ANTONIO MARCOS NUNES OLIVEIRA

IRRACIONAIS E FRAÇÕES CONTÍNUAS NO ENSINO MÉDIO

Londrina
2013

ANTONIO MARCOS NUNES OLIVEIRA

IRRACIONAIS E FRAÇÕES CONTÍNUAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

O48i Oliveira, Antonio Marcos Nunes.
Irracionais e frações contínuas no ensino médio / Antonio Marcos Nunes Oliveira. – Londrina, 2013.
81 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática (Ensino médio) – Teses. 3. Números irracionais – Teses. 4. Frações contínuas – Teses. 5. Sequências (Matemática) – Teses. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

ANTONIO MARCOS NUNES OLIVEIRA

IRRACIONAIS E FRAÇÕES CONTÍNUAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. André Luiz Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 09 de Agosto de 2013.

Dedico esse trabalho a minha esposa Amanda, por ser a principal incentivadora na realização do mesmo e também pela sua paciência, companheirismo e amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço essencialmente a Deus, por oportunizar o dom da vida e oferecer condições da realização do mesmo, creio isto, pela fé.

Agradeço aos meus Pais, por me incentivarem a estudar, trabalhar e se desenvolver como pessoa.

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Túlio Carvalho não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela paciência, momentos de reflexão, amizade e fundamentalmente pelo meu crescimento matemático.

Aos colegas que conviveram este dois anos com lutas constantes para o aprendizado e por melhorias em nossas carreiras profissionais.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas Matemáticos para resolver?”

Cauchy

RESUMO

Nesta dissertação, apresenta-se um estudo sobre os números irracionais e a teoria das frações contínuas, com possibilidades de aplicação ao Ensino Médio, ao mesmo tempo demonstrando algumas de suas propriedades e revisando um pouco da sua história. A propriedade de ser a melhor aproximação de um número para um dado denominador faz dos convergentes de uma fração contínua um tópico interessante para conduzir a ideia de aproximação na educação básica. Pretende-se com esse trabalho oferecer uma visão de números irracionais no Ensino Médito, propiciando uma alternativa à de expansões decimais não-periódicas, com intuito de preencher uma lacuna no entendimento da distinção entre números racionais e irracionais.

Palavras Chave: Frações Contínuas, Algoritmo de Euclides, Números Irracionais, Sequências numéricas, Aproximações e Aplicações.

Abstract

This dissertation presents a study of irrational numbers with the theory of continued fractions, with possibilities of application in high school, demonstrating some of its properties and revising part of its history. The property of being the best approximation of a number of a given denominator that the convergents of a continued fraction have allows for an interesting way to conduct the idea of approximation in basic education. The intention of this work is to provide a vision of irrational numbers for high-school teaching, providing an alternative to the non-periodic decimal expansions, in order to fill a gap in the understanding of distinction between rational and irrational numbers.

Keywords: Continued Fractions, Euclidean algorithm, irrational numbers, numerical sequences, approximations and applications.

SIGLAS

Unicamp – Universidade de Campinas.
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

O objetivo dessa dissertação é elaborar uma abordagem do tema de frações contínuas no Ensino Médio. A justificativa para este tema é a constatação de que, para se falar de números irracionais, tem-se que primeiramente introduzir o conjunto dos números reais, o que se constitui em uma lacuna na forma construtiva dos conjuntos numéricos.

Além disto, as frações contínuas têm possibilidades de aplicações em aproximações de números. Faz-se uma introdução teórica ao lado de certos problemas que podem ser usados diretamente para uso em sala de aula.

Embora este tópico possa ser tratado de forma mais extensa, o principal conceito de irracionalidade é compreensível a partir de uma extensão do Algoritmo de Divisão de Euclides.

Esta dissertação está organizada do seguinte modo. O segundo Capítulo trata de aspectos históricos, seus principais personagens, a crise dos números irracionais e sua estreita relação com frações contínuas, o Algoritmo de Euclides, e o desenvolvimento das frações contínuas particularmente na época de Euler. O terceiro Capítulo traz a teoria necessária para justificar o uso de frações contínuas no Ensino Médio. Pode-se encontrar uma pequena introdução sobre conjuntos numéricos, representações decimais finitas, infinitas e algumas proposições. Também serão apresentados alguns exemplos de números irracionais e demonstrações por absurdo, donde se pode enfatizar a lacuna que existe na passagem dos números racionais para irracionais. Ainda neste capítulo, é dada a definição do que é uma fração contínua seguindo Tengan et al (2003), apresentando alguns exemplos de números racionais e irracionais escritos como frações contínuas. Finalizando-o, são estudados os convergentes de frações contínuas e alguns teoremas que mostrarão como estas fornecem boas aproximações racionais, em certo sentido “as melhores”. O quarto capítulo apresenta situações-problemas que podem ser resolvidas através da aplicação de frações contínuas, buscando interdisciplinaridade como o objeto motivador para o assunto ser trabalho no Ensino Médio e ainda o preenchimento da lacuna existente na passagem dos números racionais para irracionais usando boas aproximações racionais para os números reais. O quinto capítulo traz as conclusões deste trabalho.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

A necessidade de frações surge com a operação de divisão de inteiros. Historicamente os números racionais (números que podem ser escritos como quociente entre dois inteiros, sendo o denominador diferente de zero) foram descobertos por Pitágoras de Samos e seus discípulos como o quociente de dois inteiros não nulos, sendo suficiente para propósitos práticos envolvendo medições.

A concepção de números irracionais pode ser explanada a partir da visualização da reta de números reais (EVES, 2007). Sobre uma reta, tomam-se dois pontos distintos O e I, estando I à direita de O e considera-se o segmento de reta OI como unidade de comprimento. Convenciona-se que os pontos O e I representam os números 0 e 1 respectivamente. Desse modo os inteiros podem ser representados por um conjunto de pontos da reta espaçados a intervalos unitários, os negativos à esquerda de O e os positivos à sua direita. As frações de denominador b não nulo podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em b partes. Dessa forma, para cada racional, há um ponto na reta. Inicialmente, parecia que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira, entretanto descobriu-se que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional.

Tal descoberta marca um momento de perplexidade para a chamada Escola Pitagórica. Provou-se que não existe número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que OP é congruente à diagonal de um quadrado de lado unitário. Naquele momento tais números foram chamados de irracionais, ou ilógicos, no termo original em grego. Essa descoberta determina um grande marco da história da Matemática.

Os primeiros indícios relacionados ao conceito de número irracional remontam ao conceito de incomensurabilidade. Dois segmentos de medida x e y são ditos comensuráveis se existe um segmento de comprimento a tal que $x = n.a$ e $y = m.a$, com n e m naturais.

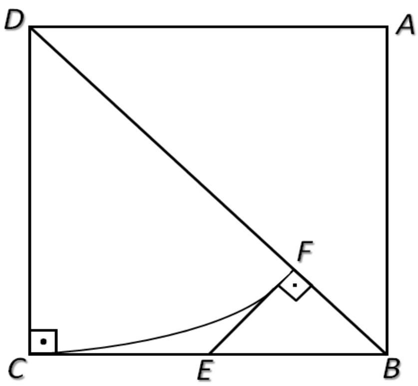
A descoberta de um número irracional é atribuída a Hipaso de Metaponto, membro da Escola Pitagórica. A descoberta, ou a divulgação desta aos membros externos à Escola, teria rendido a Hipaso de Metaponto a expulsão da escola (ou mesmo sua morte por afogamento no mar). Isto porque os argumentos de semelhança usados nas demonstrações dos Pitagóricos assumiam, como nos livros didáticos de hoje, que os segmentos são comensuráveis, e consequentemente não são suficientemente gerais.

Reconhece-se a dificuldade em definir um número irracional. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, Brasil, 1998): um irracional é um número cuja expansão decimal é infinita e não periódica (de fato, que não seja periódica a partir de certo dígito da expansão). Como conduzir esta ideia, que não pode ser verificada ou visualizada com um número finito de dígitos, para alunos do Ensino Médio?

As frações contínuas constituem um objeto eficaz para diferenciar os números irracionais dos racionais, pois qualquer número racional tem uma expansão em frações contínuas finita.

As frações contínuas foram estudadas com maior ênfase dos séculos XVII a XIX. Nos dias de hoje ainda são objeto de estudos em várias áreas da Matemática, principalmente em Teoria de Números.

A demonstração geométrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$, atribuída a Hipaso de Metaponto, guarda relação com as frações contínuas (Khrushchev, 2008).



Na figura, BD é diagonal de um quadrado de lado $\overline{BC} = \overline{CD}$. Tem-se também que $\overline{DF} < \overline{BD}$ e assim $DF = CD = x$. Sejam $y = BD$ e $r = \frac{y}{x}$. Observe que EF e EC são congruentes, por serem ambos tangentes à circunferência de centro em D. Ademais EF é perpendicular a BD, e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, tem-se $FEB = FBE = 45^\circ$. Portanto, a semelhança dos triângulos ΔBCD e ΔBFE fornece:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

$$\overline{BD} = \overline{DF} + \overline{FB}$$

$$y = x + \overline{FB}$$

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{\overline{FB}}{x}$$

$$x = \overline{CB} = \overline{CE} + \overline{EB} = \overline{FB} + \overline{EB}$$

$$\frac{x}{\overline{\overline{FB}}} = 1 + \frac{\overline{EB}}{\overline{\overline{FB}}} = 1 + \frac{y}{x}$$

Como

$$\frac{x}{\overline{\overline{FB}}} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + r \quad \text{e} \quad \frac{y}{x} = 1 + \frac{\overline{FB}}{x},$$

Obtém-se a recorrência:

$$r = 1 + \frac{1}{1+r}$$

$$r = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+r}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+r}}$$

$$r = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+r}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+r}}}.$$

Portanto

$$r = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}.$$

Esta expressão será também indicada por $r = [1; 2,2,2,\dots]$, uma fração contínua.

O Algoritmo de Euclides, processo para encontrar o máximo divisor comum entre dois inteiros positivos, indica como se pode deduzir a fração contínua de um número racional. Dados $x_0 > x_1$ inteiros positivos, pode-se gerar uma sequência decrescente de números naturais:

$$x_0 = b_0 x_1 + x_2$$

$$x_1 = b_1 x_2 + x_3$$

$$\dots$$

$$x_{n-1} = b_{n-1} x_n$$

Portanto

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = b_{k-1} + \cfrac{1}{\cfrac{x_k}{x_{k+1}}}, \; k = 1,2,\dots,n-1$$

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

Os quocientes b_k são assim usados na notação de fração contínua:

$$\frac{x_0}{x_1} = [b_0; b_1, ..., b_n].$$

Os estudos sobre frações contínuas teve início com exemplos específicos. Existem registros (Moore, 1964) do seu uso pelo matemático indiano Aryabhata (476-550) para resolver equações Diofantinas Lineares.

Rafael Bombelli (1526-1572) e Pietro Cataldi (1548-1626), bolonheses, também contribuíram nesse campo. Bombelli escreveu uma aproximação para a raiz quadrada de 13 como uma fração contínua dada por $\sqrt{13} \cong 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}$, que é um caso especial da aproximação.

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}}}.$$

Este tipo de expressão será chamado fração contínua generalizada, definida no capítulo II.

No século XVI já se conhecia a aproximação

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}}}$$

De tal modo que Cataldi fez o mesmo para a raiz quadrada de 18:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{\ddots}}}}.$$

O estudo das frações contínuas ganhou força com o trabalho de John Wallis (1616-1703). Wallis ainda foi perito em criptografia, tendo decodificado mensagens durante a Guerra Civil. Foi um membro fundador da Royal Society e contribuiu nas origens do Cálculo.

Em seu livro "Arithmetica Infinitorum" (1655), desenvolveu e apresentou a identidade:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3x3x5x5x7x7x9x...}{2x4x4x6x6x8x9x...}.$$

O primeiro presidente da Royal Society of London, Lord Brouncker (1620-1684), transformou esta identidade em.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}.$$

Essa descoberta foi fundamental na história de $\pi = 3{,}14159...$. Embora Brouncker não tenha dado ênfase ao conceito de fração contínua, Wallis tomou a iniciativa e introduziu as primeiras etapas para generalizar essa teoria.

No livro "Opera Mathematica" (1695), Wallis escreveu alguns dos fundamentos básicos das frações contínuas e ainda explicou como calcular o $n-ésimo$ convergente, descobrindo algumas de suas propriedades. Veja:

$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$, $c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$, ..., $c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n}$, onde c_n é o $n-ésimo$ convergente. Foi também nesta obra que o termo "fração contínua" foi usado pela primeira vez.

O matemático e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695) foi pioneiro em demonstrar uma aplicação prática de frações contínuas. Escreveu um artigo mostrando como usar os convergentes de uma fração contínua para obter as melhores aproximações racionais para as relações entre engrenagens. Tais aproximações permitiram escolher engrenagens com o número correto de dentes.

Embora Wallis e Huygens trabalhassem com frações contínuas, essa área de pesquisa só começou a ganhar grandes contornos quando Leonard Euler (1707-1783), Johan Heinrich Lambert (1728-1777) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813) abraçaram o tópico.

Grande parte da teoria moderna foi desenvolvida por Euler em 1737, com o trabalho "De Fractionibus Continuus", publicado em 1744 e traduzido do latim para o inglês em 1985. No artigo, ele prova que qualquer número racional pode ser escrito em fração contínua finita, e ainda apresentou uma expressão de fração contínua para e, que por ser infinita, constitui-se em uma prova de sua irracionalidade:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}.$$

Com esta identidade conseguiu mostrar que e e e^2 são irracionais. Demonstrou, também, como representar uma série como fração contínua, e vice-versa.

Lagrange, por sua vez, usou frações contínuas para obter o valor de raízes irracionais. Provou também que os números quadráticos irracionais são dados por uma fração contínua pré-periódica, isto é, tal que a sequência de quocientes (b_k) é periódica a partir de um índice suficientemente grande.

Segundo Brezinski, o desenvolvimento das frações contínuas encontrou sua época dourada no século XIX: "o século dezenove pode ser considerado o período popular das frações contínuas". Foi uma época de extraordinária empatia, tanto que se diz “o assunto era conhecido por todos os matemáticos". Como consequência, houve uma explosão no crescimento desta área. A teoria de frações contínuas foi desenvolvida significativamente, com ênfase nos convergentes. No mesmo período também foram estudadas as frações contínuas com variáveis complexas como termos. No princípio do século XX, a teoria tinha avançado muito além do trabalho inicial de Wallis.

Desde então, o uso das frações contínuas tem aparecido em outros campos. Para expressar sua aplicabilidade, uma publicação recente de Robert M. Corless examinou a conexão entre frações contínuas e a teoria do caos. No Brasil, Díaz e Jorge (2007) escreveram um trabalho no qual apresentam uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via frações contínuas.

3. INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

O tratamento que será exposto neste capítulo é introdutório, com o objetivo de tornar essa teoria acessível ao professor do Ensino Médio. Para o ensino, esse tópico tem como objetivo cobrir a lacuna que existe entre números racionais e irracionais. Percebe-se que há uma ordem nos livros didáticos na construção dos conjuntos numéricos na Educação Básica, de menor para maior complexidade. Nota-se que a apresentação dos mesmos traz os números naturais, inteiros, racionais e..., números reais e por fim os irracionais.

Tal fato ocorre devido à dificuldade de definir um número irracional. Essa lacuna pode ser preenchida com o estudo de frações contínuas. Este trabalho busca uma maneira eficiente e simples para encarar tal problema.

Pode-se escrever um número real de diversas maneiras. Para citar alguns exemplos, se ele for racional pode-se escrevê-lo como razão de inteiros. Por outro lado, se ele for solução de uma equação polinomial de grau até 4 pode-se escrevê-lo em termos de radicais.

Na Antiguidade, Arquimedes, muito antes de serem descobertas as frações contínuas, encontrou uma boa aproximação para o número π em uma fração. Arquimedes fez o uso de polígonos de 96 lados, inscritos e circunscritos numa circunferência com intuito de calcular o comprimento da mesma e obteve com aproximação de π.

Matematicamente, uma expressão aproximada de um número real, sob a forma de fração com um dado denominador, significa determinar qual de todas as frações com este denominador está mais próxima do número dado.

A construção dos conjuntos numéricos pode ser explanada usando-se o fechamento dos mesmos em relação às operações elementares da aritmética. Diz-se que um conjunto numérico A é fechado em relação a uma operação binária $*$ quando, dados $x, y \in A$ tem-se $x * y \in A$.

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é introduzido em problemas de contagem. Verifica-se que dois naturais quaisquer podem ser somados e multiplicados, tendo como resultado um natural, mas nem sempre pode ser feita a operação de subtração. Seguindo esta corrente de pensamento constitui-se o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), acrescentando-se o zero e os opostos de cada número natural a $\mathbb{N}$. Para obter-se um conjunto fechado em relação à divisão, partindo-se dos inteiros, introduz-se o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

Números racionais são números que podem ser escritos como quociente de dois inteiros, ou seja,

$$\mathbb{Q} = \{x \,/\, x = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

Como exemplo tem-se: $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}, \frac{8}{2}, \frac{0}{7}, \ldots$.

Note que números inteiros podem ser escritos como quociente entre dois inteiros com denominador um (e $1 \neq 0$), portanto temos as inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

3.1. REPRESENTAÇÕES DECIMAIS FINITAS E INFINITAS

O sistema numérico decimal é um sistema de representação posicional que utiliza o conjunto de algarismos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Para representar os números inteiros positivos, os algarismos são obtidos a partir do algoritmo de divisão de Euclides, efetuando-se divisões recursivas por 10. Por exemplo, o número 2319 deixa resto 9 na divisão por 10 e quociente 231. Assim, 9 é o algarismo da unidade. Prosseguindo a divisão por 10 no quociente resultante, tem-se 1 na posição da dezena, 3 na posição da centena e 2 na posição do milhar. Escreve-se

$$2319 = 2x10^3 + 3x10^2 + 1x10^1 + 9x10^0 .$$

Para um número racional que tenha uma parte fracionária, isto é, $q = n + x$, com $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, a representação decimal utiliza-se do mesmo algoritmo para a parte inteira, acrescentando-se um sinal para os números negativos. Para a parte fracionária, os algarismos são obtidos multiplicando-se recursivamente por 10, e observando-se (ou anotando-se) a parte inteira obtida. Esse procedimento está codificado na chamada divisão continuada, como nos exemplos:

1) $\frac{1}{2} = 5.10^{-1} = 0,5$

2) $\frac{12}{10} = 1.10^{0} + 2.10^{-1} = 1,2$

3) $\frac{2}{3} = 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + 6.10^{-3} + 6.10^{-4} + \ldots = 0,666\ldots$

4) $\frac{22}{7} = 3.10^0 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 2.10^{-3} + 8.10^{-4} + 5.10^{-5} + 7.10^{-6} \ldots =$ 3,14285... .

Observa-se que as representações decimais podem ser finitas ou infinitas. O papel que a base 10 tem na distinção entre elas pode ser uma razão de fundo da dificuldade de distinguir os números irracionais dos racionais através da representação decimal. Entre os números que se escrevem como razão de inteiros, chamamos uma fração irredutível um número racional $\frac{a}{b}$ tal que a e b são primos entre si.

Proposição. Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

Demonstração (Niven, 2012):

Se $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita, então existem inteiros n, $k \geq 0$ tais que

$$\frac{a}{b} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_{-1}.10^{-1} + \ldots a_{-k}.10^{-k}.$$

O mínimo múltiplo comum do lado direito da equação é 10^k, donde $a.10^k = b.t$, em que $t = a_n.10^{n+k} + \ldots a_{-k}.10^0$ é inteiro. De $mdc(a,b) = 1$, conclui-se que $b \mid 10^k$. Portanto, os fatores primos de b não podem ser diferentes de 2 e 5.

Reciprocamente, se $b = 2^k.5^l$, denomine n como o maior entre k e l. Assim $\frac{a}{b} = \frac{a.2^{n-k}.5^{n-l}}{10^n}$, que resulta numa expansão decimal finita.

■

Deve ficar claro que b não precisa, necessariamente, ter os fatores primos 2 e 5; pode ser que tenha apenas um deles como fator primo, ou nenhum. Em

$\frac{1}{25} = 0{,}04$, $\frac{1}{16} = 0{,}0625$, $\frac{7}{1} = 7{,}0$, os valores de b são 25, 16 e 1. O importante é que b não tenha nenhum outro fator primo além de 2 e 5. Para exemplificar como se obtém a potência de 10 necessária para se obter a expansão decimal de um número, considere o exemplo

$$\frac{9741}{3200} = \frac{9741}{2^7.5^2} = \frac{9741.5^5}{10^7} = \frac{30440625}{10000000}.$$

Quando a representação decimal de $\frac{a}{b}$ não é finita, mostraremos que ela é pré-periódica, isto é, a partir de certo dígito k, ocorre à repetição de um bloco de p dígitos:

$$\frac{a}{b} = n,d_1d_2...d_kd_{k+1}...d_{k+p}\overline{d_{k+1}...d_{k+p}}.$$

Estas expansões decimais são denominadas, dízimas periódicas compostas. Como k pode ser tão grande quanto se queira, o tamanho do bloco que não se repete pode ser maior do que, por exemplo, o visor da calculadora pode mostrar. Assim, é natural e esperado que alguns estudantes pensem que o resultado de $\frac{1}{7}$ seja "irracional", baseados na expansão decimal.

Proposição. Todo número racional pode ser representado por uma expansão decimal finita ou por uma expansão decimal infinita pré-periódica. Reciprocamente, uma expansão decimal finita ou infinita e pré-periódica é um número racional $\frac{a}{b}$, com $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Demonstração: (LIMA, 1991) Suponha que $x = n,a_1\ldots a_r\overline{b_1b_2\ldots b_s}$, em que $n \in \mathbb{Z}$ e a_i, $b_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ Então:

$$10^r.x = 10^r.n + a_1a_2\ldots a_r,\overline{b_1b_2\ldots b_s}$$

$$10^r.10^s.x = 10^{r+s}.n + a_1a_2\ldots a_rb_1b_2\ldots b_s,\overline{b_1b_2\ldots b_s}\,.$$

Subtraindo a primeira da segunda equação, obtemos um número inteiro:

$$10^r.x.\left(10^s - 1\right) = 10^r.n.\left(10^s - 1\right) + a_1a_2\ldots a_rb_1b_2\ldots b_s - a_1a_2\ldots a_r$$

$$\Rightarrow x = n + \frac{a_1a_2\ldots a_rb_1b_2\ldots b_s - a_1a_2\ldots a_r}{10^r.\left(10^s - 1\right)}\,,$$

o que mostra que $x \in \mathbb{Q}$.

A prova da recíproca dá uma pista de como obter, a partir de uma fração ordinária, sua expansão decimal. Sem perda de generalidade, suponha que $x = \frac{p}{q}$, com $mdc\left(p,q\right) = 1,\ 0 < p < q$.

A decomposição de q em fatores primos pode ter os fatores 2 e 5, além de outros fatores primos com 10. Se $q = 2^j5^kq^l, mdc\left(q^l,10\right) = 1$, define-se r como a maior das potências j e k. Agora qualquer número coprimo com 10 tem um múltiplo da forma $999\ldots9 = 10^s - 1$. Isto ocorre porque há infinitos números com apenas 9's em sua expansão decimal, portanto os restos da divisão destes números por q^l necessariamente se repetem. Se $10^{s_1} - 1$ e $10^{s_2} - 1$ deixam o mesmo resto na divisão por q^l, então $10^{s_2} - 10^{s_1} = kq^l$. O número do membro direito é da forma

$99\ldots900\ldots0 = 99\ldots9\times10^n$. E como q^l e 10 são coprimos, $q^l \mid 99\ldots9$. Em resumo, $\frac{p}{q} = \frac{p.2^{r-l}.5^{r-k}.j}{10^r.\left(10^s-1\right)}$, para algum $j \in \mathbb{N}$, o que encerra a demonstração.

■

Uma aplicação interessante de progressões geométricas pode ser feita a partir do argumento acima. O problema de determinar o bloco periódico de uma dízima é o mesmo que determinar o expoente s, ou o menor número de noves tal que o denominador de uma fração ordinária o divida.

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{10-1} = 4.\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 0{,}4.\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}\ldots\right) = 0{,}444\ldots.$$

$$\frac{5}{22} = \frac{5.5.9}{990} = \frac{225}{10\left(100-1\right)} = \frac{225}{10}.\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right) = \frac{2}{10}+27.\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right).$$

Não se trata, portanto, de uma questão ordinária saber qual o período de uma fração como $\frac{5}{23}$. Desse modo, pode-se encerrar esta pequena fala sobre os números racionais notando que eles são fechados em relação às quatro operações fundamentais da aritmética. Por outro lado, não é verdade que se o produto de dois números dados é racional, então os números dados são racionais.

3.2. ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Um primeiro exemplo, que será bastante usado, é o da solução da equação $x^2 = 2$. Admitindo que existam p, $q \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, toma-se o par p, $q \in \mathbb{N}$ com

$p+q$ mínimo. Da equação, deduz-se $p>q$ e $p<2q$. Considere o par $2q-p$, $p-q$, cuja soma é $q<p+q$. A conta abaixo mostra a contradição:

$$\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 = \left(\frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}\right)^2 = \frac{4-\frac{4p}{q}+\frac{p^2}{q^2}}{\frac{p^2}{q^2}-\frac{2p}{q}+1} = 2.$$

■

Um modo de introduzir números irracionais consiste em mostrar que o mesmo não pode ser um número racional. Acima, mostrou-se que a solução de $x^2 = 2$ não pode ser escrita como razão de inteiros. Com isto, conclui-se que a representação decimal de tal número é infinita e não é periódica, mesmo não a conhecendo. Outros exemplos evidenciam o padrão da prova por absurdo na caracterização dos irracionais.

1. Mostre que $\log(2)$ é irracional.

Demonstração:

Se $\log(2) = \frac{a}{b}$, onde a e b são naturais e ainda $mdc(a,b) = 1$. Como $\log(2) > 0$, segue que:

$$\log(2) = \frac{a}{b}$$

$$10^{\frac{a}{b}} = 2$$

$$\left(10^{\frac{a}{b}}\right)^b = 2^b$$

$$10^a = 2^b$$

$$2^a.5^a = 2^b.$$

Como a e b são naturais segue que 2^a, 5^a e 2^b são naturais, desse modo à igualdade $2^a.5^a = 2^b$ não pode ser verdadeira, pois pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo natural diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos pela ordem dos fatores, logo $\log(2)$ é irracional.

■

2. Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.

Para mostrar que $\sqrt{3}$ se faz necessário entender outro teorema que será descrito a seguir e demonstrado.

Teorema: O quadrado de um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 3.

Demonstração:

Considere um inteiro n. Quando dividido por 3, deixa resto 0, 1 ou 2. Assim

$n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3\left(3k^2\right)$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\left(3k^2 + 2k\right) + 1$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) + 1.$$

Analisando-se os três casos, conclui-se que, reciprocamente, o quadrado de um número inteiro é divisível por 3 somente se o inteiro em si for divisível por 3.

■

Com o resultado descrito acima se pode então provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

Desse fato decorre que $\sqrt{3}$ é irracional. Negando a tese, suponha que $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ com a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$. Então, elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ têm-se:

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 3b^2$$

Logo a^2 é divisível por 3 e consequentemente a é divisível por 3, assim $a = 3m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, desse modo:

$$a^2 = 3b^2$$

$$(3m)^2 = 3b^2$$

$$9m^2 = 3b^2$$

Analogamente b^2 é divisível por 3 e consequentemente b é divisível por 3. Dessa forma $mdc(a,b) \neq 1$, o que contraria a hipótese. Portanto $\sqrt{3}$ não pode ser escrito como quociente entre dois inteiros e assim $\sqrt{3}$ é irracional.

■

Nota-se que a prova de que um número é irracional é usualmente feita por redução ao absurdo, indicando que se usa o fato de admitir que o número em questão seja racional. Esta característica que motivou este estudo, que visa apresentar uma nova proposta de enfrentamento didático para tal situação.

3.2. PEQUENA TEORIA

Definimos agora o que é uma fração contínua seguindo TENGAN ET AL (2003). Denota-se por $\lfloor u \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a u. O símbolo $:=$ significa "igual por definição".

Definição: Dado um número x, seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, ponha $\alpha_1 = \dfrac{1}{x - a_0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considera-se a sequência de números naturais (a_n) definida recursivamente através da relação $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$. Se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$ então $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$.

i) Se para algum $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a_n$ tem-se

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} := \left[a_0; a_1, \ldots, a_n\right].$$

ii) Caso contrário

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}} := \left[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots\right].$$

A partir desta definição, observe que, em geral,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

De fato, $x = \alpha_0$, e $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n} \Rightarrow \alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$. Portanto, temos o passo indutivo:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}}$$

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}}.$$

Introduz-se a notação $x = \left[a_0; a_{1,} \ldots, a_n, \alpha_{n+1}\right]$ para a última igualdade, sendo que α_{n+1} pode ser racional ou irracional. Se x é racional, o processo de expansão em fração contínua para em algum índice n, fato que primeiramente convém ser exemplificado.

Exemplo 1:

Considere o algoritmo de Euclides para a determinação do mdc de dois números inteiros. Sejam 64 e 36 estes números.

Deste modo tem-se:

$$\begin{aligned} 64 &= 36.1 + 28 \\ 36 &= 28.1 + 8 \\ 28 &= 8.3 + 4 \\ 8 &= 4.2 + 0 \end{aligned}$$

Logo $mdc(64,36) = 4$.

O algoritmo de Euclides possibilita visualizar a fração $\frac{64}{36}$ da seguinte maneira:

$$\frac{64}{36} = 1 + \frac{28}{36} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{36}{28}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{8}{28}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{8}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{8}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{4}}}},$$

mas

$\frac{8}{4} = 2$ e assim $\frac{64}{36} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$.

Tal processo mostra uma maneira diferente de representar números racionais. Pode-se afirmar que $\frac{64}{36} = [1;1,3,2]$.

Exemplo 2:

Considerando agora $\frac{25}{7}$,

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{4}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}},$$

Desse modo

$$\frac{25}{7} = [3;1,1,3].$$

De modo geral, considere os inteiros a e b com $b \neq 0$. A divisão euclidiana fornece a igualdade $a = a_0 b + r_1$, com $0 < r_1 < b$, assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0 b + r_1}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}}.$$

Agora, a partir de b e r_1, obtém-se, a_2 e r_2 tais que $b = a_2.r_1 + r_2$, logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1.b}{b} + \frac{r_1}{b} = a_1 + \frac{r_1}{b} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2.r_1 + r_2}{r_1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}.$$

Os números a_i são denominados quocientes parciais e $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n \geq 0$ representa sua fração contínua.

No processo de divisões sucessivas, apenas o primeiro quociente pode ser positivo, negativo ou zero.

1. Se $a > b$ o primeiro quociente parcial da fração contínua é positivo.
2. Se $0 < a < b$ o primeiro quociente parcial da fração contínua é zero.
3. Se a for negativo, o primeiro quociente da fração contínua é negativo.

Exemplo 3:

1) $-\dfrac{40}{13} = -4 + \dfrac{12}{13} = -4 + \dfrac{1}{\frac{13}{12}} = -4 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{12}} = [-4; 1, 12]$.

2) $\dfrac{17}{31} = 0 + \dfrac{1}{\frac{31}{17}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{14}{17}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{14}}} = 0 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{14}}} =$

$$0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{14}{3}}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{2}{3}}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} =$$

$[0; 1, 1, 4, 1, 2]$.

Com os exemplos anteriores segue o teorema.

Teorema: Todo número racional pode ser representado de até duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita e toda fração contínua finita representa um número racional.

Demonstração:

O segundo fato decorre de que o conjunto dos racionais é um corpo. Sejam os inteiros p e q com $q > 0$ tais que $p = a_0 q + r_1$, $0 \le r_1 < q$. O inteiro a_0 é o quociente, e r_1 o resto da divisão de p por q. Portanto, vale a seguinte expressão para o racional $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1.q}{q} + \frac{r_1}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}.$$

Se $r_1 > 0$, pode-se então dividir q por r_1, logo $q = a_1 r_1 + r_2$, com $0 \leq r_2 < r_1$. Deste modo inverte-se o denominador e se obtém:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Tal processo pode ser continuado, e se encerrará quando o resto, digamos r_n, for igual a zero. Isto fatalmente ocorrerá, porque a sequência de restos é uma sequência de inteiros não negativos, estritamente decrescentes.

Numa representação de uma fração contínua de um número racional, quando o último quociente a_n for maior que 1 pode-se substituí-lo por $(a_n - 1) + \frac{1}{1}$, por isto a duplicidade de representações possíveis em fração contínua para um número racional.

■

Como exemplo, considere $[1;2,1,2]$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}.$$

A representação acima pode assumir outra forma:

$$[1;2,1,2] = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = [1;2,1,1,1].$$

O teorema sugere imediatamente a definição de número irracional como aquele cuja fração contínua é **infinita** (sem ressalvas sobre periodicidade).

Exemplo 4:

$\sqrt{2}$ é irracional.

Tem-se que $\sqrt{2} > 1$, desse modo:

$\sqrt{2} = 1+k$

$k = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Utilizando a definição de fração contínua encontra-se que:

$$\sqrt{2} =$$

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{k}} =$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$$

$$1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}=$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}.$$

Logo $\sqrt{2}=[1\,;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$ é um número irracional.

Proposição 2.4. Para $a_1 > a_2 > 1$, defina uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números positivos e uma sequência $(n_k)_{k\geq 1}$ de números inteiros positivos tal que $a_{k+1}^{n_k} < a_k < a_{k+1}^{n_k+1}$ e $a_{k+2} = \dfrac{a_k}{a_{k+1}^{n_k}}$, então

$$\log_{a_1}\left(a_2\right) = \frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\ddots}}}.$$

Demonstração:

Dado $a_1 > a_2 > 1$, como $a_2 > 1$, $\exists n_1 > 0$ tal que, $a_2^{n_1} < a_1 < a_2^{n_1+1}$, ou seja, $n_1 + 1$ é a primeira potência de a_2 que é maior do que a_1.

Suponha construída a sequência $(a_k)_{1 \le k \le p+1}$ e $(n_k)_{1 \le k \le p-1}$, note ainda que se obtém $n_p > 0$ da seguinte forma:

$$a_{p+1} = \frac{a_{p-1}}{a_p^{n_{p-1}}}.$$

Desse modo:

$a_p < a_{p-1}$, $\exists n_p > 0$ tal que

$$a_{p+1}^{n_p} < a_p < a_{p+1}^{n_p+1}$$

Dividindo todos os termos desta desigualdade por $a_{p+1}^{n_p}$ tem-se:

$$\frac{a_{p+1}^{n_p}}{a_{p+1}^{n_p}} < \frac{a_p}{a_{p+1}^{n_p}} < \frac{a_{p+1}^{n_p+1}}{a_{p+1}^{n_p}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < a_{p+2} < a_{p+1}$$

Assim

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_p > ... > 1.$$

Dessa forma, conseguiu-se construir uma sequência, limitada e decrescente $(a_k)_{k \ge 1}$ com $a_k > 1$, $\forall k$ e $(n_k)_{k \ge 1}$ com $n_k \ge 1$, $\forall k$. Vale lembrar que se trata de uma sequência de Cauchy.

Logo $\log_{a_1}(a_2) = m \Leftrightarrow (a_1)^m = a_2$, como $a_1 > a_2$ tem-se $0 < m < 1$ e, portanto $m = 0 + \dfrac{1}{m_1}$.

Assim

$$a_2 = (a_1)^m = (a_1)^{0+\frac{1}{m_1}} = (a_1)^{\frac{1}{m_1}}$$

$$a_1 = (a_2)^{m_1}.$$

Note que

$$(a_2)^{n_1} < a_1 < (a_2)^{n_1+1}$$

$$(a_2)^{n_1} < (a_2)^{m_1} < (a_2)^{n_1+1}$$

$$n_1 < m_1 < n_1 + 1.$$

Tem-se que a parte inteira de m_1 é n_1 e desse modo $m_1 = n_1 + \dfrac{1}{m_2}$.

Assim

$$a_1 = (a_2)^{m_1} = (a_2)^{n_1+\frac{1}{m_2}} = a_2^{n_1}.(a_2)^{\frac{1}{m_2}}$$

$$\frac{a_1}{a_2^{n_1}} = (a_2)^{\frac{1}{m_2}}.$$

Note que

$$\frac{a_1}{a_2^{n_1}} = a_3$$

$$a_3 = (a_2)^{\frac{1}{m_2}}$$

$$a_3^{m_2} = a_2 .$$

Assim

$$(a_3)^{n_2} < a_2 < (a_3)^{n_2+1}$$

$$(a_3)^{n_2} < (a_3)^{m_2} < (a_3)^{n_2+1}$$

$$n_2 < m_2 < n_2 + 1.$$

Tem-se que a parte inteira de m_2 é n_2 e desse modo $m_2 = n_2 + \dfrac{1}{m_3}$.

Continuando o processo tem-se:

Assim

$$a_2 = (a_3)^{m_2} = (a_2)^{n_2 + \frac{1}{m_3}} = a_3^{n_2}.(a_3)^{\frac{1}{m_3}}$$

$$\frac{a_2}{a_3^{n_2}} = (a_3)^{\frac{1}{m_3}} .$$

Note que

$$\frac{a_2}{a_3^{n_2}} = a_4$$

$$a_4 = (a_3)^{\frac{1}{m_3}}$$

$$a_4^{m_3} = a_3 .$$

Assim

$$(a_4)^{n_3} < a_3 < (a_4)^{n_3+1}$$

$$(a_4)^{n_3} < (a_4)^{m_3} < (a_4)^{n_3+1}$$

$$n_3 < m_3 < n_3 + 1.$$

Tem-se que a parte inteira de m_3 é n_3 e desse modo $m_3 = n_3 + \frac{1}{m_4}$. Desse modo

$$\log_{a_1}(a_2) = 0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} .$$

Logo $[0; n_1, n_2, n_3, ...]$ é a expansão em fração continuas desejada. Portanto

$$\log_{a_1}(a_2) = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}} .$$

■

Exemplo 5:

Obter os primeiros quocientes da fração contínua de $\log(2)$.

Seja $\log(2) = x$, assim $10^x = 2$. Note que:

$$10^0 < 2 < 10^1$$

$$10^0 < 10^x < 10^1$$

$$0 < x < 1$$

Assim

$$10^x = 10^{0+\frac{1}{n_1}} = 10^{\frac{1}{n_1}} = 2,$$

Logo $10 = 2^{n_1}$.

Note ainda que

$$2^3 < 10 < 2^4$$

$$2^3 < 2^{n_1} < 2^4$$

$$3 < n_1 < 4.$$

Assim a parte inteira de n_1 é 3 e consequentemente

$$x = 0 + \frac{1}{n_1} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{n_2}}.$$

Continuando o processo, nota-se que:

$$10 = 2^{n_1} = 2^{3+\frac{1}{n_2}} = 2^3.2^{\frac{1}{n_2}}$$

$$\frac{10}{8} = 2^{\frac{1}{n_2}}$$

$$\frac{5}{4} = 2^{\frac{1}{n_2}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{n_2} = 2$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^{n_2} < \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

$$3 < n_2 < 4$$

Logo $n_2 = 3 + \dfrac{1}{n_3}$.

Agora

$$x = 0 + \frac{1}{n_1} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{n_3}}}$$

Repetindo os procedimentos anteriores tem-se:

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{n_2}$$

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{n_3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} . \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{n_3}}$$

$$2 = \frac{125}{64} . \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{n_3}}$$

$$\frac{128}{125} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{n_3}}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{n_3} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{9} < \frac{5}{4} < \left(\frac{128}{125}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{9} < \left(\frac{128}{125}\right)^{n_3} < \left(\frac{128}{125}\right)^{10}$$

$$9 < n_3 < 10.$$

Desse modo a parte inteira de n_3 é 9. Assim

$$\log(2) = [0; 3,3,9,\ldots] =$$

$$0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9}}} =$$

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{9}{28}} = \frac{84}{93}.$$

3.3. Frações contínuas e os irracionais

Nessa altura da exposição, sabe-se que um irracional deve ter uma fração contínua infinita. Na próxima seção, será dado fundamento para se afirmar que toda fração contínua infinita representa um irracional. O exame da construção da fração contínua de um número irracional requer o entendimento de substituições recursivas, também chamada recorrência.

Seja x um número irracional qualquer e $a_0 = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro menor do que x. Desse modo x pode ser escrito de tal modo:

$x = a_0 + \frac{1}{x_1}$, com $0 < \frac{1}{x_1} < 1$. Assim, $x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$ é um número irracional, porque do contrário x seria racional. Analogamente, $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, com $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $0 < \frac{1}{x_2} < 1$, continuando o procedimento, tem-se $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$ é um numero irracional.

A fórmula recursiva se lê $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$, com $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ e $0 < \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, note ainda $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, $a_0 \in \mathbb{Z}$.

O processo descrito anteriormente terminaria se $x_n = a_n$, para algum n, o que é impossível, pois x_n é irracional para todo n. Deste modo podem-se fazer substituições sucessivas dos respectivos x_i, com $i = 1, 2, ..., n, ...$ obtendo uma fração contínua infinita,

$$x =$$

$$a_0 + \frac{1}{x_1} =$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} =$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} =$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}} =$$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

Que é a expansão do irracional x.

Exemplo: Escrever $\sqrt{3}$ como uma fração contínua.

Seja $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1}$,

Desse modo

$$\sqrt{3} =$$

$$1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{3}+1\right)}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}}} =$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}} =$$

$$[1;\, 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \ldots].$$

Desse modo, analisa-se um caso geral.

Considere $\sqrt{a}$, sendo a um número natural que não é um quadrado perfeito. Escreve-se $\sqrt{a} = b + x$, com b natural e $0 < x < 1$.

Elevando os dois membros ao quadrado têm-se:

$$a = b^2 + 2bx + x^2$$

$$a - b^2 = x\left(2b + x\right)$$

$$x = \frac{a-b^2}{2b+x}.$$

Denotando por $p = a - b^2$, tem-se

$$\sqrt{a} = b + \frac{p}{2b+x} = b + \cfrac{p}{2b+\cfrac{p}{2b+\cfrac{p}{2b+\ldots}}}.$$

A expansão acima é um caso de “fração contínua generalizada”. A partir deste ponto segue a definição.

Definição: Dados $a_0 \in \mathbb{Z}$ e (a_i), (b_j) sequências de naturais, uma fração contínua generalizada é uma expressão do tipo:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}.$$

Essa definição foi bastante utilizada por Euler (KHRUSHCHEV, 2008), sendo particularmente conveniente para escrever expansões em frações contínuas de funções, como e^x.

3.4. Convergentes de frações contínuas

A expansão em frações contínuas em geral envolve as operações de divisão e soma uma infinidade de vezes. Nos séculos XVII e XVIII, isto não trazia grandes preocupações, mas estas vieram logo no século XIX, assim como nas expansões em série (que tem como caso particular as expansões decimais).

Dada $\alpha = [a_0; a_{1,} a_{2,} \ldots]$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, pergunta-se se esta representa um número. Esta pergunta pode ser respondida através de uma análise da fração contínua truncada $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ e conclui-se que certamente essa representa um número racional $\frac{p_n}{q_n}$, que é chamado ***convergente*** da fração contínua. Desse modo a expansão de

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

em *fração contínua*, quando submetida ao truncamento, produz os seguintes resultados:

$$C_0 = \frac{a_0}{1},\ C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1},\ C_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\ \ldots.$$

Os termos c_n são chamados de **frações reduzidas** ou **convergentes** da fração contínua. Desse modo, o processo de escrita de um número em fração contínua pode ser utilizado para obter números **racionais**, podendo provar que estas se aproximam do número referido. Assim se $\alpha = [a_0;a_1,a_2,...,a_i,...]$ a sequência, $c_i = \dfrac{p_i}{q_i} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}} = [a_0;a_1,...,a_i]$, $0 \le i \le n$, convergirá para α e o $n-ésimo$ convergente, é o limite da própria *fração contínua*, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Objetivando, o que se pretende mostrar aqui é a convergência da sequência $\dfrac{p_n}{q_n}$. De fato, pode-se mostrar mais, ou seja, que nesta sequência de racionais, cada termo é uma melhor aproximação de número irracional $x = \left[a_0; a_{1,} a_{2,} \ldots\right]$, no sentido de ser o número mais próximo de x com o denominador q_n.

Em 1883 J.S. Smith (1826-1883) mostrou que $|\alpha - C_{n+1}| < |\alpha - C_n|$ donde segue que $\dfrac{p_n}{q_n}$ é a melhor aproximação de α entre os números racionais com denominador menor ou igual a q_n. Este assunto, no entanto, não será detalhado aqui.

Pode-se então exemplificar essa convergência com um caso particular.

Exemplos:

1) Note que $\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,...]$ e $C_1 = [3;7] = 3 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7}$ é a primeira convergente de π e ainda a melhor aproximação racional entre os números racionais com denominador menor do que ou igual a 7.

2) Toma-se $\sqrt{2} = [1;2,2,2,2,...]$ e ainda é sabido que $\sqrt{2} = 1,41421356...$ Deste modo à sequência de convergentes será dada a seguir.

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = [1] = 1.$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = [1;2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = [1;\ 2,\ 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = [1;\ 2,\ 2,\ 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1,41666\ldots.$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1,4137931.$$

$$C_5 = \frac{p_5}{q_5} = [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} = 1,4142875.$$

Procura-se neste momento mostrar alguns teoremas e proposições que irão fortalecer e estabelecer regras para o estudo das convergentes.

Teorema 2.5.1 Dada uma sequência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2, \ldots$, com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n > 0$, para $n \geq 1$, defina as sequências (p_n) e (q_n) por:

$$p_0 = a_0 q_0 = 1,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ q_1 = a_1$$

$$p_{k+2} = a_{k+2} p_{k+1} + p_k\ ,\ q_{k+2} = a_{k+2} q_{k+1} + q_k\ .$$

Então

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}, \forall n \geq 0.$$

Além disto, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração: pode-se provar tal teorema por indução finita. De fato, $[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$. Para $n = 1$, $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$. O passo da indução se demonstra do seguinte modo:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}] =$$

$$\left[a_0; a_1, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] =$$

$$\frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}} =$$

$$\frac{p_n + \frac{1}{a_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{a_{n+1}} q_{n-1}} =$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

A segunda afirmação também segue por indução. De fato, $p_1q_0 - p_0q_1 = a_0a_1 + 1 - a_0a_1 = 1$. Se $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para certo n, então $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) = p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$.

■

Decorre do teorema que os pares p_n, q_n são primos entre si, para cada n. Além disto, a sequência (q_n), $n \geq 0$ é de números positivos e estritamente crescentes, portanto tende ao infinito.

Proposição 2.5.1 Tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}).q_n^2}$ onde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]$. Em particular

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2).q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}).q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}.q_n^2}.$$

Demonstração:

Note que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}.p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}.q_n - p_n.q_{n-1}}{(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}).q_n} =$$

$$\frac{-\left(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n\right)}{\left(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}\right).q_n} = \frac{-\left(-1\right)^{n-1}}{\left(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}\right).q_n} =$$

$$\frac{\left(-1\right)^n}{\left(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}\right).q_n} = \frac{\left(-1\right)^n}{\left(\alpha_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right).q_n^2} = \frac{\left(-1\right)^n}{\left(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\right).q_n^2}.$$

Em particular,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\left(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\right).q_n^2},$$

Note ainda que $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ e $0 < \beta_{n+1} < 1$, assim $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$, esta implica a última afirmação.

Desse modo a expansão de β_{n+1} como fração contínua segue de

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n.q_{n-1} + q_{n-2}} \Rightarrow \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \dfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

Aplicado recursivamente.

■

Teorema. 2.5.2.: Tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n.q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$, além disso, $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2.q_n^2}$ ou $\left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2.q_{n+1}^2}$.

Demonstração: O número x sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n.q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Além disso, se

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2.q_n^2}$$

e

$$\left|x-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2.q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_n.q_{n+1}} = \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \ge \frac{1}{2.q_n^2} + \frac{1}{2.q_{n+1}^2} \Rightarrow q_{n+1} = q_n,$$

o que é um absurdo.

■

Observação: Decorre de $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n.q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}.q_n^2}$, que quanto maior for a_{n+1} melhor será a aproximação $\frac{p_n}{q_n}$ de x.

Exemplo 3: Seja a fração contínua simples $x = 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}}}$, então seus convergentes são:

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1} = 4.$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = 4+\frac{2}{8} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} = 4{,}25\,.$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2.p_1+p_0}{a_2.q_1+q_0} = \frac{8.34+4}{8.8+1} = \frac{276}{65} = 4{,}2461538\,.$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3.p_2+p_1}{a_3.q_2+q_1} = \frac{8.276+34}{8.65+8} = \frac{2242}{528} = 4{,}22462121.$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4.p_3+p_2}{a_4.q_3+q_2} = \frac{8.2242+276}{8.528+65} = \frac{18212}{4289} = 4{,}2462112\,.$$

Note que $\sqrt{18} = 4{,}2426406...$, desta forma, a fração contínua pode ser obtida da expansão de $\sqrt{18} = 4{,}2426406...$. E os convergentes desta fração tendem para este valor.

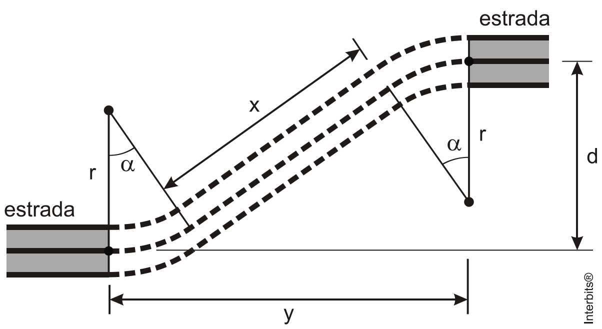
Consequentemente percebe-se desse modo o preenchimento da reta numérica com os números racionais e irracionais, partindo das aproximações realizadas por frações contínuas simples finitas (conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$) e infinitas (conjunto dos irracionais $\mathbb{I}$r). Essa "reunião" dos conjuntos, objetivando a busca da continuidade, permite uma designação comum: ***"os números reais"***. Conjunto onde o conceito de número passa a seguir um princípio comum de fatoração e de representação.

4. SITUAÇÕES-PROBLEMAS

Apresenta-se neste momento situações problemas que podem proporcionar uma maneira motivadora e prazerosa para introduzir frações contínuas no Ensino Médio, sendo este o principal objetivo dessa dissertação.

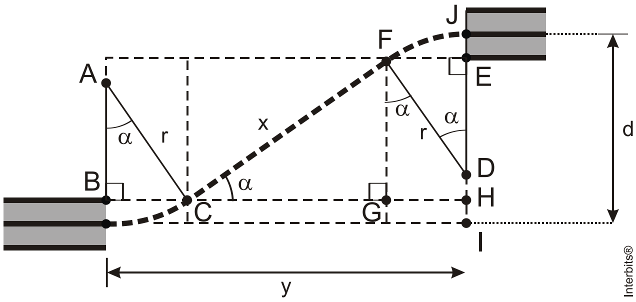
4.1. Problema de Aproximação

4.1.1. (Unicamp - adaptado) Um engenheiro precisa interligar de forma suave dois trechos paralelos de uma estrada, como mostra a figura abaixo. Para conectar as faixas centrais da estrada, cujos eixos distam d metros um do outro, o engenheiro planeja usar um segmento de reta de comprimento x e dois arcos de circunferência de raio r e ângulo interno α.



Se o engenheiro adotar $\alpha = 45°$, o segmento central medirá $x = d\sqrt{2} - 2r(\sqrt{2} - 1)$. Nesse caso, supondo que $d = 72\,m$ e $r = 36\,m$, determine a distância y entre as extremidades dos trechos a serem interligados, com precisão de 1 cm.

Resolução:



Para $d = 72\,m$ e $r = 36\,m$ vem: $x = 72\cdot\sqrt{2} - 2\cdot 36\cdot(\sqrt{2}-1) = 72\,m$. Queremos calcular $y = \overline{BC} + \overline{CG} + \overline{GH}$. Como os triângulos ABC e DEF são congruentes, $\overline{FE} = \overline{BC}$. Além disso, $\overline{FE} = \overline{GH}$, pois $FE\ //\ GH$. Portanto,

$$y = 2\cdot\overline{BC} + \overline{CG} =$$

$$2\cdot r\cdot \text{sen}(\alpha) + x\cdot\cos(\alpha) =$$

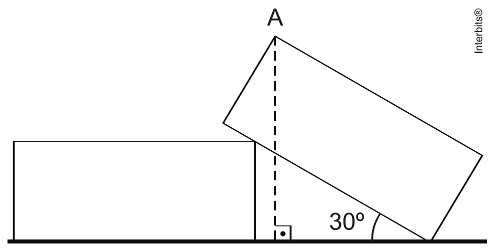
$$2\cdot 36\cdot \text{sen}\,45° + 72\cdot\cos 45° =$$

$$72\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 72\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$72\sqrt{2}\,m.$$

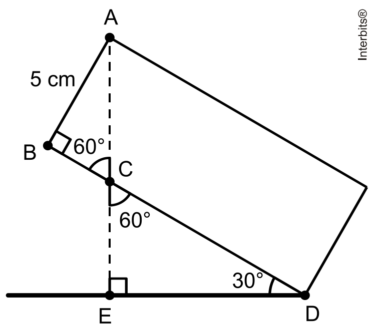
Tomando-se $\sqrt{2} = [1;2,2,2,2,...]$ e ainda é sabido que $\sqrt{2} = 1,41421356...$, pela sequência de convergentes vista anteriormente tem-se que $y \cong 72.1,41 = 101,52m$.

4.1.2 (UFPE) Na ilustração abaixo, temos dois retângulos congruentes com base medindo 12 cm, e altura 5 cm. Qual o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto A até a horizontal?



Resolução:

Considere a figura abaixo.



Do triângulo ABC, vem que:

$$tg\left(B\hat{C}A\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{BC} = \frac{5}{tg(60°)} = \frac{5}{\sqrt{3}}\,cm$$

e

$$sen\left(B\hat{C}A\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AC} = \frac{5}{sen(60°)} = \frac{10}{\sqrt{3}}\,cm.$$

Logo, como $\overline{BD} = 12\,cm$, segue que

$$\overline{CD} = 12 - \overline{BC} = \left(12 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)cm.$$

Além disso, do triângulo CDE, obtemos:

$$sen\left(C\hat{D}E\right) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \overline{CD} \cdot sen(30°) = 6 - \frac{5}{2\sqrt{3}}\,cm.$$

Portanto, o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto A até a horizontal é dado por:

$$\overline{AC} + \overline{CE} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{3}} + 6 - \frac{5}{2\sqrt{3}} =$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{3} + 6 - \frac{5\sqrt{3}}{6} =$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{6}+6 =$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}+6\,.$$

Toma-se $\sqrt{3}$ = $[1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ ...]$ e ainda é sabido que $\sqrt{3}$ = $1{,}7320508075....$ Desse modo a sequência de convergentes será dada a seguir.

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = [1] = 1\,.$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = [1;1] = 1+\frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = [1;\ 1,\ 2,] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3} = 1.666...\,.$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = [1;\ 1,\ 2,\ 1] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4} = 1{,}75\,.$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = [1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} = 1{,}727272\ldots.$$

$$C_5 = \frac{p_5}{q_5} = [1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15} = 1{,}73333\ldots.$$

Assim $\overline{AC}+\overline{CE} = \frac{15\sqrt{3}}{6}+6$ e usando a aproximação encontrada pelos convergentes tem-se $\overline{AC}+\overline{CE} = \frac{15.1{,}7333..}{6}+6 \cong 10{,}33325$.

Logo o inteiro mais próximo é 10.

4.2. Engrenagens

Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão $\frac{\sqrt{2}}{1}$. É impraticável que essas rodas tenham mais do que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de dentes das rodas que irão aproximar a razão desejada.

Resolução:

O problema consiste em escrever, sequencialmente, os convergentes até obter uma fração que satisfaça o problema.

Se as rodas têm m e n dentes, queremos que $\frac{m}{n} \approx \sqrt{2}$. Veja que $\sqrt{2} = 1{,}4142136... \cong 1 + 0{,}41421136$.

Desse modo tem-se:

$C_0 = 1$ (1° convergente).

$C_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (2° convergente).

$C_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}$ (3° convergente).

$C_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$ (4° convergente).

Deste modo o 4 convergente permite visualizar que o número de dentes da engrenagem maior seria 17 e da engrenagem menor 12, com aproximação dado por $\frac{17}{12} = 1{,}4166667$ o que proporciona uma aproximação correta até a ordem dos centésimos, o qual para o par de engrenagens usuais é satisfatório.

4.3. O Problema do Calendário

Existem indícios que mesmo em eras pré-históricas, alguns homens já se preocupavam em marcar o tempo. Em um período mais recente, os Sumérios adotaram um Calendário bem parecido com o nosso, com um ano dividido em 12 meses de 30 dias, o dia em 12 períodos e cada um desses períodos em 30 partes. Já na Babilônia, havia um calendário com um ano de 12 meses lunares que se alternavam em 29 e 30 dias, num total de 354 dias. Os egípcios inicialmente fizeram um calendário baseado nos ciclos lunares, mas depois notaram que quando o Sol se aproximava da "Estrela do Cão" (Sirius), estava próximo de o Nilo inundar. Notaram que isso acontecia em ciclos de 365 dias. Com base nesse conhecimento eles fizeram um Calendário com um ano de 365 dias, possivelmente inaugurado em 4.236 a.C.. Essa é a primeira data registrada na história.

Segundo Teixeira e Khrushchev, na atualidade, existem aproximadamente 40 calendários em uso no mundo, que podem ser classificados em três tipos:

1. Solares: Baseados no movimento da Terra em torno do Sol; os meses não têm conexão com o movimento da Lua. Um exemplo desse tipo de calendário é o cristão.

2. Lunares: Baseados no movimento da Lua; o ano não tem conexão com o movimento da Terra em torno do Sol. O calendário islâmico é um exemplo desse tipo de calendário.

3. Lunisolares: Os anos estão relacionados com o movimento da Terra em torno do Sol e os meses com o movimento da Lua em torno da Terra. O calendário hebreu, que é o mais antigo ainda existente, é um exemplo desse tipo.

Os principais calendários cristãos, ainda em uso são os calendários Juliano e o Gregoriano.

O calendário Juliano foi proposto por Sosígenes, astrônomo de Alexandria, e introduzido por Júlio César em 45 a.C.. Foi usado pelas igrejas e países cristãos até o século XVI, quando começou a ser trocado pelo calendário Gregoriano. Ainda é usado por algumas Igrejas Ortodoxas, entre elas a Igreja Russa. Já o calendário Gregoriano foi proposto por Aloysius Lilius, astrônomo de Nápoles, e adotado pelo Papa Gregório XIII, seguindo instruções do Concílio de Trento (1545-1563). O decreto instituindo esse calendário foi publicado em 24 de fevereiro de 1582. Atualmente, a diferença entre esses dois calendários é de 13 dias, dado que foram suprimidos 10 dias do ano de 1582, e que os anos de 1700, 1800 e 1900, não foram bissextos no calendário Gregoriano.

Devido às imprecisões desses calendários, em relação a real duração de um ano, o calendário Juliano se defasa de 1 dia a cada 128 anos, enquanto o calendário Gregoriano se defasa 1 dia a cada 3.320 anos. De fato, dado que a cada ano, ocorre uma defasagem de 11min 14seg, no Juliano, a cada 128 anos, teremos uma defasagem de um dia.

Por meio de frações contínuas, daremos um tratamento matemático ao problema dos calendários. Como já observamos, a origem desse problema está relacionada ao fato da duração de um ano terrestre não ser um número inteiro de dias. Matematicamente, esse problema se resolve ao se aproximar esse tempo adicional por uma fração. Como veremos, o calendário Juliano aproxima esse número com sendo $\frac{1}{4}$. E dessa forma, a cada 4 anos, se faz necessário termos um ano bissexto. O método de frações contínuas fornece uma sequência de frações que rapidamente converge para o número em questão. Tais frações, longe de serem complicadas, possuem como principal característica o fato de terem denominadores não tão grandes. E isso acarreta que as soluções propostas por tal método possuem regras cíclicas, de períodos aplicáveis.

O método de frações fornecerá o calendário Juliano como uma solução intermediária do problema, ou seja, uma solução com uma imprecisão. Além disso, as demais aproximações têm regras mais complexas. A solução proposta pela comissão de Gregório conseguiu uma regra, que mesmo perdendo em precisão, é bem simples de aplicação.

Com precisão de segundos, um ano consiste de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos, ou seja, consiste no intervalo de 365,242199 dias. Apresenta-se agora a solução por *frações contínuas* e também a solução decretada pelo Papa Gregório XIII para o problema do calendário.

Tem-se que a parte decimal do ano (0,242199074) evidentemente, deve ser convertida em 1 dia (ano bissexto) num determinado período. Ao utilizar *frações contínuas* para resolver o problema obtém-se

$$\frac{5h48\min 46seg}{1\,dia} =$$

$$\frac{20926\ seg}{86400\ seg} =$$

$$\frac{10463}{43200} =$$

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{64}}}}}}=$$

$$[0;4,7,1,3,5,64].$$

Observe que $\frac{10463}{43200} \approx 0,242199074$, esta fração contínua $[0;4,7,1,3,5,64]$ fornece aproximações para o número 0,242199074. E essas aproximações proporcionam diversas alternativas de correção do problema.

A primeira aproximação desse número é dada por $C_1 = [0;4] = \frac{1}{4} = 0,25$. Esse convergente consiste na aproximação dada pelo calendário Juliano, que toma um ano bissexto a cada 4 anos. Como se pode verificar no Calendário Juliano, em média, um ano possui 365 dias e 6 horas. E essa média difere de 11min e 14 segundos da real duração de um ano. Portanto, esse é o erro encontrado ao utilizar tal aproximação. Esta diferença pode até parecer pequena, mas, ao longo de séculos, não pode ser desprezada, pois a mesma produz este erro a cada 128 anos, um dia de avanço em relação ao ano real.

O próximo convergente é dado por $C_2 = [0;4,7] = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}} = \frac{7}{29} \approx 0,24137931$. Assim, com essa aproximação, têm-se 7 anos bissextos a cada 29 anos. Contudo, seria uma regra de difícil aplicabilidade. Pode-se simplificá-la, multiplicando seu numerador e denominador por 4. Então, $C_2 = [0;4,7] = \dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7}} = \dfrac{7.4}{29.4} = \dfrac{28}{116}$, ou seja, a cada 116 anos têm-se somente 28 anos bissextos, ao invés dos 29 anos bissextos previstos pelo calendário Juliano. Se utilizar tal aproximação, deve-se excluir um dos 29 anos que são bissextos, e transformá-lo em um ano simples. A única complexidade dessa regra seria a obtenção dos múltiplos de 116. O erro ocasionado por essa aproximação seria de 1 minuto e 11 segundos a menos que a duração de 1 ano, pois, a fração $\dfrac{7}{29}$ de um dia, equivale a aproximadamente 20855 segundos, que é 71 segundos a menos do que deve ser.

Essa diferença de 20926 – 20855 = 71 segundos por ano gera a cada 1217 anos, o erro de um dia a menos no calendário em relação ao ano real.

A seguir, temos que $C_3 = [0;4,7,1] = \dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{1}}} = \dfrac{8}{33} \approx 0,24242424....$ Essa aproximação é muito boa em termos de erro, pois a fração $\dfrac{8}{33}$ de um dia equivale a 20945 segundos, que é 19 segundos a mais do que o esperado. Isso ocasiona 1 dia a mais a cada 4.547 anos. Seriam 8 anos bissextos em cada conjunto de 33 anos, mas também, teríamos dificuldade com a elaboração de uma regra para sua aplicação. Podemos contornar tal problema, considerando que $C_3 = [0;4,7,1] = \dfrac{1}{4+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{1}}} = \dfrac{4.8}{4.33} = \dfrac{32}{132}$, então, se aplicássemos tal regra, teríamos 32 anos bissextos a cada 132 anos, ao invés dos 33 anos bissextos do calendário

Juliano. Da mesma forma do caso anterior, a principal dificuldade técnica seria a obtenção dos múltiplos de 132.

O próximo convergente $C_4 = [0;4,7,1,3] = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = \frac{31}{128} \approx 0,2421785...$, é extremamente próxima do esperado, diferindo apenas de 1 segundo da duração média de 1 ano, que é de fato um erro muito pequeno. Assim, se utilizássemos tal regra, levaríamos 86400 anos para temos um dia de diferença entre o calendário e o ano real. E, a cada 128 anos, teríamos 31 anos bissextos, ao invés de 32, do calendário Juliano. Como veremos na próxima seção, essa fração, possivelmente, teria sido a base para o cálculo da regra de Gregório.

O quinto convergente é mais preciso, mas, devido ao tamanho do seu denominador, torna inviável seu uso. $C_5 = [0;4,7,1,3,5] = \frac{163}{673} \approx 0,242199108$. Novamente, tomaremos outro representante para C_5, que é dado por $C_5 = [0;4,7,1,3,5] = \frac{163.4}{673.4} = \frac{652}{2692}$.

Assim, se utilizássemos esse convergente, teríamos a cada 2692 anos, 652 anos bissextos, ao invés dos 673 previstos pelo calendário Juliano. Essa regra, além de difícil aplicabilidade, pois teria um ciclo de 2692 anos, traria o problema da escolha dos 21 anos que deveriam ser bissextos, mas seriam transformados em anos simples. Isso poderia ser resolvido, por exemplo, excluindo-se um ano bissexto, a cada 128 anos.

4.4. Resistores

A Física e a Matemática estão fortemente ligadas e há relação de interdisciplinaridade em seus conteúdos, principalmente no Ensino Médio.

Isso se faz presente quando, por exemplo, o aluno se defronta com os primeiros problemas de cinemática, necessitando calcular, espaços, velocidades e acelerações, o que requer conhecimentos matemáticos prévios, relacionados às funções de afins e quadráticas.

Sequenciando, tem-se no estudo da dinâmica, o conceito de vetor e as noções básicas de trigonometria serão fundamentais para um bom aprendizado das leis de Newton. Na verdade, essa relação interdisciplinar será mantida ao longo de todo o Ensino Médio, de forma que cada novo tópico de Física vai, em geral, requerer o aprendizado de novos pré-requisitos matemáticos por parte do aluno.

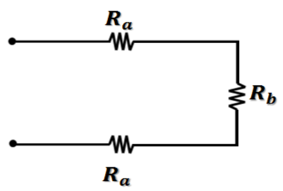
Desse ponto de vista, está explicito que a ausência de alguns temas no currículo de Matemática pode prejudicar o aprendizado dos tópicos de Física a eles relacionados. Há casos, inclusive, em que o não conhecimento de determinados temas impossibilita os alunos de resolver problemas correlatos. Neste momento, relata-se um destes casos, o qual ocorreu recentemente com Divaldo Portilho Junior no Colégio Classe em Goiânia (Portilho, 2006), quando o mesmo propôs um problema de eletricidade aos seus alunos. Relatou-se que, nenhum de seus alunos, conseguiu chegar à resposta certa, o mesmo ocorrendo, posteriormente, com alguns colegas de profissão, isto é, professores de Física de outras escolas. Após apresentar a resolução correta do problema e ocorrer uma discussão sobre o problema com seus alunos, verificou-se que isto se deu por falta de conhecimento de um pré-requisito matemático que, de fato, raramente é abordado de Matemática: as *frações contínuas*.

O problema em questão é um exercício de eletricidade envolvendo uma associação mista de resistores, com resistências R_a e R_b. O problema consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito, quando há um número infinito de resistores no circuito.

Podem-se usar as frações contínuas para resolver o problema proposto inicialmente da seguinte maneira. Lembre-se ainda, que a associação em série de duas resistências R_1 e R_2 leva a uma resistência equivalente $R_s = R_1 + R_2$, ao passo que a associação em paralelo leva a uma resistência equivalente R_p dada por $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Seguindo o processo definido anteriormente e considerando a sequência de malhas, tem-se:

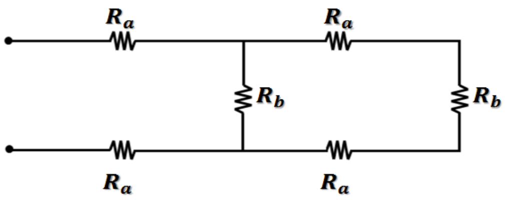
1° passo



Note que

$$R_1 = R_a + R_b + R_a = 2R_a + R_b.$$

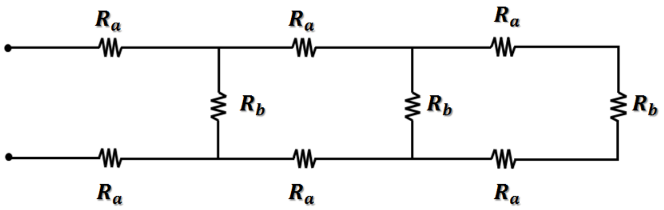
2° passo



Note que

$$R_2 = R_a + R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_1}} = 2R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_1}}.$$

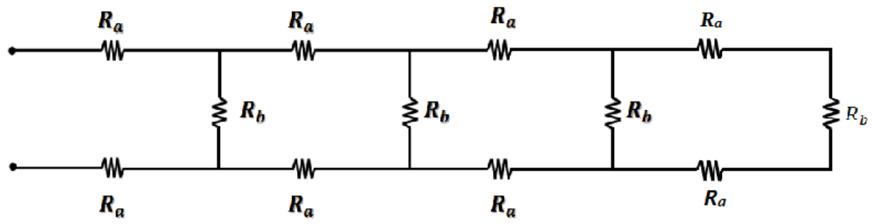
3° passo



Note que

$$R_3 = R_a + R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_2}} = 2R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{2R_b + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_1}}}}.$$

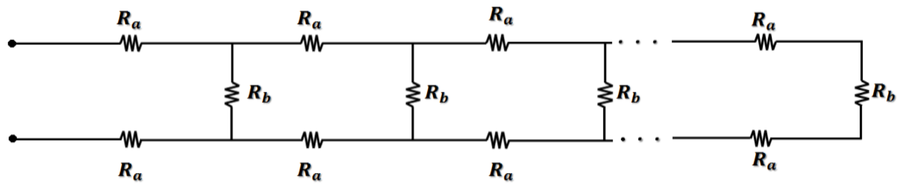
4° passo



Note que

$$R_4 = R_a + R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_3}} = 2R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{2R_b + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{2R_b + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_1}}}}}}.$$

No $n-ésimo$ passo



Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, tem-se:

$$R_n = 2R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_{n-1}}}.$$

Seja x o valor da resistência equivalente do circuito quando n tende ao infinito, e consequentemente:

$$x = 2R_a + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \cfrac{1}{2R_b + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \cfrac{1}{2R_b + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \cfrac{1}{2R_b + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \ddots}}}}}}} = 2R_a + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \cfrac{1}{x}}.$$

Desse modo

$$x = 2R_a + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_b} + \cfrac{1}{x}}$$

$$x = 2R_a + \cfrac{1}{\cfrac{x + R_b}{x.R_b}}$$

$$x = 2R_a + \frac{x.R_b}{x + R_b}$$

$$x - 2R_a = \frac{x.R_b}{x + R_b}$$

$$\left(x - 2.R_a\right).\left(x + R_b\right) = x.R_b$$

$$x^2 - 2R_a.x - 2.R_a.R_b = 0$$

$$x = \frac{2R_a \pm \sqrt{4.R_a^2 + 8.R_a.R_b}}{2}$$

$$x = R_a \pm \sqrt{R_a^2 + \frac{2.R_a^2.R_b}{R_a}}$$

Obviamente, x não pode ser negativo e esta é a resistência equivalente desejada.

$$\therefore x = R_a.\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2.R_b}{R_a}}\right),$$

Note que x pode ser um número racional e desse modo tem-se uma fração contínua generalizada.

5. CONCLUSÃO

Nesta dissertação, mostrou-se uma opção para a introdução do ensino de números irracionais. Trata-se de um tema relevante para o ensino médio, ao se verificar uma importante lacuna que existe quando se constrói os conjuntos numéricos na educação básica.

Constata-se a dificuldade em definir e apresentar um número irracional nas séries iniciais e no ensino médio, que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, deve ser reconhecido como uma expansão decimal infinita e não periódica.

O uso dos converges fornece uma escala natural para as boas aproximações de números, racionais e irracionais. Junte-se a isto a oportunidade propiciada pela introdução de um assunto que articula diversos conceitos matemáticos usuais no ensino básico, abrindo caminhos para a construção de uma rede de significados tomando como mote o conceito de fração contínua.

As contribuições de ordem didática, com a realização das aproximações de raízes de números que não são quadrados perfeitos, números irracionais, em que o recurso das frações contínuas se configura como método de cálculo de aproximações. Compare-se com o método usual do uso de calculadoras. Isto se faz com apreço ao rigor matemático, e aproveitando a ligação com outras competências como a algébrica e a aritmética.

As frações contínuas, inclusive por seu desenvolvimento histórico, apresentam uma possibilidade de abordar os números irracionais na educação básica. Um número é irracional se a sua representação em forma de fração contínua é infinita. Caso a representação de um número em frações contínuas seja finita, trata-se de um número racional. Esta forma de abordagem evita a definição por complementaridade dos números irracionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREZINSKI, C. **Hystory of continued Fractions and Padé Approximants**. SCM 12. Berlin: Editora Springer-Verlag, 1990.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 4ª edição. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2011.

FERREIRA JUNIOR, Divaldo P. **Usando frações contínuas para resolver um problema de eletricidade no ensino médio**. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol7/Num1/v12a08.pdf>. Acesso em: 12 out. 2012.

KHRUSHCHEV, S. **Ortoghonal Polynomials and Continued Fractions**. 1ª edição. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 1991.

MOREIRA, C. G. T. A. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas**. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.06.pdf>. Acesso em: 12 out. 2012.

MOSCIBROSKI, T. M. **A amplitude do conjunto dos Números irracionais**. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/94997/Thais_Meurer_Moscibo ski.PDF?sequence=1>. Acesso em: 12 out. 2012.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

SILVA, J. C. R. **O estudo das frações contínuas**. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12007/JoseCarlosRamosdaSilva.pdf>. Acesso em: 12 out. 2012.

SILVA, V. C. **Frações contínuas e aplicações**. Disponível em: <http://www.uems.br/portal/biblioteca/repositorio/2012-02-01_10-19-34.pdf>. Acesso em: 12 out. 2012.

TEIXEIRA, C. C. **Calendários**. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-94PKZD/monografia_.pdf?sequence=1. Acesso em: 12 out. 2012.

TENGAN, E.; MARTINEZ, F.; MOREIRA, C.; SALDANHA, N. **TEORIA DOS NÚMEROS**. 1ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.