ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

HAIDÉE DE FÁTIMA RODRIGUES MARCUSSI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
MARÇO - 2013

ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

HAIDÉE DE FÁTIMA RODRIGUES MARCUSSI

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevskii

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
MARÇO - 2013

ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

HAIDÉE DE FÁTIMA RODRIGUES MARCUSSI

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 19 de Março de 2013

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre(UENF)

Prof. Dr. Paulo Sérgio Dias da Silva(UENF)

Prof. Dr. Wladimir Augusto das Neves (UFRJ)

Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevskii (UENF)
(ORIENTADOR) .

Dedico essa monografia ao meu esposo, Marcussi e a minha filha, Maria Carolina.

Agradecimentos

Agradeço

A Deus,pela força espiritual para a realização desse trabalho.

Ao Professor Mikhail, pela generosidade e paciência na orientação dessa dissertação.

À minha família, pelo apoio, compreensão, ajuda e, em especial, por todo carinho ao longo deste percurso.

Aos meus amigos e colegas de curso, pela cumplicidade, ajuda e amizade.

À Cynthia, pela acolhida em janeiro.

Às professoras Sônia e Luciane pela inestimável ajuda na aplicação das atividades.

À minha irmã Maria Goretti, pelas observações preciosas.

Ao Marcussi e ao Josias pela paciência nas viagens de sábado.

"Aprendemos quando fazemos, mas também quando pensamos sobre o que fazemos."

John Dewey

RESUMO

Hoje em dia, a Álgebra ocupa lugar de destaque no currículo de matemática nas escolas de ensino fundamental e médio, ocupando um espaço bem maior do que a Geometria, por exemplo. Era, portanto, de se esperar que, no mínimo, tal destaque se traduzisse num aprendizado melhor - o que, segundo parece, não está ocorrendo. O presente trabalho pretende identificar eventuais dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra e levar algumas contribuições para que o professor possa refletir sobre o ensino e aprendizagem da mesma e assim, melhorar sua prática.Os conceitos algébricos iniciais são os alicerces para a formação de conceitos algébricos posteriores, e quando estes não são bem trabalhados, é provável que o déficit no ensino da Álgebra se prolongue, constituindo um obstáculo à formação de outros conceitos.A identificação dos tipos de erros cometidos pelos alunos no âmbito da aprendizagem da Álgebra e das suas possíveis causas permite que o professor atue no sentido de proporcionar experiências de aprendizagem significativas que promovam uma verdadeira compreensão dos significados próprios deste domínio da Matemática.

Palavras-chave: álgebra, ensino de álgebra, pensamento algébrico, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Nowadays, Algebra occupies a prominent place in the curriculum of mathematics in elementary and middle schools, occupying an area much larger than the geometry, for example. It was therefore expected that, at a minimum, this would translate into a learning highlight best - which, it seems, is not occurring.This study aims to identify possible difficulties of students who begin the study of Algebra and take some contributions to the teacher to reflect on the teaching and learning of it and thus improve their practice.The initial algebraic concepts are the foundation for the subsequent formation of algebraic concepts, and when they are not well done, it is likely that the deficit in the teaching of Algebra extends, constituting an obstacle to the formation of other concepts.The identification of the types of errors made by students in the learning of Algebra and its possible causes allows the teacher to act in order to provide meaningful learning experiences that promote a true understanding of the meanings themselves this field of mathematics.

Keywords: algebra, teaching algebra, algebraic thought, Basic Education.

Sumário

Introdução

Hoje em dia, a Álgebra ocupa lugar de destaque no currículo de matemática nas escolas de ensino fundamental e médio, ocupando um espaço bem maior do que a Geometria, por exemplo. Era, portanto, de se esperar que, no mínimo, tal destaque se traduzisse num aprendizado melhor - o que, segundo parece, não está ocorrendo.

Ao longo da minha trajetória como professora de Matemática sempre me deparei com a grande dificuldade dos alunos, tanto das últimas séries do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, na manipulação de expressões algébricas.

Bons alunos, com os quais trabalhei no Ensino Fundamental, ao encontrá-los no Ensino Médio, apresentam dificuldades básicas em Álgebra como, por exemplo, resolver uma equação do 1º grau. Percebe-se que estudaram aquele conteúdo apenas para cumprir uma etapa de sua vida escolar. Sua aprendizagem não foi significativa e muito pouco do que foi estudado permaneceu.

É frustrante para o professor que passa a indagar sobre a real eficácia do seu trabalho.

Imenes and Lellis (1994), p.2, por exemplo, traduziram muito bem a situação da Álgebra no 8º ano do ensino fundamental (antiga 7ª série):

> *Professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar, outros tentando engolir técnicas de cálculo com letras que quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos de 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem poucos resultados: na 1ª série do 2º Grau é necessário repetir tudo.*

Por outro lado, a Álgebra muitas vezes é um ponto crítico na decisão tomada pelo aluno de continuar ou não estudando matemática. A qualidade do ensino dessa matéria pode influir decisivamente na escolha do aluno. Lins (2006) declarou que um fracasso em Álgebra significa um fracasso absoluto na escola e que um dos principais obstáculos a este aprendizado é que "a álgebra escolar representa o mais severo corte (momento de seleção) da educação matemática escolar"(p.9).

No meu convívio com os alunos, algumas das observações um tanto frequentes são:

"Entender, eu acho que entendi. Mas para que serve isso?"

"Se eu descobrisse quem inventou isso eu mandava eliminar."

"Essa prova está parecendo uma prova de Português, de tanta letra que tem."

"Professora, você até que é legal. Mas a sua matéria..."

Percebe-se aí, também, uma boa dose de frustração da parte do aluno.

É verdade que há tendências naturais para esta ou aquela disciplina, mas, é verdade também, que a aprendizagem da Matemática, se não for prazerosa, também não precisa ser sofrida.

Todas essas considerações expõem o motivo pelo qual me decidi por este tema.

O presente trabalho pretende identificar eventuais dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra e levar algumas contribuições para que o professor possa refletir sobre o ensino e aprendizagem da mesma e assim, melhorar sua prática.

O capítulo 2 passa em revista os aspectos mais marcantes do desenvolvimento histórico da Álgebra e, também, exibe um breve panorama do ensino da Álgebra no Brasil.O capítulo 3 discorre sobre as diversas concepções de Álgebra e educação algébrica.O capítulo 4 trata da atividade algébrica propriamente dita e do desenvolvimento do pensamento algébrico.O capítulo 5 mostra algumas atividades feitas com alunos do 8º e 9º anos do Colégio Estadual Dr. Leonel Homem da Costa, situado em Santo Antônio de Pádua. Tais atividades objetivam identificar algumas das dificuldades mais comuns apresentadas no início do trabalho com a Álgebra. O capítulo 6 apresenta uma trajetória no ensino da Álgebra e, finalmente, no capítulo 7, as considerações finais, com um exemplo de atividade que favorece a introdução do conceito de variável. O trabalho termina com as Referências Bibliográficas e um Apêndice contendo um modelo de cada atividade aplicada aos alunos.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 O que é a Álgebra

Em termos históricos a palavra Álgebra provém do nome do tratado "Hisab al-jabr wa-almuqabalah", ou seja, Livro sobre as operações **al-jabr** e **qabalah**, do matemático e astrônomo Mohamed ibn Musa al-Khowarismi, que viveu no século IX. Nesse tratado aparece a expressão **al-jabr** da qual deriva a palavra Álgebra.

O termo **al-jabr** significa restauração e refere-se à transposição de termos para o outro lado da equação e **qabalah** significa redução ou equilíbrio e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

De acordo com Baumgart (1992), usando a notação atual, dada a equação

$$x^2 + 5x + 4 = 4 - 2x + 5x^3$$

al-jabr fornece

$$x^2 + 7x + 4 = 4 + 5x^3$$

e al-muqabalah fornece

$$x^2 + 7x = 5x^3$$

Decorrente disto, a palavra Álgebra passou a designar o ramo da Matemática relativo às equações.

Acredita-se que o surgimento da Álgebra aconteceu junto com o aparecimento da própria escrita que também é uma forma simbólica de representar ideias e acontecimentos. O seu desenvolvimento pode ser dividido em duas fases: Álgebra Antiga - estudo das equações e métodos de resolvê-las e Álgebra Moderna - estudo das estruturas matemáticas como grupos, anéis e corpos.

O período denominado Álgebra Antiga (1700 a.C. a 1700 d.C.) teve como característica principal a invenção gradual da linguagem simbólica e o estudo de vários métodos que se utilizavam de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potência inteira e radiciação) com os coeficientes numéricos das equações para a obtenção de suas raízes. Nesse período o desenvolvimento da linguagem algébrica evoluiu passando por três estágios: o retórico (verbal), o sincopado (abreviações de palavras) e o simbólico (que passou por várias transformações até se tornar estável).

a) O estágio retórico é caracterizado pela descrição de procedimentos, em que instruções verbais fornecidas eram aplicadas a uma sequência de casos específicos. Neste período, não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento matemático: as expressões eram escritas totalmente em palavras. A álgebra babilônica, a álgebra egípcia e a álgebra geométrica grega apresentavam o estilo retórico.

b) O estágio sincopado tem como característica principal o uso de abreviações de palavras para a escrita de equações. Foi o primeiro passo em direção à notação algébrica. No século III d. C., Diofanto de Alexandria "foi o primeiro matemático a fazer uso sistemático de abreviações nos problemas e nas operações com números"(Guelli (1992), p. 23). Na obra "Arithmetica", Diofanto expõe uma abordagem no tratamento de equações indeterminadas, conhecidas como equações diofantinas. Era uma época bastante tumultuada: era a época da queda do Império Romano, e isso não foi bom para a Matemática, nem para outras áreas do conhecimento, pois o clima de guerra e as destruições que tomavam conta de toda a Grécia impossibilitaram um avanço no conhecimento. Só com a ascensão do império árabe por volta do ano de 650 aproximadamente é que foram retomados os estudos matemáticos. O califa al-Mamum, que governou de 809 até 833, criou em Bagdá um centro de ensino - a Casa da

Sabedoria, no qual procurou juntar as mentes mais brilhantes entre os muçulmanos da época. Entre eles estava Mohamed ibn Musa al-Khowarismi, autor do livro "Hisab al-jabr wa-almuqabalah". Esse livro ficou conhecido por Al-jabr e nele Al-khwarizmi introduz os novos símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero, descreve operações de cálculo (adição, subtração, divisão e a multiplicação), a extração da raiz quadrada, cálculos de números inteiros segundo o método indiano. A obra de Al-khwarizmi chegou à Espanha onde foi traduzida para o latim nos primeiros anos do século XII por Juan de Sevilla e Gerardo de Cremona, e com passar do tempo, passou a ser chamada de Álgebra.

c) O estágio simbólico. Os passos mais decisivos para a introdução dos símbolos no mundo da Matemática devem-se ao advogado francês apaixonado por Álgebra, François Viète (1540-1603). Aos poucos, Viète foi substituindo as palavras nas equações. Assim, passou a representar a incógnita por uma vogal e as palavras mais e menos por p (de plus) e m (de moins). A substituição de palavras por símbolos matemáticos não se deu de uma vez, é claro. Outros matemáticos da mesma época também tiveram sua importância no desenvolvimento da álgebra. Entre eles, Robert Record (1510-1558), inglês que criou o símbolo (=) para a expressão igual. Outro inglês que também foi importante para a álgebra foi Thomas Harriot (1560-1621) responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam da álgebra de Viète. A passagem para a álgebra simbólica foi completada por René Descartes com a sua publicação, em 1637, de La Géométrie. Nessa publicação Descartes usa as últimas letras do alfabeto (x, y, z,...) como incógnitas e implicitamente como variáveis e as primeiras letras (a, b, c, d,...) como constantes.

> *O próximo - e supostamente último - passo, seria a gênese da noção de estrutura algébrica, primeiro com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829), de forma "implícita", até chegarmos a Bourbaki (a partir de 1940), e aí entramos no domínio próprio do "cálculo com letras", mas num sentido bem mais sofisticado, o da sintaxe: um cálculo com regras próprias e ignorantes de qualquer sistema particular que funcione como elas (números, por exemplo). Um mundo, enfim, completamente "abstrato"(Lins (2006), p. 91.)*

A evolução na notação simbólica possibilitou um aprofundamento no pensamento algébrico ao passar da "solução manipulativa de equações"para o estudo de suas propriedades teóricas, ocorrendo o domínio do cálculo com letras, sendo que esse cálculo é operado com regras próprias, desvinculadas de qualquer significado. Um mundo completamente abstrato.

1.2 Breve panorama do Ensino da Álgebra no Brasil

Os problemas enfrentados nos dias atuais no ensino da Álgebra no Brasil podem ser reflexos da evolução da Álgebra desde a sua inclusão no currículo até hoje. É necessário que se faça um estudo, mesmo que breve, sobre a sua história no currículo brasileiro para que se compreenda melhor o que ocorre hoje.

De acordo com Fiorentini et al. (1992),

> *A preocupação legal em introduzir a Álgebra no ensino brasileiro, na forma de aulas avulsas, ao lado de disciplinas já estabelecidas como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, ocorre com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799. Nos inúmeros decretos e regulamentos da fase imperial, que tentam organizar o ensino secundário de forma seriada, quase sempre o estudo completo da Álgebra sucedia o estudo completo da Aritmética e antecedia o estudo completo da Geometria (p. 40).*

A tendência de tratar esses quatro campos, que constituíam a educação matemática escolarizada, como compartimentos estanques, perdurou mesmo após a Reforma Francisco Campos -1931(Fiorentini et al. (1992)), que passa a utilizar a denominação "Matemática"em vez de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Desde o início do estudo da Álgebra até o início da década de 60, quando se inicia o Movimento da Matemática Moderna, o seu ensino era predominantemente de caráter mecânico e reprodutivo, sem clareza alguma. A Álgebra era trabalhada de forma automatizada, dissociada de qualquer significado, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões.

Com o advento do Movimento da Matemática Moderna a Álgebra ganha lugar de destaque, tornando-se o elemento unificador dos campos da Matemática. Esse movimento também tinha a preocupação em superar a forma mecânica e reprodutiva do ensino da

Álgebra. O ensino da Álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem.

Em consequência, a Álgebra perdeu o seu caráter pragmático, útil para resolver problemas. O programa de Álgebra, então, começava pelo estudo da teoria de conjuntos e a ênfase era colocada nas operações e nas suas propriedades.

Após o declínio da Matemática Moderna, os educadores movimentaram-se para recuperar o ensino da Geometria, e a Álgebra acaba perdendo o seu lugar de destaque, indicando uma tendência de a Geometria ocupar este lugar. Com estas novas propostas, a Álgebra parece retornar ao papel exercido anteriormente, conforme o citado abaixo:

> *Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído como também parece retomar - sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo - o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório - descontextualizado e estático - necessário à resolução de problemas e equações (Fiorentini et al. (1992), p.51).*

Com o advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL (1998)), o currículo escolar brasileiro para o ensino de Matemática passou a ser alvo de estudos e debates que têm procurado contribuir para o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas e para a melhoria do ensino e da aprendizagem.

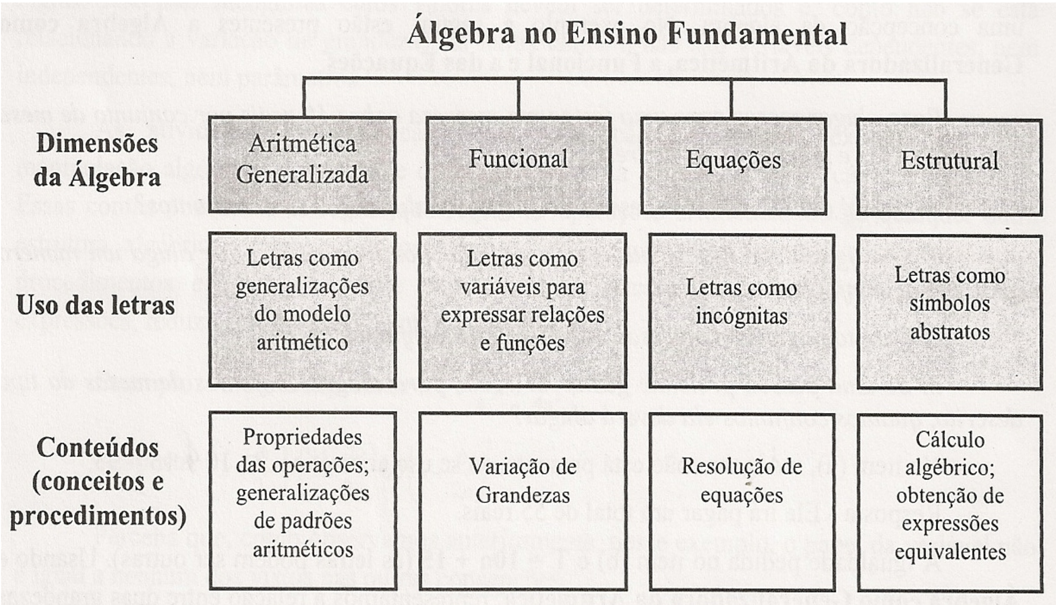
O objetivo dos PCN era de subsidiar os sistemas de ensino na organização dos seus currículos e, ao mesmo tempo, orientar os professores para a realização de um trabalho pedagógico significativo com os alunos, de modo que estes possam ampliar de forma consistente os seus conhecimentos no campo da Matemática.

No tocante à melhoria do ensino e aprendizagem da Álgebra:

> *Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações (BRASIL (1998), p. 116).*

Os PCN de Matemática do Ensino Fundamental destacam ainda que, "para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra"(BRASIL (1998)).

O quadro abaixo, incluído no BRASIL (1998) (p.116), sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes concepções da Álgebra, chamadas de dimensões, e as diferentes funções das letras em cada uma delas.



Os PCN procuram se sustentar na utilização de situações que possam conduzir os alunos a construir novas noções algébricas a partir de suas próprias observações, possibilitando-lhes estabelecer essas relações.

Capítulo 2

Concepções de Álgebra e Educação Algébrica

2.1 As quatro concepções de Álgebra (Usiskin (1994)):

2.1.1 Álgebra como aritmética generalizada

Como o nome já diz, esta concepção representa o entendimento da Álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos (Usiskin (1994)). Em outras palavras, os objetos algébricos são compreendidos como sendo resultado da ampliação das ideias da aritmética. Nesta concepção, é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Exemplo: Generaliza-se $4 + 8 = 8 + 4$; $5 + 7 = 7 + 5$; $6 + 3 = 3 + 6$ como $a + b = b + a$.

Num nível mais avançado, a noção de variável como generalizadora de modelos é fundamental em modelagem matemática.

Dentro dessa concepção de Álgebra, as instruções-chave para o aluno são traduzir e generalizar.

2.1.2 Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

Talvez seja esta a manifestação de Álgebra mais comum durante as aulas de matemática.

Dentro da concepção da Álgebra como generalizadora de modelos, não temos incógnitas. Generalizamos relações conhecidas entre números. Sob essa concepção, o problema termina ao fazermos sua tradução para a Álgebra, pois assim encontramos o modelo geral. Porém dentro da concepção da Álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas , ao fazermos tal tradução, estamos apenas começando.

Consideremos o seguinte problema: A soma das idades de um pai e um filho é 60 anos. Descubra a idade de cada um, sabendo que a idade o pai é o triplo da idade do filho.

Como sabemos a relação entre a idade do pai e a idade do filho, traduzimos o problema para a linguagem da Álgebra:

3x + x = 60.

A seguir, resolvemos essa equação de alguma maneira, obtendo x = 15 (a idade do filho) e 3x = 45 (a idade do pai).

Nesta concepção de Álgebra, as variáveis são ou incógnitas ou constantes e as instruções-chave para o aluno são simplificar e resolver.

2.1.3 Álgebra como estudo de relações entre grandezas

Quando escrevemos A = b.h, fórmula da área de um retângulo, estamos expressando uma relação entre três grandezas (A representa a medida da área, b, a medida da base e h, a medida da altura do retângulo). Não se tem a sensação de estar lidando com uma incógnita, pois não estamos resolvendo nada. A distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, neste caso, as variáveis variam. Que há uma diferença fundamental entre estas concepções fica evidente pela resposta que os alunos geralmente dão à seguinte pergunta:

O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?

A questão parece simples, mas é suficiente para confundir os alunos. Não pedimos o valor de x, portanto x não é uma incógnita. Não pedimos ao aluno que traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que pareça com a aritmética. Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

As instruções-chave para o aluno são relacionar e graficar.

2.1.4 A álgebra como estudo das estruturas

De acordo com Usiskin (1994), esta concepção trata de entender quais as percepções matemáticas, tais como equivalências entre expressões, simplificações e outras atitudes matemáticas podem ser úteis ou não para resolver os problemas em Álgebra. Por exemplo:

Descubra o valor de $a^2 + b^2$, sabendo que $a + b = 5$ e $ab = 4$.

Não desejamos que o aluno descubra o valor de a e de b. As variáveis tornaram-se objetos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Ele terá que se remeter ao produto notável:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ e, após fazer as substituições necessárias chegar que $a^2+b^2 = 17$.

Neste caso, as instruções-chave para o aluno são manipular e justificar.

2.2 Concepções de Educação Algébrica segundo Fiorentini, Miorim e Miguel

De acordo com Fiorentini et al. (1993), há três concepções de educação algébrica que, historicamente, vem exercendo maior influência no ensino da Matemática elementar.

A primeira, chamada de linguístico-pragmática, foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX. O objetivo da educação algébrica nesta época era o domínio, ainda que de forma mecânica, das técnicas necessárias para as transformações algébricas.

> *Esse "transformismo algébrico"caracterizava-se, quase invariavelmente, por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações com essas mesmas expressões, chegando às equações para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas (Fiorentini et al. (1993), p.84).*

O quadro abaixo, retirado de Fiorentini et al. (1992)(p.43), nos mostra um exemplo de como a Álgebra era tratada nos livros didáticos da época:

Ensino da Álgebra: multiplicação de expressões algébricas.

1.º caso. *Para multiplicar um monomio por outro, multiplicam-se os coefficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, affectando cada uma de um expoente egual á somma dos expoentes que a mesma letra tem nos monomios, e ao producto obtido dá-se o signal que lhe corresponde, segundo a regra dos signaes.*

Exemplos:

$$(3a^2b)(4ab^2c) = 12a^3b^3c; \ (-7xy)(5x^2z) = -35x^3yz;$$
$$(5m^2n^4p^6)(-5mn^3p^5r^4s) = -25m^3n^7p^{11}r^4s;$$
$$(-3a^3b^4c)(-2a^4b^2c^2d) = 6a^7b^6c^3d.$$

(Pérez y Marín, 1928: p. 35.)

A segunda concepção, a fundamentalista-estrutural, predominante nas décadas de 1970 e 1980, tem como característica, como o nome já diz, uma abordagem mais estrutural da Álgebra.

Fiorentini et al. (1992) (p.46) nos mostra um exemplo de como era feita a resolução de um exercício, nessa época:

3) De maneira análoga ao que você fez no exercício 2, demonstre que:

$(a \cdot b) \div a = b$

Transformações	*Propriedades*
$(a \cdot b) \div a =$	
$(b \cdot a) \div a =$	Comutativa
$= (b \cdot a) \cdot \frac{1}{a} =$	definição do divisor em $\mathbb{R}^*$
$= b \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) =$	associativa
$= b \cdot 1 =$	produto de elementos inversos
$= b$	elemento neutro

> *No que se refere, particularmente, à forma de abordagem daqueles conteúdos classicamente dito algébricos, prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem subjacentes (Fiorentini et al. (1993), p.84).*

A terceira concepção, que surgiu após os anos 80 é a fundamentalista-analógica. Sua principal característica é a busca por um meio termo entre as concepções "linguístico-pragmática"e "fundamentalista-estrutural". Faz isso através da tentativa de resgatar o valor instrumental da álgebra e da preservação do seu caráter fundamentalista de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico, agora não mais de forma lógico-estrutural. "Essa nova forma de justificar baseia-se, na maioria dos casos, em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais"(Fiorentini et al. (1993), p.84).

Procura-se "justificar"certas passagens do transformismo algébrico através da utilização de leis do equilíbrio físico como, por exemplo, utilizando-se de balanças ou gangorras na abordagem de equações; tornando visíveis certas identidades algébricas através da área de quadrados e retângulos.

De acordo com esses autores, quaisquer das concepções mencionadas enfatizam a linguagem algébrica, porém, não promovem o desenvolvimento do pensamento analítico e da capacidade de abstração.

Capítulo 3

A Atividade Algébrica

Em termos epistemológicos, a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objetos com que esse campo trabalha mais diretamente. Podemos então perguntar: quais são os objetos fundamentais da Álgebra? Há trezentos anos a resposta seria certamente "expressões e equações". Hoje em dia, essa resposta já não satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

Uma perspectiva assumida por alguns autores é a de que o objeto central da Álgebra são os símbolos. Este campo da Matemática seria então definido pelo uso que faz de uma linguagem própria - a linguagem algébrica - que cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. De acordo com o matemático americano Keith Devlin, citado em Ponte (2006), "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria".

No entanto, esta grande importância do simbolismo constitui-se na sua maior fraqueza. Esta vida própria tende a desligar-se dos significados concretos iniciais e corre o sério risco de tornar-se incompreensível para o aluno. É o que acontece quando se usa simbologia de modo abstrato, sem referencial concreto, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidencia apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios, como sucedeu no movimento da Matemática Moderna.

De acordo com Lins (2006),p. 137, "A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a Álgebra". É nessa perspectiva que se entende o estudo algébrico como efetiva construção de conhecimento. Aquele estudo que é capaz de produzir significado.

Deste modo, o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

A capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas é um dos elementos do pensamento algébrico, mas não é o único. Um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Ou seja, no "pensamento algébrico"dá-se atenção não só aos objetos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Portanto, um dos melhores modos de promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos.

Aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação de símbolos equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma de suas facetas.

As dificuldades enfrentadas no ensino de álgebra podem ser decorrentes, segundo Lins (2006), das diversas concepções para a atividade algébrica, nos seguintes aspectos:

- A abordagem "letrista"associa a atividade algébrica ao uso de determinadas notações e reduz a Álgebra à manipulação de símbolos e regras para operar com expressões algébricas.

- Álgebra como expressão da generalidade que resulta do pensamento formal sobre operações aritméticas concretas. A linguagem simbólica é um instrumento para a representação de ideias.

- A visão "estruturalista"centra-se no estudo das estruturas algébricas, suas propriedades operatórias e possíveis transformações geométricas.

Observa-se que existem diferentes abordagens para a atividade algébrica e a educação algébrica, contudo, pesquisas demonstram que a compreensão da linguagem simbólica e a apreensão dos conceitos algébricos são igualmente importantes para se fazer abstrações e generalizações.

A identificação dos tipos de erros cometidos pelos alunos no âmbito da aprendizagem da Álgebra e das suas possíveis causas permite que o professor atue no sentido de proporcionar experiências de aprendizagem significativas que promovam uma verdadeira compreensão dos significados próprios deste domínio da Matemática.

No processo de escolarização tradicional, a criança é introduzida ao conhecimento matemático formal a partir do estudo da Aritmética, com ênfase nas operações básicas tais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Inicia-se, então, o seu percurso no estudo da Matemática, que vai acompanhá-la por toda sua vida escolar.

No ambiente escolar existe a ideia de que a Aritmética trata de números e a Álgebra de letras. Tenta-se também, estabelecer limites entre conteúdos, sendo que no currículo da escola, a Aritmética é trabalhada desde a Educação Infantil até o 6º ano do ensino Fundamental e os conteúdos tradicionais da Álgebra, tais como equações, cálculo com letras, expressões algébricas, são abordados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

Um dos aspectos que caracteriza o início do estudo da Álgebra é o estudo das equações e, consequentemente, a utilização de letras para representar valores desconhecidos. Quando as letras representam valores desconhecidos, elas são usualmente chamadas de incógnitas. Entretanto, no decorrer das séries subsequentes, as letras têm outros atributos. No conceito de função, por exemplo, elas são entendidas como variáveis.

De acordo dom os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL (1998)), o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização. Contudo, no âmbito da prática escolar, a Álgebra constitui um campo da matemática no qual o processo de ensino e aprendizagem é permeado por muitas dificuldades. Experiências têm mostrado que embora os alunos associem a matemática aos símbolos, muitos deles não conseguem utilizá-los como uma linguagem auxiliar para o raciocínio matemático, não compreendem os procedimentos que compõem as transformações de expressões algébricas e, diante disso, não desenvolvem e/ou exercem a sua capacidade de abstração e generalização.

O início da aprendizagem da Álgebra exige algum grau de abstração e, também, alguma capacidade de reformular o significado e a manipulação dos símbolos usados na Aritmética. Nem sempre estas condições se verificam e, para os alunos, a aprendizagem da Álgebra é, muitas vezes, mecânica e desprovida de significado.

Segundo Ponte (2006), sublinha-se constantemente que a Álgebra envolve uma forte simbolização. Na verdade, a simbolização começa desde logo na Aritmética:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -,$ x,:, $=, 2^3, ...$

A Álgebra acrescenta novos símbolos e envolve uma mudança de significado de alguns dos símbolos.

Novos símbolos: $x, y, <, >, ...$

Mudança de significado: $=, +, ...$

Símbolos para operações abstratas: $\theta, \sigma, \omega, \varphi, \mu, ...$

No seu trabalho sobre "dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra", Booth (1994) afirma que parte da dificuldade que os alunos têm para simplificar expressões como $2a + 5b$ diz respeito:

a) à sua interpretação do símbolo operatório. Em aritmética, símbolos como + e = são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação, e = significa escrever a resposta.

b) além disso, as ideias primitivas de adição envolviam a união física de dois conjuntos.Daí a ação efetiva associada ao símbolo de adição é, na maioria dos casos, juntar os termos, resultando 7ab.

c) há ainda a confusão com o aspecto do "valor posicional"na justaposição, por exemplo, 43 = 4 dezenas + 3 unidades, que pode levar o aluno a encarar a questão de maneira semelhante em Álgebra.

Essas considerações nos levam a algumas conclusões:

A primeira relaciona-se às ideias associadas ao significado dos símbolos de operações e de igualdade que as crianças adquirem durante suas primeiras experiências aritméticas.

Assim, torna-se necessário deixar bem claro para as crianças que "2 + 3"não representa apenas uma instrução, somar 2 com 3, mas também "o número que é 3 mais que 2".

A segunda conclusão diz respeito à necessidade de acentuar o valor bidirecional do símbolo de igualdade, tanto se exigindo a leitura adequada do símbolo (por exemplo, "é igual a"em vez de "dá", como em "2 mais 3 dá 5"), como proporcionando aos alunos experiências com expressões da forma $5 = 2 + 3$ (bem como $1 + 4 = 2 + 3$, etc.).

A terceira refere-se à maneira de representar a multiplicação em Álgebra por justaposição (por exemplo, 4n). A tendência aparentemente forte de as crianças verem isso como uma soma em vez de produto (ou como representação de valor posicional) pareceria indicar que sua introdução deveria ser retardada e que o produto deveria ser escrito na forma completa (n x 4 ou 4 x n) por um período considerável da fase de iniciação dos alunos em álgebra.

Outro fator importante a ser citado é que a compreensão dos diferentes significados das letras nas diversas concepções da álgebra não é fácil e imediata para o aluno. É importante que o professor, através de experiências de aprendizagem significativas, dê a esse aluno oportunidade de vivenciar situações em que ele possa perceber esses diferentes papéis, sem, no entanto, exigir dele o domínio da nomenclatura citada.

De acordo com os PCN:

> *[...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer que a ideia de conhecer assemelha-se a ideia de tecer uma teia (BRASIL (1998), p. 75)*

Entende-se que o papel do professor é fundamental, pois é dele que partem as tarefas que propiciam que o aluno faça relações, ou seja, produza significado para aquele estudo. É do professor que partem as intervenções, a fim de explorar situações em sala de aula que podem ser muito proveitosas para a construção do conhecimento.

A exploração de situações problema é uma forma bastante interessante para o desenvolvimento de alguns conceitos algébricos pelo aluno. A partir de uma situação-problema ele pode obter ideias a fim de resolvê-lo ou explicá-lo.

É interessante que estas problematizações sejam bastante diversificadas, como a investigação de padrões em sucessões numéricas ou geométricas; cálculo de áreas, volume e perímetros; preenchimento de planilhas; análise de gráficos. Através destas atividades os alunos terão oportunidade de reconhecer regularidades, fazer generalizações e assim desenvolver a sua linguagem algébrica e o pensamento algébrico.

Ainda citando os PCN:

> *Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL (1998), p.117).*

As dificuldades que os alunos manifestam em Álgebra muitas vezes estão relacionadas com problemas de origem na Aritmética.

Demana (1994)afirma a importância da compreensão das propriedades aritméticas básicas (pré-álgebra) para o aprendizado da Álgebra. Podem ser citados como exemplos:

a) A compreensão da ordem das operações é essencial para o cálculo do valor numérico de expressões. Por exemplo: ache o valor de $7+3x^2$ para x = 2. Para estar preparado para este exercício, o aluno deveria fazer antes, em pré-álgebra, cálculos numéricos do mesmo tipo: $7 + 3 \cdot 2^2$.

b) O uso correto dos parênteses (propriedade distributiva). Um erro comum dos alunos que se iniciam em álgebra é resolver $3(x + 2)$ como $3x + 2$. Uma atividade em pré-álgebra poderia ser: a omissão dos parênteses muda o valor de $4 \cdot (5 + 7)$? Esse tipo de atividade leva o professor a chamar a atenção para a propriedade distributiva, fazendo com que os alunos comparem $4 \cdot (5 + 7)$ com $4 \cdot 5 + 4 \cdot 7$.

c) A percepção de padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e a identificação de suas estruturas.

> *Nas séries iniciais do 1º grau, o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização (Fiorentini et al. (1993), p.89).*

Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

> *O desenvolvimento da capacidade de generalizar situações que apresentam regularidades deve ser estimulado nos alunos e exige, em geral, abstração. Por isso, e, a partir disso, é necessário que o aluno desenvolva também a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente e justificar a validade da lei para quaisquer casos (Tinoco (2011), p.51).*

A realização de tarefas que envolvam o estudo de padrões ajuda o aluno a perceber a verdadeira noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido. Procurar relações próximas (recursivas) e distantes (estas envolvendo a generalização, modelação), entre os termos de uma sequência exige a mobilização de um tipo de pensamento algébrico, mas também o promove e desenvolve.

É importante que, ao explorar padrões e relações numéricas, o aluno tenha a possibilidade de explicitar as suas ideias e possa discutir e refletir sobre as mesmas. Assim, ele terá uma oportunidade de desenvolvimento do espírito crítico e da capacidade de generalização.

A regularidade dos fenômenos, a observação dos aspectos invariantes dentre outros que variam, e a compreensão de que alguns fatores se modificam regularmente, quando existe a variação em outros fatores, ou seja, o pensamento algébrico, ganha nova forma de expressão.

d) Com frequência os alunos usam as fórmulas ou regras como as conhecem sem terem a preocupação de as adaptarem às situações, o que origina falsas generalizações sobre os operadores ou sobre os números. A simplificação de expressões tais como $\frac{Ax}{x} = A$, originam erros como $\frac{Ax+By}{x+y} = A + B$, $\frac{9x+6}{6} = 9x$.

Tais problemas se manifestam porque os alunos não são capazes de produzir significado para aquele tipo de expressões. O papel do professor como autoridade e como "interlocutor"é fundamental. É preciso "falar"sobre a atividade que se está propondo. Levar o aluno a "justificar"suas ações, não só para saber se ele sabe de fato o que está dizendo, mas, principalmente, para que o professor compreenda como o aluno está pensando, como chegou àquela conclusão.

Em qualquer caso, em situações de ensino de Matemática:

- *é fundamental a mediação da oralidade, emprestada da Língua Materna e que funciona como um degrau natural na aprendizagem da escrita;*
- *é importante que os objetos matemáticos, como as palavras que utilizamos ordinariamente, sejam apreendidos prenhes de significações e não como meras formas vazias, destinadas a interpretações posteriores (Machado (1991),p.135-136).*

Depois de garantir que as expressões algébricas se tornaram plenas de significado para os alunos, ou seja, que elas se tornaram objetos reconhecidos por eles como legítimos, independente do processo de manipulação direta, o professor pode passar a trabalhar a transformação direta de expressões.

Tomando como base o trabalho de Paulo Boero, citado em Lins (2006), pág. 135, o professor pode dar aos alunos "pontos de partida"e "alvos", e pedir que eles encontrem uma transformação adequada. Por exemplo: "Que transformação leva $x + 2b = y - 2b$ em $x = y - 4b$"?

Esse conhecimento algébrico vai ser cobrado do aluno em avaliações internas ou externas. É preciso, então, que além de "saber fazer"ele tenha alguma "destreza"nesses cálculos. Isso vai ocorrer através de algum tipo de prática, e a mais comum nas nossas escolas é o "exercício".

O que deve ficar claro, no entanto, é que exercícios só podem ser eficazes caso os alunos compreendam a natureza do que estão fazendo, para saber que, "naquele momento", trata-se de praticar um certo conjunto de técnicas, mas que essa prática está inserida em um quadro maior, e que ela não se justificaria em si mesma (Lins (2006),p. 156).

Capítulo 4

Atividades com os alunos

Este trabalho tem por objetivo perceber os processos de raciocínio e eventuais dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental, de modo especial do 8º ano, quando trabalham com situações que requerem o pensamento algébrico, bem como as dificuldades e os erros cometidos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações.

Partindo do pressuposto de que todo espaço de aprendizagem exige uma organização do ensino que propicie aos alunos condições para o seu desenvolvimento, elaboramos, organizamos e analisamos uma série de atividades direcionadas para o ensino aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental.

As atividades foram aplicadas em duas turmas: 801 (8º ano - 21 alunos) e 901 (9º ano - 23 alunos) do Colégio Estadual Dr. Leonel Homem da Costa, em Santo Antônio de Pádua.

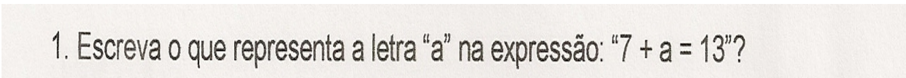
A escolha das turmas deveu-se ao fato de que a turma 801 iniciou neste ano letivo de 2012 o estudo das expressões algébricas e, na época da aplicação das atividades já se encontrava no início do estudo dos produtos notáveis, enquanto que a turma 901, já havia passado por essa fase no ano anterior. Portanto, achamos que era o momento ideal para verificarmos de que maneira os alunos estavam desenvolvendo o seu raciocínio em termos algébricos, como discutem e argumentam as suas ideias matemáticas, formulam e avaliam as conjecturas que elaboram e que tipos de erros fazem ao operar com expressões algébricas.

As atividades sempre foram feitas em duplas ou trios e depois discutidas no grupo maior. A ideia foi dar aos alunos a oportunidade para confrontar, discutir, argumentar e justificar as suas ideias, realizar descobertas, confrontarem-se com as suas dúvidas, esclarecê-las, enfim levá-los a sentirem-se num ambiente de aprendizagem que transmita confiança e envolvimento.

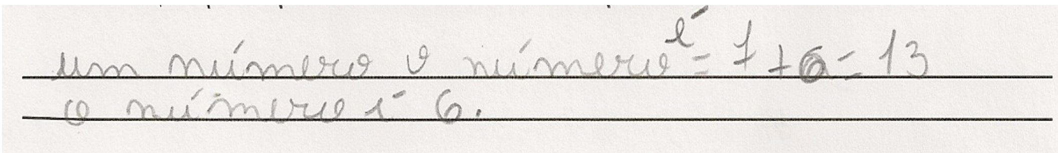
As atividades foram organizadas de modo a direcionar os alunos no sentido de elaborarem raciocínios desenvolvendo o pensamento algébrico e, também, compreender os modos de pensar, as estratégias e observar os erros mais comuns efetuados pelos alunos.

ATIVIDADE 1

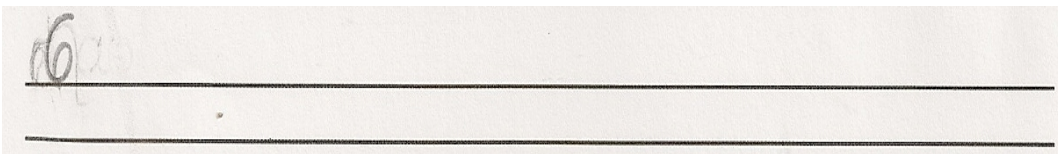
Nesta atividade foram apresentadas 6 questões direcionadas a diagnosticar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A primeira e a segunda questões tinham como objetivo mostrar o entendimento dos alunos a respeito das letras que apareciam em expressões algébricas.


1. Escreva o que representa a letra “a” na expressão: “7 + a = 13”?

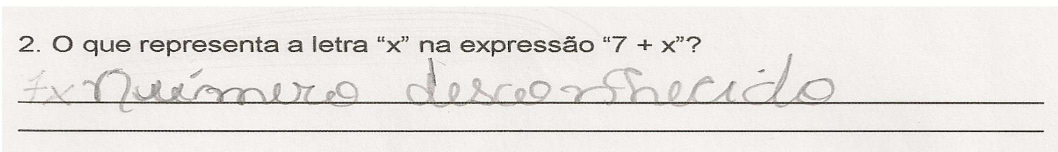
88% dos alunos mostraram um entendimento correto, como mostram algumas respostas


um número o número é = 7 + a = 13
o número é 6.

Ou simplesmente


6

Já na questão 2, o índice de acertos caiu para 64% :


2. O que representa a letra “x” na expressão “7 + x”?
número desconhecido

Várias respostas, como a apresentada abaixo, mostram que os alunos confundiram o número representado pelo x com o coeficiente numérico do x.

x representa o número 1

A questão 3 tratava do uso da igualdade como uma equivalência:

3. Escreva o número que deve ocupar o lugar do $\square$:

$$8 + 7 = \square + 6$$

48% dos alunos interpretaram corretamente o sinal de igualdade como uma equivalência:

$$8 + 7 = \boxed{9} + 6$$

Dos 52% que erraram 16% o fizeram pela sua dificuldade de interpretação dos sinais de + e = que, como afirma Booth (1994) são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas: + significa efetivamente fazer a conta e = significa escrever a resposta. Neste caso, os alunos não interpretaram a igualdade como uma equivalência:

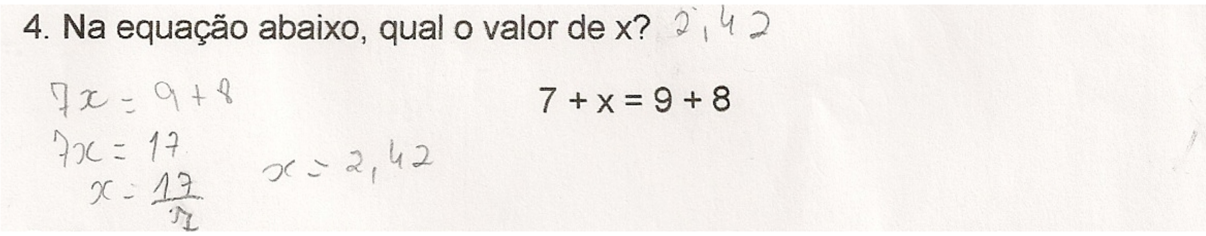
$$8 + 7 = \boxed{15} + 6$$

A questão nº 4 diferenciava-se da nº 3 apenas pela troca do quadradinho pelo x.

4. Na equação abaixo, qual o valor de x?

$$7 + x = 9 + 8$$

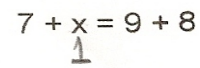
Parece que esta troca apresentou uma dificuldade a mais pois o índice de acerto caiu para 35% e entre os 65% que erraram, 29% interpretaram o + e o = em termos de ações a serem efetuadas, e os 71% restantes erraram a questão, alegando não saberem encontrar o valor do x:



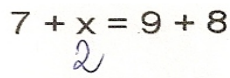
4. Na equação abaixo, qual o valor de x? 2,42

7x = 9 + 8
7x = 17
x = 17/7
x = 2,42

7 + x = 9 + 8



7 + x = 9 + 8
1

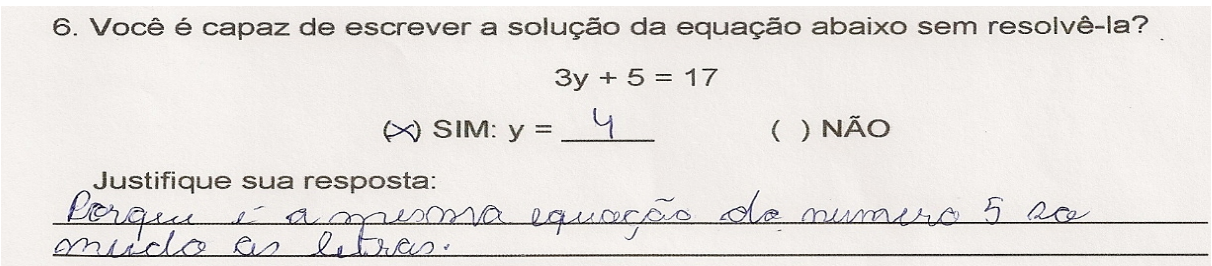


7 + x = 9 + 8
2

A questão nº 5 pedia que o aluno resolvesse uma equação em x: $3x + 5 = 17$ e a questão nº 6 apresentava a mesma equação, só que agora em y e perguntava se ele poderia dar a resposta sem resolvê-la.

O índice de acerto da questão 5 foi de 82%. Verificamos, aí, que os alunos passaram o 5 para o segundo membro e dividiram o resultado por 3, chegando, assim, à resposta correta $x = 4$. Talvez o índice de acerto tenha sido grande pelo fato dos alunos estarem "treinados"a resolver equações deste tipo conforme conferido nos seus cadernos. Eis aí o mérito dos "exercícios". Porém, conforme Lins (2006) é necessário a prática de um certo conjunto de técnicas, mas o aluno tem que ter consciência que essa prática está inserida em um quadro maior, e que ela não se justifica em si mesma.

Quanto à questão nº 6, 52% dos alunos que acertaram a questão 5 responderam SIM e perceberam que se tratava da mesma equação:



6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

3y + 5 = 17

(X) SIM: y = 4 ( ) NÃO

Justifique sua resposta:
Porque é a mesma equação do numero 5 so mudo as letras.

33% dos alunos que acertaram a questão 5,responderam SIM, mas não perceberam que era a mesma equação, enquanto que 15% dos que acertaram a mesma questão, responderam NÃO, justificando que eles precisariam fazer os cálculos para saber o valor do y. As respostas abaixo ilustram o que foi dito:

6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

x4
3y + 5 = 17

(X) SIM: y = 4 ( ) NÃO

Justifique sua resposta:
Sim por tentativa
achando um numero para substituir o y

6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

3y + 5 = 17

( ) SIM: y = ______ (X) NÃO

Justifique sua resposta:
Porque eu não consigo pra mim resolver
eu tenho que fazer a conta.

Finalmente, dos que erraram a questão 5, 60% marcaram SIM e acharam o y de algum modo e 40% marcaram NÃO, mas curiosamente acertaram o valor do y. Não perceberam que era a mesma equação da questão 5:

6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

3y + 5 = 17

(x) SIM: y = 4 ( ) NÃO

Justifique sua resposta:
3 . 4 = 12 + 5 = 17

6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

3y + 5 = 17

( ) SIM: y = 4 (X) NÃO

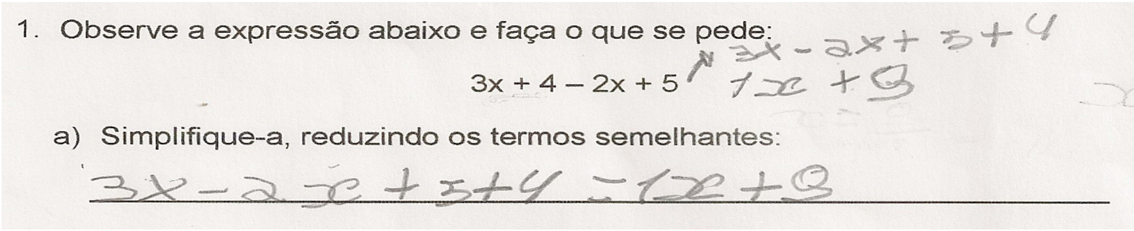
$3y = 17 - 5$
$3y = 12$
$y = \frac{12}{3}$ $\boxed{y = 4}$

Justifique sua resposta:
Não. Pq Não tem como saber o resultado da equação sem a conta

ATIVIDADE 2

Esta atividade apresentava questões que envolviam redução de termos semelhantes, cálculo de valor numérico de expressões e operações com expressões algébricas.

A primeira questão envolvia redução de termos semelhantes e cálculo do valor numérico de uma expressão. O item a teve 80% de acerto. Um exemplo de resolução correta vai abaixo:

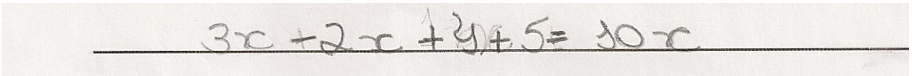

1. Observe a expressão abaixo e faça o que se pede:

$3x + 4 - 2x + 5$ $\quad 3x - 2x + 5 + 4$ $\quad 1x + 9$

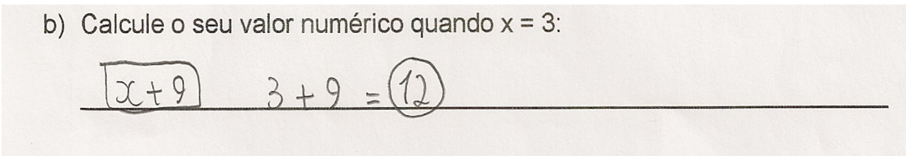
a) Simplifique-a, reduzindo os termos semelhantes:

$3x - 2x + 5 + 4 = 1x + 9$

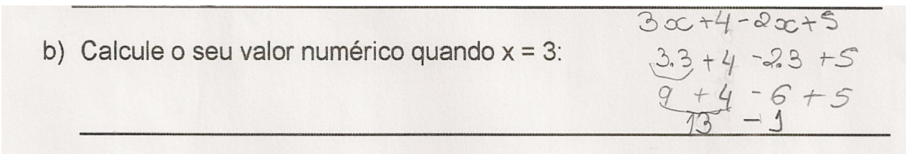
Os 20% que erraram demonstraram dificuldades na redução de termos semelhantes, somando todos os coeficientes e dando um resultado:


$3x + 2x + 4 + 5 = 10x$

O item b pedia para calcular o valor numérico da expressão encontrada no item a. Dos 55% que acertaram, tivemos dois tipos de respostas: uma achou o valor numérico da expressão já reduzida e outra achou o valor numérico da expressão inicial:


b) Calcule o seu valor numérico quando x = 3:

$\boxed{x+9} \quad 3 + 9 = 12$


b) Calcule o seu valor numérico quando x = 3:

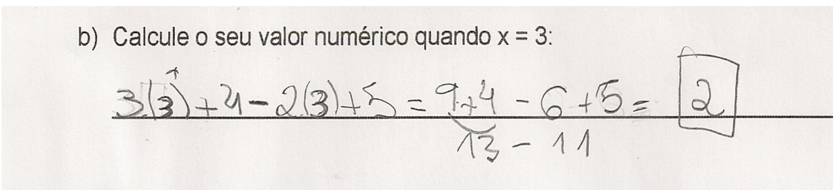
$3x + 4 - 2x + 5$

$3.3 + 4 - 2.3 + 5$

$9 + 4 - 6 + 5$

$13 - 1$

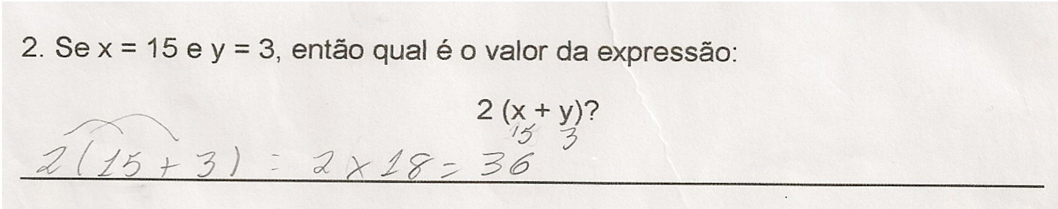
45% erraram a questão: substituíram corretamente, mas erraram no cálculo, na ordem de resolução das operações.


b) Calcule o seu valor numérico quando x = 3:

$3(3) + 4 - 2(3) + 5 = 9 + 4 - 6 + 5 = \boxed{2}$

$13 - 11$

A questão 2 tratava também de valor numérico. Dentre os 75% que acertaram, tivemos dois tipos de respostas: um que resolveu primeiro a soma e depois multiplicou:

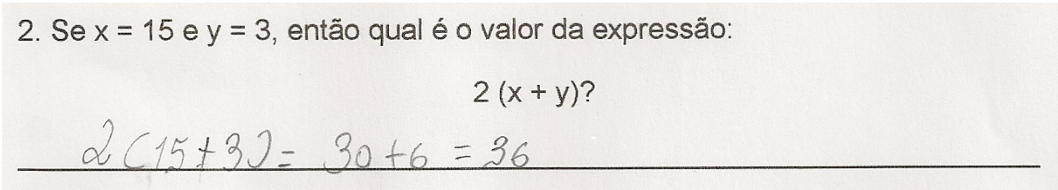

2. Se x = 15 e y = 3, então qual é o valor da expressão:

2 (x + y)?

15 3

2(15 + 3) = 2 x 18 = 36

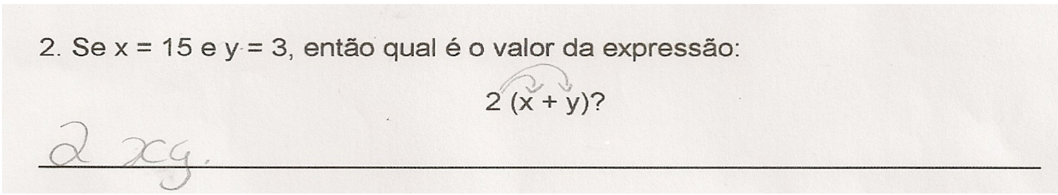
E outro que utilizou primeiro a propriedade distributiva e depois somou:


2. Se x = 15 e y = 3, então qual é o valor da expressão:

2 (x + y)?

2(15+3)= 30+6 = 36

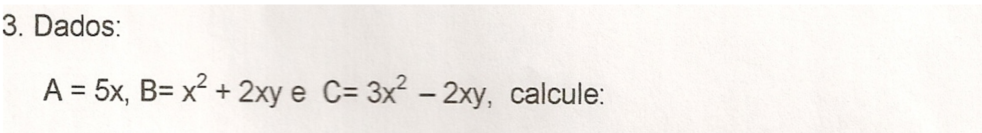
Os 25% que erraram a questão mostraram dificuldades no cálculo algébrico:


2. Se x = 15 e y = 3, então qual é o valor da expressão:

2 (x + y)?

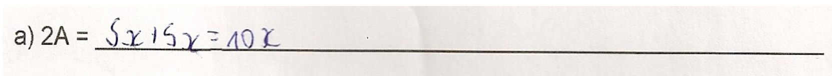
2 xy.

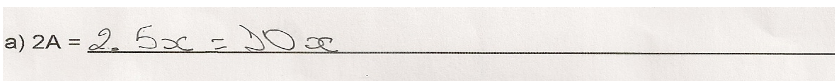
Finalmente a questão 3 apresentava alguns cálculos com expressões algébricas:


3. Dados:

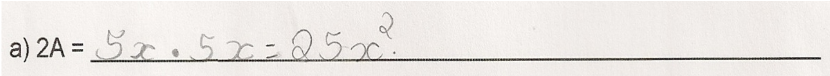
A = 5x, B= x^2 + 2xy e C= $3x^2$ – 2xy, calcule:

90% acertaram o item a, resolvendo-o de duas maneiras diferentes:

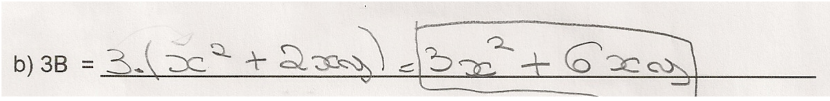

a) 2A = 5x+5x=10x


a) 2A = 2. 5x = 10x

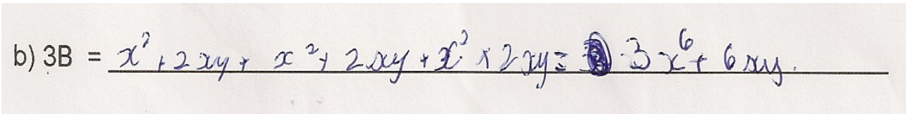
Interessante observar que 10% dos alunos erraram, pois confundiram $2A$ com A^2:


a) 2A = $5x \cdot 5x = 25x^2$

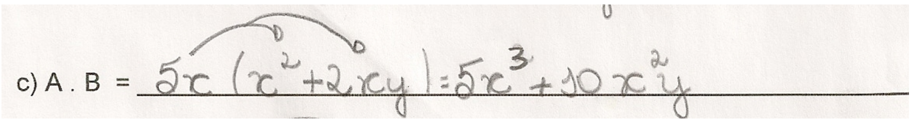
No item b, 65% de acerto: os alunos usaram corretamente os parênteses e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.


b) 3B = $3.(x^2 + 2xy) = \boxed{3x^2 + 6xy}$

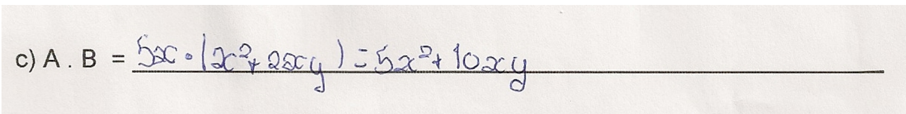
Os 35% que erraram, entenderam o significado de $3B$ mas, erraram no cálculo:


b) 3B = $x^2 + 2xy + x^2 + 2xy + x^2 + 2xy = 3x^6 + 6xy.$

No item c, foi grande o índice de erro: 60%. Tratava-se da multiplicação de um monômio por um binômio. Os alunos empregaram corretamente os parênteses e a propriedade distributiva mas, tiveram dificuldades no cálculo com letras e acabaram por dar a resposta errada. Exemplo de resposta correta:

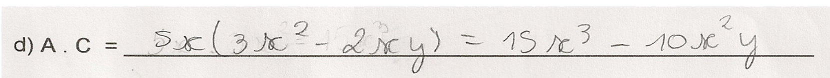

c) A . B = $5x\,(x^2 + 2xy) = 5x^3 + 10x^2y$

Exemplo de resposta errada:


c) A . B = $5x \cdot (x^2 + 2xy) = 5x^2 + 10xy$

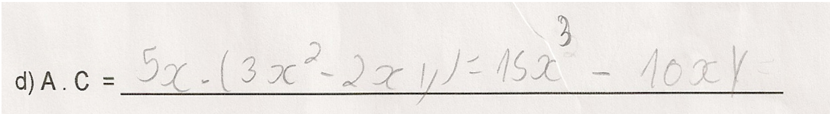
Apesar do item d ter o mesmo grau de dificuldade do item c, vemos aqui que o índice de acerto foi de 65%.

Exemplo de resposta certa:


d) A . C = $5x(3x^2 - 2xy) = 15x^3 - 10x^2y$

O aluno aplicou a propriedade distributiva, efetuando corretamente as operações indicadas.

Exemplo de resposta errada:


d) A . C = $5x.(3x^2-2xy)=15x^3-10xy$

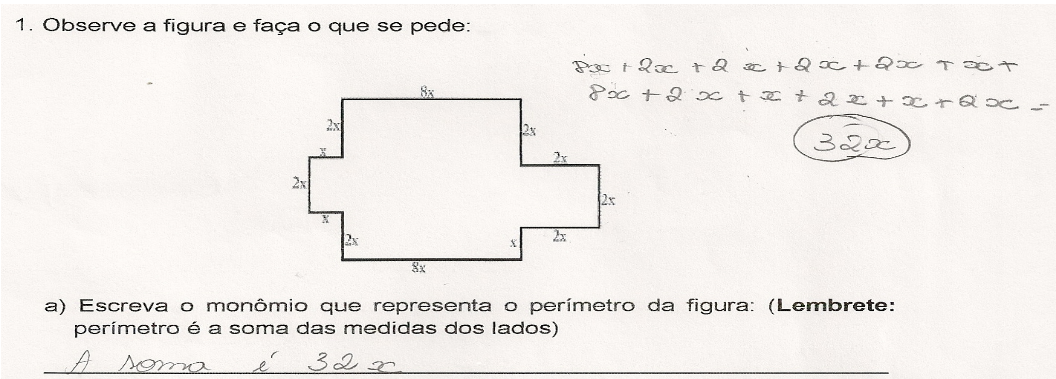
Analisando as respostas de uma maneira geral, percebemos que a maioria dos alunos sabe que deve usar os parênteses (propriedade distributiva) mas, apresenta problemas na hora de efetivar o cálculo. Constatamos, assim, a importância da compreensão das propriedades aritméticas básicas para o aprendizado da Álgebra(Demana (1994)).

ATIVIDADE 3

Nesta atividade foram apresentadas duas questões nas quais era necessário utilizar expressões algébricas para representar o perímetro e a área de figuras planas.

A questão 1 pedia o perímetro da figura e o cálculo do valor numérico da expressão encontrada. O índice de acerto foi de 67%. Os 33% que erraram, erraram no cálculo.

Vejamos:


1. Observe a figura e faça o que se pede:

$8x+2x+2x+2x+2x+x+$
$8x+2x+x+2x+x+2x=$
$32x$

a) Escreva o monômio que representa o perímetro da figura: (**Lembrete:** perímetro é a soma das medidas dos lados)

A soma é 32x

Já o cálculo do valor numérico apresentou 56% de erro, assim divididos: 22% acertaram o perímetro mas erraram o valor numérico e 78% erraram os dois itens.

Dentre os que erraram os dois itens (perímetro e valor numérico), uma resposta chamou a atenção:

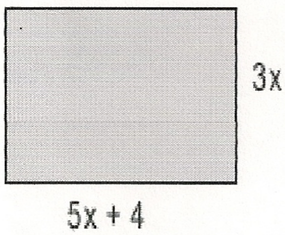
b) Qual é o valor numérico desse perímetro quando x = 5?

355

O aluno escreveu que 35x era a expressão que representava o perímetro. Ao calcular o valor numérico dessa expressão para x=5, encontrou 355. Houve aí, segundo Booth (1994), uma confusão com o aspecto do "valor posicional"na justaposição: o aluno encarou 35x como 3 centenas + 5 dezenas + x unidades, e não como 35 vezes x, ou seja, ele aplicou na Álgebra, de maneira errada, o que aprendeu na aritmética.

Na questão 2, que tratava da área de um retângulo, o índice de erro foi maior: 56%.

2. Observe a figura e faça o que se pede:



a) Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura:

$A = 5x + 4 . 3x = 15x^2 + 4$

Neste caso, os alunos entenderam que precisavam multiplicar 5x+4 por 3x mas não utilizaram os parênteses e não aplicaram a propriedade distributiva.

Outro erro envolvia o cálculo algébrico onde, segundo relato dos próprios alunos, eles entenderam que precisavam fazer uma multiplicação mas, no final somaram tudo:

a) Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura:

27x

O item b, que tratava do valor numérico teve o maior índice de erro: 89%. Uma das duplas que acertou o cálculo da área, errou o valor numérico pois fez a substituição em apenas um dos x que apareciam na expressão:

b) Qual é o valor numérico dessa área quando x = 2?

$3.(2)2(5x+4)= 30x+24$

ATIVIDADE 4

Nesta atividade foi apresentada uma sequência de figuras. Os alunos deveriam identificar um padrão e descobrir uma expressão geral que representasse a quantidade de elementos de uma figura em qualquer posição. Foi a atividade que apresentou maior grau de dificuldade pois, conforme Tinoco (2011) "a iniciativa de recorrer às letras para iniciar um raciocínio, ou expressá-lo, não se dá espontaneamente pelo estudante". Em conversa com os alunos percebemos que eles nunca tinham trabalhado daquela maneira.

1. Observem a sequência de figuras:

a) Desenhem a próxima figura da sequência:

Apenas 11% não conseguiram desenhar a próxima figura da sequência, pois não perceberam a existência de um padrão.

Já no item b, que pedia para desenhar a 7ª figura da sequência, 32% não conseguiram. Não perceberam o padrão e precisaram desenhar as figuras em todas as posições até chegarem à 7ª.

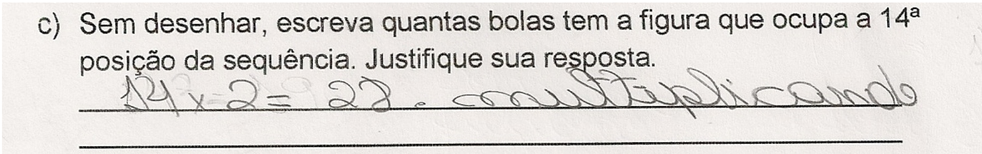
O item c teve apenas 22% de acerto. Como a questão pedia "Sem desenhar, escreva quantas bolas tem a figura que ocupa a 14ª posição da sequência", o grau de dificuldade aumentou consideravelmente. O aluno precisou abstrair, pois perdeu o recurso visual.

Exemplo de resposta correta:

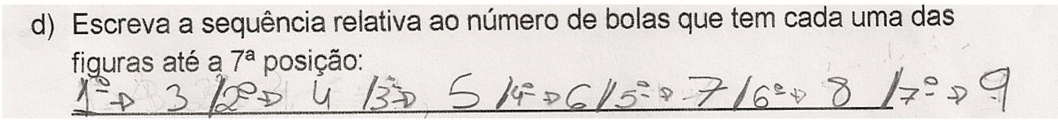
c) Sem desenhar, escreva quantas bolas tem a figura que ocupa a 14ª posição da sequência. Justifique sua resposta.

16 bolas, porque é 14 + 2 sendo que cada tem duas bolas a mais.

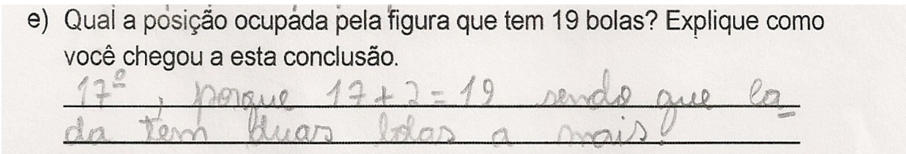
Exemplo de resposta errada:

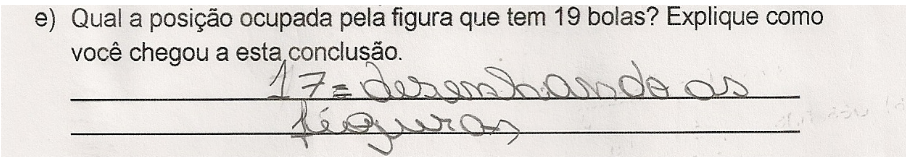

c) Sem desenhar, escreva quantas bolas tem a figura que ocupa a 14ª posição da sequência. Justifique sua resposta.
14 x 2 = 28. multiplicando

O item d teve 22% de acerto:

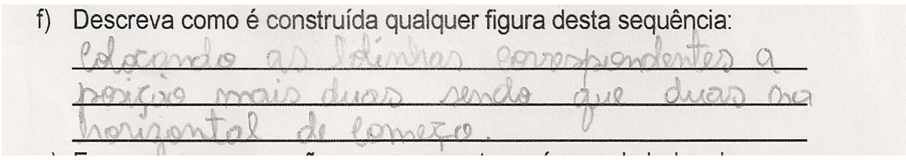

d) Escreva a sequência relativa ao número de bolas que tem cada uma das figuras até a 7ª posição:
1º → 3 / 2º → 4 / 3º → 5 / 4º → 6 / 5º → 7 / 6º → 8 / 7º → 9

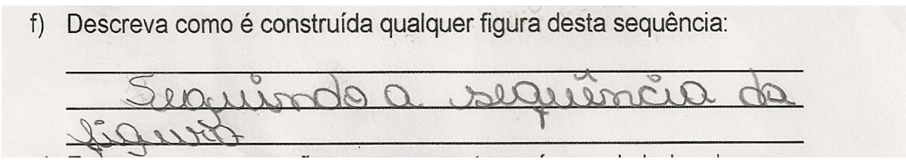
O item "e"teve, também, 22% de acerto, com respostas variadas:

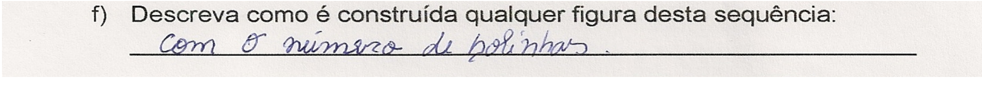

e) Qual a posição ocupada pela figura que tem 19 bolas? Explique como você chegou a esta conclusão.
17º, porque 17 + 2 = 19 sendo que cada tem duas bolas a mais!


e) Qual a posição ocupada pela figura que tem 19 bolas? Explique como você chegou a esta conclusão.
17 = desenhando as figuras

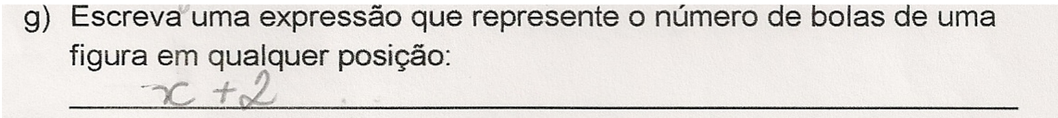
O item f teve apenas 11% de acerto. Os 89% restantes deram respostas variadas:


f) Descreva como é construída qualquer figura desta sequência:
colocando as bolinhas correspondentes a posição mais duas sendo que duas na horizontal de começo.


f) Descreva como é construída qualquer figura desta sequência:
Seguindo a sequência da figura


f) Descreva como é construída qualquer figura desta sequência:
Com o número de bolinhas.

O item g teve 44% de acerto porém, foi necessária a intervenção da professora:

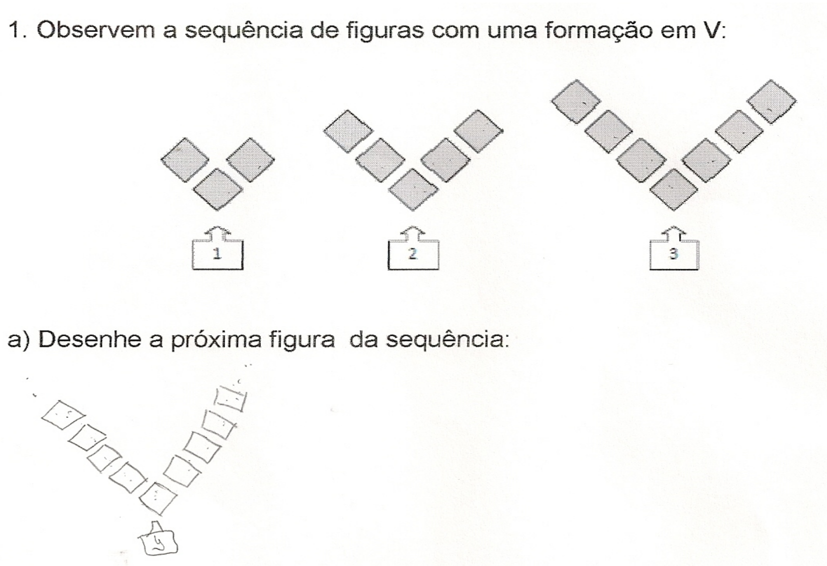

g) Escreva uma expressão que represente o número de bolas de uma figura em qualquer posição:

$x + 2$

ATIVIDADE 5

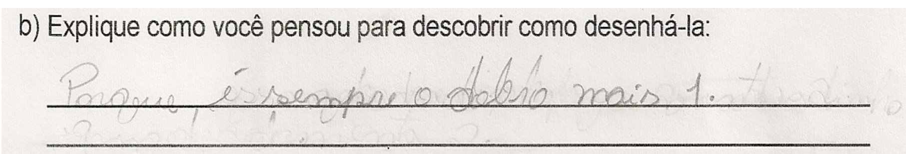
Como os alunos apresentaram muita dificuldade na atividade 4, foi aplicada a atividade 5, com o mesmo objetivo: identificar padrões e chegar a uma expressão geral para a sequência.

Agora, o item a da atividade 1 apresentou 100% de acerto.

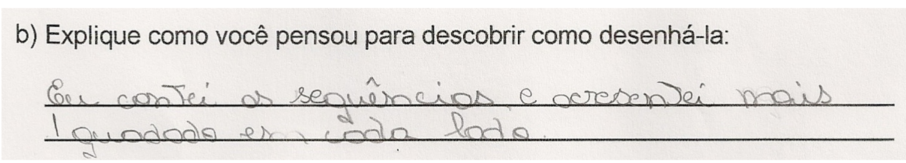

1. Observem a sequência de figuras com uma formação em V:

a) Desenhe a próxima figura da sequência:

Como os alunos conseguiram perceber o padrão da sequência, o item b teve, também, 100% de acerto mas, apresentou respostas variadas:


b) Explique como você pensou para descobrir como desenhá-la:

Porque, é sempre o dobro mais 1.


b) Explique como você pensou para descobrir como desenhá-la:

Eu contei as sequências e acrescentei mais 1 quadrado em cada lado

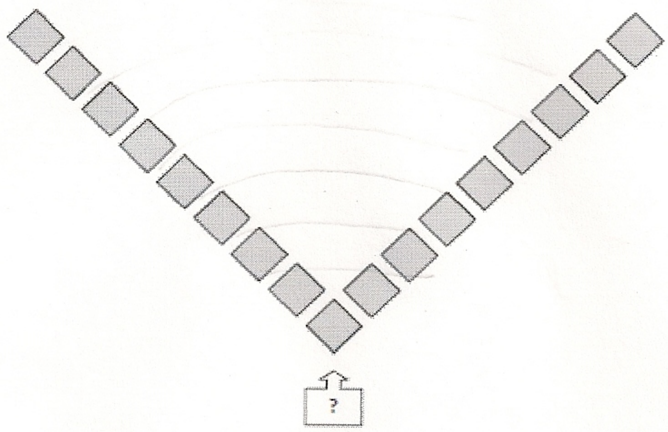
O item c teve 100% de acerto: tratava-se de escrever a sequência correta.

c) Preencha a tabela:

Número da figura	1	2	3	4	5
Número de quadrados	3	5	7	9	11

Dando continuidade à atividade, o item d apresentou 75% de acerto, evidenciando que a maioria dos alunos conseguiu perceber o padrão de formação da sequência.

d) A figura seguinte é constituída de 17 quadrados. Qual a posição que ela ocupa nessa sequência? 8ª posição



O item "e"teve 63% de acerto, com respostas variadas:

e) É possível ter uma figura com 86 quadrados? Explique sua resposta:

Não, Por que, todas as figuras acrescentando mais 2 quadrados, só dará número impar.

e) É possível ter uma figura com 86 quadrados? Explique sua resposta:

não Porque e o dobro mas um

O item f teve 75% de acerto. Desta vez, os alunos não receberam nenhuma explicação anterior à realização da atividade. Os demais alunos, correspondendo a 25%, deixaram em branco.

f) Escreva uma expressão que represente o número de quadrados de uma figura em qualquer posição?

$2x+1$

É preciso salientar que, tanto os alunos do 8º como os do 9º ano, apresentaram dificuldades semelhantes na resolução dos exercícios. Quanto maior o grau de abstração exigido, mais complexas as atividades se apresentaram. Notamos, porém, que é uma situação que pode ser revertida se forem apresentadas aos alunos atividades diversificadas.

Capítulo 5

Relato de uma trajetória no ensino da Álgebra

Atualmente, trabalho no Colégio Estadual Dr. Leonel Homem da Costa, localizado na cidade de Santo Antônio de Pádua, RJ.

Ser professora e, em especial, ser professora de Matemática, foi e será sempre um enorme desafio. Aprender Matemática tem hoje um significado diferente. A Matemática deve preparar os alunos para um estudo contínuo e para a resolução de uma variedade de problemas na escola, em casa e em situações profissionais. Desde o início de minha carreira, trabalhar com Álgebra no Ensino Fundamental, salvo em raras exceções, sempre foi trabalho penoso. Os alunos reclamam muito, e apesar de procurar trabalhar da melhor forma possível, sempre acho que os resultados não são realmente satisfatórios. Ministrar tal conteúdo nem sempre foi tarefa fácil, fato que constantemente muito me angustiou.

A passagem da Aritmética para a Álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos e os professores devem estar atentos, pois na grande maioria das vezes, as dificuldades apresentadas em Álgebra pelos alunos decorrem das suas dificuldades em Aritmética.

Durante os primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos estudam Matemática com problemas aritméticos que envolvem as quatro operações, trabalhadas numa complexidade crescente de números grandes e frações. Letras são usadas somente para representar grandezas, como "m"para metro, "g"para grama e "l"para litro. Por volta do 7° ano, os alunos se deparam com as equações, tipo: $2x + 13 = 33$. Não bastasse saber somar, subtrair, multiplicar e dividir, agora precisam desvendar o valor das letras. E, para completar a "confusão", a "conta"aparentemente já está resolvida afinal, ao contrário do que acontecia até esse momento, existe um número depois do sinal de igual.

É natural que os alunos estranhem e o papel do professor é fundamental para apresentar a passagem da Aritmética à Álgebra como continuidade e não como ruptura. Certamente que não se pode dissociar a maneira de comunicar e expressar a Matemática das dificuldades sentidas pelos alunos.

A chave é mostrar que tudo o que se aprendeu nas séries iniciais continua sendo válido. Mas, quando se trata de resolver equações, alguns procedimentos precisam ser modificados. A sequência de operações é um deles. Durante o trabalho com aritmética, os alunos lidam com problemas que pedem resultados com base em dados previamente estabelecidos: "João tem 100 figurinhas e compra mais 20. Depois, dá 10 para seu irmãozinho. Com quantas figurinhas João ficou?"O mais comum, em problemas deste tipo, é realizar as operações em sequência (primeiro somam-se 100 e 20. Depois, subtrai-se 10 do total). No fim, chega-se ao resultado que é quase sempre um número "de verdade".

A Álgebra opera por uma lógica diferente: "A soma de 8 com 7 é igual à soma de um número com 6. Descubra que número é esse:". Aqui, a tradução para a linguagem matemática tem de envolver, de uma só vez, todas as informações, gerando a equação: $8+7=x+6$, sendo "x"o número procurado. Apresenta-se aqui outra diferença importante, desta vez relacionada a um conceito, que diz respeito ao sinal de igual. Os alunos podem estar acostumados a entender que o que está do lado esquerdo da igualdade são as parcelas da conta e o que vem do lado direito, logo depois do sinal de igual, é o resultado, geralmente expresso por um único número. O papel do professor, aqui, é mostrar que mais do que indicar um resultado, o sinal de igual serve para mostrar uma equivalência. O paralelo com a aritmética ajuda: indique que 8 + 7 não somente "é igual a"15, mas também equivale a 15, do mesmo modo que a 10 + 5 ou 4 + 11, entre outras possibilidades.

Em seguida, é preciso construir novos conhecimentos. É muito importante explicar o que significam as letras que aparecem nas equações. Não basta dizer que são "números desconhecidos". Dependendo do contexto matemático as letras podem se comportar como incógnitas (valores fixos) ou variáveis (que podem assumir diversos valores). Uma boa maneira de sublinhar essa diferença é pela comparação de problemas.

Primeiro problema: "Num quintal há porcos e galinhas, num total de 44 pés. Qual é a quantidade de cada espécie de animal?". Chamando de "a"o número de porcos e de "b"o número de galinhas, temos que a resposta, então, é $4a + 2b = 44$, com muitos valores possíveis para a quantidade de porcos ("a") e de galinhas ("b"). Isso ocorre porque faltam elementos que determinem a situação.

Segundo problema: Num quintal há porcos e galinhas, num total de 44 pés. Qual é a quantidade de galinhas, sabendo que existem 6 porcos?". O segundo problema apresenta os mesmos dados e busca encontrar o número de galinhas. No entanto, revela que há 6 porcos. Assim, resta somente uma variável (o número de galinhas) que, por estar envolvida com outros elementos fixos ($4 \cdot 6 + 2b = 44$), é uma incógnita, um número determinado: se 6 porcos possuem 24 pés, os 20 restantes são divididos pelas galinhas, resultando 10.

É muito importante frisar que é necessário começar com exemplos fáceis e, progressivamente aumentar o grau de dificuldade, para, assim levar o aluno a internalizar o sentido da variável e da incógnita.

Outra questão de grande importância é fazer com que os alunos se expressem matematicamente, na forma oral e escrita, estabelecendo sempre relações entre grandezas variáveis. Esta é uma boa alternativa para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica do aluno, e quando verdadeiramente acontece a apropriação dessa linguagem, o pensamento flui melhor e o aluno consegue expressar relações mais complexas e abstratas.

No 8º ano do Ensino Fundamental o aluno é apresentado às expressões algébricas, operações com polinômios, produtos notáveis, fatoração e simplificação de expressões algébricas. Esse estudo, na maioria das vezes, é feito de uma forma "tradicional", isto é, dominado pela resolução de exercícios. A capacidade de manipular símbolos faz parte do pensamento algébrico. Mas não se pode deixar de alertar para o "perigo"de "cairmos na tentação"de dar apenas atenção ao modo como manipulamos os símbolos.

Atualmente várias são as formas de se tratar e reconhecer a Álgebra, e desenvolver um trabalho que faça com que os alunos, em diversas situações encontrem padrões e busquem generalizações, faz com que eles desenvolvam o raciocínio algébrico.

Fazer com que os alunos trabalhem com padrões é utilizar a realidade e as experiências do dia-a-dia do aluno. Muitas situações naturais ou não, são explicadas por meio de padrões matemáticos. Explorar padrões é descobrir e interpretar regularidades. Reconhecer um padrão em um fato, ou em uma situação, possibilita a previsão da continuidade do mesmo, ou seja, pode-se prever seu comportamento.

À medida que descobrem relações, encontram conexões, escrevem as generalizações e fazem previsões, oportunizando compreensão. Isso contribui para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos.

A realização de tarefas que envolvam o estudo de padrões ajuda os alunos a perceberem a "verdadeira"noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido. Procurar relações próximas (recursivas) e distantes (estas envolvendo a generalização, modelação) entre os termos exige a mobilização de um tipo de pensamento algébrico, mas também o promove e desenvolve.

A procura de padrões familiariza os alunos com as relações, desenvolve a comunicação matemática e ajuda a criar hábitos de investigação.

Nessa questão da comunicação em sala de aula de Matemática, a formulação de perguntas ocupa um lugar de destaque, sendo aplicada em situações diversificadas e com vários intuitos. O questionamento permite ao professor detectar dificuldades de aprendizagem, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar para assim, desenvolver nele a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

Em Matemática, o medo de errar torna os alunos mudos. Desta forma, cabe ao professor promover atividades que estimulem e impliquem a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar seus raciocínios, a explicar, a discutir, a confrontar processos e resultados.

Uma possibilidade é o seguinte exemplo: "Sabendo que o produto de dois números é 576, é possível conhecer o produto do dobro do primeiro pelo triplo do segundo?". É natural que os alunos, primeiro, pensem em diversos valores para alcançar 576. Eles podem chegar a diferentes pares de números: 576 e 1 e 288 e 2, por exemplo. Com esses dados, conseguem terminar o problema. Com o primeiro par, temos $576 \cdot 2 = 1152$ e$1 \cdot 3 = 3$, que multiplicados entre si resultam em 3 456. Com o segundo par, $288 \cdot 2 = 576$ e $2 \cdot 3 = 6$, que multiplicados resultam, novamente, 3 456.

Com as sucessivas tentativas, os alunos vão concluir que o resultado que buscamos (o produto do dobro do primeiro pelo triplo do segundo) independe dos fatores em questão. Aí, sim, é hora de mostrar que a Matemática possui uma maneira de escrever esse tipo de raciocínio generalizado, simplificando o processo. No exemplo, $ab = 576$ e $c = 2a \cdot 3b =$

$6ab = 6 \cdot 576 = 3456$, sendo "c"o número pedido no enunciado. A notação obtida pela aplicação de propriedades da multiplicação (aprendidas no estudo da aritmética) aponta que a resposta esperada (o "c") é seis vezes o resultado inicial, sem que seja necessário descobrir "a"e "b".

A utilização de tarefas que envolvam o estudo de padrões é um excelente meio para trabalhar a generalização, dando forma e significado aos símbolos algébricos, ensinando os alunos a resolver equações, a compreender funções, a modelar.

A interação dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado. Em primeiro lugar porque irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na sua aprendizagem. Outra razão muito importante é que é esta ligação que permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar.

Os conceitos algébricos iniciais são os alicerces para a formação de conceitos algébricos posteriores, e quando estes não são bem trabalhados, é provável que o déficit no ensino da Álgebra se prolongue, constituindo um obstáculo à formação de outros conceitos.

O que será necessário acontecer para que possamos afirmar que estamos perante uma aula de Matemática de sucesso? São vários os fatores que garantem o sucesso de uma aula de Matemática. Entre outros, podemos afirmar que uma aula onde haja um bom ambiente de trabalho e onde os alunos sejam estimulados a discutir e a refletir é, sem grande margem de dúvida, uma aula bem sucedida. Mas só isso não é com certeza suficiente, é também necessário ter tarefas matemáticas interessantes e desafiadoras.

Ensinar Álgebra no Ensino Fundamental, por meio de dados tirados da vida cotidiana, evita um simbolismo exagerado. Partir de situações concretas evita que os alunos se escravizem diante de operações e regras, estimulando-os a refletir sobre um problema e não somente sobre que operações devem executar para resolvê-lo. Além disso, a bagagem que eles trazem de suas vivências é reconhecida como "matéria prima"e ponto de partida para um trabalho de construção do conhecimento. Trabalhar a Matemática associada ao cotidiano é um referencial que dá condições para que o aluno se sinta inserido no seu contexto, e reconheça essa ciência como um saber vivo e real, e como uma ferramenta para justificar escolhas, decisões, resolver os problemas da sociedade e até os seus próprios problemas.

Assim, diferentes conceitos, apreendidos em diferentes circunstâncias, podem ser novamente tratados permitindo, ao aluno, um melhor entendimento dos mesmos.

Considerações Finais

Superando as limitações de tempo, próprias de uma pesquisa acadêmica, acreditamos que os resultados dessa pesquisa tenham contribuído para a nossa prática como professora que ensina Matemática, em especial, a Álgebra, e para os nossos pares que lidam com ela todos os dias.

O estudo algébrico envolve uma interpretação exigindo a tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática, e muitas vezes as dificuldades apresentadas pelos alunos na tradução de situação da linguagem corrente para a linguagem formal residem na interpretação. Não sendo capaz de interpretar, o aluno não conseguirá representar formalmente a situação.

No entanto percebe-se que o trabalho com o estudo algébrico não vai muito adiante de manipulações de símbolos que na maioria das vezes não possuem nenhum significado, sendo o seu estudo desenvolvido de forma mecânica.

Esta forma de ensino tem sido limitadora, na qual o papel do aluno se restringe a memorização de regras já que não propicia relação dos procedimentos algébricos com situações reais. Para que ocorram mudanças, tão necessárias no ensino de Álgebra, é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico, pois não se pode utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização. Deve-se entender que a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. O pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola; sendo assim, pode-se afirmar que a Álgebra perde seu valor como um rico instrumento para o desenvolvimento de um raciocínio mais abrangente e dinâmico.

Talvez, parte desta confusão se dê por falta de experiências que permitam ao aluno construir o conceito de variável. Se fossem propiciadas situações onde o aluno pudesse constatar a variabilidade de uma representação, a ideia de variável poderia ser diferente. O exemplo abaixo, adaptado de educação.uol.br/pesquisaescolar/ensinofundamental, mostra uma atividade que pode ser utilizada para a introdução do conceito de variável:

Para apresentar esse conceito, os passos de uma pessoa podem servir como ilustração. Uma situação interessante é a de imaginarmos um grupo de alunos, todos com a mesma idade, caminhando na quadra da escola. Nesse grupo, mesmo em condições aparentemente homogêneas, teríamos uma variação no tamanho dos passos.

Assim, se as medidas correspondentes aos tamanhos dos passos desses alunos tiverem o valor mínimo de 30 cm e o máximo de 50 cm, como descrever essa variação?

A linguagem matemática, por possuir alguns recursos, descreverá a variação do tamanho desses passos por meio de uma frase matemática em que o tamanho do passo é representado pela letra p:

$$30cm \leq p \leq 50cm$$

O estudo da variação de uma medida pode ser mostrado em outros problemas, nos quais não temos um intervalo definido, como no exemplo que acabamos de descrever.

A variável é um recurso que pode servir para explorar uma infinidade de valores em uma situação em que duas ou mais medidas são desconhecidas. Um dos problemas que ilustra essa abordagem é o que envolve o conceito de razão do espaço pelo tempo; em outras palavras, a velocidade. Para analisá-lo, vamos substituir a caminhada do grupo de alunos pelo deslocamento de um robô.

Por ser uma máquina, fica viável considerarmos os passos com a mesma medida e com o mesmo ritmo. A partir dessa condição, se for extraída a informação de que esse robô percorre 200 metros em 50 segundos chegaremos facilmente à conclusão de que o movimento do robô possui a velocidade ou a razão constante de 4 metros por segundo:

$$\frac{200metros}{50segundos} = \frac{4metros}{1segundo} = 4m/s$$

A conclusão de a razão ser constante e igual a 4 m/s permitirá várias projeções, sendo que uma delas pode ser construída com a seguinte pergunta: quanto o robô percorrerá no intervalo de 15 segundos? Para representar o deslocamento do robô nessa situação utilizaremos a letra D:

$$\frac{4metros}{1segundo} = \frac{D}{15segundos}$$

$$D \cdot (1segundo) = (4metros)(15segundos)$$

$$D = \frac{(4metros)(15segundos)}{1segundo} = 60metros$$

A partir ainda dessas mesmas informações podemos projetar o tempo que o robô gastará para percorrer uma determinada distância. Que tal o comprimento da quadra da escola (27 metros)? Nessa condição, a letra T será utilizada para representar o intervalo de tempo que ainda não foi calculado:

$$\frac{4metros}{1segundo} = \frac{27metros}{T}$$

$$T = \frac{(27metros)(1segundo)}{4metros} = 6,5segundos$$

Observando e analisando essas respostas, montamos uma sequência de razões que mostram que o valor simplificado é sempre igual a 4 metros por segundo (4m/s). Uma sequência que acaba propondo um jogo em que o desafio é achar os valores para D e T:

$$\frac{200metros}{50segundos} = \frac{60metros}{15segundos} = \frac{27metros}{6,75segundos} = \cdots = 4m/s$$

Assim, poderemos organizar uma expressão matemática utilizando as letras D e T para representar, respectivamente, as medidas do deslocamento e do intervalo de tempo (que podem variar nesse tipo de experiência):

$$\frac{200metros}{50segundos} = \frac{60metros}{15segundos} = \frac{27metros}{6,75segundos} = \cdots = \frac{D}{T} = 4m/s$$

O jogo da variação entre os valores de D e de T, que propiciam o resultado de 4 m/s, faz com que as letras D e T sejam definidas como duas variáveis, em um novo formato de uma expressão matemática:

$$\frac{D}{T} = 4m/s$$

$$D = (4m/s)(T)$$

Essa expressão, que relaciona as duas variáveis, D e T, organiza qualquer tipo de projeção em relação ao deslocamento e ao intervalo de tempo que possa ser inventado pela nossa imaginação. Quanto o robô percorrerá no intervalo de uma hora? Para essa pergunta é preciso somente prestar atenção nas unidades, já que a unidade de tempo da razão é dada em segundos, enquanto que, na pergunta, é dada em horas. Assim, neste caso, ficará mais fácil a passagem da hora para a unidade de segundo. Dessa forma, para obter a projeção necessária, temos de lembrar que 1 hora é igual a 3600 segundos:

$$D = (4m/s)(T) \rightarrow D = \frac{4m}{1s} \cdot 3600s = 14400m$$

Poderíamos continuar a brincadeira, imaginando quanto esse robô andaria no intervalo de um dia ou quanto tempo demoraria para dar 20 voltas na quadra.

É, também, uma boa oportunidade para mostrarmos que trocando a letra D (que representa a medida do deslocamento) e a letra T (que representa o tempo gasto neste deslocamento) por s e t, respectivamente, teremos: t=$\frac{4m/s}{s}$ e s=$(4m/s)(t)$. Levando em conta que 4m/s é a velocidade do robô, podemos chegar que para uma determinada velocidade v, teremos: s = v . t; v=$\frac{s}{t}$ e t=$\frac{s}{v}$, como aparece nos livros de Física.

Por meio dessas estratégias, os alunos compreendem que a elaboração de fórmulas é a forma convencional de generalizar um raciocínio. Assim, aprendendo a montar algoritmos e equações e sabendo o significado das letras que representam incógnitas e variáveis, eles entendem melhor a lógica que estrutura a Álgebra e comprovam sua utilidade.

Referências Bibliográficas

Baumgart, J. K. (1992). *História da Álgebra*. Atual, São Paulo.

Booth, L e Cook, J. (1994). Dificuldades da crianças que se iniciam em Álgebra. In Coxford, A. F. and Shulte, A. P., editors, *As Ideias da álgebra*. Atual, São Paulo.

BRASIL (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática(5ª a 8ª séries)*. MEC/SEF, Brasília.

Demana, F e Leitzel, J. (1994). Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In Coxford, A. F. and Shulte, A. P., editors, *As Ideias da álgebra*. Atual, São Paulo.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., and Miguel, A. (1992). Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? *Pro-Posições*, 3(1(7)):39–54.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., and Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, 4(1(10)):78–91.

Guelli, O. (1992). *Contando a História da Matemática: Equação: o idioma da Álgebra*, volume 2. Ática, São Paulo.

House, P. A. (1994). Reformular a Álgebra na escola média: por que e como. In Coxford, A. F. and Shulte, A. P., editors, *As Ideias da Álgebra*. Atual, São Paulo.

Imenes, L. M. (1989). *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática*. Tese de Mestrado.UNESP, Rio Claro.

Imenes, L. M. and Lellis, M. (1994). O currículo tradicional e o problema: um descompasso. *A Educação Matemática em revista*, (2):5–12.

Lins, R C e Gimenez, J. P. (2006). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Papirus, Campinas.

Lins, R. (1994). Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula. *A Educação Matemática em revista*, (2):26–31.

Machado, N. J. (1991). *Matemática e Língua Materna-Análise de uma impregnação mútua*. Cortez Editora,Autores Associados, São Paulo.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In Vale, I., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L., and Canavarro, P., editors, *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. SEM - SPCE, Lisboa.

Tinoco, L. A. (2011). *Álgebra: pensar, calcular, comunicar*. UFRJ/IME, Rio de Janeiro.

Usiskin, Z. (1994). Concepções sobre a Álgebra na escola média e utilização das variáveis. In Coxford, A. F. and Shulte, A. P., editors, *As Ideias da Álgebra*. Atual, São Paulo.

Apêndice

C. E. Dr. Leonel Homem da Costa

Aluno (a): ____

Série: ____

ATIVIDADE 1

1. Escreva o que representa a letra “a” na expressão: “7 + a = 13”?

____

____

2. O que representa a letra “x” na expressão “7 + x”?

____

____

3. Escreva o número que deve ocupar o lugar do $\square$:

$$8 + 7 = \square + 6$$

4. Na equação abaixo, qual o valor de x?

$$7 + x = 9 + 8$$

5. Resolva a equação abaixo:

$$3x + 5 = 17$$

6. Você é capaz de escrever a solução da equação abaixo sem resolvê-la?

$$3y + 5 = 17$$

( ) SIM: y = ______ ( ) NÃO

Justifique sua resposta:

____

____

C. E. Dr. Leonel Homem da Costa

Aluno (a): ______________________________________

Série: ____

ATIVIDADE 2

1. Observe a expressão abaixo e faça o que se pede:

$$3x + 4 - 2x + 5$$

a) Simplifique-a, reduzindo os termos semelhantes:

____

b) Calcule o seu valor numérico quando $x = 3$:

____

2. Se $x = 15$ e $y = 3$, então qual é o valor da expressão:

$$2\,(x + y)?$$

____

3. Dados:

$A = 5x$, $B = x^2 + 2xy$ e $C = 3x^2 - 2xy$, calcule:

a) $2A =$ ____

b) $3B =$ ____

c) $A \cdot B =$ ____

d) $A \cdot C =$ ____

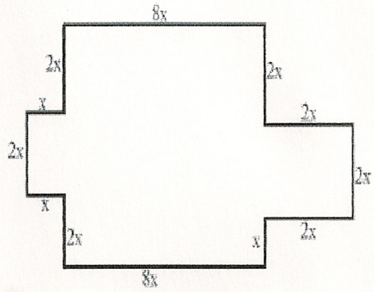
C. E. Dr. Leonel Homem da Costa

Aluno (a): ____

Série: ____

ATIVIDADE 3

1. Observe a figura e faça o que se pede:



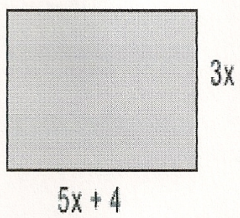
a) Escreva o monômio que representa o perímetro da figura: (**Lembrete:** perímetro é a soma das medidas dos lados)

____

b) Qual é o valor numérico desse perímetro quando x = 5?

____

2. Observe a figura e faça o que se pede:



a) Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura:

____

b) Qual é o valor numérico dessa área quando x = 2?

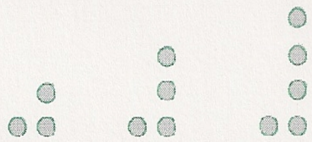
____

C. E. Dr. Leonel Homem da Costa

Aluno (a): ____ Série: _____________

ATIVIDADE 4

1. Observem a sequência de figuras:



a) Desenhem a próxima figura da sequência:

b) Desenhem a 7ª figura da sequência. Quantas bolas tem a figura?

c) Sem desenhar, escreva quantas bolas tem a figura que ocupa a 14ª posição da sequência. Justifique sua resposta.

____

____

____

d) Escreva a sequência relativa ao número de bolas que tem cada uma das figuras até a 7ª posição:

____

e) Qual a posição ocupada pela figura que tem 19 bolas? Explique como você chegou a esta conclusão.

____

____

____

f) Descreva como é construída qualquer figura desta sequência:

____

____

____

g) Escreva uma expressão que represente o número de bolas de uma figura em qualquer posição:

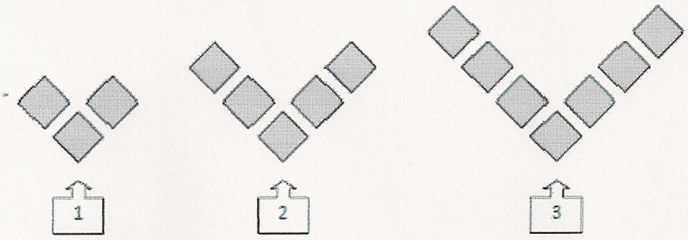
____

C. E. Dr. Leonel Homem da Costa

Aluno (a): ______________________________________ Série: ____________

ATIVIDADE 5

1. Observem a sequência de figuras com uma formação em V:



a) Desenhe a próxima figura da sequência:

b) Explique como você pensou para descobrir como desenhá-la:

____

____

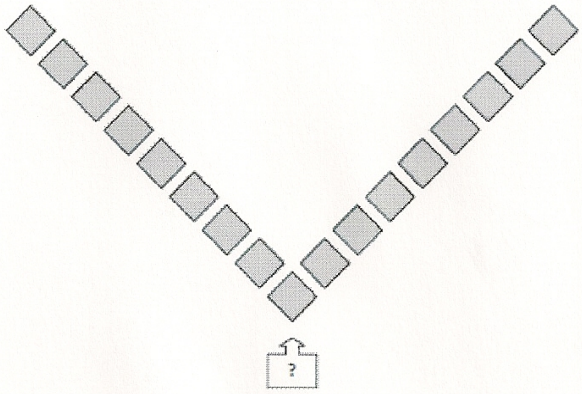
____

____

c) Preencha a tabela:

Número da figura	1	2	3	4	5
Número de quadrados	3	____	____	____	____

d) A figura seguinte é constituída de 17 quadrados. Qual a posição que ela ocupa nessa sequência? ________________________________



e) É possível ter uma figura com 86 quadrados? Explique sua resposta:

____
____
____
____

f) Escreva uma expressão que represente o número de quadrados de uma figura em qualquer posição?

____