Luiz Henrique Morais da Silva

O NÚMERO DE OURO NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
2013

Luiz Henrique Morais da Silva

O NÚMERO DE OURO
NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita.
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador.

Prof. Dr. Parham Salehyan.
UNESP – São José do Rio Preto.

Prof.(a). Dr. Márcio de Jesus Soares.
UFSCAR – São Carlos.

São José do Rio Preto
23/Setembro/2013

Dedico este trabalho,

A minha família, pelo apoio em todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter concluído mais uma etapa de minha vida.

A minha família, mais uma vez, por todo apoio, em especial à minha Mãe Maria José Morais, pois tudo que conquistei até hoje devo a ela.

A minha esposa Eliane da Silva Alves pelo zelo, carinho, atenção e apoio. A minha filha Maria Clara da Silva Alves que ilumina minha vida com toda sua alegria!

Ao Professor Dr.Vanderlei Minori Horita, por sua orientação.

À Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de São José do Rio Preto, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) e todo grupo de Professores do curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Aos meus caros colegas de curso, pela agradável convivência e companheirismo.

A Professora Me. Silvia Borto, pela correção ortográfica deste texto.

"Duvidar de tudo, ou crer em tudo, são duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam, ambas de refletir"

(Jules Henri Poincaré (1854 – 1912))

Matemático Francês

RESUMO

O objetivo deste trabalho é trazer atividades (teóricas e práticas), em torno de um tema único o Número de Ouro, a ser explorado em diversos conteúdos já existentes no atual currículo de Matemática. A partir deste tema, introduzir a ideia de Razão Extrema e Média e, logo após, trazer o conceito de Razão Áurea e, assim, induzir os alunos a obter o Número de Ouro, entender suas propriedades matemáticas e suas aplicações em torno do Triângulo Áureo e Retângulo Áureo.

Palavras – Chave: Razão Áurea. Número de Ouro. Triângulo Áureo. Retângulo Áureo.

ABSTRACT

The goal of this work is to bring new activities (theoretical and practical), around a single subject (The Golden Number), to be exploited in several existing content in the current mathematical curriculum at school. From this subject, we introduce the idea of extreme and mean ratio, as well the concept of the Golden Ratio, so, we expect that students can be able to get the Golden Number and understand their mathematical properties and their applications (related to Golden Triangle and Golden Rectangle).

Keyword: Golden Ratio. Golden Number. Golden Triangle. Golden Rectangle.

SUMÁRIO

INTRODUÇÂO

Este trabalho tem por objetivo trazer as propriedades matemáticas a respeito do Número de Ouro aos alunos da Educação Básica. Essas propriedades matemáticas serão trazidas em forma de atividades, que exploraram conteúdos existentes no atual currículo da Matemática da Educação Básica.

De maneira geral, no contexto educacional, o aluno completa o ciclo ensino fundamental – ensino médio sem saber sequer a existência do Número de Ouro. Tanto no atual ensino fundamental quanto no ensino médio, o Número de Ouro e sua forma geométrica em termos de razão de segmentos (*Razão Áurea*), não são sequer comentados por parte da maioria dos professores que atuam na Educação Básica.

Ao resgatarmos junto aos alunos o tema Número de Ouro no atual ensino da matemática na Educação Básica, podemos então, neste momento, chegar a um ponto de reflexão: será que este tema, Número de Ouro, nos permite fazer mudanças de cunho pedagógico para uma nova postura educacional no ensino da matemática?

Acredito plenamente que sim, pois, a partir deste tema, podemos adotar novas atitudes, estratégias e novas metodologias de ensino.

É de fundamental importância toda e qualquer forma de mudança na estrutura do ensino atual da matemática, pois muitos alunos não gostam da matemática, por não entendê-la ou não serem motivados a isso.

Inicialmente, definimos a Razão Extrema e Média e, logo após, definimos o conceito de Razão Áurea e, assim, induzimos os alunos a obterem o Número de Ouro, entenderem suas propriedades matemáticas e suas aplicações em torno do Retângulo Áureo e do Triângulo Áureo.

Este texto é composto por oito atividades descritas a seguir:

A atividade 1 tem por objetivo induzir o aluno a obter o valor do Número de Ouro por meio da definição de Razão Extrema e Média. O objetivo da atividade 2 é apresentar uma atividade prática, na construção do Retângulo Áureo.

Nas atividades 3 e 4, o objetivo é obter o Número de Ouro a partir de duas expressões matemáticas que estão intrinsicamente ligadas a ele.

A quinta atividade tem por objetivo provar a existência do Triangulo Áureo. Já, a atividade 6, tem por objetivo apresentar a relação intrínseca entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci. As duas atividades finais, atividades 7 e 8 mostram, de forma construtiva, a relação entre o Retângulo Áureo, os Número de Fibonacci e a Espiral Logarítmica.

O texto é composto também por 3 Apêndices, dedicados a explorar conceitos matemáticos envolvidos nas atividades anteriores.

No Apêndice A, é feita a prova de que o Número de Ouro é um número irracional. O segundo apêndice (Apêndice B) traz uma atividade construtiva do Segmento Áureo e a prova desta construção. O Apêndice C, apresentam-se as propriedades matemáticas da Espiral Logarítmica.

1. O NÚMERO DE OURO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Fazendo uma análise geral dos conteúdos estudados por um aluno de ensino fundamental, de acordo com o currículo da Matemática atual, os alunos estudam:

Os conjuntos numéricos: números naturais, números inteiros, números racionais, números irracionais; números reais; proporcionalidade; porcentagem e juros; equação e inequação de primeiro 1ºgrau; equação do 2º grau; expressões algébricas; tópicos de geometria plana e espacial; médias e contagem.

1.1 Introduzindo o conceito de Razão Extrema e Média

A partir do momento em que o aluno conhece o conceito de proporção e equação do segundo grau, a ideia é aproveitar e explorar a definição de Razão Extrema e Média, para se chegar ao conceito de Razão Áurea e, assim, instigar os alunos a obterem o valor do Número de Ouro.

Definição 1: *Diz-se que o segmento de reta é cortado na <u>Razão Extrema e Média</u> quando, assim como o segmento todo está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.*

Em outras palavras, ao observamos a Figura1, o segmento AB certamente é maior que o segmento AC; ao mesmo tempo, o segmento AC é maior que CB. Se a razão entre os comprimentos dos segmentos AB e AC, for igual à razão dos comprimentos dos segmentos AC e CB, então o segmento todo foi cortado na Razão Extrema e Média ou numa Razão Áurea.

Trazendo este conceito para uma linguagem matemática mais atual, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

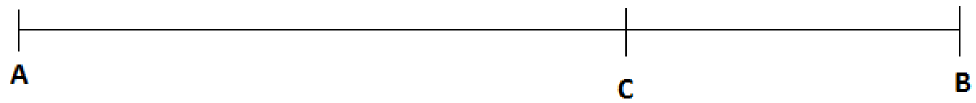

Figura 1 – Segmento Áureo1.

1.2 Proposta de atividade: Atividade 1

O objetivo desta atividade é apresentar o conceito de Razão Extrema e Média aos alunos e, instigá-los a obter uma expressão em linguagem matemática mais atual, utilizando razões de segmentos e, assim, obter o valor do Número de Ouro.

A atividade consiste em sugerir alguns fatos iniciais aos alunos, tais como:

i) Mostrar que o segmento $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, a partir daí os alunos devem concluir que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow 1 + \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

ii) Propor aos alunos que chamem a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = x$, que corresponde a uma das razões iniciais.

iii) Propor também o fato de que se $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = x$, então: $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}} = \frac{1}{x}$.

A partir daí, é esperado que o aluno associe que $1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = x$.

Por fim, os alunos devem concluir que, multiplicando ambos os membros da equação por x, temos:

$$1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x.\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x.x \Leftrightarrow x + 1 = x^2.$$

Somando – x^2 em ambos membros da equação, temos:

$$-x^2 + x + 1 = x^2 - x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0 .$$

Multiplicando ambos os membros da equação por -1:

$$-x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (-1).(-x^2 + x + 1) = (-1).0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 .$$

Temos, então, uma boa oportunidade para que o aluno possa fixar a resolução de uma equação do segundo grau (pela fórmula de *Bhaskara*).

Resolvendo a equação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(1).(-1)}}{2.(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

A partir daí, temos duas raízes que são soluções da equação, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por se tratar de razão entre comprimentos de segmentos, então, a raiz $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, não convém, e a raiz $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a única solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$ para a Razão Extrema e Média.

Chegamos então, ao valor numérico da Razão Áurea, o Número de Ouro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398...$

1.3 Apresentação do Retângulo Áureo

Após um tratamento algébrico na obtenção do Número de Ouro, a próxima sugestão de atividade será:

Introduzir o conceito geométrico e construtivo do Retângulo Áureo.

Definição 2: *Um Retângulo é dito <u>Áureo</u> quando a medida* a *do seu lado maior dividida pela medida* b *do seu lado menor é igual a* $\Phi = \frac{a}{b}$.

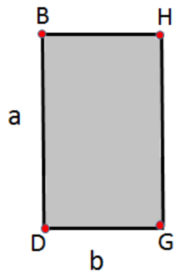

Figura 2 – Retângulo Áureo.

1.4 Proposta de atividade prática: Atividade 2

O objetivo desta atividade é a construção de um Retângulo Áureo.

Para a realização da atividade temos a seguinte sugestão de material: cartolina, caneta, lápis, borracha, compasso, régua, tesoura e cola.

A construção do Retângulo Áureo é bem simples. Basta seguir o esquema de construção abaixo, apresentado na Figura 3.

1. Construa um quadrado ABDC de lado unitário (lado igual a uma unidade). (Sugestão: construa um quadrado de lado 10 cm);
2. Obtenha o ponto médio do lado AB, chamando-o de E; trace a mediatriz desse ponto médio e o ponto de intersecção com o lado CD e chame – o de F;
3. Trace uma diagonal (FB) do vértice F do retângulo EBDF ao vértice oposto B do mesmo;
4. Estenda a base do quadrado e usando a diagonal como raio; trace um arco de circunferência do vértice direito superior do retângulo (ponto B) à base que foi estendida; chame esta intersecção de ponto G.
5. Pelo ponto de interseção do arco com o segmento da base (G), trace um segmento perpendicular à base.
6. Estenda o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento, chamando-o de ponto H, para formar o retângulo;

7. Este último é o *Retângulo Áureo.*

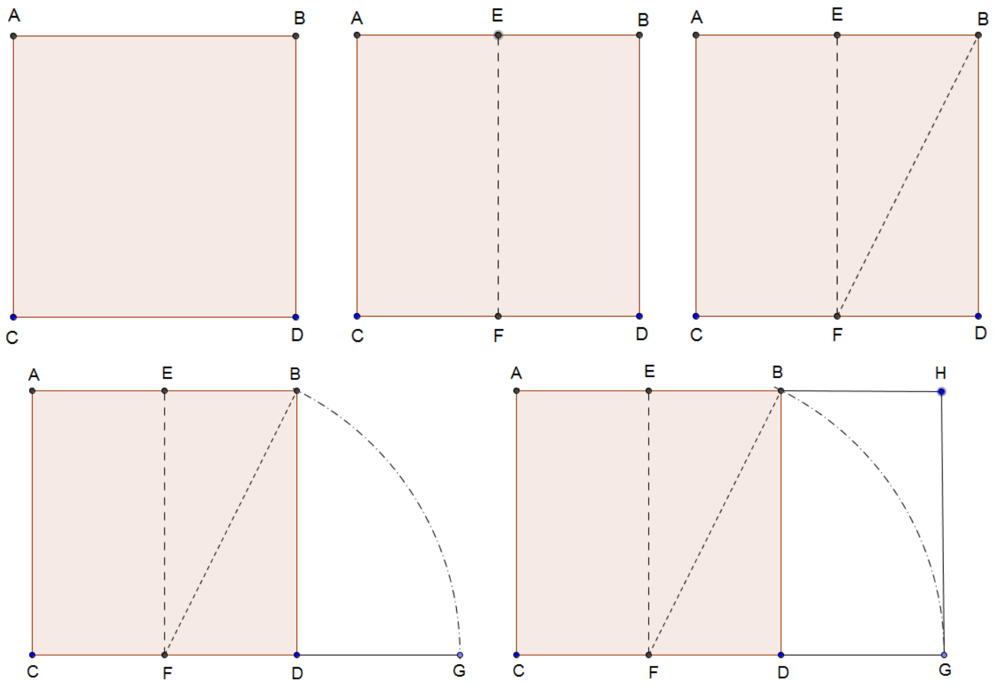

Figura 3 – Construção do Retângulo Áureo.

Veremos que o retângulo BHGD é Áureo. Por construção, sabemos que o quadrilátero ACDB é um quadrado, atribuindo a medida a a cada lado do quadrado, ou seja, $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{CA} = \overline{BD} = a$.

Sabemos, também por construção, que $\overline{FB} = \overline{FG}$ (raio da circunferência centrada em F) e atribuiremos a medida b ao segmento DG, ou seja, $\overline{DG} = b$.

Agora temos que o triângulo FBD é retângulo, por construção, FD é perpendicular a DB. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos: $\left(\overline{FB}\right)^2 = \left(\overline{FD}\right)^2 + \left(\overline{DB}\right)^2$, mas $\overline{FD} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{a}{2}$, pois por construção F é ponto médio do segmento CD, temos, então que:

$$\left(\overline{FB}\right)^2 = \left(\overline{FD}\right)^2 + \left(\overline{DB}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{FB}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2.$$

Como $\overline{FB} = \overline{FG}$:

$$\left(\overline{FG}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow \left(\overline{FG}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \ . \qquad \text{(I)}$$

Mas, por construção: $\overline{FG} = \overline{FD} + \overline{DG}$, como $\overline{FD} = \frac{a}{2}$ e $\overline{DG} = b$, temos $\overline{FG} = \frac{a}{2} + b$. (II)

Comparando a expressão (I) e (II), obtemos:

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + ab + b^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação acima, resulta que,

$$a = \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4.(1).(-b^2)}}{2.(1)} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} = \frac{b.\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Na qual, obtemos a razão, $\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Mas, por se tratar de razão de segmentos, então $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, não convém.

Logo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a única solução pertinente à razão.

Sendo assim, $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, portanto prova-se que $\frac{a}{b} = \Phi$.

2. O NÚMERO DE OURO NO ENSINO MÉDIO

Atualmente, o currículo da Matemática do Ensino Médio tem a seguinte composição: teoria dos conjuntos; estudo das funções (funções de 1ºe 2º graus, funções exponenciais e logarítmicas), equações e inequações exponenciais e logarítmicas, sequências e progressões, trigonometria, geometria plana, espacial e analítica, contagem (análise combinatória), estatística e probabilidade, polinômios (equações polinomiais), números complexos e matemática financeira.

A seguir, o objetivo é apresentar o Triângulo Áureo, o Retângulo Áureo e as propriedades do Número de Ouro aos alunos do Ensino Médio de maneira mais aprofundada, ou seja, o objetivo é acrescentar os conceitos relacionados ao Número de Ouro em conteúdos já existentes no currículo do Ensino Médio.

Embora as atividades sejam propostas de forma sequencial, sendo duas atividades para o ensino fundamental e seis voltadas para o ensino médio, as Atividades 1 e 2 também devem ser realizadas pelos alunos do Ensino Médio como forma de introdução para as próximas atividades.

2.1 Proposta de atividade: Atividade 3

O objetivo desta atividade é levar o aluno a obter o valor do Número de Ouro por meio de uma expressão matemática que lhe será fornecida.

Inicialmente, iremos apresentar a seguinte expressão aos alunos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} .$$

Em seguida, levantam-se as seguintes questões:

1) Será que esta expressão possui alguma relação com o Número de Ouro?
2) Em caso positivo, qual é esta relação?

Após algumas tentativas, caso nenhum aluno consiga visualizar o que pode ser feito, cabe ao professor incentivar os alunos e propor que:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} \text{ e, portanto, } x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Logo, o aluno deve obter a equação $x^2 - x - 1 = 0$, cuja solução positiva é Número de Ouro. Neste momento, é importante fazer com o que o aluno resolva a equação do 2º grau pela fórmula de Bhaskara.

Sendo assim, a conclusão é que podemos representar o número de ouro pela expressão anterior, ou seja:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}.$$

2.2 Proposta de atividade: Atividade 4

A próxima atividade é semelhante à anterior, tendo o mesmo objetivo, mas mudando o tipo de expressão. Primeiro, apresentamos a expressão:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}},$$

para que possam ser levantadas as seguintes questões:

1) Será que esta expressão tem alguma relação com o *Número de Ouro*?
2) Em caso positivo, qual é esta relação?

O objetivo desta atividade é, também, tentar induzir os alunos a descobrir um caminho para decifrar esta relação.

Novamente, após algumas tentativas, caso nenhum aluno consiga visualizar o que pode ser feito, cabe ao professor incentivar os alunos e propor-lhes o seguinte fato:

Escrevendo $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$, tem-se que $x = \sqrt{1+x}$.

Observando que x > 1, o aluno deve ser capaz de desenvolver a expressão sozinho, ou com auxílio do professor. Verifica-se, então, que elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow = x^2 = \left(\sqrt{1+x}\right)^2 \Rightarrow x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 .$$

Como sabemos, mais uma vez, a solução positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ é o número de ouro.

Portanto, a conclusão é que podemos representar o número de ouro pela expressão anterior, ou seja:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} .$$

2.3 Proposta de atividade: Atividade 5

O objetivo desta atividade é apresentar o Triângulo Áureo. Atividade a ser realizada a partir do momento em que o aluno já saiba o conceito de semelhança de triângulos.

Definição 3: *Um triângulo isósceles é dito Áureo, se a razão entre um de seus lados congruentes e a base é a Razão Áurea.*

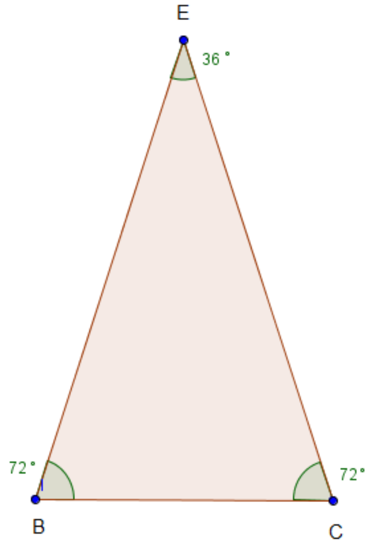

Figura 4 – Triângulo Áureo 1.

Da definição apresentada anteriormente, no triângulo ECB (Figura 4) devemos ter $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} = \Phi$.

Veremos a seguir que o triângulo EBC apresentado acima pode ser obtido de um pentágono regular.

Primeira parte da atividade: Achar o valor de cada ângulo interno do pentágono regular.

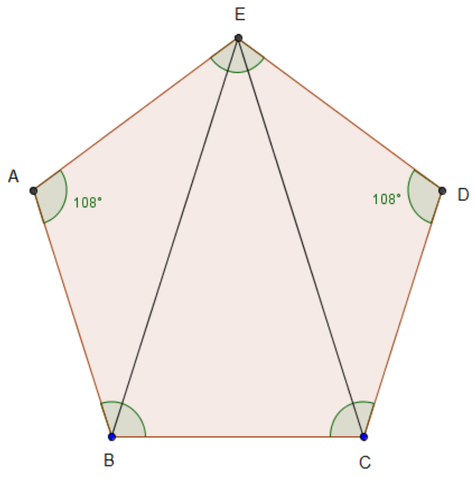

Figura 5 – Pentágono regular 1.

No estudo de polígonos, o aluno aprende como calcular o ângulo interno de um polígono regular de n lados, pela relação: $a = \dfrac{(n-2).180^o}{n}$.

Encontrando $a_5 = \dfrac{(5-2).180^o}{5} = 108^\circ$, ou seja, a medida de cada ângulo interno do pentágono regular é 108º.

Segunda parte da atividade: mostrar que o triângulo EBC é isósceles, e que as respectivas medidas dos ângulos $\angle BEC, \angle EBC, \angle BCE$ são 36º, 72º e 72º.

No triângulo EAB, o ângulo $\angle EAB$ mede 108º , pois é um dos ângulos do pentágono regular; os lados EA e AB são congruentes, pois são lados do pentágono regular, sendo assim , o triângulo EAB é isósceles e os ângulos da base deste triângulo $(\angle ABE, \angle AEB)$ valem 36º, pois $m(\angle BEC) + m(\angle ECB) + m(CBE) = 180^o$, e como $m(\angle ECB) = m(\angle CBE)$ (triângulo AEB isósceles) e $m(\angle BAE) = 108^o$, então faremos $m(\angle EBA) = m(\angle AEB) = \alpha$, e dai temos:

$$\alpha + 108^o + \alpha = 180^o \Leftrightarrow 2\alpha = 72^o \Leftrightarrow \alpha = 36^o.$$

De maneira análoga, podemos provar que o triângulo EDC também é isósceles, no qual as medidas dos ângulos $\angle EDC$, $\angle DCE$ e $\angle CED$ são iguais a 108º, 36º e 36º, respectivamente, e assim verificarmos que que são congruentes (Figura 6).

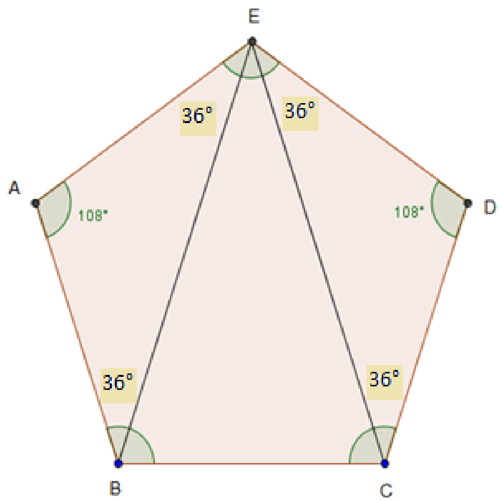

Figura 6 – Pentágono regular 2.

Temos que $\angle EBC \equiv \angle BCE$, pois AE e EC são congruentes, por serem as diagonais do pentágono, logo o triângulo EBC é isósceles.

Fazendo, $m(\angle EBC) = m(\angle BCE) = \beta$ e $m(\angle BEC) = \gamma$, temos:

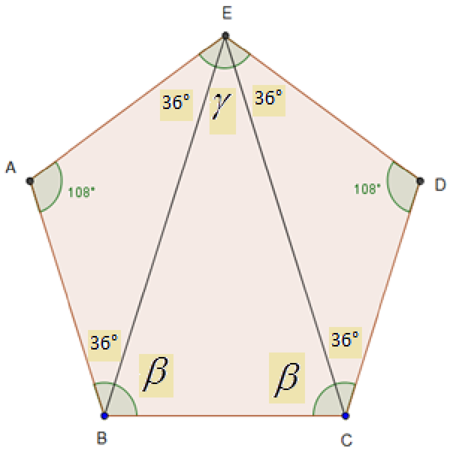

Figura 7 – Pentágono regular 3.

$$\begin{cases} 36^o + \beta = 108^o \Leftrightarrow \beta = 72^o \\ 36^o + 36^o + \gamma = 108^o \Leftrightarrow \gamma = 36^o \end{cases}$$

T*erceira parte da atividade:* traçar a bissetriz do ângulo $\angle EBC$ e chamar de F o ponto de intersecção da bissetriz com o lado EC; provar que os segmentos BC, BF e EF são congruentes, ou seja, $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{EF}$ (Figura 8).

Inicialmente, propor aos alunos que eles tracem a bissetriz do ângulo $\angle EBC$, encontrando um ponto F de forma que, $F \in EC$ (Figura 8).

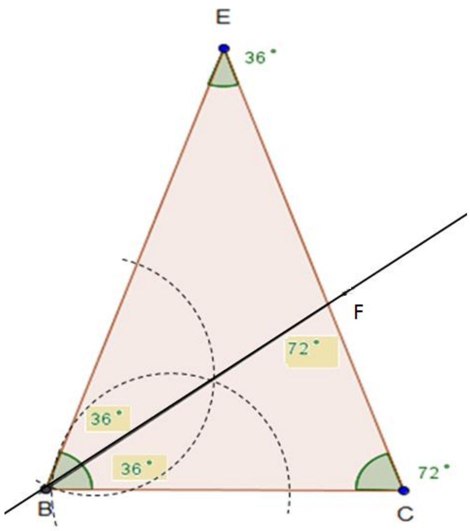

Figura 8 – Triângulo Áureo 2.

De início, temos por construção da bissetriz que $m(\angle FBC) = m(\angle EBF) = 36^o$, pois $m(\angle EBC) = 72^o$. Logo, como

$$36^o + 72^o + m(\angle BFC) = 180^o \text{, temos } m(\angle BFC) = 36^o.$$

Sendo assim, como $m(\angle FCB) = m(\angle BFC)$, então o triângulo BFC é isósceles, logo BC é congruente a BF, ou seja, $\overline{BC} = \overline{BF}$.

Para provarmos que $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{EF}$, observa-se que os lados BF e EF são congruentes, ou seja, $\overline{BF} = \overline{EF}$, pois o triângulo (BFE) é isósceles, por ser $\angle BEF \equiv \angle EBF$.

Sendo assim, provamos que $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{EF}$.

Quarta parte da atividade: mostrar que o triângulo BFC e o triângulo EBC são semelhantes.

É fácil ver que pelo caso ângulo – ângulo – ângulo que estes triângulos são semelhantes (Figura 9), pois:

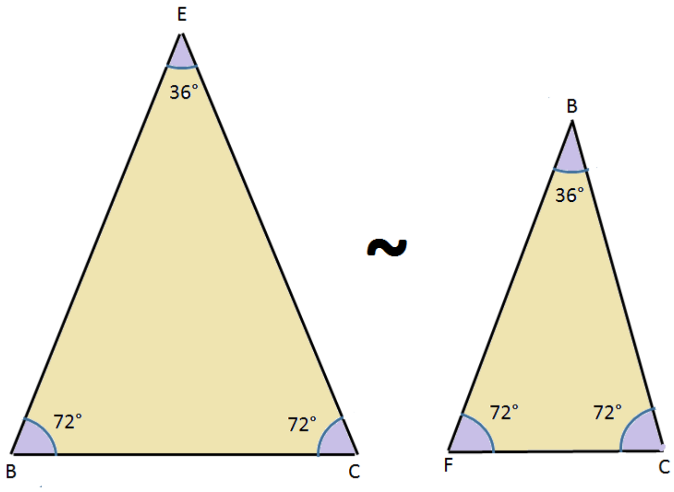

Figura 9 – Semelhança de triângulos.

$$\angle BEC \equiv \angle FBC$$
$$\angle CBE \equiv \angle CFB$$
$$\angle BCE \equiv \angle FCB$$

Quinta parte da atividade: provar que o triângulo isóscele EBC (Figura 4) é um Triângulo Áureo.

Queremos provar que $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \Phi$. Para isso, da semelhança entres os triângulos EBC e BFC, temos: $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$.

Fazendo $\overline{EC} = x$ e $\overline{BC} = y$, e notando que $\overline{FC} = \overline{EC} - \overline{EF}$. Além disso, como já foi provado anteriormente, $\overline{EF} = \overline{BC} = y$, sendo assim, $\overline{FC} = x - y$. A figura a seguir ilustra a situação descrita.

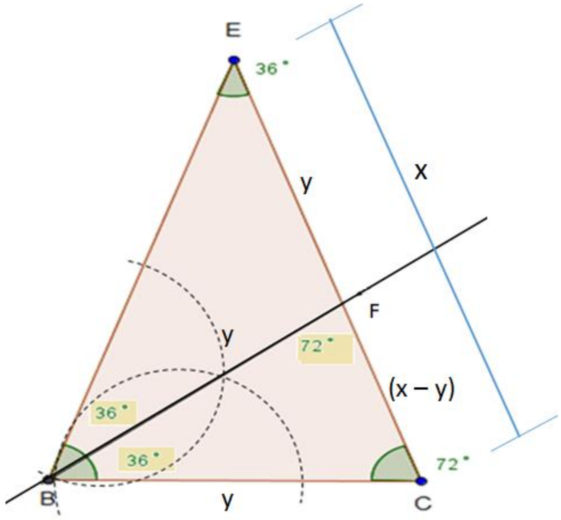

Figura 10 – Triângulo Áureo 3.

Queremos provar que: $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{x}{y} = \Phi$.Logo, temos:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} \Leftrightarrow x^2 - xy = y^2 \Leftrightarrow x^2 = xy + y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1.$$

Fazendo $\frac{x}{y} = m$, obtemos:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow m^2 = m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0.$$

Como já se sabe, é a equação que resulta no valor do número de ouro, provando que $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \Phi$, e o triângulo EBC é Áureo.

2.4 Introduzindo a Sequência de Fibonacci

O ensino de sequências e progressões no Ensino Médio é uma ótima oportunidade para apresentar a Sequência de Fibonacci aos alunos.

Antes dos estudos de *Progressões Aritméticas* e *Geométricas* (P.A. e P.G.), será muito interessante e proveitoso apresentar os Números de Fibonacci. Será algo novo para os alunos e também servirá como uma forma de incentivo ao estudo posterior de P.A. e P.G.

O estudo dos Números de Fibonacci envolve muitas curiosidades, entre elas, a relação intrínseca com o Número de Ouro.

Por se tratar de alunos de Ensino Médio, os Números de Fibonacci devem ser apresentados de maneira atrativa, de forma a despertar a curiosidade. Uma maneira interessante seria apresenta-lhes o seguinte problema:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par de coelhos, em um ano (doze meses) se, supostamente, no início de todo mês cada par de coelhos dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do início do segundo mês?

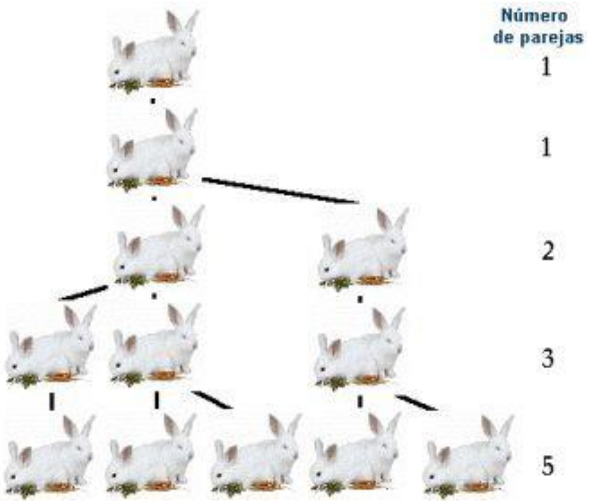

Figura 11 – Coelhos.
Fonte: http://bettonunes.blogspot.com.br/2010/12/sequencia-de-fibonacci-uma-belissima.html

Agora, basta apresentar a solução do problema aos alunos, procurando instigá-los a pensar na Sequência de Fibonacci.

Então, temos a seguinte sequência:

- No início, temos um par de coelhos, que irá amadurecer, para reproduzir no mês seguinte;
- Após o primeiro mês, ou seja, início do segundo mês, o primeiro par de coelhos dá à luz a outro par, de modo que ficamos com dois pares de coelhos, tendo um par de coelhos, aptos a reproduzir, e um par de coelhos amadurecendo;
- Após o segundo mês, ou seja, início do terceiro mês, o par de coelho maduros dá à luz a outro par jovem, enquanto o primeiro par de coelhos filho do par original amadurece, portanto, ficam três pares.
- Após o terceiro mês, ou seja, início do quarto mês, cada um dos dois pares maduros dá à luz a outro par, e o par de filhotes, filho do par inicial amadurece, ficando então com 5 pares de coelhos.
- Após o quarto mês, início do quinto mês, cada um dos três pares maduros dá à luz a um par, e os dois pares filhotes anteriores crescem, resultando agora em um total de oito pares de coelhos.
- Após o quinto mês, ou seja, início do sexto mês, temos um par de filhotes de cada um dos cinco pares adultos, mais três pares amadurecendo num total de treze pares.

A parir daí, teremos a seguinte sequência: 1,1, 2, 3, 5, 8 (pares de coelhos gerados) nos seis primeiros meses.

Mas, como o problema original é contar os pares em um ano, a proposta é fazer com que os alunos completem a sequência, para estes doze meses, para logo após, o professor entrar com a teoria envolvendo os Números de Fibonacci.

Assim, os alunos devem chegar à seguinte sequência: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

2.5 Proposta de atividade: Atividade 6

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos consigam chegar à expressão de recorrência da Sequência de Fibonacci.

Primeira parte da atividade: os alunos devem continuar a sequência descrita até os doze meses referidos no problema.

Segunda parte da atividade: propor que os alunos coloquem os Números de Fibonacci em forma de sequência:

(1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...).

Temos então, a *Sequência de Fibonacci, e* o intuito é obter uma expressão de recorrência que permita defini-la.

Ordenando os elementos da sequência de Fibonacci de acordo com a posição que aparecem nesta sequência, faremos:

Tabela 1 : Números de Fibonacci.

u_1	=	1
u_2	=	1
u_3	=	2
u_4	=	3
u_5	=	5
u_6	=	8
u_7	=	13
$\vdots$		
u_n		
u_{n+1}		
u_{n+2}		
$\vdots$		

Utilizando a primeira parte da atividade, o aluno deverá ser capaz de observar que:

Tabela 2: Números de Fibonacci 2.

2	=	1	+	1	$\Rightarrow$	u_3	=	u_2	+	u_1
3	=	2	+	1	$\Rightarrow$	u_4	=	u_3	+	u_2
5	=	3	+	2	$\Rightarrow$	u_5	=	u_4	+	u_3
8	=	5	+	3	$\Rightarrow$	u_6	=	u_5	+	u_4
13	=	8	+	5	$\Rightarrow$	u_7	=	u_6	+	u_5
21	=	13	+	8	$\Rightarrow$	u_8	=	u_7	+	u_6
34	=	21	+	13	$\Rightarrow$	u_9	=	u_8	+	u_7
55	=	34	+	21	$\Rightarrow$	u_{10}	=	u_9	+	U_8
89	=	55	+	34	$\Rightarrow$	u_{11}	=	u_{10}	+	u_9
144	=	89	+	55	$\Rightarrow$	u_{12}	=	u_{11}	+	u_{10}
						$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
						u_{n+2}	=	u_{n+1}	+	u_n

Sendo assim, a expressão: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, é uma expressão de recorrência da Sequência de Fibonacci.

2.6 A relação entre o Número de Ouro e os Números de Fibonacci.

O objetivo do estudo deste próximo tópico é apresentar a relação existente entre o Número de Ouro e os Números de Fibonacci.

Primeiramente, mostremos um fato curioso:

Proposição 1*: Dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si, ou seja, se escolhermos dois termos consecutivos quaisquer da sequência, então, o Máximo Divisor Comum (MDC) entres eles é unitário. Ou seja,*

$$MDC(u_{n+1}, u_n) = 1, \text{ para todo inteiro } n > 1.$$

Essa proposição é um bom momento para lembrar o conceito de M.D.C.(Máximo Divisor Comum).Para isso peça aos alunos que completem a tabela sugerida logo a seguir.

Tabela 3: O MDC de dois números consecutivos de Fibonacci.

Números de Fibonacci		MDC
1	1	1
1	2	1
2	3	1
3	5	1
5	8	1
8	13	1
13	21	1
21	34	1
34	55	1
55	89	1
89	144	1
144	233	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{n+1}	u_n	1

A prova desta proposição será feita pelo Axioma de Indução, cabendo ao professor optar ou não, por apresentá-la aos alunos.

Antes de provarmos a proposição anterior, precisaremos de um resultado importante de aritmética na teoria de MDC que é o Lema de Euclides. Iremos provar inicialmente este lema e, em seguida provaremos a proposição.

Lema 1 (Lema de Euclides): *Sejam* a, b *e* n *números naturais, sendo* $a < a.n < b$. *Então* $MDC(a,b) = MDC(a, b-na)$.

Demonstração: Seja $d = MDC(a, b-na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b-na)$, pois a e $(b-na)$ são múltiplos de d, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b.

Suponhamos que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $(b-na)$, portanto, $c \mid d$.Isso prova que $d = MDC(a,b)$.

Provaremos, então, que $MDC(u_{n+1}, u_n) = 1$. A prova será feita por indução sobre n. De fato, para $n=1$, temos que $mdc(u_2, u_1) = mdc(1,1) = 1$

Suponhamos que o resultado válido para n, isto é, $mdc\ (u_{n+1}, u_n) = 1.$

Mas, do Lema 1, temos que

$$mdc(u_{n+2}, u_{n+1}) = mdc(u_{n+2} - u_{n+1}, u_{n+1})\ .$$

Assim, conclui-se que:

$$mdc(u_{n+2}, u_{n+1}) = mdc(u_{n+2} - u_{n+1}, u_{n+1}) = mdc(u_n, u_{n+1}) = 1$$

Provando, assim, o resultado.

Proposição 2: *A razão (o quociente) entre dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci tende (se aproxima) ao Número de Ouro. Isto é, pode-se fazer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tão próximo de* Φ *quanto se queira, fazendo n tomar valores cada vez maior.*

Ou, em outras palavras: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi$.

Faremos então, uma tabela de valores, para que o aluno consiga visualizar a proposição apresentada anteriormente.

Tabela 4 – Relação dos números de Fibonacci e o Número de Ouro.

n	u_n	u_{n+1}	u_{n+1}/u_n
1	$u_1 = 1$	$u_1 = 1$	1,0000000000000000000
2	$u_2 = 1$	$u_2 = 2$	2,0000000000000000000
3	$u_3 = 2$	$u_3 = 3$	1,5000000000000000000
4	$u_4 = 3$	$u_4 = 5$	1,666666666666666666...
5	$u_5 = 5$	$u_5 = 8$	1,6000000000000000000
6	$u_6 = 8$	$u_6 = 13$	1,6250000000000000000
7	$u_7 = 13$	$u_7 = 21$	1,615384615384615384...

8	$u_8 = 21$	$u_8 = 34$	1.619047619047619047...
9	$u_9 = 34$	$u_9 = 55$	1.617647058823529411...
10	$u_{10} = 55$	$u_{10} = 89$	1.618181818181818181...
11	$u_{11} = 89$	$u_{11} = 144$	1.617977528089887640...

Para um melhor aproveitamento das aulas, e para que não haja desperdício de tempo, é recomendado que esta tabela seja apresentada aos alunos no Excel (ou planilha compatível), para que os cálculos sejam mais rápidos e precisos, e assim, os alunos não se sintam exauridos.

Claro que a proposta anterior será viável, caso a escola disponibilize dos equipamentos necessários; como computador e projetor.

Os alunos devem perceber que, ao aumentarmos os valores dos Números de Fibonacci, e efetuar o respectivo quociente entre dois números consecutivos, como dispostos na tabela anterior (Tabela 4), isso nos leva a uma razão, que é bem conhecida, ou seja, estamos chegando cada vez mais próximos de $\Phi = 1{,}61803398\ldots$

A seguir, será feita a demonstração da Proposição 2 que destina-se ao professor, já que os principais conceitos matemáticos em questão não são abordados no Ensino Médio. No entanto, encorajamos os professores a apresentar as ideias aqui contidas aos seus alunos de forma intuitiva.

Demonstração. Embora a sequência de Fibonacci não seja limitada superiormente, existe um fato interessante, tomando as razões de cada termo pelo seu antecessor, obtemos outra sequência numérica, cujo termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, n > 1.$$

Note que, para $n > 2$

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} \Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \le 2.$$

Assim, a sequência a_n é limitada superiormente por 2 e inferiormente por 1.

Observe na Tabela 5 que os números a_n alternam em torno de um valor próximo a 1,618.

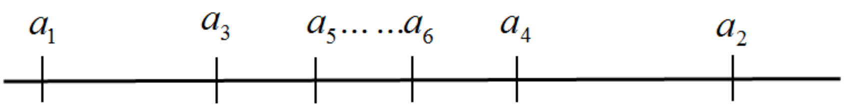

Figura 12 – Sequência de Fibonacci.

Precisamos, dessa forma, provar que a sequência acima é convergente, para isso, vamos considerar as seguintes subsequências de (a_n): (a_{2k}) e (a_{2k+1}), $(k \geq 1)$, ou seja, as subsequências de índices pares e ímpares, respectivamente.

Primeiro vamos verificar que os termos ímpares da sequência sempre são menores que os termos pares. De fato, suponhamos por indução, que $a_{2k-1} < a_{2p}$, qualquer que seja p.Então

$$\frac{1}{a_{2k-1}} > \frac{1}{a_{2p}} \Rightarrow 1+\frac{1}{a_{2k-1}} > 1+\frac{1}{a_{2p}} \Rightarrow a_{2k} > a_{2p+1} \Rightarrow \frac{1}{a_{2k}} < \frac{1}{a_{2p+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{a_{2k}} < 1+\frac{1}{a_{2p+1}} \Rightarrow a_{2k+1} < a_{2p+2}$$

qualquer que seja p, isto é, a_{2k+1} é sempre menor que qualquer termo par da sequência. Do mesmo modo, podemos mostrar que todo termo par da sequência é maior que qualquer termo ímpar.

Mostraremos, a seguir, por indução sobre k, que a_{2k} é decrescente e a_{2k-1} é crescente. Com efeito, tem-se que:

(i) $a_2 = 2 > a_4 = \dfrac{5}{3}$

(ii) supõe-se válido para k = p, isto é: $a_{2p} > a_{2p+2} (p \geq 1)$

Observemos que:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \Rightarrow u_{n-1} = u_n - u_{n-2}$$

Logo,

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = \frac{2u_n - u_{n-2}}{u_n} = 2 - \frac{u_{n-2}}{u_n} = 2 - \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-2}}} = 2 - \frac{1}{\frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_{n-2}}} =$$

$$= 2 - \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} + 1} = 2 - \frac{1}{a_{n-2} + 1}, n \geq 3.$$

Portanto,

$$a_{2p+2} < a_{2p} \Rightarrow a_{2p+2} + 1 < a_{2p} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{2p} + 1} < \frac{1}{a_{2p+2} + 1} \Rightarrow -\frac{1}{a_{2p+2} + 1} < -\frac{1}{a_{2p} + 1}$$

$$2 - \frac{1}{a_{2p+2} + 1} < -2 \frac{1}{a_{2p} + 1} \Rightarrow a_{2p+4} < a_{2p+2.}$$

Isso prova que (a_{2k}) é decrescente. De modo análogo, pode-se provar que (a_{2k-1}) é crescente.

É importante observar que (a_{2k}) é monótona decrescente e limitada inferiormente por 1 e (a_{2k-1}) é monótona crescente e limitada superiormente por 2.

Portanto, as seguintes sequências (a_{2k}) e (a_{2k-1}) são monótonas e limitadas, logo são convergentes. (Lima, E. L. Curso de Análise – vol. 1)

Chamando $x = \lim a_{2k}$, temos

$$x = \lim a_{2k} = \lim\left(2 - \frac{1}{a_{2k-2} + 1}\right) = 2 - \frac{1}{\lim a_{2k-2} + 1}.$$

Como $\lim a_{2k-2} = \lim a_{2k}$, temos que $x = 2 - \frac{1}{x+1}$, que é equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$ e, como $x \geq 1$, conclui-se que x é o Número de Ouro. Analogamente, o limite da sequência dos termos ímpares é também o Número de Ouro. Como os termos pares e os termos ímpares da sequência a_n tendem ao Número de ouro, toda sequência converge a ele, isto é $\lim a_n = \Phi$.

2.7 Proposta de atividade prática: Atividade 7

O objetivo da atividade é fazer com que o aluno observe a relação entre o Retângulo Áureo e os números de Fibonacci, de forma construtiva.

Esta atividade prática poderá ser individual ou em pequenos grupos. Temos a seguinte sugestão de materiais: cartolina, caneta, lápis, borracha, régua, tesoura e cola.

1. Inicialmente, serão feitos dois cortes quadrados, em cartolinas de cores diferentes, para uma melhor percepção (cerca de 3 cm x 3 cm), embora, nada impeça ser uma cartolina da mesma cor.

2. Cada quadrado desses será considerado unitário, ou seja, será considerado equivalente a uma unidade.

3. Juntando os dois quadrados unitários, teremos um retângulo medindo 6 cm (na altura) x 3 cm (na base).

Sendo que o comprimento 6 cm corresponde à soma dos lados dos quadrados anteriores.

4. Novamente, anexamos outro quadrado com 6 cm de lado e teremos um retângulo 6 cm(altura) x 9 cm (Base); temos então a seguinte sequência de quadrados: 1u, 1u, 2u, referentes ao fato de os quadrados iniciais serem unitários.

5. Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos anteriormente; a sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3u, 5u, 8u, 13u,..., que é a Sequência de Fibonacci.

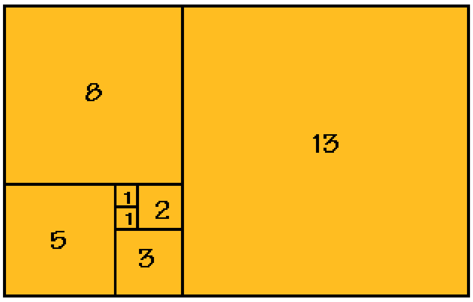

Figura 13 – Retângulo Áureo e os números de Fibonacci.
Fonte: http://www.interaula.com/matweb/alegria/fibon/seqfib2.htm

2.8 Proposta de atividade prática: Atividade 8

O objetivo desta atividade é apresentar de forma construtiva a Espiral Logarítmica e a sua relação com o Retângulo Áureo.

Para a realização desta atividade, é sugerida a seguinte lista de materiais: cartolina, caneta, lápis, borracha, compasso, régua, tesoura e cola.

Essa atividade pode ser feita de forma consecutiva à atividade anterior, aproveitando o Retângulo Áureo construído anteriormente.

1. Com um compasso, traçar um quarto de circunferência no quadrado de lado 39 cm, último quadrado obtido na atividade anterior.

2. Logo após, traçar quartos de circunferências nos quadrados de lado 24 cm, 15 cm, 9 cm, 6 cm, 3 cm e 3 cm.

3. Essa sequência de quartos de circunferências unidas formam espirais “rodopiantes”, conhecidas como Espiral Logarítmica.

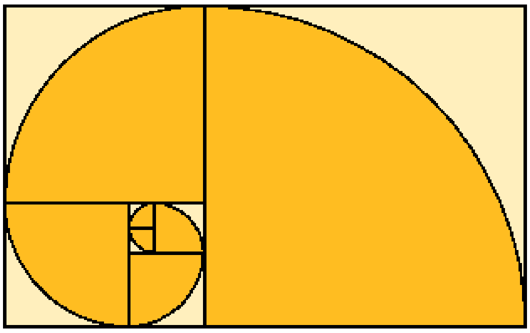

Figura 14 – Construção da Espiral Logarítmica.
Fonte: http://www.interaula.com/matweb/alegria/fibon/seqfib2.htm

As propriedades matemáticas referentes à Espiral Logarítmica podem ser encontradas no Apêndice C.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por finalidade apresentar aos alunos do Ensino Básico a existência, as propriedades e as curiosidades relacionadas ao *Número de Ouro.*

Todas as propostas de atividades, exposição de teorias, e todo o contexto matemático envolvendo o *Número de Ouro* foram preparadas para alunos do referido nível de ensino, alguns fatos matemáticos foram apresentados apenas de maneira didática; o que não acarreta que o professor não deva saber a matemática formal envolvida nos fatos apresentados. Os *apêndices* colocados neste texto vêm reforçar esta necessidade de estudo do professor, que deve sempre estar preparado para realizar as atividades, de maneira segura.

Para o preparo do professor, a leitura destes *apêndices* será de extrema importância, assim o professor poderá se sentir seguro para realizar todas as propostas de atividades sugeridas, poupando esforços de pesquisas exaustivas.

Mas faz-se necessário ao professor (como um *eterno* pesquisador), realizar estudos periódicos para o preparo de suas aulas, utilizando a maior fonte de conhecimento possível.

3.1 Resultado da aplicação das atividades propostas

Para que houvesse uma amostra do reflexo das atividades sugeridas no texto, as mesmas formam postas em prática com um grupo de cerca de 30 alunos do Ensino Médio regular (2º e 3º anos) de uma escola Técnica Estadual;

sendo que o grupo de alunos era bem heterogêneo, não havendo nenhum tipo de seleção destes alunos.

O principal objetivo desta aplicação prática foi analisar o interesse dos alunos a respeito das atividades, podendo assim medir também o nível de conhecimento que eles apresentaram.

As atividades foram realizadas em dias alternados durante duas semanas consecutivas, devido à logística de tempo dos discentes.

As principais conclusões a respeito da aplicação das atividades foram as seguintes:

- Os alunos deram o depoimento de que as atividades foram muito interessantes, fugindo do cotidiano com o qual eles estavam acostumados.
- Os conteúdos já estudados por eles na aplicação das atividades, para alguns era algo corriqueiro, e para outros, pareceu algo novo, que ainda não haviam estudado.
- As dificuldades apresentadas pelos alunos foram as mais variadas possíveis, desde a resolução de equação do segundo grau, passando por dificuldades de abstração e entendimento algébrico, até as dificuldades de semelhança de triângulos.

Embora o grupo de alunos (amostra) seja pequeno em meio ao conjunto universo que representa estes discentes, uma certeza ficou patente, as atividades chegaram ao seu propósito maior, qual seja, incentivar os alunos a estudar matemática.

Uma importante conclusão a ser tirada desta aplicação das atividades sugeridas no texto, é a de que quanto mais novidades (com qualidade) são apresentadas aos alunos, mais envolvidos ele se tornam com o ensino da matemática.

APÊNDICE A – Prova de que o Número de Ouro é Irracional

É importante que o aluno entenda bem que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398...$ é um número irracional, portanto faremos a seguinte prova a respeito deste fato.

Primeiramente, provaremos que $\sqrt{5}$ é um número irracional, ou seja, não se pode escrevê-lo em forma de fração do tipo $\frac{p}{q}, q \neq 0 \ \ e \ \ p,q \in Z$.

A prova será feita por contradição (ou redução ao absurdo). Suponhamos então, por contradição que $\sqrt{5}$ possa ser escrita na forma $\frac{p}{q}, q \neq 0 \ \ e \ \ p,q \in Z,$ sendo o $mdc(p,q) = 1$, isto é, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$.

Elevemos ambos os membros da equação ao quadrado e teremos:

$$(\sqrt{5})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 5 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 5q^2 = p^2.$$

Podemos concluir, então, que p^2 é múltiplo de 5, e como 5 é um número primo, p também deve ser múltiplo de 5. Fazendo $p = 5m \ \ (m \in Z)$, temos que:

$$5q^2 = (5m)^2 \Leftrightarrow 5q^2 = 25m^2.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{5}$.

$$\left(\frac{1}{5}\right)5q^2 = \left(\frac{1}{5}\right)25m^2 \Leftrightarrow q^2 = 5m^2$$

Podemos concluir agora que q^2 é múltiplo de 5 e, portanto, q deve ser múltiplo de 5, o que contradiz o Fato do $mdc(p,q) = 1$. Portanto, $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Finalmente, supondo por absurdo que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b}$, com a,b inteiros positivos, $b \neq 0,$ teremos $\sqrt{5} = \frac{2a-b}{b}$, que é um quociente da forma $\frac{p}{q}$, com p,q inteiros positivos, o que é um absurdo. Logo, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número irracional.

APÊNDICE B – Construção do Segmento Áureo

Como foi obtido o valor no Número de Ouro na atividade 1 em termos de Razão Extrema e Média (Segmento Áureo), segue a seguinte proposta de construção do Segmento Áureo por meio de régua e compasso.

Dado um segmento de reta AB qualquer, vamos obter o ponto médio M deste segmento centrando o compasso em A e logo após em B, traçamos circunferências que se intersectam no ponto C e D (Figura 15).

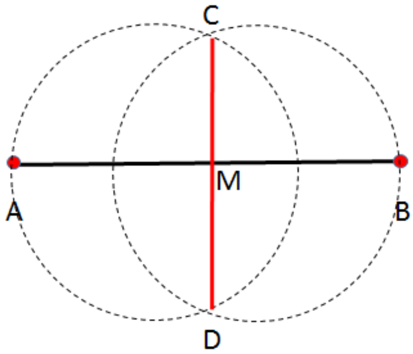

Figura 15 - Ponto médio.

Usando régua e compasso, traçamos, a seguir, um segmento de reta BE perpendicular a AB pelo ponto B, com a metade do comprimento do segmento AB, ou seja, $\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{2}$, da seguinte forma: Na semirreta $\vec{AB}$ tomemos o ponto N tal que $\overline{MB} = \overline{BN}$. Para isto, basta prolongarmos o segmento AB e traçarmos uma circunferência de raio $\overline{MB}$, centrada em B, a intersecção entre a circunferência e o prolongamento do segmento AB será o ponto N (Figura 16).

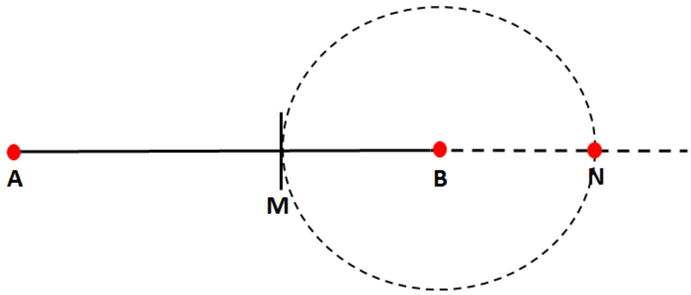

Figura 16 - Ponto N.

De modo análogo a construção da Figura 15, encontramos os pontos C’ e D’, o ponto E é construído através da intersecção da semirreta $\overrightarrow{BC'}$ e a circunferência centrada em B, a figura abaixo ilustra esta construção.

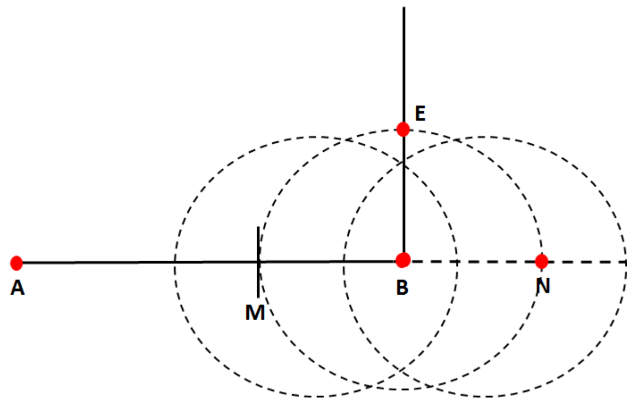

Figura 17 – Ponto E.

Unindo-se os pontos A e E, temos o triângulo retângulo ABE, por construção.

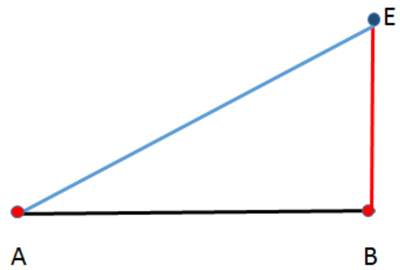

Figura 18 - Triângulo retângulo.

Tracemos uma circunferência centrada em E, de raio BE, marcamos um novo ponto no segmento AE e chamemos de este ponto de P.

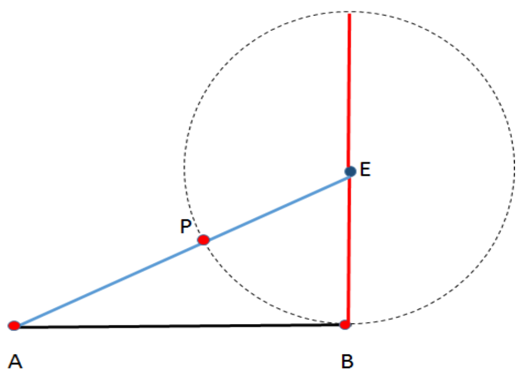

Figura 19 - Triângulo e circunferência 1.

Finalmente, tracemos uma circunferência de raio AP, centrada em A, e seja Q o ponto de intersecção com o segmento AB. (Figura 20)

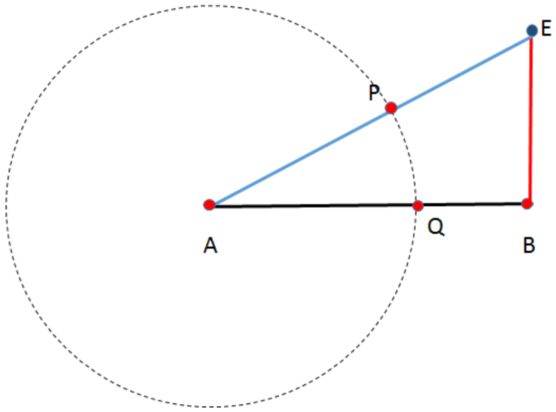

Figura 20 - Triângulo e circunferência 2.

Afirmamos que o ponto Q divide o segmento AB em uma Razão Extrema e Média, ou seja, que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. De fato, fazendo $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = x$, devemos mostrar que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Para isso, note que, $\overline{QB} = \overline{AB} - \overline{AQ} = (1-x).\overline{AB}$ e que $\overline{EB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \overline{PE}$.

Logo, $\overline{AE} = \overline{AP} + \overline{PE} = \overline{AQ} + \overline{PE} = x.\overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right).\overline{AB}$.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\overline{AE}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BE}\right)^2 \Rightarrow \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\overline{AB}\right]^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0,$$

cujas raízes são $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ e $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Como x > 0, devemos ter $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Logo, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, como queríamos demostrar.

APÊNDICE C – A Espiral Logarítmica.

O Texto a seguir tem como fonte de dados o livro Razão Áurea de Mário Lívio e a Home - Page www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html.

Veremos agora, uma propriedade matemática muito interessante, envolvendo a Razão Áurea e os logaritmos, através de uma curva chamada Espiral Logarítmica.

O primeiro matemático conhecido de que se tem notícia a se deparar com esta curva foi Jacques Bernoulli, um dos três matemáticos que a família Bernoulli apresentou ao universo matemático.

O nome Espiral Logarítmica foi derivado da forma como o raio cresce, quando nos movemos ao longo da curva no sentido horário.

Jacques, ainda em vida, pediu para que essa forma e o lema que atribuiu a ela fossem gravados em seu túmulo.

O lema descreve uma propriedade fundamental, exclusiva da Espiral Logarítmica.

Lema 2 (Lema de Jaques Bernoulli): *Uma Espiral não altera seu formato, à medida que seu tamanho aumenta.*

Essa característica é conhecida como auto similaridade.

Fascinado com essa propriedade, Jaques teria escrito que a Espiral Logarítmica:

"Pode ser usada como símbolo tanto de vigor e constância na adversidade, quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, era restaurado ao seu exato e perfeito ser". (LÍVIO, MÁRIO, ano, pagina)

Se pararmos para pensar um momento, esta propriedade aparece de maneira semelhante em alguns fenômenos de crescimento na natureza. Por exemplo, à medida que um molusco cresce dentro da concha do Náutilo, ele constrói câmaras cada vez maiores, fechando as menores, que não são mais usadas. Cada aumento no comprimento da concha tem um crescimento proporcional ao raio, de modo que permanece praticamente inalterado. Consequentemente, o Náutilo vê uma casa idêntica durante toda sua vida, e não precisa, por exemplo, ajustar seu equilíbrio à medida que amadurece.

As figuras a seguir (Figuras 21 e 22), associam a semelhança entre esta concha encontrada na natureza e a Espiral Logarítmica.

Figura 21 – Concha de Náutilo.
Fonte: http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbnautilus.htm

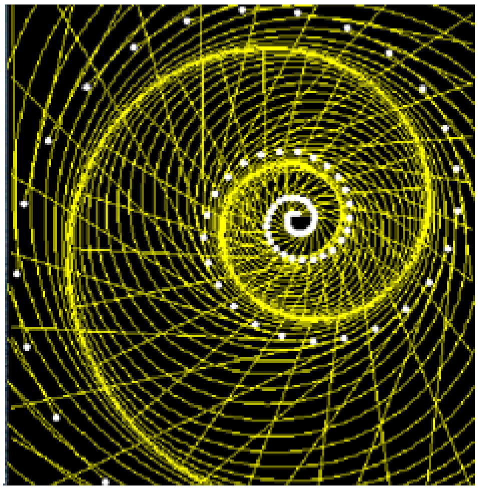

Figura 22 – Espiral Logarítmica.
Fonte: http://www.ite.educacion.es/formacion/enred/web_espiral/matematicas

Voltando às propriedades matemáticas, da Espiral Logarítmica, aumentado pela acumulação, dentro de si mesma, a Espiral Logarítmica, cresce cada vez mais, com a distância, entre seus enrolamentos aumentando, à medida que se afasta da fonte, conhecida como pólo. Especificamente, dar volta de ângulos iguais, aumenta a distância do pólo em proporções iguais.

De uma maneira natural, a natureza prima por espirais bem próximas da Espiral Logarítmica. De girassóis, conchas do mar, de redemoinhos a furacões a galáxias de espirais gigantes.

Interessante é o fato de a Espiral Logarítmica e a Razão Áurea caminham intimamente ligadas (de mãos dadas).

Examinando de maneira mais detalhada e minuciosa, o Retângulo Áureo, ao ligarmos os pontos sucessivos onde estes quadrados rodopiantes dividem o lado em Razões Áureas, obter-se-á uma Espiral Logarítmica (como visto na Atividade 8), que se enrola, para o interior na direção do pólo (o ponto dado pela intersecção das diagonais, que foi chamado caprichosamente de o olho de Deus).

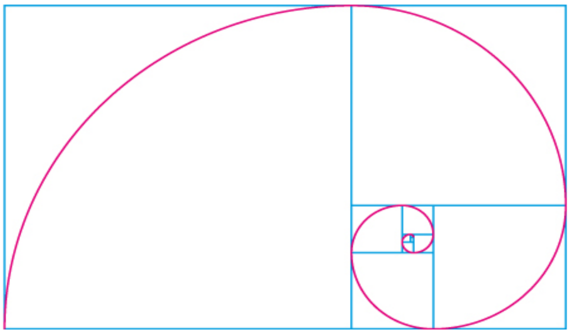

Figura 23 – Espiral Logarítmica e Retângulos Áureos.
Fonte: http://www.tuxresources.org/blog/?p=468

Também é possível, obter uma espiral logarítmica, a partir de um Triângulo Áureo. Começando de um Triângulo Áureo, e bissecando um ângulo da base, iremos gerar uma série de triângulos rodopiantes. Ligando os vértices de um Triângulo Áureo, progressivamente, obteremos uma Espiral Logarítmica.

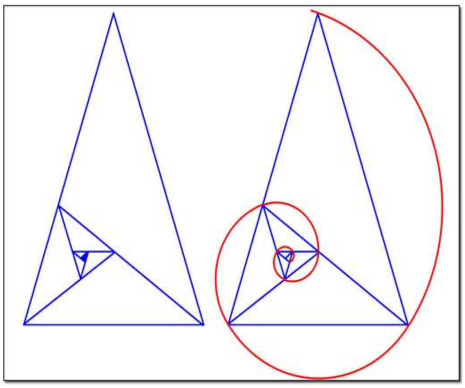

Figura 24 – Espiral e Triângulos Áureos.
Fonte: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm

A Espiral Logarítmica, também é conhecida como a Espiral Equiangular. Nome dado pelo matemático e filósofo Francês em 1638, René Descartes (1596 – 1650), em cuja homenagem, batizou os números usados para localizar um ponto no plano (com respeito aos eixos) – Coordenadas cartesianas.

O nome “Equiangular” reflete outra propriedade única da Espiral Logarítmica. Se desenharmos uma linha reta, do pólo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo.

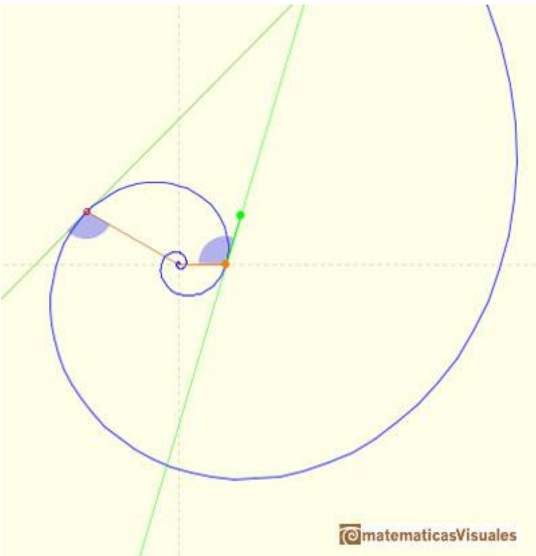

Figura 25 – Espiral Equiangular.
Fonte: http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/espirales/espiralequi.html

Os falcões usam uma propriedade muito próxima a esta, quando atacam as presas.

Devido a propriedade Equiangular da espiral, esse caminho lhes permite manter seu alvo à vista enquanto maximiza a sua velocidade.

Figura 26 – Vôo do Falcão.
Fonte: http://fotos.fot.br/page_img/18444/falcao

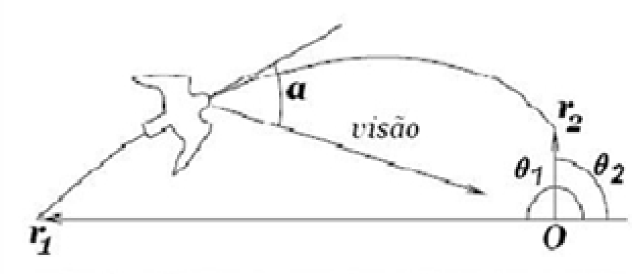

Figura 27 – Esquema de voo do Falcão.
Fonte: http://matheusmathica.blogspot.com.br/2012/05/o-voo-do-falcao-peregrino.html

Depois de fatos interessantes de fenômenos que envolvem as espirais semelhantes à Espiral Logarítmica, veremos as propriedades matemáticas que a envolvem.

Para cada ângulo θ, marque o ponto P sobre a semirreta que passa por A e faz ângulo θ com o eixo-x, de tal forma que a distância r de P a A seja igual $a : r = a.e^{b.\theta}$. Sendo que, a e b são constantes não negativas (Figura 41).

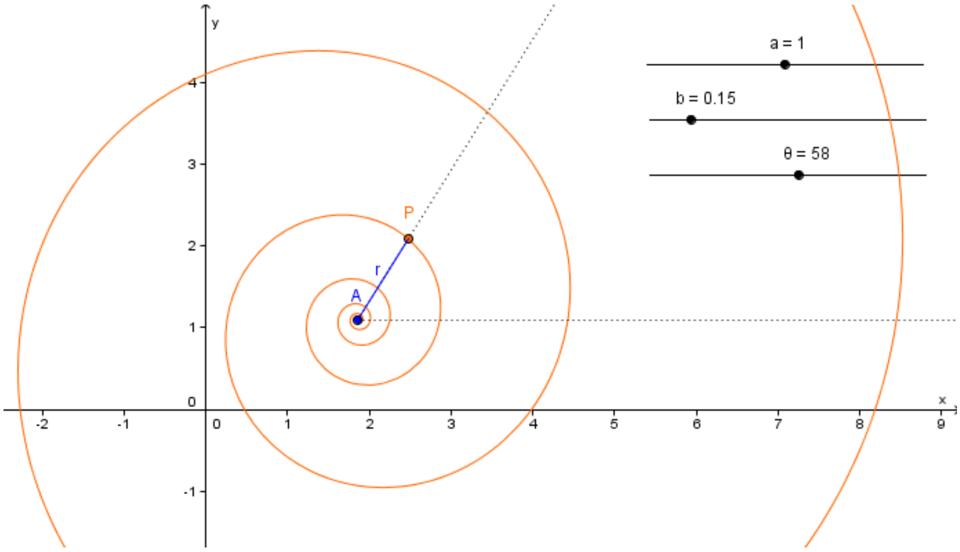

Figura 28 – Esquema matemático da Espiral Logarítmica.
Fonte: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html

Definição 4 (Espiral logarítmica): *O lugar geométrico do ponto P quando θ varia no conjunto dos números reais é denominado Espiral Logarítmica plana de centro no ponto A, fator de escala a e fator de crescimento b.*

Definição 5 (Espirais Áureas): *Uma Espiral Áurea (também conhecida como Espiral Dourada), é uma Espiral Logarítmica, com um valor específico para o fator de crescimento b:* $b = \frac{\ln \Phi}{90°}$ *(se* θ *é medido em graus) e* $b = \frac{\ln \Phi}{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\ln \Phi}{\pi}$ *(se* θ *é medido em radianos).*Onde Φ representa o Número de Ouro.

Reforçamos o fato, de que toda Espiral Áurea é uma Espiral Logarítmica, mas nem toda Espiral Logarítmica é uma Espiral Áurea.

Maiores informações e uso de software on-line para melhor compreensão pode ser encontrado no site: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] HEFEZ, ABRAMO *Elementos de Aritmética,* 2ª. Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2011.

[2] HUNTLEY, H. E. *A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza da Matemática*, Tradução de Luiz Carlos Ascênsio Nunes, Brasília, Universidade de Brasília,1985.

[3] Iezzi, Gelson e outros. *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 9, São Paulo, Atual Editora Ltda, 1985.

[4] Instituto de matemática e da Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html >. Acesso em 03/03/2013.

[5] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[6] LIMA, E.L. Curso de Análise – vol. 1, Rio de Janeiro, IMPA.

[7] LIVIO, M. *Razão Áurea “A História de Fi”,* 5ª edição. Rio de Janeiro, Ed. Record, 2011.

[8] O Baricentro da mente. Disponível em : <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/08/construcao-de-um-pentagono-regular-com_28.html>. Acessso em: 09/02/2013.

[9] OLIVEIRA, K. I. M; FERNÁNDEZ, A.J. C. *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções*, Rio de janeiro, SBM, 2010.

[10] Sercomtel. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm>. Acesso em: 27/01/2013.

[11] Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html#part4>. Acesso em: 19/01/2013.