Todas, evidentemente, possuem autossemelhança exata e sua dimensão nem sempre é inteira, como será visto no final deste capítulo.

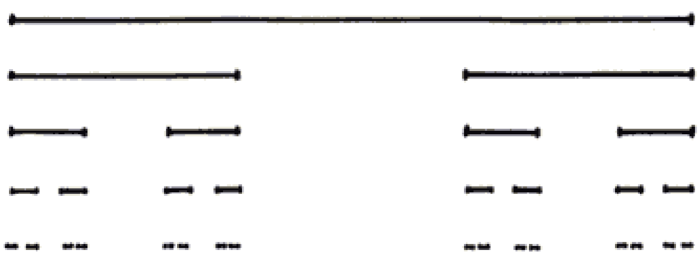
3. Fractais Clássicos

3.1 Conjunto de Cantor

Em 1883, Georg Cantor (1845-1918) publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje de “Conjunto de Cantor” (ou “Poeira de Cantor”), como exemplo de um conjunto excepcional.

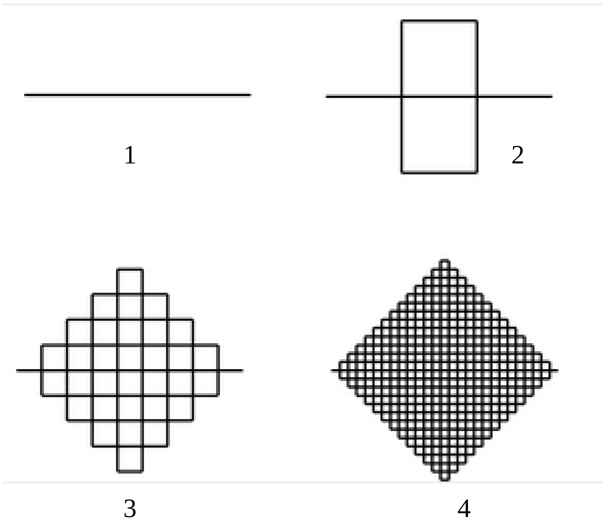
Sua construção pode ser descrita da seguinte maneira: considera-se um segmento de reta representado pelo intervalo fechado $I_0 = [0,1]$. Divide-se tal segmento em três partes congruentes e elimina-se a parte central. Tem-se, desta forma, a união disjunta de dois intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3}$ cada, isto é, $I_1 =$ $I_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$. Repetindo o procedimento em cada segmento de I_1, ou seja, dividindo cada um deles em três artes congruentes e desprezando a parte central, obtém-se $I_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$ que é a união disjunta de quatro intervalos de comprimento igual a $\frac{1}{9}$ cada um. Continuando o processo para os quatro intervalos obtidos, obtém-se 8 intervalos de comprimento $\frac{1}{27}$ cada. Repetindo-se indefinidamente o processo, obtém-se I_n que será a união disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^n}$ cada.

O Conjunto de Cantor (doravante K) é o conjunto de pontos (números) que permanecem após infinitas repetições desse processo de retirada do terço médio. Pode-se definir K usando a expressão $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Assim, nota-se que o comprimento de cada I_n é dado por $2^n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, e como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ então o "comprimento" do K é zero, logo K não tem intervalos.



3.2 Curva de Peano

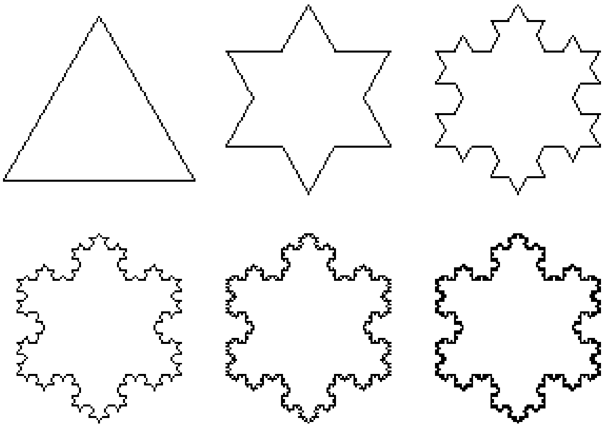
Giusepe Peano (1858-1932), matemático italiano, publica em 1890, sua famosa curva que promete cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular. Sua construção inicia-se com um segmento de reta, em seguida, substitui-se tal segmento por uma curva de nove segmentos, conforme indicado na figura 2. Novamente, substitui-se cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, e assim sucessiva e indefinidamente.



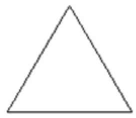
A curva obtida no limite desse processo é a Curva de Peano que, de fato, preenche toda a superfície de um quadrado, pois sua dimensão é igual a dois, como será visto no item 4 deste capítulo que tratará da dimensão fractal.

3.3 Ilha de Koch (ou Floco de Neve)

A Curva de Koch, já citada no item 1 deste Capítulo, deu origem a outro fractal, a Ilha de Von Koch, ou Floco de Neve. Sua construção se diferencia da Curva de Koch apenas no primeiro passo. Deve-se começar com um triângulo equilátero e construir, sobre cada um de seus lados, a Curva de Koch.

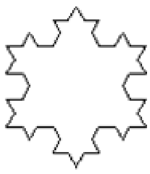


Alguns aspectos da Ilha de Koch merecem especial atenção, como, por exemplo, o cálculo de seu perímetro e de sua área. Para efetuar tais cálculos, será considerado o lado do triângulo equilátero inicial como unitário, assim, nota-se que, na situação inicial, chamado de passo zero, ou F_0, a figura tem 3 lados e cada um com comprimento igual a 1.

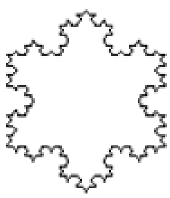


No passo 1, F_1, a figura tem 3.4 lados e cada um com comprimento igual a $\frac{1}{3}$.

Em F_2, temos $3.4.4 = 3.4^2$ lados e o comprimento de cada um é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.



Em F_3, temos $3.4^2.4 = 3.4^3$ lados e o comprimento de cada um é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

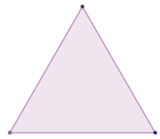


Depois de *n* passos da construção, sabe-se que a figura tem o número de lados dado por $M_n = 3.4^n$ e que o comprimento de cada lado é dado por: $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Então, para calcular seu perímetro, basta fazer $P_n = 3.4^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$, isto é, $P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$, que se torna cada vez maior.

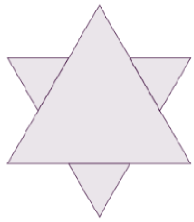
Dessa maneira, no limite do processo, isto é, depois de infinitos passos, é natural intuir que o comprimento vá para infinito e escreve-se $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.

Para o cálculo da área da Ilha de Koch, deve-se contar o número de triângulos equiláteros obtidos em cada passo da construção, determinar a área de cada um desses triângulos e depois somar essas áreas. Segue, então, que:

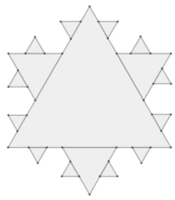
Em F_0 a área é $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (triângulo equilátero de lado 1);



No segundo passo, F_1, a figura tem, além da área do triângulo anterior, a área de mais três triângulos equiláteros de lado $\frac{1}{3}$, cada uma deles tem área $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$, então a área é $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{9} \Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}$;



Em F_2 a área é $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + 12.\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2$, ou ainda $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{4}{9}$;



Tem-se em F_3, $A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{4}{9} + 48.\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3$, ou ainda,

$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^2$; ao final de *n* passos de construção, a área será dada por

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Nota-se que, nessa soma, a partir do segundo termo, tem-se uma P.G. em que o primeiro termo é $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ e a razão é $q = \frac{4}{9}$ e, como já mencionado no capítulo 1, a soma dos *n* termos dessa progressão pode ser calculada fazendo $S_n = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right)$. Efetuando os cálculos, obtém-se $S_n = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Tem-se, agora, uma expressão mais simples para a área, A_n, da figura: $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

No limite do processo de construção dessa figura, ao contrário do perímetro, consegue-se determinar o valor da sua área, pois como se sabe $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, pois $\frac{4}{9} < 1$, então:

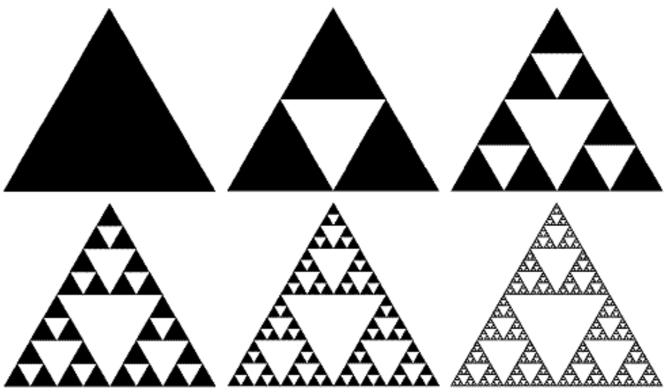
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \quad \text{(aproximadamente 0,7).}$$

3.4 Triângulo e Tapete de Sierpinski

Divulgados em 1916, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski são obras de Waclaw Sierpinski (1882 – 1969), matemático polonês. A seguir, são descritos os procedimentos para construção de cada um.

3.4.1 O Triângulo

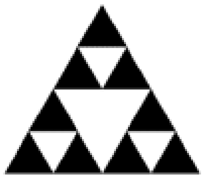
Para a construção do triângulo, deve-se considerar, inicialmente, um triângulo equilátero. Determina-se o ponto médio de cada um de seus lados e traçam-se os segmentos com extremidades nesses pontos médios, formando quatro triângulos equiláteros. Em seguida, remove-se o triângulo central e repete-se, indefinidamente, em cada um dos triângulos não eliminados, os passos anteriores.



O perímetro e a área do Triângulo de Sierpinski também são bastante interessantes. Para determinar seus valores, será considerado que o triângulo inicial tem lado unitário.

Na situação inicial, isto é, no passo zero, o perímetro é dado por $P_0 = 3$ e a área $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. No passo seguinte, tem-se três triângulos equiláteros e congruentes de lado igual a $\frac{1}{2}$, então o perímetro da figura é dado por $P_1 = 3.3.\frac{1}{2}$ e a área por $A_1 = 3.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{4}$.

Em seguida, são nove triângulos equiláteros e congruentes, agora com lado igual a $\frac{1}{4}$, assim, o perímetro e a área da figura são dados por, respectivamente, $P_2 = 9.3.\frac{1}{4}$ e $A_2 = 9.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{4^2}$.



No passo *n*, a figura tem 3^n triângulos equiláteros e congruentes, cada um com lado medindo $\frac{1}{2^n}$, então, seu perímetro e sua área são dados por, respectivamente,

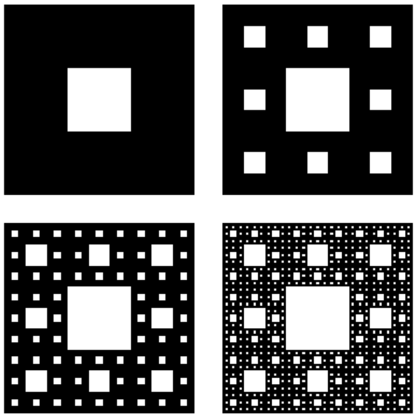
$$P_n = 3^n.3.\frac{1}{2^n} \Rightarrow P_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ e } A_n = 3^n.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{4^n} \Rightarrow A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Nota-se, então, que no limite do processo, isto é, depois de infinitos passos, o perímetro e a área tendem a, respectivamente, infinito e zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

3.4.2 O Tapete

Para a construção do Tapete, pode-se usar a mesma técnica de eliminação do triângulo, porém, partindo de um quadrado. Deve-se dividir esse quadrado em nove quadrados congruentes. Elimina-se o quadrado central. Aplica-se, indefinidamente, esse mesmo processo em cada um dos oito quadrados restantes. Assim como o triângulo, o perímetro do Tapete de Sierpinski é infinito e sua área é limitada.



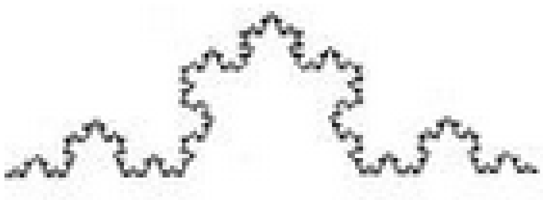
Como já foi dito, outra característica dos fractais é que sua dimensão não é traduzida necessariamente por um número natural, fato relacionado ao grau de irregularidade dos mesmos.

4. Dimensão dos fractais

Na Geometria Euclidiana, a noção de dimensão está relacionada, principalmente, a dois aspectos: à ideia de medida e à quantidade de informações para se localizar um ponto no espaço onde este se encontra. Sendo assim, um ponto tem dimensão zero (não se pode medir um ponto), a reta tem dimensão um (só se mede o comprimento de um segmento de reta), o plano tem dimensão dois e o espaço tem dimensão três.

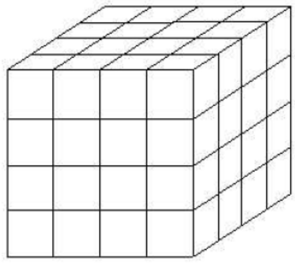
Em contrapartida, a Dimensão Fractal, ou Dimensão dos Fractais, representa o nível de ocupação do espaço pelo fractal e não o espaço em si onde a forma está inserida. Essa diferença de concepção faz com que a Dimensão Fractal venha a assumir valores não inteiros.

Intuitivamente, já se percebe que a curva de Koch, por exemplo, ocupa “mais espaço” que uma linha no plano, mas, com certeza ela não é uma superfície, isto é, uma figura plana cuja área pode ser medida em metros quadrados. Logo é natural que sua dimensão assuma algum valor entre um e dois.

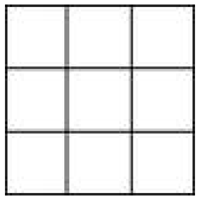


O valor da Dimensão Fractal, geralmente dado por um número irracional, representa o nível de ocupação do espaço pela forma (fractal) e, para determinar numericamente a dimensão dos objetos com autossemelhança exata, pode-se recorrer à ideia de construção de objetos autossemelhantes da seguinte maneira:

1. Dividindo cada aresta de um cubo em quatro partes iguais obtém-se 4^3 novos cubos, cujas arestas medem ¼ da aresta original.



2. Dividindo-se cada lado de um quadrado em três partes iguais obtém-se 3^2 novos quadrados, cujos lados medem ⅓ do lado original.



3. Dividindo-se um segmento de reta em quatro partes iguais obtém-se 4 novos segmentos, cujo comprimento é ¼ do segmento original.

Percebe-se então que, em cada caso, o número ***n*** de novos objetos semelhantes ao original é dado por $n = p^D$, onde ***p*** indica o número de partes em que cada segmento foi dividido e ***D*** a dimensão do objeto estudado.

Usando as propriedades dos logaritmos, reescreve-se a expressão acima da seguinte maneira: $D = \frac{\log n}{\log p}$. Finalmente é possível determinar a dimensão dos fractais clássicos.

4.1 Conjunto de Cantor

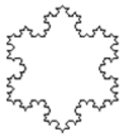
O processo iterativo deste fractal divide cada segmento em três partes iguais (p = 3) e remove uma dessas partes produzindo dois novos segmentos (n = 2), assim sua dimensão D é calculada fazendo:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow D \approx 0{,}63$$

4.2 Ilha de Koch

Nessa figura, cada segmento foi dividido em três partes iguais (p = 3) gerando quatro novos segmentos (n = 4), logo a sua dimensão D é dada por:

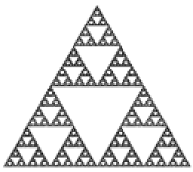
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow D \approx 1{,}26$$



4.3 Triângulo de Sierpinski

Na construção deste objeto, divide-se cada lado do triângulo no seu ponto médio determinando dois segmentos congruentes (p = 2) e a união desses pontos médios gera três novos triângulos (n= 3) já que um deles é removido, logo sua dimensão D é:

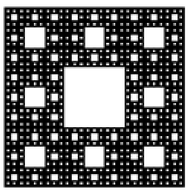
$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow D \approx 1{,}59$$



4.4 Tapete de Sierpinski

O processo de construção deste objeto divide cada lado do quadrado em três segmentos congruentes (p = 3), gerando oito novos quadrados (n= 8), já que um deles é removido, logo sua dimensão D é:

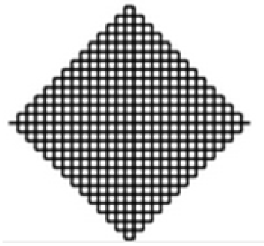
$$D = \frac{\log 8}{\log 3} \Rightarrow D \approx 1{,}89$$



4.5 A Curva de Peano

Curiosamente, essa figura admite dimensão inteira já que no seu processo de construção cada iteração divide o segmento em três partes iguais (p = 3) e gera uma curva com outros nove segmentos (n= 9), assim sua dimensão D é dada por:

$$D = \frac{\log 9}{\log 3} \Rightarrow D = 2$$



A proposta de caracterização dos fractais clássicos apresentada neste capítulo carece de aplicação por meio de atividades elaboradas de tal forma que os conceitos, até agora exemplificados, possam ser aplicados. Assim, no próximo capítulo, são apresentadas atividades, destinadas a alunos do Ensino Médio, relacionadas aos fractais clássicos.

CAPÍTULO 3

DA TEORIA À PRÁTICA: OS FRACTAIS NA SALA DE AULA

Neste capítulo, são apresentadas atividades - envolvendo alguns dos fractais mais conhecidos - que podem ser realizadas com alunos do Ensino Médio, utilizando-se apenas material de uso diário, como régua, papel, lápis e borracha ou, caso a escola disponibilize, computadores para todos os alunos, fazendo uso de programas de geometria dinâmica como o GeoGebra, por exemplo, utilizado para elaborar as figuras deste capítulo.

Atividade 1

<u>Situação de aprendizagem</u>: Conjunto de Cantor

<u>Objetivos</u>:

- compreender o processo iterativo e a lei de formação deste fractal;
- organizar e analisar dados para definir a expressão geral de uma sucessão;
- aplicar o conceito de limite;
- calcular a dimensão fractal.

<u>Pré-requisitos</u>:

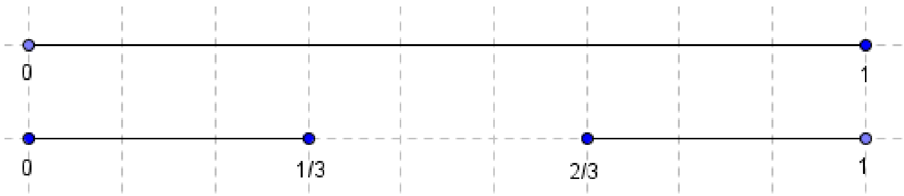
- saber realizar operações com números racionais;
- conhecer intervalos reais abertos e fechados, bem como saber definir a união e a interseção desses intervalos reais;
- conhecer a definição de logaritmos e suas propriedades operatórias;
- saber noções bem elementares (intuitivas) de limite.

<u>Materiais</u>

- materiais de uso diário como caderno, lápis, caneta, borracha e régua;
- papel quadriculado ou malhas pontilhadas, como as em anexo.

<u>Desenvolvimento</u>

As primeiras iterações do Conjunto de Cantor são as seguintes:



1- Desenhe mais três iterações desse conjunto.
2- Explique como é a lei de formação desse conjunto.
3- Observe o que acontece com o número de segmentos e com o comprimento de cada um deles completando a tabela:

	comprimento de cada segmento	número de segmentos	comprimento total do conjunto
iteração 0	1	1	1
iteração 1			
iteração 2			
iteração 3			
iteração n lei de formação			

4- Como ficará o conjunto depois de infinitas iterações?
5- Calcule a dimensão Fractal do Conjunto de Cantor.

<u>Observação</u>

Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre Intervalos Reais - no Ensino Médio - ou durante as aulas sobre operações com frações - no Ensino Fundamental, nesse caso, excluindo-se o item 5.

Atividade 2

Situação de aprendizagem: Curva de Koch

Objetivos:

- compreender o processo iterativo e a lei de formação deste fractal;
- organizar e analisar dados para definir a expressão geral de uma sucessão;
- aplicar o conceito de limite;
- calcular a dimensão fractal.

Pré-requisitos:

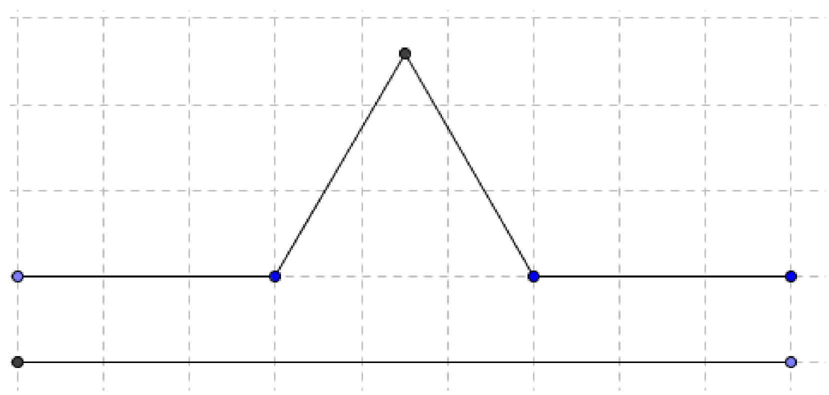
- saber realizar operações com números racionais;
- saber reconhecer uma progressão geométrica e calcular a soma de seus termos;
- conhecer a definição de logaritmos e suas propriedades operatórias;
- saber noções bem elementares de limite.

Materiais

- materiais de uso diário como caderno, lápis, caneta, borracha, régua e compasso;
- papel quadriculado ou malhas pontilhadas.

Desenvolvimento

As primeiras iterações da Curva de Koch são as seguintes:



1- Desenhe mais duas iterações dessa curva.

2- Explique como é a lei de formação dessa curva.

3- Observe o que acontece com o número de segmentos e com o comprimento de cada um deles completando a tabela (considere que na iteração 0 o segmento mede uma unidade de comprimento):

	comprimento de cada segmento	número de segmentos	comprimento total da curva
iteração 0	1		
iteração 1			
iteração 2			
iteração 3			
iteração n lei de formação			

4- Para que valor tende cada uma das expressões obtidas na tabela?

5- Calcule a dimensão Fractal da Curva de Koch.

Observação

Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre progressões geométrica, ou durante as aulas sobre logaritmos, ou ainda, nas aulas de semelhança de triângulos - no ensino médio.

Atividade 3

Situação de aprendizagem: A Ilha de Koch

Objetivos:

- compreender o processo iterativo e a lei de formação deste fractal;
- organizar e analisar dados para definir a expressão geral de uma sucessão;
- aplicar o conceito de limite;
- calcular a dimensão fractal.

Pré-requisitos:

- saber realizar operações com números racionais;
- saber reconhecer uma progressão geométrica e calcular a soma de seus termos;
- saber calcular a área de um triângulo equilátero;

- saber reconhecer triângulos semelhantes e calcular a razão de semelhança entre seus lados e suas áreas;
- conhecer a definição de logaritmos e suas propriedades operatórias;
- saber noções bem elementares de limite.

Materiais

- materiais de uso diário como caderno, lápis, caneta, borracha, régua e compasso;
- papel quadriculado ou malhas pontilhadas.

Desenvolvimento

Aplicando o mesmo procedimento da construção da Curva de Koch aos três lados de um triângulo equilátero, obtém-se uma figura conhecida como Ilha de Koch.

1- Explique como é a lei de formação dessa figura.
2- Observe o que acontece com o número de segmentos, com o comprimento de cada um deles a partir da tabela da atividade anterior.
3- Calcule o perímetro da figura em cada iteração, considere, novamente, que cada lado do triângulo na iteração 0 mede 1 unidade de medida de comprimento, e complete a tabela:

	perímetro da figura
iteração 0	
iteração 1	
iteração 2	
iteração 3	
iteração n lei de formação	

4- Quantas iterações precisamos realizar para que o perímetro seja maior ou igual a 90 unidades de medida de comprimento?
5- Para que valor tende o perímetro?

Observação

Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre propriedades operacionais dos logaritmos - no Ensino Médio.

6- Calcule a área da figura em cada iteração e complete a tabela:

	área da figura
iteração 0	
iteração 1	
iteração 2	
iteração 3	
iteração n lei de formação	

7- Para que valor tende a área da Ilha de Koch?

Observação

Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre progressões geométrica e/ou durante as aulas de área de triângulo equilátero - no Ensino Médio.

Atividade 4

Situação de aprendizagem: O Triângulo de Sierpinski

Objetivos:

- compreender o processo iterativo e a lei de formação deste fractal;
- organizar e analisar dados para definir a expressão geral de uma sucessão;
- aplicar o conceito de limite;
- calcular a dimensão fractal.

Pré-requisitos:

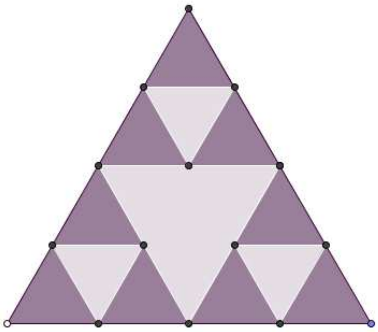
- saber realizar operações com números racionais;
- saber reconhecer uma progressão geométrica e calcular a soma de seus termos;
- saber calcular a área de um triângulo equilátero;
- saber reconhecer triângulos semelhantes e calcular a razão de semelhança entre seus lados e suas áreas;
- conhecer a definição de logaritmos e suas propriedades operatórias;
- saber noções bem elementares de limite.

Materiais

- materiais de uso diário como caderno, lápis, caneta, borracha e régua;
- papel quadriculado ou malhas pontilhadas, como as em anexo.

Desenvolvimento

O processo iterativo escolhido para a construção desta figura, nesta atividade, é bem simples. Observe as primeiras iterações:



1- Desenhe mais duas iterações dessa figura.
2- Observe o que acontece com o número de lados dos triângulos, com o comprimento de cada um deles, calcule o perímetro e a área, em cada iteração e complete a tabela (considere novamente que cada lado do triângulo na iteração 0 mede 1 unidade de medida de comprimento):

	comprimento de cada lado	número de triângulos	perímetro da figura	área de cada triângulo	área total da figura
iteração 0					
iteração 1					
iteração 2					
iteração 3					
iteração n lei de formação					

3- Quantas iterações são necessárias para que o perímetro seja maior ou igual a 90 unidades de medida de comprimento?
4- Para que valor tende o perímetro do triângulo de Sierpinski?
5- Para que valor tende a área do triângulo de Sierpinski?
6- Calcule a dimensão Fractal do triângulo de Sierpinski

Observação

Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre progressões geométrica e/ou durante as aulas sobre logaritmos - no ensino médio.

Atividade 5

Situação de aprendizagem: Estudar a relação entre o triângulo de Pascal e o triângulo de Sierpinski

Objetivos:

- identificar os padrões do triângulo de Sierpinski no triângulo de Pascal.

Pré-requisitos:

- saber usar os critérios de divisibilidade por 2, por 3 e por 4;
- conhecer a lei de formação, do triângulo aritmético de Pascal, baseada na recorrência conhecida como Relação de Stiefel.

Materiais

- materiais de uso diário como caderno, lápis, caneta, borracha e régua;

Desenvolvimento

1- Construa, na malha hexagonal, o triângulo de Pascal com pelo menos 16 linhas.
2- Destaque os números ímpares.
3- Descreva a nova estrutura em destaque.
4- Repita o procedimento destacando os múltiplos de 3 e depois os múltiplos de 4.

Observações:

1- Essa atividade pode ser realizada durante as aulas sobre Binômio de Newton (no Ensino Médio) e/ou durante as aulas sobre critérios de divisibilidade (no Ensino Fundamental).

2- Naturalmente, em sala de aula, sugestões para destacar outros múltiplos, como os de 5, são apresentadas. Nesse caso, tem-se uma boa ocasião para discutir se as novas configurações são ou não fractais.

RELATO DE EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

A prática pedagógica proposta atualmente para o ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aluno, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos a aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro dessa perspectiva, foram realizadas as atividades propostas neste trabalho com alunos da primeira e da segunda série do Ensino Médio, da "Escola de Educação Infantil, Fundamental e Médio Carlos Chagas Filho", em aulas suplementares ao horário regular.

Com o objetivo de motivar os alunos, foi escolhida uma ordem diferente da apresentada neste texto para a realização das atividades. A princípio, foram apresentados os objetos fractais e suas caracterizações por meio da propriedade da autossemelhança. Os alunos puderam, então, observar padrões e perceber as leis de formação de cada objeto fractal. A expectativa de que rapidamente o fizessem se confirmou.

Naturalmente, ocorreram indagações sobre o "nome" fractais, o que levou então à outra característica dos fractais: sua dimensão não inteira. Consequentemente, outras questões foram surgindo, como o conceito de dimensão euclidiana e a necessidade do rigor nas definições em Matemática. Para satisfazer a curiosidade dos alunos, foram realizadas as etapas finais das atividades 1, 2 e 3, ou seja, foram calculadas as dimensões fractais da Curva e Ilha de Koch e do Triângulo de Sierpinski, sendo utilizados conhecimentos elementares de exponencial e logaritmo.

Em seguida, foram propostas as etapas iniciais das atividades 1, 2 e 3. A partir do problema de como calcular o perímetro e a área da Curva de Koch, foi, então, introduzida a ideia de infinito e convergência de uma sequência, de maneira bem informal. Os alunos entenderam claramente que sequências limitadas podem não ser convergentes e conseguiram, rapidamente, perceber que os infinitos termos de uma P.G. decrescente formam uma sequência convergente, cuja soma eles já conheciam.

Esses novos conceitos fascinaram os estudantes, porém, as etapas que exigiam manipulações algébricas, como cálculo da área da Ilha de Koch, exigiram um pouco mais de paciência e dedicação deles. Assim, a estratégia empregada diante dessa situação foi propor que trabalhassem em grupo, discutindo estratégias e conferindo resultados.

Essa experiência com os alunos induz a que sejam feitas algumas alterações na proposta inicial deste trabalho:

1- As etapas das atividades que solicitavam o desenho de mais algumas iterações dos fractais se mostraram muito cansativas, teria sido mais interessante o uso de um software que facilitasse esse trabalho. Ainda assim, o momento se tornou oportuno para a verificação da impossibilidade real de construção de tais figuras.
2- Havia uma expectativa de que dois encontros de três horas/aulas fossem adequados à realização de todas as atividades, porém esse tempo não foi suficiente para cumprir o proposto. A prática mostrou que são necessários dois encontros (de três horas/aulas) para cada uma das atividades 2, 3, 4.

Por fim, destaca-se que o trabalho com os estudantes deixou claro que não se deve dar muita importância às construções geométricas com régua e compasso, pois perde-se muito tempo com essas atividades e, consequentemente, o interesse por outras questões mais importantes diminui.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um estudo que explore características, classificações e principais propriedades dos fractais possibilita que tópicos da Matemática Tradicional sejam (re)vistos por caminhos não analíticos. Assim, o estudo da Geometria dos Fractais é uma forma de aplicar, aprofundar e relacionar diversos conceitos matemáticos estudados no Ensino Médio, além de oportunizar, muitas vezes, um primeiro contato com sequências infinitas e seus limites.

Sob tais considerações e assumindo o ensino da Geometria dos Fractais como uma estratégia a mais para o professor despertar no aluno o prazer de aprender matemática, o objetivo deste trabalho foi buscar uma proposta de atividades que apresentasse os fractais ao aluno de Ensino Médio. Essa proposta é entendida como uma maneira de ajudar esse aluno a internalizar a Geometria como um "objeto de conhecimento", como uma faceta da matemática que pode ser desvelada a partir da reflexão, contribuindo para a democratização do acesso ao mundo do raciocínio matemático.

Para alcançar o objetivo geral deste trabalho, no capítulo 1 foram apresentados os diversos conceitos matemáticos, estudados no Ensino Médio, que são necessários para a realização das atividades com fractais e que proporcionam um primeiro contato com sequências infinitas e seus limites.

O capítulo 2 apresentou os fractais clássicos, como a curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, o tapete Sierpinski, o conjunto de Cantor e a curva de Peano e, no capítulo 3, foram propostas atividades envolvendo cálculo de áreas e de perímetros, progressões geométricas e logaritmos, ou seja, questões que podem ser discutidas ao se tratar de cada um dos fractais citados. A parte final do capítulo apresenta uma breve descrição dos resultados obtidos na realização das atividades propostas neste trabalho com alunos da primeira e da segunda série do Ensino Médio, em aulas suplementares ao horário regular.

A partir da aplicação da proposta de atividades relacionadas aos fractais, conclui-se que:

1- A apresentação dos fractais despertou a curiosidade dos alunos em relação ao conceito de dimensão euclidiana e a necessidade do rigor nas definições em Matemática, além de possibilitar a utilização de conhecimentos elementares de exponencial e logaritmo.

2- As atividades que envolvem manipulações algébricas, como cálculo da área da Ilha de Koch, requerem mais paciência, concentração e dedicação, assim, devem ser realizadas em grupo, o que permite a discussão das estratégias e a conferência dos resultados.

3- É mais produtivo e interessante o uso de um software, como o GeoGebra por exemplo, para auxiliar a realização das atividades que solicitavam o desenho de mais algumas iterações dos fractais.

4- Há necessidade de um tempo maior do que o indicado neste trabalho - dois encontros de três horas/aulas – para a aplicação das atividades propostas.

5- Não é produtivo propor muitas construções geométricas com régua e compasso, pois consomem um tempo que pode ser utilizado com atividades mais interessantes para os alunos.

Diante dessas considerações, é possível afirmar que o estudo da Geometria dos Fractais não só ajuda o aluno a internalizar conhecimentos que permitem aprender matemática melhor, como também possibilita que ele amplie os sentidos que podem ser estabelecidos quando interage com o raciocínio lógico – especificamente com os números. Só assim a maioria dos alunos terá uma relação prazerosa com os números, tornando-os como objetos de curiosidade, de descoberta e recriação.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, C. M. F. S. J. Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino Não Universitário. Tese de mestrado em matemática para o ensino. 2007. 362f. Universidade de Lisboa. Lisboa. 2007

BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal para a Sala de Aula. Belo Horizonte. Autêntica Editora.2005.156p.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas.1997. Editora UNICAMP.

IEZZI, G.; HAZZAN S. Fundamentos da Matemática Elementar. v 4.1996. São Paulo. Atual Editora.229p

JANOS, M. Geometria Fractal. Rio de Janeiro. 2008. Editora Ciência Moderna. 100p.
K. FALCONER, Fractal Geometry, Johm Wiley & Sons Ltd., 1990.

LIMA, E.L. et al. A Matemática do Ensino Médio. v 2. 2006. Rio de Janeiro. SBM.308p.

SILVA, M.M.; SOUZA, W. A. Dimensão Fractal. Revista Eletrônica de Matemática. <www.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matemática >. Acesso em: 12 jan.2013.

ZAVALLA, A. B. P. Motivação do estudo de funções exponenciais e logarítmicas através da geometria fractal. Monografia do curso de especialização para professores de Matemática. UFPR. Curitiba. 2007.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. Números 49 e 57.

ANEXO 1

Uma outra justificativa para a expressão da soma (S_n) dos n primeiros termos de uma P.A., pode ser feita da seguinte maneira:

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \Rightarrow S_n = x_1 + x_1 + r + ... + x_1 + (n-1)r$$

$S_n = nx_1 + (1+2+...+n-1)r$ (*), prova-se por indução sobre n que:

$1+2+...+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, para todo n ≥ 2.

De fato:

i. Se $n = 2$, é claro que a afirmação é verdadeira, $\dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$

ii. Admite-se que $1+2+3+...+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, hipótese de indução.

iii. Para calcular a soma 1 + 2 + 3 + ... + n - 1 + n , faz-se uso da hipótese de indução,

$$1+2+3+...+n-1 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+...+n-1+n = \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$1+2+3+...+n-1+n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Logo, pelo princípio da indução finita, a soma dos *(n – 1)* primeiros naturais é dada por $S'_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Assim, retomando a soma S_n de (*), tem-se que:

$$S_n = \frac{2nx_1}{2} + \frac{n(n-1)}{2}r = \frac{n}{2}\left[x_1 + \underbrace{x_1 + (n-1)r}_{x_n}\right]$$, ou seja,

$$S_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}$$

ANEXO 2

A outra demonstração para a soma dos *n* primeiros termos de uma P.G., citada no Capítulo 1, pode ser feita da seguinte maneira:

Seja S_n a soma dos *n* primeiros termos de uma P.G. de razão q, $q \neq 0$:

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \Rightarrow S_n = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 ... + x_1 q^{n-1}$$

$$S_n = x_1(1 + q + q^2 ... + q^{n-1})$$

Note que:

$1 + q + q^2 ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ é equivalente a $1 - q^n = (1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$

Prova-se por indução sobre *n* que: $1 + q + q^2 ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, para todo *n* natural.

De fato:

i. Se $n = 1$, é imediato que $1 - q = (1 - q)(1)$.

ii. Toma-se por hipótese de indução $1 - q^n = (1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$.

iii. Para provar que $1 - q^{n+1} = (1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^n)$, tese de indução, calcula-se o produto $(1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n)$:

$$(1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n) = \underbrace{(1 - q)(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})}_{hipotese de indução} + (1 - q)(q^n)$$

$$(1 - q).(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n) = 1 - q^n + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

Logo, pelo princípio da indução finita, pode-se afirmar que $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, para todo *n* natural, então, pode-se escrever:

$$S_n = x_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \ se \ q \neq 1.$$

.