



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

DIEGO CARROZZINO AMARAL CORDEIRO

MATEMÁTICA FINANCEIRA NA ESCOLA

Orientador: MÁRIO OLIVERO MARQUES DA SILVA

**UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE**

**NITERÓI
NOVEMBRO/2013**

DIEGO CARROZZINO AMARAL CORDEIRO

A MATEMÁTICA FINANCEIRA NA ESCOLA

Dissertação apresentada por **Diego Carrozzino Amaral Cordeiro** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva

Niterói
2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

C794 Cordeiro, Diego Carrozino Amaral
Matemática financeira na escola / Diego Carrozino Amaral Cordeiro.
– Niterói, RJ : [s.n.], 2013.

44 f.

Orientador: Prof. Dr. Mário Oliveira Marques Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2013.

1. Ensino de matemática. 2. Matemática Financeira. I. Título.

CDD 510.7

DIEGO CARROZZINO AMARAL CORDEIRO

TÍTULO

Dissertação apresentada por **DIEGO CARROZZINO AMARAL CORDEIRO** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 28/11/2013

Banca Examinadora

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Miriam Abdon - Membro
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Jaime Velasco - Membro
Doutor – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Nancy de Souza Cardim - Membro
Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e saúde para conseguir chegar até o fim dessa caminhada;

Aos meus pais e minha noiva que tanto me ajudaram e torceram por mim;

Ao meu orientador, Mário Olivero, pela dedicação e companheirismo que tivemos do início até o fim desse trabalho;

Aos amigos e professores Thales do Couto, Ivail Muniz Júnior e Rinaldo Diniz, que tanto me incentivaram à realização de um Mestrado em Matemática;

A todos os Professores do PROFMAT da UFF que me proporcionaram um Mestrado em excelente nível acadêmico.

RESUMO

Neste trabalho sobre o ensino de Matemática Financeira, defenderemos a importância do tema, enfatizando a necessidade de se dar uma maior atenção ao assunto, uma vez que os futuros consumidores serão ou até mesmo já são os nossos alunos.

A verdade é que a matemática financeira apresentada em sala de aula geralmente não atende as necessidades do consumidor para que ele possa discernir e escolher qual entre as muitas opções financeiras que lhes são apresentadas aquela que melhor lhe convém.

Para que os alunos possam compreender e utilizar as ideias e as ferramentas disponibilizadas pela Matemática Financeira, exploraremos temas que fazem parte dos conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, tais como Juros Simples, Juros Compostos, Progressões Geométricas, Funções e Análise de Gráficos. Também faz parte do nosso objetivo que o aluno possa compreender, deduzir, aplicar e resolver problemas utilizando conceitos matemáticos interligados com essa temática.

No trabalho apresentamos os resultados de uma experiência com alunos do ensino fundamental.

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| MOTIVAÇÃO | 13 |
| 1 FUNÇÕES..... | 19 |
| Conceito de função | 19 |
| Introdução ao estudo de sequências | 25 |
| Progressão geométrica..... | 27 |
| 2 MATEMÁTICA FINANCEIRA | 33 |
| Juros simples | 34 |
| Juros compostos..... | 34 |
| Juros simples versus juros compostos | 36 |
| Valor atual de um conjunto de capitais | 38 |
| Sequência uniforme de pagamentos | 44 |
| Dívidas vitalícias | 45 |
| 3 UMA EXPERIÊNCIA SOBRE ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA | 49 |
| Descrição das atividades propostas na oficina realizada | 49 |
| Impressões do autor sobre a experiência | 54 |
| BIBLIOGRAFIA | |

Motivação

Por que introduzir Matemática Financeira nas escolas?

Com a explosão da oferta de crédito no Brasil, após a estabilidade da moeda nos últimos dezenove anos, os financiamentos cresceram de maneira impressionante e passaram a estar presentes nos orçamentos de grande parte da população economicamente ativa no país. Atualmente, com a facilidade de crédito, compras a prazo e financiamentos são atrativos para quem não possui condição de realizar uma compra à vista. O governo até estuda meios de reduzir a inadimplência devido a compras que não foram planejadas em razão do não entendimento, por parte do cidadão, dos conceitos da matemática financeira.

Além disso, diante da realidade do sistema previdenciário brasileiro, poupar e investir são ações que merecem uma atenção especial. A educação para essa nova realidade não acompanhou a velocidade dessas transformações. O resultado é que a população tem lidado com o dinheiro de maneira desastrosa e a falta de informação matemática tem sido um dos principais motivos dessa realidade.

Neste trabalho sobre o ensino de Matemática Financeira nas escolas, defenderemos a importância deste tema, enfatizando a necessidade de se dar maior atenção a esse assunto nas salas de aula, uma vez que os futuros consumidores serão ou até mesmo já são os nossos alunos. A verdade é que a matemática financeira vista em sala de aula geralmente não atende às necessidades do consumidor para que ele possa discernir entre as muitas opções financeiras que lhes são apresentadas. Para que os alunos possam compreender e utilizar melhor as ferramentas disponibilizadas pela Matemática Financeira, exploraremos temas que fazem parte dos conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, tais como Juros Simples, Juros Compostos, Progressões Geométricas, Funções e Análise de Gráficos. Também faz parte do nosso objetivo que o aluno possa compreender, deduzir, aplicar e resolver problemas utilizando conceitos matemáticos interligados com essa temática.

No Ensino Fundamental podemos introduzir os conceitos de porcentagem e descontos simples assim que o aluno já tenha conhecimento de frações e números racionais na forma

decimal. Consequentemente, nas séries finais do Ensino Fundamental, as ideias de capitalização simples e, posteriormente, composta, também já podem ser introduzidas. Isso permitirá aos alunos fazerem comparações com promoções anunciadas pela mídia, verificando se a compra a prazo é mais vantajosa que a compra à vista.

No Ensino Médio podemos utilizar o estudo das funções e das progressões para analisar os efeitos dos juros nas compras a prazo, como se dá a construção das tabelas de capitalizações, o comportamento do dinheiro aplicado na caderneta de poupança, entre outras situações cotidianas. O que importante é despertar o interesse dos alunos para um assunto que diz respeito a todos e que gera muitas dúvidas em grande parte da população.

Um dos motivos que justifica o ensino de Matemática Financeira nos Ensinos Fundamental e Médio é a sua aplicabilidade em questões com as quais a população tem lidado. O objetivo do ensino da Matemática Financeira é formar cidadãos que saibam analisar criticamente as operações financeiras, tendo o poder de optar e decidir o que melhor lhe convém diante de suas expectativas, interpretando e refletindo sobre as opções que o mercado oferece. Esse assunto eminentemente remete à contextualização. Decidir entre comprar à vista ou a prazo faz parte da vida de cada um. É preciso, urgentemente, que essas decisões sejam orientadas e façam parte da formação matemática dos cidadãos.

A Matemática Financeira e os PCNs

Tendo por base a LDB (Lei de Diretrizes e Bases), os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) são diretrizes propostas pelo Governo Federal como referências para as escolas municipais e estaduais construírem seus currículos. Segundo Lima e Zanlorense (2009), os PCNs tiveram origem na Conferência Mundial de Educação para Todos, realizada na Tailândia, em 1990. A partir desse evento, novas políticas para os países dependentes foram elaboradas visando o ensino às décadas futuras.

Além de propor os conteúdos a serem transmitidos, nas mais diferentes áreas, os PCNs oferecem práticas de organização dos conhecimentos, modos de abordagem dos conteúdos e exemplos de comportamentos a serem seguidos pelos professores nas mais diferentes circunstâncias. Desse modo Lima e Zanlorense (2009, p.14) afirmam que bastaria adequá-lo às peculiaridades de cada região, com propostas atuais, inovadoras, para uma sociedade democrática, no exercício da cidadania.

Independentemente da condição socioeconômica e da localização da escola, a intenção dos PCNs é fornecer aos estudantes meios para progredir no trabalho e para ter acesso

igualitário ao conhecimento. Além disso, tais diretrizes visam a autonomia da escola, a participação da comunidade na gestão escolar e a descentralização das ações.

Tendo em vista a busca de satisfação das necessidades básicas de aprendizagem para assegurar uma formação para o exercício da cidadania, apresentar referenciais curriculares de cada disciplina da Educação Básica, mais específicos para criar uma base curricular nacional comum, tais princípios propiciam a elaboração de um meio para controlar a escola.

Divulgados no fim de 1995, os PCNs continham expectativas de aprendizagem para cada disciplina. O debate gerou polêmica e resistência de alguns setores da sociedade que afirmavam que os parâmetros engessavam e limitavam o trabalho dos professores em sala de aula.

De acordo com Lima e Zanlorense (2009) os PCNs foram elaborados pelo MEC, a partir de 700 propostas feitas por especialistas em educação, considerando experiências já existentes em escolas públicas e privadas, com a intenção de tornar mais eficiente e organizado o currículo das escolas brasileiras.

O Planejamento, execução e avaliação de ações de intervenção na realidade são apontados no PCN do Ensino Médio como objetivos da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Temos aí mais uma justificativa para a abordagem deste assunto, na medida que ele fornece conhecimentos para a interpretação e análise e execução de ações do cotidiano.

O ensino de matemática financeira também converge para as três finalidades do Ensino Médio, apresentadas no art. 35, da LDB:

- O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade: I a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;
- II a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- III a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Observamos que o estudo de Matemática Financeira no Ensino Médio favorece, orienta e contribui para as finalidades do Ensino Médio descritas pela LDB. Tanto para o prosseguimento dos estudos, principalmente para os que cursarem cursos técnicos e superiores voltados para a área tecnológica, quanto para a preparação básica para o trabalho e construção da

autonomia intelectual e do pensamento crítico o que inclui a todos, sem distinção de carreira ou de formação os conceitos estudados em Matemática Financeira apontam explicitamente para essas finalidades.

Mais especificamente, como aponta o PCN+ (MEC, 2002), a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da educação básica:

- Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

O ensino de Matemática financeira oferece ótimas oportunidades para o desenvolvimento da representação e da comunicação. Explorar a produção de textos, como por exemplo, a construção de uma matéria fornecendo dicas e sugestões ao consumidor, traduz uma forma de comunicar o que a especificidade da linguagem matemática traduz na resolução dos problemas.

A investigação e compreensão estão presentes na forma como entendemos que deva ser o ensino de matemática financeira no Ensino Médio, qual seja, a de introdução de conceitos a partir da resolução de problemas reais e uma formação com tal ambição exige métodos de aprendizagem compatíveis, ou seja, é preciso prover condições efetivas para que os alunos possam comunicar-se e argumentar, defrontar-se com problemas, compreendê-los e resolvê-los, participar de um convívio social que lhes oportunize se realizarem como cidadãos, fazer escolhas e proposições, tomar gosto pelo conhecimento.

Em particular, para o ensino da Matemática Financeira, os PCNs abordam conteúdos dentro do Tema 1- Álgebra: números e funções, destacando como relacioná-los com atividades no mundo real.

O primeiro tema ou eixo estruturador, Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos

presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. (BRASIL, 2000, PCN+, p. 120).

Ainda os PCNs sugerem:

os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2000, PCN+, p.121).

Em uma versão mais recente dos PCNs, destaca-se que o trabalho com Números e Operações, deve,

[...] proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano, tais como: [...] operar com frações, em especial com porcentagens; [...] Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (BRASIL, 2006, PCN, p. 71).

Quando os PCNs abordam sobre o impacto provocado pela tecnologia na sociedade, destaca que a tecnologia é um recurso que pode subsidiar a aprendizagem da Matemática Financeira, considerando uma formação que capacita para o uso de calculadora e planilhas eletrônicas.

Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar sequências numérica e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma sequência de pagamentos sob juros simples e juros compostos. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análises de dados extraídos de situações reais. (BRASIL, 2006, PCN, p.89).

Conclusão

Podemos dizer:

O ensino de Matemática, e em especial, o da Matemática Comercial e Financeira, não pode continuar sendo um fator de exclusão do sistema escolar brasileiro, do mundo profissional e do ambiente corporativo, num contexto informatizado em que as linguagens nos veículos de informação são carregadas de signos lógicos quantitativos (Rosetti, 2003, P.22).

Concluimos então que já é hora de incrementar nossas práticas educacionais com o ensino de elementos de Matemática Financeira, visando motivar os estudantes para a construção de conhecimentos matemáticos, além de dar a eles uma oportunidade de ampliar o senso crítico e a capacidade de exercer sua cidadania.

Rosetti Júnior. Helio (2003). Não Pare de Estudar. Vitória: Oficina de Letras.

Funções

Introduziremos, a partir de agora, as principais definições e resultados matemáticos que usaremos neste trabalho de conclusão de curso. Começamos estabelecendo as noções de relação e de função.

Conceito de Função

Na introdução deste assunto, queremos estabelecer um exemplo motivacional para o estudo de funções. Nada melhor do que a relação existente entre duas grandezas: espaço e tempo. Queremos concluir que o espaço percorrido encontra-se em função do tempo gasto por um atleta, conforme veremos no exemplo abaixo.

Numa esteira ergométrica, um atleta treina com uma velocidade constante para a maratona 2013 do RJ. Seu treinador observa, de 10 em 10 minutos, o espaço percorrido e anota em uma tabela seu desempenho.

| Tempo (minutos) | Distância (metros) |
|-----------------|--------------------|
| 10 | 1 500 |
| 20 | 3 000 |
| 30 | 4 500 |
| 40 | 6 000 |
| 50 | 7 500 |
| 60 | 9 000 |

A cada instante x corresponde uma única distância y . Dizemos que a distância percorrida pelo atleta encontra-se em função do instante de tempo gasto em seu treinamento. A relação entre o espaço e o tempo pode ser descrita por uma fórmula: $y = 1\,500x$.

Definições

Lembramos as definições de relação e função entre dois conjuntos.

Definição 1. *Uma relação R entre dois conjuntos A e B quaisquer não vazios é um subconjunto também não vazio do produto cartesiano $A \times B$ de A por B :*

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid xRy\}.$$

Isto é, o par ordenado $(x, y) \in R$ se, e somente se, x está relacionado com y .

Exemplo 1. *Seja $A = B = \mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Definimos uma relação R de \mathbb{R} em \mathbb{R} pela lei xRy se, e somente se, $x \geq y$. Neste caso, $P = (-2, 2) \notin R$, pois $-2 < 2$, mas $Q = (2, -2) \in R$, pois $2 \geq -2$. Veja o gráfico da relação R :*

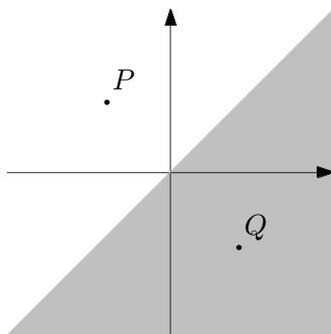


Gráfico da relação $x \geq y$.

Definição 2. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B recebe o nome de função, definida em A , com imagens em B , se, e somente se, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

O termo *aplicação* de A em B também é usado para função.

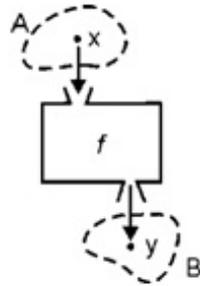
Assim, uma função associa um elemento do domínio ou conjunto de valores de entrada a elementos de um segundo conjunto, o contradomínio ou conjunto de valores de saída, de tal forma que, a cada elemento do domínio está associado exatamente um elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio que são relacionados por f a algum $x \in A$, é o conjunto imagem.

No caso do exemplo motivacional, do atleta, o domínio é o intervalo de tempo durante o qual o atleta treinou, digamos $A = [0, 60] \subset \mathbb{R}$, e o contradomínio é um intervalo que contenha a distância percorrida, em metros, digamos $B = [0, 10\,000] \subset \mathbb{R}$. A lei de definição

da função, $f(x) = 1500x$, estabelece a relação que associa a cada instante uma única distância percorrida. A notação a seguir é muito usada:

$$\begin{aligned} f : [0, 60] &\longrightarrow [0, 10\,000] \\ x &\mapsto 1\,500x \end{aligned}$$

Podemos representar uma função por uma “máquina”:



Representação de função como uma máquina de transformação

No caso de os conjuntos A e B serem subconjuntos de \mathbb{R} , o gráfico da função é um subconjunto do plano cartesiano:

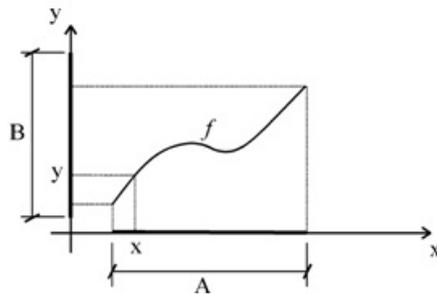


Gráfico de função

Elementos da função

Dada uma função $f : A \longrightarrow B$, chamamos de *domínio de f* o conjunto A e de *contradomínio de f* o conjunto B . Além disso, chamamos *imagem de f* o subconjunto do contradomínio de f formado pelos elementos da forma $f(x)$, para algum $x \in A$:

$$\text{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(x), x \in A\}.$$

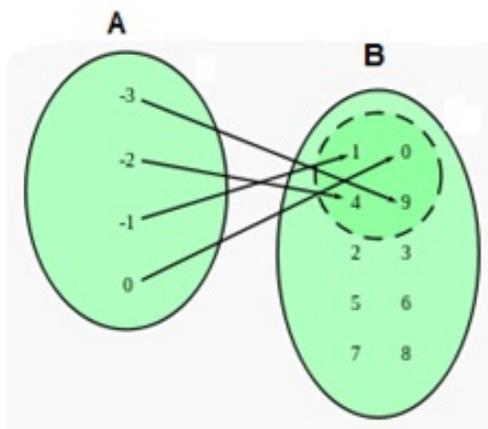
Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida por $f(n) = n^2$. O domínio e o contradomínio de f são iguais a \mathbb{N} , o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

No entanto, a imagem de f é um subconjunto próprio de \mathbb{N} , formado pelos números quadrados:

$$\text{Im}(f) = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}.$$

Exemplo 3. Especialmente no ensino básico, as funções são representadas por diagramas como a figura a seguir:



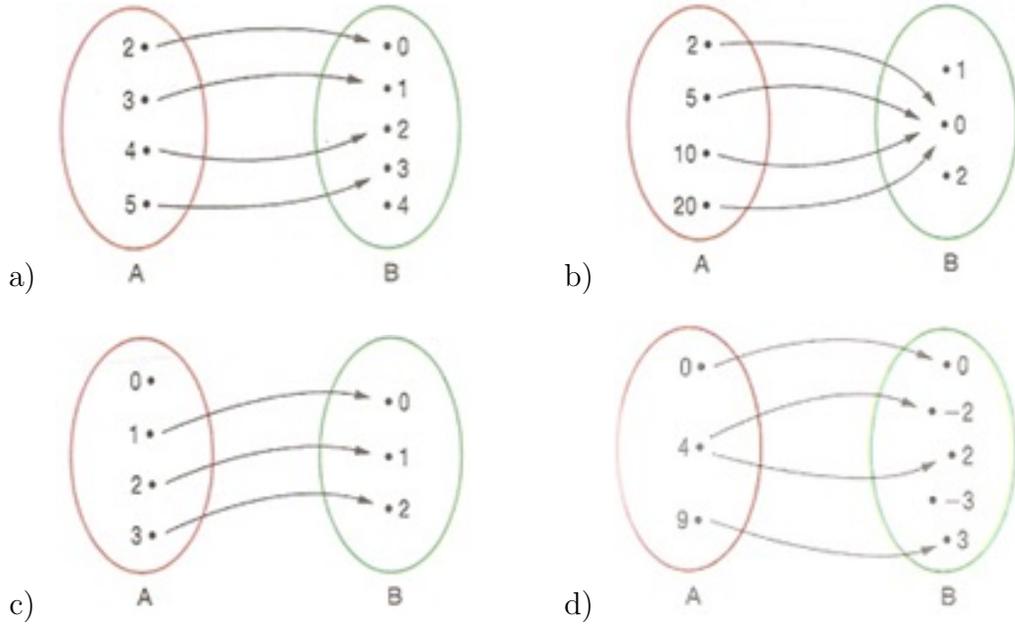
Representação diagramática de função

Cada elemento do conjunto A (domínio da função) está associado a um, e somente um, elemento do conjunto B (contradomínio da função). Todos os elementos do conjunto B que receberam flechas de A são imagens dos elementos de A . Por exemplo, a imagem de -3 é 9, imagem de -2 é 4, imagem de -1 é 1 e imagem de 0 é 0. Podemos perceber, nesse caso, que a imagem de cada elemento do conjunto A é igual ao quadrado do seu valor. Podemos concluir que a lei de formação dessa função é $f(x) = x^2$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{-3, -2, -1, 0\} \\ \text{CD}(f) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ \text{Im}(f) &= \{0, 1, 4, 9\} \end{aligned}$$

Exemplo 4. *Quais dos seguintes diagramas representam uma função de A em B ?*



De acordo com a definição de função, os gráficos que representam funções são as letras: a e b. Consequentemente, os que não representam funções são as letras c e d. No item c, o elemento 0 do conjunto A não foi relacionado a algum elemento do conjunto B . Isto contraria a definição de função. Já no item d, o elemento 4 do conjunto A está relacionado a dois elementos do conjunto B . Isto também contraria a definição de função.

Exemplo 5. *Vamos ilustrar o significado de domínio $Dom(f)$ e imagem $Im(f)$, observando o gráfico de função real, de uma variável real, representado a seguir.*

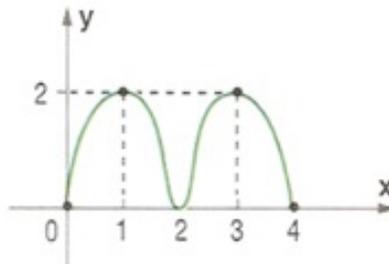


Diagrama de função

Para determinarmos o domínio da função f observando diretamente seu gráfico, devemos olhar para o eixo horizontal Ox . A projeção do gráfico neste eixo de coordenadas é o domínio da função.

Para determinar sua imagem devemos olhar para o eixo vertical Oy . Para que um ponto $b \in \mathbb{R}$ esteja na imagem da função, a reta horizontal definida pela equação $y = b$ deve intersectar o gráfico da função.

No caso do exemplo, o domínio de f é $\text{Dom}(f) = [0, 4]$. Além disso, podemos observar que sua imagem é $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

Tipos especiais de funções

Algumas funções podem ser classificadas em injetora, sobrejetora e bijetora.

Definição 3 (Função Injetora). *Uma função é $f : A \rightarrow B$ é dita injetora se, para quaisquer elementos $x_1 \neq x_2 \in A$, temos $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.*

Exemplo 6. *O diagrama a seguir representa uma função injetora.*

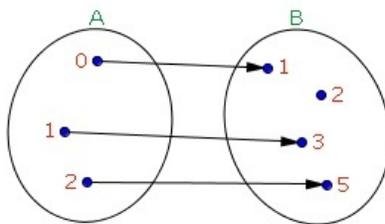


Diagrama de função injetora

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$, a função exponencial, é injetora pois, se $x_1 \neq x_2$, então $e^{x_1} \neq e^{x_2}$.

Definição 4 (Função Sobrejetora). *Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita sobrejetora se, para qualquer elemento $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Neste caso, $\text{Im}(f) = B$.*

Exemplo 7. *O diagrama a seguir representa uma função sobrejetora.*

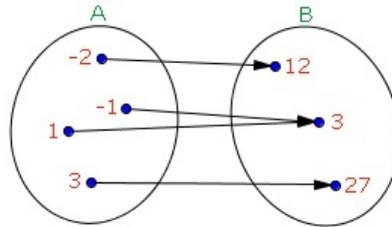


Diagrama de função sobrejetora

A função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln x$, a função logaritmo, é sobrejetora pois, dado $b \in \mathbb{R}$, existe $a \in (0, +\infty)$ tal que $\ln a = b$.

Definição 5 (Função Bijetora). *Uma função é $f : A \rightarrow B$ é dita bijetora se for injetora e sobrejetora simultaneamente.*

Exemplo 8. *O diagrama a seguir representa uma função bijetora.*

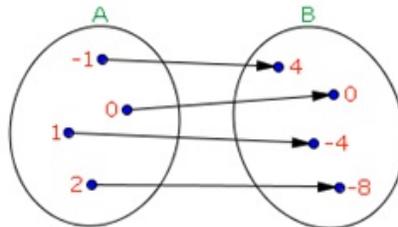


Diagrama de função sobrejetora

Se existe uma função bijetora $f : A \rightarrow B$, entre os conjuntos A e B , a cada elemento de A corresponde um único elemento de B e vice-versa. Podemos então definir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que, $g \circ f$ é a função identidade de A e $f \circ g$ é a função identidade de B . Esta função é chamada *função inversa* de f .

O conceito de função e seus gráficos é especialmente importante em Matemática Financeira e o estudo de cada um desses assuntos depende do bom entendimento do outro.

Introdução ao estudo de sequências

Um caso especial de funções que aparece naturalmente no estudo de Matemática Financeira são as sequências ou progressões numéricas. Daremos uma especial atenção a este tópico.

Definição 6. *Uma sequência é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. A lei de definição da sequência, $a(n) = a_n$ estabelece uma lista ordenada de números reais. Usamos também a notação*

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

O termo a_n é o n -ésimo termo da sequência.

Em algumas situações especiais, chamaremos também de sequências as funções $a : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas no subconjunto finito dos n primeiros elementos de \mathbb{N} .

Existe um especial interesse em sequências nas quais podemos encontrar uma fórmula para calcular qualquer termo, sendo necessário apenas saber a ordem deste termo.

Exemplo 9. *No caso da sequência $(1, 3, 5, 7, \dots, a_n, \dots)$, poderíamos calcular o termo de ordem $n = 100$ sem precisar escrever todos os 100 primeiros termos.*

A sequência é formada pelos números ímpares dispostos em ordem crescente. Logo, podemos estabelecer a lei de definição $a_n = 2n - 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Então, o termo de ordem $n = 100$ desta sequência é $a_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199$.

Uma maneira bastante interessante de definir algumas sequências consiste em estabelecer uma *fórmula de recorrência*. Isto é, dados alguns termos iniciais da sequência, definimos os demais termos usando uma ou mais fórmulas que permitem calculá-los. Um exemplo clássico desta situação é a famosa sequência de números atribuída a Fibonacci.

Exemplo 10 (Sequência de Fibonacci). *Seja $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a sequência definida da seguinte forma. Tomamos $F_1 = F_2 = 1$ e definimos por:*

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ se } n \geq 3.$$

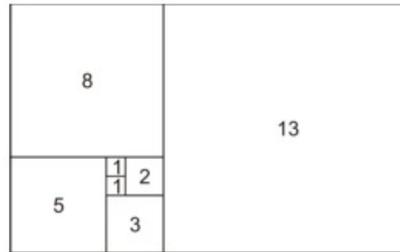
Essas condições geram $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 1 + 2 = 3$, $F_5 = 2 + 3 = 5$ e assim por diante. Veja alguns dos primeiros termos da sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots).$$

Essa sequência é especialmente interessante devido às suas inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento, especialmente nas artes e na arquitetura. Veja como podemos geometrizá-la essa sequência de números.

Começamos com dois quadrados de lados iguais a 1 e obtemos um retângulo de lados 2 e 1. Agregando a esse retângulo um quadrado de lado 2, obtemos um novo retângulo,

agora de dimensões 3 por 2. Se adicionarmos a seguir um quadrado de lado 3, obtemos um retângulo de medidas 5 por 3. A figura a seguir mostra que os lados dos quadrados que agregamos aos dois quadrados originais formam a sequência de Fibonacci.



Geometrização da Sequência de Fibonacci

Progressão Geométrica

As progressões geométricas são sequências especiais e, em geral, são alguns dos primeiros exemplos de sequências apresentados aos estudantes. Elas serão particularmente úteis no estudo da matemática financeira.

Definição 7. *Uma progressão geométrica é uma sequência na qual cada termo pode ser obtido do termo antecessor multiplicando-o por uma constante q , denominada razão. O termo geral é dado pela fórmula a seguir.*

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_{n-1} q.$$

Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 11. • *A sequência (2, 6, 18, 54, ...) é uma PG de razão $q = 3$. Esta PG é crescente, pois $q > 1$ e $a_1 > 0$;*

• *A sequência (8, 4, 2, 1, ...) é uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$. Esta PG é decrescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$;*

• *A sequência (5, -10, 20, -40, ...) é uma PG de razão $q = -2$. Esta PG é oscilante ou alternante, pois $q < 0$.*

Exemplo 12. *Uma pessoa aplica em um banco o valor de R\$ 1000,00 à taxa de juros de 1% = 0,01 ao mês. Vamos usar a noção de PG para calcular o valor estimado que esta pessoa irá resgatar daqui a 6 meses.*

Como os valores estão em progressão geométrica, precisamos calcular o sexto termo dessa sequência. A sequência pode ser representada por $(1,01 \times 1000; 1,01^2 \times 1000; \dots; a_6)$. Usando o termo geral da PG, $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, com $a_1 = 1,01 \times 1000$ e $q = 1,01$, temos:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 \times q^5 \\ a_6 &= 1,01 \times 1000 \times (1,01^5) \\ a_6 &= 1061,520151 \end{aligned}$$

Este cálculo final foi efetuado com uma calculadora científica.

Logo, o valor resgatado daqui a 6 meses será R\$ 1061,52.

Exemplo 13. *Suponhamos que um país tenha contraído em 1829 um empréstimo de 1 milhão de dólares, a serem pagos em cem anos, a uma taxa de juros de 9% ao ano. Suponhamos que por problemas de balança comercial, nada foi pago e a dívida foi rolada, com capitalização anual dos juros. Vamos avaliar qual seria o valor da dívida em 1989.*

- Valor da dívida no 1º ano = $a_1 = 1000000 \times 1,09$;
- Valor da dívida no 2º ano = $a_2 = 1000000 \times 1,09 \times 1,09 = 1000000 \times 1,09^2$;
- Valor da dívida no 160º ano = $a_{160} = 1000000 \times 1,09^{160}$.

Podemos perceber que tais valores formam uma P.G. de razão 1,09. Logo, com o auxílio de uma calculadora científica, concluimos que:

$$a_{160} = 1\,000\,000 \times 973\,284,1939 = 973\,284\,193\,900,$$

Podemos concluir que a dívida será de quase 1 trilhão de dólares.

Soma dos termos de uma PG finita

Denominaremos por S_n a soma dos n primeiros termos da PG. Observe que S_n é uma nova sequência, obtida da sequência original, na qual o termo geral de ordem n é a soma dos seus n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad (i)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por q , temos:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^n \quad (ii)$$

Efetuando (ii) - (i), temos:

$$\begin{aligned} S_n q - S_n &= a_1 q - a_1 + a_1 q^2 - a_1 q + a_1 q^3 - a_1 q^2 + a_1 q^4 - a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n - a_1 q^{n-1} \\ S_n (q - 1) &= -a_1 + a_1 q^n \\ S_n (q - 1) &= a_1 (q^n - 1) \\ S_n &= \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

Podemos usar essa fórmula em situações práticas, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 14. *Um carro é financiado em 12 vezes. A primeira prestação é de R\$ 800,00 e, a cada mês, o valor da próxima prestação é 5% maior do que o valor da prestação anterior. Calcularemos o valor total estimado nesse financiamento.*

Os valores a serem pagos serão os seguintes:

1. Primeira prestação = R\$ 800,00;
2. Segunda prestação = $1,05 \times \text{R\$ } 800,00 = \text{R\$ } 840,00$;
3.

O valor total a ser pago é a soma dos 12 primeiros termos de uma PG. Utilizaremos a fórmula da Soma de n termos da PG. Para tanto, necessitamos do primeiro termo, a_1 e da razão, q , uma vez que $n = 12$. Então:

$$S_{12} = \frac{800 (1,05^{12} - 1)}{1,05 - 1}.$$

Com a ajuda da calculadora científica, calculamos uma aproximação $1,05^{12} \approx 1,795856326 \approx 1,8$. Assim,

$$S_{12} \approx \frac{800 \times 0,8}{0,05} = 12\,800.$$

Portanto, o total a ser pago pelo carro é R\$ 12 800,00.

Soma dos termos de uma PG infinita

Suponha que $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ seja uma PG tal que

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}, \quad |q| < 1.$$

Neste caso, o limite da soma dos n primeiros termos da PG, para $n \rightarrow \infty$, converge para um número:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Esse fato nos permite estender a noção de soma dos n primeiros termos da PG para a noção de soma de todos os termos da PG, usando a fórmula

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Exemplo 15. Podemos calcular a soma “infinita” $3+1+1/3+1/9+\dots$ interpretando-a como sendo a soma dos termos da PG tal que $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{3}$:

$$S_\infty = \frac{3}{1 - 1/3} = \frac{9}{2}.$$

Uma outra maneira de calcularmos a mesma soma S_∞ é multiplicando ambos os membros da igualdade

$$S_\infty = 3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \dots$$

pelo inverso da razão, ou seja, por 3. Vejamos:

$$\begin{aligned} S_\infty &= 3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \dots \\ 3S_\infty &= 9 + 3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \dots \\ 3S_\infty &= 9 + S_\infty \\ 2S_\infty &= 9 \\ S_\infty &= 9/2. \end{aligned}$$

Este tipo de cálculo tem um apelo muito especial mas pode levar a erro, dependendo da circunstância. A manipulação da soma dos infinitos termos da PG funciona tão

bem como se fosse uma soma finita por que o limite converge. Na verdade, estamos fazendo

$$\begin{aligned}
 S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 3(1/3)^{n-1}] \\
 3S_{\infty} &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 3(1/3)^{n-1}] \\
 3S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 [3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 3(1/3)^{n-1}] \\
 3S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} [9 + 3 + 1 + 1/3 + \cdots + 3(1/3)^{n-2}] \\
 3S_{\infty} &= 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 3(1/3)^{n-2}] \\
 3S_{\infty} &= 9 + S_{\infty} \\
 2S_{\infty} &= 9 \\
 S_{\infty} &= 9/2.
 \end{aligned}$$

Ou seja, estamos usando as conhecidas propriedades de limites de seqüências.

Observação: Na próxima parte do trabalho, trataremos de alguns temas de Matemática Financeira que podem ser apresentadas aos alunos do ensino médio devido ao seu interesse intrínseco, mas também por ser uma parte do conteúdo que ilustrará os conceitos matemáticos expostos previamente. Mas, antes de fazermos isto, observamos que os cálculos envolvidos nos exemplos nos levam naturalmente a usar uma calculadora. Isto é um importante passo para a integração dos conceitos matemáticos aos temas de interesse dos estudantes, a saber, o uso de novas tecnologias.

Finalmente, o último exemplo ilustra a necessidade de que o professor de matemática tenha um conhecimento de matemática que seja mais profundo do que aquele que será usado no dia-a-dia de seu trabalho diretamente na escola. O desconhecimento das verdadeiras razões do bom funcionamento da manipulação desta específica soma infinita poderia acarretar em erros conceituais.

Matemática Financeira: Capital, juros, taxa de juros e montante

Fundamentalmente, a Matemática Financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimentos em geral.

Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário por um certo tempo, essa quantia é chamada de capital (ou principal) e é indicada por C . O valor que o emprestador cobra pelo uso do dinheiro, ou o valor pago pelo tomador do empréstimo, é chamado de juros e é indicado por J .

A taxa de juros, indicada por i (do inglês *interest*), é expressa como porcentagem do capital. Ela representa os juros numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.).

Podemos definir juros como o rendimento de uma aplicação financeira, valor referente ao atraso no pagamento de uma prestação ou a quantia paga pelo empréstimo de um capital.

Há basicamente duas maneiras de se cobrar juros, que são denominadas *juros simples* e *juros compostos*. Nas próximas seções apresentaremos essas duas modalidades e faremos uma pequena comparação entre elas, enfatizando o quanto as ferramentas matemáticas são apropriadas para calculá-los.

Atualmente, o sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, por ser, geralmente, mais lucrativo. Os juros simples eram utilizados nas situações de curto prazo e hoje em dia pouco utilizamos a capitalização baseada no regime simples. Mas vamos entender como funcionava a capitalização no sistema de juros simples.

Juros Simples

No sistema de capitalização simples, os juros são calculados baseando-se no valor da dívida ou da aplicação. Dessa forma, o valor dos juros é igual no período de aplicação ou composição da dívida.

Consideraremos um capital C aplicado a juros simples, com taxa i , por um período t .

Os juros acumulado no 1º período é Ci , no 2º período também é Ci e assim sucessivamente. Logo, o total de juros acumulados num período t será

$$J = Ci + Ci + \dots + Ci,$$

sendo que a soma é de t parcelas. Podemos concluir que $J = Cit$

Para calcularmos o montante produzido a juros simples num período t , usamos a fórmula

$$M = C + J,$$

pois o montante final produzido será o capital inicial acrescido de juros.

Logo:

$$M = C + J$$

$$M = C + Cit$$

$$M = C(1 + it)$$

A matemática envolvida neste tipo de capitalização faz juz ao nome. Veremos na próxima seção que as PG são especialmente adequas para calcular o outro tipo de juros.

Juros Compostos

Consideremos um capital C aplicado a juros compostos, a uma taxa i por período e durante t períodos de tempo. Podemos observar que a fórmula do termo geral da PG está diretamente ligada para a obtenção do montante M produzido pelo capital C durante t períodos, aplicado a uma taxa i . Resumindo,

- Valor atual = C (capital aplicado);
- Valor total em 1 período = $(1 + i)C$;
- Valor total em 2 períodos = $(1 + i)(1 + i)C = (1 + i)^2 C$;

- Valor total em 3 períodos = $(1 + i)(1 + i)^2 C = (1 + i)^3 C$;
- Montante final $M = C(1 + i)^t$.

Observemos que, embora a fórmula acima tenha sido deduzida para t inteiro e não negativo, ela pode ser estendida para qualquer valor real não negativo. Vejamos um exemplo:

Exemplo 16. *Um capital de R\$ 12 000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 3% a.m. Determinaremos o montante recebido, nos casos em que prazos de aplicação forem de 6 meses e também de 3 anos.*

Para um prazo de 6 meses, o montante produzido será de:

$$\begin{aligned} M &= 12000(1 + 0,03)^6 = 12000 \times 1,03^6 = 12000 \times 1,194052297 \\ &\approx 12000 \times 1,1940 = 14328,62. \end{aligned}$$

O exemplo ilustra como é importante neste momento uma discussão sobre uso de calculadoras e as questões de aproximação dos cálculos.

Logo, o montante M , ao final de seis meses, será de R\$ 14 328,62.

Para um prazo de 3 anos, como a taxa é de 3% a.m., será necessário usar a unidade de tempo adequada, 36 meses, para que a taxa e o tempo estejam na mesma unidade. Neste caso,

$$M = 12000 1,03^{36} \approx 34779,34.$$

Este exemplo mostra como é importante o uso de calculadora científica. O exemplo deixa claro as enormes oportunidades de se discutir a precisão da linguagem, para o completo entendimento do problema, assim como o uso de tecnologia no dia-a-dia.

Uma discussão que pode elevar ainda mais o senso crítico dos estudantes pode ser travada em torno de uma situação como a que exporemos no próximo exemplo.

Exemplo 17. *Uma situação interessante com a qual podemos nos deparar é a seguinte: suponha que uma pessoa deseja comprar um automóvel novo (zero quilometro). Ela não deseja pagar juros e, ao invés de fazer um financiamento, deseja aplicar todo seu dinheiro num banco até que, após alguns meses aplicado, tenha todo o montante para efetuar o pagamento à vista. Suponhamos que o valor do automóvel seja de R\$ 25 000,00 e que essa pessoa tenha um capital inicial de R\$ 20 000,00. Se a poupança rende 1% ao mês, quanto tempo precisará esperar para que possa efetuar a compra pagando à vista?*

Sabemos que $M = C(1 + i)^t$. Usando essa fórmula com os dados do problema, montamos a equação

$$\begin{aligned} 25000 &= 20000 (1 + 0,01)^t \\ 25 &= 20 (1,01)^t \\ 1,25 &= 1,01^t \end{aligned}$$

Podemos usar o logaritmo decimal em ambos os membros da equação e temos:

$$\begin{aligned} \log 1,25 &= \log(1,01)^t \\ 0,09691 &= t \log(1,01) \\ 0,09691 &= t 0,00432 \\ t &= \frac{0,09691}{0,00432} \\ t &\approx 22,5. \end{aligned}$$

Ou seja, será necessário esperar 22,5 meses para efetuar a compra pagando o valor à vista.

Este exemplo ilustra de maneira ainda mais eloquente a riqueza do tema. A necessidade do uso da calculadora assim como do conceito matemático de logaritmos estão em mesmo pé de igualdade. A solução do problema demanda o conhecimento da propriedade fundamental do logaritmo, permitindo transformar a equação exponencial em uma equação linear. Por outro lado, a tecnologia permite calcular com alguma precisão, em um piscar de olhos, os logaritmos dos números envolvidos. Essa aliança do teórico e do prático permite aos estudantes ver a real importância de ambos.

A comparação de duas situações levando à escolha da conveniência de usar uma ou outra é uma estratégia efetiva para cativar o interesse dos estudantes que, neste processo, desenvolvem senso crítico e ganham habilidades para lidar com problemas.

Juros Simples versus Juros Compostos

Apresentaremos uma situação que mostrará que nem sempre o regime de juros compostos é mais vantajoso para quem empresta do que o regime de juros simples. Observe as tabelas a seguir, nas quais um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado a uma taxa de 10% ao mês. Nas aplicações, consideramos um mês como tendo 30 dias. Nelas, estão preenchidos os valores nos sistemas de capitalização simples e composta:

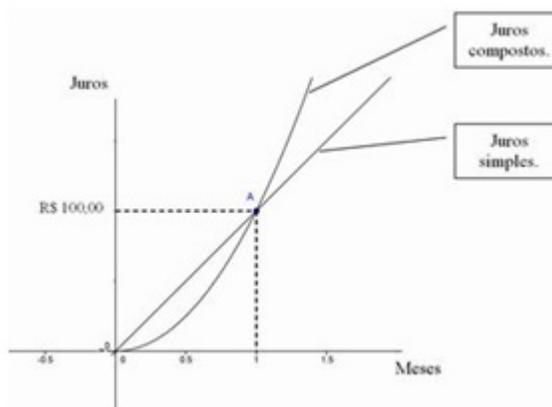
Capitalização Simples

| Período | Capital | Juros | Montante |
|---------|--------------|------------|-------------|
| 5 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 16,67 | R\$ 1016,67 |
| 10 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 33,33 | R\$ 1033,33 |
| 15 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 50,00 | R\$ 1050,00 |
| 20 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 66,67 | R\$ 1066,67 |
| 25 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 83,33 | R\$ 1083,33 |
| 30 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 100,00 | R\$ 1100,00 |
| 45 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 150,00 | R\$ 1150,00 |
| 60 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 200,00 | R\$ 1200,00 |

Capitalização Composta

| Período | Capital | Juros | Montante |
|---------|--------------|------------|-------------|
| 5 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 16,01 | R\$ 1016,01 |
| 10 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 32,28 | R\$ 1032,28 |
| 15 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 48,81 | R\$ 1048,81 |
| 20 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 65,60 | R\$ 1065,60 |
| 25 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 82,66 | R\$ 1082,66 |
| 30 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 100,00 | R\$ 1100,00 |
| 45 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 153,69 | R\$ 1153,69 |
| 60 dias | R\$ 1.000,00 | R\$ 210,00 | R\$ 1210,00 |

Analisando as tabelas acima, podemos concluir que, para um tempo t compreendido entre 0 e 30 dias, a capitalização simples é mais vantajosa. Para $t = 30$ dias, ambas apresentam o mesmo montante final, apresentando a mesma vantagem. No entanto, para $t > 30$ dias, a capitalização composta é mais vantajosa para quem oferece o empréstimo. Podemos observar tal situação graficamente. Veja a ilustração a seguir:



Comparação de juros simples versus compostos

Este exemplo nos apresenta um ensejo para motivar os estudantes a desenvolver a leitura de gráficos de funções e a comparação entre fenômenos lineares e fenômenos não lineares. Ele ilustra de maneira contundente o quanto é possível enriquecer o ensino se aliarmos aspectos práticos, do dia-a-dia, às práticas didático-pedagógicas. [Tacila]

Valor atual de um conjunto de capitais

Veremos nesta seção uma série de exemplos que ilustram o quanto a matemática é necessária para lidar com situações importantes do cotidiano e pode demandar um bom nível de conhecimento aliado a bom senso crítico.

Começaremos tratando esse assunto com um exemplo bem comum.

Exemplo 18. *Suponhamos que uma pessoa tenha uma dívida de R\$ 1 500,00 que vencerá em exatamente um mês. Essa pessoa consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% ao mês. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje para ter dinheiro suficiente para pagar sua dívida?*

Para resolvermos esse problema é necessário determinarmos o capital C que deve ser aplicado por um mês, à taxa de 2% a.m. para gerar um montante de R\$ 1 500,00. Usando a fórmula apropriada, temos:

$$\begin{aligned} C(1,02)^1 &= 1500 \\ 1,02C &= 1500 \\ C &= \frac{1500}{1,02} \\ C &= 1470,58 \end{aligned}$$

Assim se a pessoa dispuser de R\$ 1470,58 hoje, terá daqui a 1 mês o montante de R\$ 1 500,00 para quitar sua dívida.

O que podemos concluir em uma situação como essa? É notória a importância da aplicação de capital no dia a dia. A verdade é que se não aplicarmos os capitais eles não renderão qualquer coisa e, aplicado a uma taxa, mesmo que pequena, renderá juros. A conclusão é que a dívida será depreciada em função dos rendimentos do capital investido.

Exemplo 19. *Suponhamos ainda que a pessoa do exemplo exposto, além da dívida de R\$ 1 500,00 a ser paga daqui a um mês, tenha outra dívida, de R\$ 2 000,00, a ser paga num prazo de dois meses. Qual valor seria necessário para quitar ambos os compromissos supondo que seu capital rende 2% ao mês?*

Sabemos que para quitar a dívida de R\$ 1 500,00 em um mês, é necessário um capital de R\$ 1 470,58. Para quitar a outra dívida, daqui a dois meses, será necessário o seguinte capital:

$$\begin{aligned} 2000 &= C(1,02)^2 \\ C &= \frac{2000}{1,02^2} \\ C &= 1922,33 \end{aligned}$$

Assim, para saldar as duas dívidas que totalizam R\$ 3 500,00 é necessário para investir hoje, um total de

$$\frac{1500}{1,02} + \frac{2000}{1,02^2} = 1470,58 + 1922,33 = 3392,91.$$

Esse valor é chamado de *valor atual* dos valores de R\$ 1 500,00 e R\$ 2 000,00.

De modo geral, dado um conjunto de valores monetários x_1 na data t_1 , x_2 na data t_2 , x_3 na data t_3 e, assim sucessivamente até x_n , na data t_n , aplicados a uma taxa i , gera um valor atual V que corresponde a:

$$V = \frac{x_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{x_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{x_3}{(1+i)^{t_3}} + \cdots + \frac{x_n}{(1+i)^{t_n}}$$

Vejamos outros exemplos muito presentes em nosso cotidiano em que podemos aplicar o valor atual de um conjunto de capitais.

Exemplo 20. *Primeiro queremos saber qual o valor deve ser aplicado hoje para que três dívidas possam ser quitadas em prazos diferentes.*

Suponhamos que uma pessoa hoje tem dívidas de R\$ 2 000,00, R\$ 3 500,00 e R\$ 5 000,00, que vencem dentro de 2, 5 e 6 meses, respectivamente. Qual capital ela deverá aplicar hoje para quitar sua dívida, a juros compostos, sabendo que seu dinheiro rende 1% ao mês?

Para resolver esse problema, usamos a fórmula do valor atual:

$$\begin{aligned} V &= \frac{x_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{x_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{x_3}{(1+i)^{t_3}} \\ V &= \frac{2000}{1,01^2} + \frac{3500}{1,01^5} + \frac{5000}{1,01^6} \\ V &= 1960,59 + 3330,13 + 4710,23 = 10000,95 \\ V &= 10000,95 \end{aligned}$$

Logo, o valor atual a ser aplicado será de R\$ 10 000,95.

Exemplo 21. *Neste exemplo, busca-se a melhor forma de pagamento. De qual maneira é mais vantajosa para o comprador: pagar à vista ou a prazo?*

Como podemos ponderar sobre essa questão do ponto de vista econômico? Essa pergunta é muito constante e desperta particular interesse nos estudantes.

Consideremos a possibilidade de se comprar um conjunto de sofás que está à venda em 5 prestações mensais iguais, no valor de R\$ 400,00 cada. Além disso, a primeira prestação deverá ser paga um mês após a compra. No caso do pagamento ser à vista, o valor a ser pago é R\$ 1.750,00.

Qual é a forma de pagamento mais vantajosa para de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 1% ao mês?

Para analisarmos a situação, vejamos qual é o valor atual das prestações:

$$\begin{aligned} V &= \frac{400}{1,01} + \frac{400}{1,01^2} + \frac{400}{1,01^3} + \frac{400}{1,01^4} + \frac{400}{1,01^5} \\ V &= 396,04 + 392,12 + 388,23 + 384,39 + 380,58 \\ V &= 1941,36 \end{aligned}$$

Como essa informação pode influenciar a decisão sobre o tipo de compra, pelo menos do ponto de vista econômico? Como o valor atual das prestações é maior do que o valor à vista, é mais vantajosa efetuar a compra pagando à vista.

Exemplo 22. *Observe agora uma outra situação.*

Uma autoescola cobra R\$ 360,00 a cada pessoa para possa fazer aulas teóricas e práticas, no caso da preparação para exame de habilitação a carteira B de habilitação. As formas de pagamento poderão ser feitas da seguinte maneira:

- Três parcelas de R\$ 120,00 no cartão, sendo o primeiro pagamento no ato, a segunda parcela em 30 dias e a última em 60 dias;
- À vista, em dinheiro, obtendo um desconto e pagando R\$ 300,00.

Qual taxa de juros será paga por uma pessoa que resolve efetuar o pagamento usando o cartão?

Aparentemente, um consumidor que tenha um simples conhecimento em porcentagem poderá imaginar que a taxa de juros pode ser calculada da seguinte maneira:

Como 10% de R\$ 300,00 = R\$ 30,00, logo 20% equivalerá a R\$ 60,00. Como o juros correspondeu a R\$ 60,00, a taxa de juros foi de 20%.

Errado!

É importante estarmos sempre muito atentos à seguinte frase de um vendedor: *Á vista, em dinheiro, eu faço um desconto*. Na verdade, o valor real da mercadoria é o valor que o vendedor pronuncia com o desconto. Dizer que o consumidor receberá um desconto é fictício, ilusório, apenas para incentivar e motivar a compra. Para calcularmos a taxa de juros podemos utilizar a fórmula do valor atual de um conjunto de capitais onde $V = \text{R\$ } 300,00$ e $x_1 = x_2 = x_3 = \text{R\$ } 120,00$. Como haverá entrada, pagamento da primeira parcela no ato, o expoente deste denominador é zero, ou seja, é igual a 1. Então:

$$300 = 120 + \frac{120}{(1+i)} + \frac{120}{(1+i)^2}$$

$$180 = \frac{120}{(1+i)} + \frac{120}{(1+i)^2}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $(1+i)^2$, teremos:

$$180(1+i)^2 = 120(1+i) + 120$$

que resulta na equação do segundo grau

$$3i^2 + 4i - 1 = 0$$

Resolvendo a equação acima encontraremos as raízes $i = 1$ ou $i = -1/3$. Como esperamos uma resposta positiva, pois estamos calculando uma taxa, temos $i = 1$. Isto é, a taxa é de 100%.

Agora, veremos algumas situações de financiamento onde queremos chegar a uma conclusão sobre o que é mais vantajoso: pagar à vista ou pagar à prazo.

Exemplo 23. *Para que um aluno possa cursar a Terceira Série do Ensino Médio numa escola particular do RJ, a instituição apresenta duas formas de pagamento: à vista, no valor de R\$ 12.252,00, ou em 12 parcelas de R\$ 1.138,00, com a primeira delas a ser paga em 30 dias. Qual é a melhor forma de pagamento para uma pessoa que deseja matricular seu filho nessa instituição, considerando que seu dinheiro rende 2% ao mês?*

| | Quantidade de parcelas | Valor |
|--------------------------------------|------------------------|-------------|
| Ensino Fundamental II – 6º ao 9º ano | 12 | R\$1.062,00 |
| Ensino Médio ½ série | 12 | R\$1.087,00 |
| Ensino Médio 3ª série | 12 | R\$1.138,00 |

| | Anuidade |
|--------------------------------------|--------------|
| Ensino Fundamental I – 1º ano | R\$9.900,00 |
| Ensino Fundamental I – 2º ao 5º ano | R\$10.212,00 |
| Ensino Fundamental II – 6º ao 9º ano | R\$11.364,00 |
| Ensino Médio ½ série | R\$11.880,00 |
| Ensino Médio 3ª série | R\$12.252,00 |

Uma primeira impressão é de que o pagamento à vista é mais vantajoso do que o pagamento à prazo, uma vez que $12.252,00 < 12 \times 1.138,00 = 13.656,00$.

Assim, o consumidor não está considerando a temporalidade da situação e não está levando em conta o quanto o dinheiro rende para a pessoa.

Com mais informação sobre matemática financeira, poder-se-ia efetuar os seguintes cálculos:

$$V = \frac{1138}{1,02} + \frac{1138}{1,02^2} + \frac{1138}{1,02^3} + \cdots + \frac{1138}{1,02^{12}}$$

Como a soma acima é uma soma de uma progressão geométrica finita, de razão $\frac{1}{1,02}$, temos que

$$S_{12} = \frac{\frac{1138}{1,02} \left[\left(\frac{1}{1,02} \right)^{12} - 1 \right]}{\left(\frac{1}{1,02} - 1 \right)}$$

Estes cálculos, que seriam bem pouco interessantes fora deste contexto, ganham uma extra motivação dada pela busca da resposta à pergunta - *o que é mais vantajoso?*

Para realizá-los, usamos uma calculadora científica. Temos $(1/1,02)^{12} = 0,7884931759 \approx 0,788493$.

Novamente, uma excelente oportunidade para uma boa discussão sobre aproximações.

Prosseguindo com os cálculos,

$$S_{12} = \frac{\frac{1138}{1,02} (-0,211507)}{\frac{-0,02}{1,02}} = \frac{235,9754569}{0,0196078} = 12.034,75.$$

Podemos concluir então que, como o valor atual é igual a 12.034,75, menor do que o valor à vista, a melhor forma de pagamento é à prazo. Ou seja, com R\$ 12.034,75 ele quita todo o parcelamento, sacando cada valor em seus respectivos vencimentos.

Exemplo 24. *Agora, nos deparamos com a seguinte situação: A que taxa o meu dinheiro precisa render para que seja mais vantajosa a compra à prazo em relação a compra à vista?*

Observe uma nova situação, onde uma pessoa, no início do ano de 2013, precisa pagar o IPVA do seu carro. Os valores consultados na internet foram os seguintes:

Consulta IPVA 2013 - Marca/Modelo

Dados do Veículo

Tipo de Veículo: AUTOMOVEIS/UTILITARIOS
 Fabricante: FORD
 Modelo: FOCUS 1.6 HATCH FLEX
 Combustível: FLEX (ALCOOL/GASOLINA)
 Ano Fabricação: 2009
 Final Placa: 4

Dados do Imposto

| | |
|--------------------------|---------------|
| Valor Base de Cálculo: | R\$ 25.850,00 |
| Valor IPVA sem desconto: | R\$ 1.033,98 |
| Valor IPVA com desconto: | R\$ 1.002,96 |
| Valor Parcela IPVA: | R\$ 344,66 |

| | |
|---|------------|
| Data Vencimento Cota Única/1a. Parcela: | 17/01/2013 |
| Data Vencimento 2a. Parcela: | 19/02/2013 |
| Data Vencimento 3a. Parcela: | 19/03/2013 |

Pergunta: A que taxa o dinheiro desta pessoa precisa render no banco, à partir do dia 17 de janeiro de 2013, para que seja mais vantajoso pagar o IPVA em 3 parcelas, ao invés de à vista?

Nesta situação, podemos imaginar primeiramente sobre qual taxa o dinheiro deve ser aplicado para que não haja diferença na forma de pagamento, ou seja, à vista ser tão vantajoso quanto à prazo.

Então, temos que

$$V = 344,66 + \frac{344,66}{(1+i)} + \frac{344,66}{(1+i)^2}.$$

Como o valor à vista é R\$ 1.002,96, temos que

$$\frac{344,66}{(1+i)} + \frac{344,66}{(1+i)^2} = 658,30.$$

Substituindo $(1+i)$ por x , obtemos:

$$658,3x^2 - 344,66x - 344,66 = 0.$$

Resolvendo a equação obteremos o seguinte resultado positivo: 1,03125.

Lembrando que $1+i = x$, temos

$$i = 0,03125 = 3,125\%.$$

Conclusão: Podemos concluir então que, para uma taxa de 3,125%, ambos os pagamentos não apresentam diferenças. Para uma taxa acima de 3,125%, é mais vantajoso o pagamento à prazo em relação ao pagamento à vista.

Conseqüentemente, podemos notar facilmente que, para uma taxa abaixo de 3,125%, o pagamento à vista é mais vantajoso.

Sequência uniforme de pagamentos

Consideremos um valor financiado V que deverá ser pago em prestações iguais a x , mensalmente, a uma taxa i de juros compostos cobrada no financiamento, num período de n meses. Logo, temos que:

$$V = \frac{x}{(1+i)} + \frac{x}{(1+i)^2} + \frac{x}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{x}{(1+i)^n}.$$

O segundo membro da equação constitui numa soma de termos de uma progressão geométrica finita cuja razão é $\frac{1}{(1+i)}$, o primeiro termo é $a_1 = \frac{x}{(1+i)}$.

Temos então, usando a fórmula da soma dos termos de uma PG,

$$V = x \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n}.$$

Analisaremos o exemplo abaixo empregando a fórmula obtida acima.

Exemplo 25. *Uma pessoa pretende comprar um carro e financia o valor em 24 meses, cujas prestações mensais são todas iguais a R\$ 1.200,00. Qual o valor do empréstimo adquirido por essa pessoa, sabendo que a taxa de financiamento é de 2% ao mês?*

Como o empréstimo deverá ser pago em 24 prestações mensais uniformes, sem entrada, temos:

$$V = x \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} = 1200 \frac{((1,02)^{24} - 1)}{(0,02(1,02)^{24})} = 22.696,70.$$

Esta última computação deixa claro a necessidade de usarmos uma calculadora.

Logo, o valor do empréstimo é de R\$ 22.696,70.

Dívidas vitalícias

Considere a situação na qual uma pessoa contrai, em um banco, um empréstimo de R\$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 3% ao mês. Sabendo que ela paga R\$ 250,00 mensais, em quanto tempo ela terminará de pagar a dívida?

No empréstimo, o saldo devedor é recalculado, a cada mês, acrescentando 3% ao antigo. Como não há entrada no pagamento do empréstimo, a primeira prestação será paga no mês seguinte. Temos então que o valor da dívida, ao final do primeiro mês já atualizou. Isto é, já rendeu ao banco juros de 3%.

No primeiro dia do mês seguinte, a dívida do cliente é de R\$ 10.300,00. Como ele paga mensalmente R\$ 250,00, o saldo devedor após o primeiro pagamento será de R\$ 10.050,00. Isto é um valor maior ainda que a dívida inicial.

No segundo mês, o seu saldo devedor será de R\$ $10.050 \times 1,03 - 250 =$ R\$ 10.101,50. Perceba também que a dívida aumenta todo mês, exponencialmente e não linearmente.

Podemos afirmar que, numa situação como essa, tal pessoa nunca terminará de pagar sua dívida e ele tornar-se-á vitalícia, com um valor maior a cada mês. Podemos concluir, também, que caso a pessoa pague R\$ 300,00 mensalmente, a dívida permanecerá em

R\$ 10.000,00 ao longo do tempo. Apenas para prestações acima de R\$ 300,00, a dívida poderá ser eventualmente quitada.

No exemplo abaixo, veremos uma aplicação de equações diferenciais de primeira ordem em matemática financeira.

Exemplo 26. *Suponha que um determinado investidor dispõe de um capital inicial $C_0 > 0$ e deseja investi-lo à uma taxa anual de juros de $\alpha\%$ ao ano.*

Neste quadro, verificaremos as afirmações a seguir:

1. Se a aplicação tiver rendimento uma única vez ao ano, então o capital $C(t)$, após t anos, será determinado por

$$C(t) = C_0 (1 + \alpha)^t.$$

2. Se a aplicação tiver k composições de rendimentos $(\alpha/k)\%$ por ano, então o capital após t anos será

$$C(t) = (1 + \alpha/k)^{kt} C_0.$$

3. Muitas aplicações financeiras atualmente tem composição contínua de rendimentos. Assim, o capital investido cresce continuamente à razão α em relação ao capital investido. A expressão para o capital $C(t)$ após t anos é $C(t) = C_0 e^{\alpha t}$.

Para a primeira afirmação, basta observar que:

$$\begin{aligned} C(1) &= C_0 (1 + \alpha) \\ C(2) &= C_0 (1 + \alpha) (1 + \alpha) = C_0 (1 + \alpha)^2 \\ C(3) &= C_0 (1 + \alpha) (1 + \alpha) (1 + \alpha) = C_0 (1 + \alpha)^3 \\ &\vdots \\ C(t) &= C_0 (1 + \alpha)^t. \end{aligned}$$

Na segunda, o raciocínio é o mesmo.

$$C(t) = C_0 (1 + \alpha/k)^{kt}.$$

Vejam o comportamento desta fórmula para valores muito grandes de k . Isto é, vamos calcular

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \alpha/k)^{kt}.$$

Usando a função logaritmo,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(1 + \alpha/k)^{kt} = \lim_{k \rightarrow +\infty} kt \ln(1 + \alpha/k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(1 + \alpha/k)}{\frac{1}{k}}.$$

Fazendo a mudança de variável $k = \frac{1}{r}$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(1 + \alpha/k)}{\frac{1}{k}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{t \ln(1 + \alpha r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{t \frac{1}{1+\alpha r} \alpha}{1} = \alpha t.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \alpha/k)^{kt} = e^{\alpha t}$$

e a fórmula $C(t) = C_0 (1 + \alpha/k)^{kt}$ converge para $C(t) = C_0 e^{\alpha t}$, para valores grandes de k .

Finalmente, no caso de aplicação contínua de juros, temos

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C,$$

a taxa de variação do capital proporcional ao capital, uma equação diferencial.

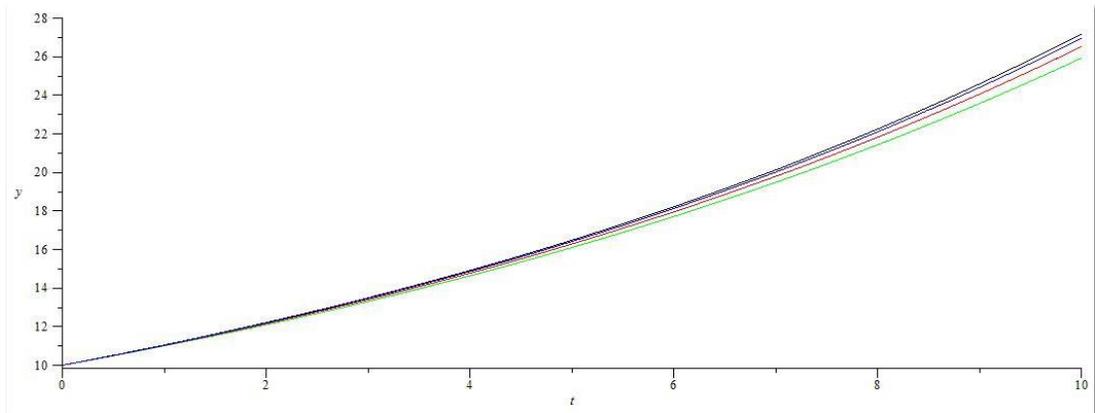
Integrando, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dC}{C} &= \int \alpha dt \\ \ln C &= \alpha t + K \\ C &= e^{(\alpha t + K)} \\ C(t) &= C_0 e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$C(t) = C_0 e^{\alpha t}.$$

Na figura a seguir, podemos comparar as diferentes possibilidades, todas convergindo para a aplicação de juros contínuos.



Uma experiência sobre ensino de Matemática Financeira

Introdução

Com o intuito de verificar a praticidade da Matemática Financeira em sala de aula, foi feita uma oficina sobre o ensino de Matemática Financeira, com alunos do oitavo e do nono ano de uma escola municipal que fica em Realengo, cidade do Rio de Janeiro.



Fachada de Escola Municipal

O objetivo da oficina era mostrar aos alunos os princípios básicos de juros simples e compostos e como eles podem ser aplicados no cotidiano. Juros simples e compostos são temas usualmente apresentados no final do oitavo ano.

A questão que buscávamos descobrir era se os alunos conheciam as diferenças entre esses dois tipos de juros, como eles lidavam com esses assuntos assim como com as suas aplicações e em quais situações este ou aquele tipo de juro poderia ser mais vantajoso.

Descrição das atividades propostas na oficina realizada

Oficina de matemática sobre o tema de *juros simples e juros compostos*.

Aqui estão os enunciados das atividades:

Atividade 1: Em algumas situações, podemos comprar determinados produtos e pagá-los em seis vezes sem juros e, em outras, podemos comprar certos produtos e pagá-los em seis vezes com juros.

- O que significa comprar um determinado produto? E pagá-lo em seis vezes sem juros?
- O que significa comprar um determinado produto em seis vezes com juros?

Atividade 2: Leia o seguinte anúncio feito por uma empresa que vende celulares:



1. Qual o preço final pago na compra de um celular, caso o cliente opte no pagamento feito através de 12 prestações?
2. Quanto pagará a mais um cliente que optar em pagar este aparelho em 12 prestações em relação ao cliente que efetuar o pagamento à vista?
3. Qual nome se dá a esta diferença?

Atividade 3: No condomínio Splendore, a taxa mensal de condomínio paga por cada morador corresponde a R\$ 300,00, que deverá ser efetuada todo dia 10 de cada mês. Elizeu, morador do condomínio, esqueceu de efetuar o pagamento no dia 10 e só pagou alguns dias depois. O condomínio cobra juros de 2% ao dia quando um morador atrasa seu pagamento. Com base nessas informações, responda:

1. Qual valor será pago, por dia, de multa para o morador que efetuar o pagamento do condomínio após o dia 10?
2. Se Elizeu pagar o condomínio no dia 15, qual será o valor de juros cobrado?
3. Se Elizeu pagar o condomínio no dia 20, qual será o valor de juros cobrado?
4. Se Elizeu pagou R\$ 420,00 de condomínio, por quantos dias ele ficou devendo o condomínio?
5. Estabeleça uma fórmula (função) matemática que relaciona o montante M pago por um morador do condomínio que atrasar o pagamento do condomínio durante um tempo de t dias.

As atividades que seguem se relacionam com a ideia de juros compostos. Vejamos:

O comércio e o sistema bancário trabalham com juros compostos. No sistema de juros compostos pagam-se juros sobre juros. Se um banco empresta um capital à taxa de 10% ao mês, quanto se deve pagar ao banco por um empréstimo de R\$ 200,00 por um período de dois meses?

Nesse caso, a taxa de juros em cada período incide sobre o montante do período anterior. Assim, no final do primeiro mês, o capital de R\$ 200,00 acrescido dos juros de 20 reais transforma-se em $M_1 = 200 + 20 = 220$ reais.

O valor dos juros cobrados no segundo mês é 10%, mas agora sobre R\$ 220,00. No final do segundo mês o montante é, então, de $M_2 = 220 + 22 = 242$ reais.

Caso o empréstimo se estendesse por outros meses, o procedimento seria o mesmo. E se tratando de juros compostos, o que acontece é que os juros de um determinado período são incorporados ao capital, para que essa soma sirva de base de cálculo dos juros do período seguinte.

A fórmula que relaciona o montante final M a ser pago por uma pessoa quando se toma emprestado um capital C , aplicado a uma taxa i num período de t meses é:

$$M = C \cdot (1 + i)^t.$$

Atividade 4: Mário tomou emprestado R\$ 1.000,00, à taxa de 10% ao mês em um determinado banco. Qual será o valor da dívida após:

1. 1 mês?.
2. 2 meses?
3. 3 meses?
4. 4 meses?
5. 5 meses?
6. 10 meses?

Para responder o item 5, é necessária a utilização da fórmula representada na explicação acima? E da calculadora científica?

Agora, responda às mesmas perguntas citadas nos itens acima, caso o regime de juros aplicado fosse simples. Em 1 mês, qual seria o valor da dívida? E 2, 3, 4, 5 e 10 meses?

Complete a tabela abaixo mencionando os valores citados nas perguntas acima:

Capitalização Composta

| Período | Montante final |
|----------|----------------|
| 1 mês | |
| 2 meses | |
| 3 meses | |
| 4 meses | |
| 5 meses | |
| 10 meses | |

Capitalização Simples

| Período | Montante final |
|----------|----------------|
| 1 mês | |
| 2 meses | |
| 3 meses | |
| 4 meses | |
| 5 meses | |
| 10 meses | |

Qual dos dois regimes é mais lucrativo? Por qual motivo você acha que os bancos utilizam o regime de capitalização composta?

A atividade 3 mostrava que a taxa mensal de condomínio paga por cada morador corresponde a R\$ 300,00, que deverá ser efetuada todo dia 10 de cada mês. Vamos preencher as tabelas abaixo e, ao final, comparar os resultados:

Capitalização Simples

| Período de atraso | Montante final |
|-------------------|----------------|
| 1 dia | |
| 5 dias | |
| 10 dias | |
| 15 dias | |
| 20 dias | |
| 25 dias | |

Agora, utilize uma calculadora científica e a fórmula de juros compostos para preencher a tabela abaixo. Para isso, devemos converter o tempo, dado em meses, para dias. Complete os espaços em branco abaixo:

| | |
|-----------|-----|
| 1 dia = | mês |
| 5 dias = | mês |
| 10 dias = | mês |
| 15 dias = | mês |
| 20 dias = | mês |
| 25 dias = | mês |

Capitalização Composta

| Período de atraso | Montante final |
|-------------------|----------------|
| 1 dia | |
| 5 dias | |
| 10 dias | |
| 15 dias | |
| 20 dias | |
| 25 dias | |

Qual dos dois regimes de juros é mais vantajoso? Por qual motivo você acha que o condomínio prefere cobrar o regime de juros simples ao invés do regime de juros compostos? Faça sua conclusão explicando, durante um determinado período, qual regime de juros é mais vantajoso: o simples ou o composto.

Impressões do autor sobre a experiência

Participaram da oficina quinze alunos de turmas variadas do oitavo e do nono ano. Foi feita uma divulgação da oficina pelos professores de matemática da escola e estes alunos se mostraram interessados e disponíveis em participar da mesma.

A oficina aconteceu na sala de multimídia da escola, que dispõe de recursos de projeção de imagens e foi previamente reservada junto a direção da escola. Cada aluno recebeu material impresso tratando das atividades a serem desenvolvidas.

No início da oficina foi feita uma breve apresentação sobre juros e sobre o significado de se comprar um bem pagando juros. Muitos alunos já tinham essa noção e participaram ativamente, narrando suas próprias experiências familiares de compra de produtos eletroeletrônicos, por exemplo.

Ficou evidente, desde o início da oficina, o grande interesse dos alunos, já na primeira atividade. Muito participativos, passaram a opinar sobre as desvantagens de se pagar com juros, o que tornou o começo da oficina bastante animado.

Em seguida, passamos para a segunda atividade, na qual se propunha a compra de telefones celulares com uma oferta. Caso o pagamento fosse à vista, o total seria um valor, caso o pagamento fosse à prazo, outro. Foi solicitado aos alunos que calculassem o total do pagamento na forma à prazo e comparassem com o valor a ser pago à vista.

O exemplo escolhido, devido a sua proximidade da realidade dos alunos, tornou a participação dos alunos muito intensa. Todos participaram dos debates e se mostraram bastante interessados na ideia e nos argumentos apresentados.

A terceira atividade, na qual mais uma vez foi colocado uma situação do cotidiano, envolvendo condôminos às voltas com pagamentos de taxas atrasadas, sujeitas a juros. Os alunos calculavam os valores das multas simulando os papéis de síndicos e de condôminos. A ideia principal era animar e provocar uma forte interatividade com os alunos. Ao final desta atividade, os alunos perceberam com bastante naturalidade que uma função matemática determina o montante M , pago por um condômino com atraso do pagamento das taxas condominiais por um tempo t , dado em dias. Esta atividade foi especialmente gratificante.

Antes de iniciar a quarta, foi explicado para os alunos os princípios e conceitos de juros compostos. Aproveitando a animação dos alunos, conseguiu-se demonstrar a fórmula de juros compostos. A cada passo da demonstração da fórmula, verificávamos através de perguntas e respostas o nível de entendimento dos alunos, constantado assim que eles estavam acompanhando toda aquela linha de raciocínio. Quando encontramos a fórmula do montante

final, debatemos sobre a real necessidade de sabermos a fórmula. Foi percebido que os alunos se mostravam interessados em aprender tal fórmula, uma vez que esta possuía aplicabilidade.

Assim, na quarta atividade, foi solicitado que eles usassem a fórmula em todos os itens. Os itens (a) e (b) não apresentaram dificuldades técnicas para os alunos mas, no item (c) eles apresentaram dificuldades nas computações e nos cálculos. Isso tornou propício a explicação sobre o uso da calculadora científica. Especificamente as suas diferenças para com uma calculadora normal.

Imagens de uma calculadora foram projetadas, e foi explicado como calcular potências com a calculadora científica. Os alunos responderam a todos os itens e, em seguida, completaram as tabelas de capitalização simples e compostas. Comparamos os valores obtidos nas tabelas e debatemos qual regime era o mais vantajoso e em qual situação. Podemos debater as diferenças e os alunos compreenderam porque os bancos, por exemplo, utilizam o regime de capitalização composta enquanto os condomínios, por exemplo, preferem aderir ao regime de capitalização simples.

A oficina teve duração de uma hora e trinta minutos. Consideramos que a experiência foi um sucesso pois o que se via nos alunos era a necessidade e a vontade de aprender e aplicar conceitos e conhecimentos matemáticos na prática do dia a dia.

É bastante provável que os conteúdos muito específicos das disciplinas oferecidas nas escolas, usando métodos muito ortodoxos, de memorização apenas de regras e fórmulas, sem maiores explicações e quase nenhum vínculo com as realidades cotidianas, fazem com os mesmos passem aos típicos questionamentos: Para que serve tal conceito? Quando e onde usarei tal fórmula? Qual a necessidade de aprender esse determinado assunto?

O que geralmente ocorre é que alguns alunos passam a aceitar tal situação, sem muitos questionamentos. Isso passa a gerar desmotivação e desconforto uma vez que não vê muito objetivo nos conteúdos que lhes são apresentados.

A atitude dos alunos ao longo da atividade deixou claro a vontade de aprender e de aplicar os conceitos e as práticas matemáticas abordadas na oficina em situações reais. É comum que conteúdos matemáticos sejam apresentados aos estudantes como um conjunto de fórmulas e regras, sem serem relacionados a situações familiares e de seu interesse. Perguntas tais como em que situação eu poderia utilizar esse conhecimento?, qual é a necessidade de aprender esta técnica?, para que serve isso?, ficam sem respostas e é mesmo possível que nem venham a ser formalmente formuladas. Isso contribui para a desmotivação e gera desinteresse nos estudantes, que não veem sentido ou aplicabilidade nos conteúdos a serem aprendidos.

A escolha do tema para a oficina levou em conta sua aplicabilidade, assim como seu potencial de fortalecer a importância de conteúdos básicos de matemática, tais como funções

e progressões. Todos se mostraram bastante contentes e satisfeitos por aprender conceitos interligados com seu cotidiano, ao mesmo tempo que aprendiam excelentes exemplos de conteúdos matemáticos.

Os alunos observaram atentamente os conceitos sobre porcentagem, as diferenças entre juros simples e compostos, como calcular cada um deles, como se chegar à fórmula do montante final em juros simples e compostos. O que se pode perceber ao final da experiência, conversando com eles, é o uso de oficinas, como essa estabeleceria um maior vínculo entre eles e os professores, assim como com os conteúdos apresentados.

O que eles argumentaram é que as aulas de matemática típicas seguindo o modelo de apresentação de conteúdos com poucas aplicações, baseando-se em memorização de fórmulas, não são funcionais nem atrativas. A oficina serviu como um modelo de situação de aprendizado bem mais animado, divertido e com maior potencial de aplicação. Neste formato, os alunos sentiam-se capazes até mesmo de dissertar sobre o que foi aprendido. Eles até sugeriram outros temas que poderiam ser abordados em aulas normais e em futuras oficinas.

Bibliografia:

REZENDE, Tacila Gomes Tebaldi. A Ilusão da Linearidade: Um Relato de Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, 2013.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. Fundamentos de Matemática Elementar. Editora Atual, 2007.

FACCHINI, Walter. Matemática Volume Único. Editora Saraiva, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. Brasília, 2008.

BRASIL. Senado Federal. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nº 9394/96. Brasília, 1996.

ROSETTI, Helio. Matemática Financeira e os Parâmetros Curriculares Nacionais. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

ROSETTI, Helio. Não Pare de Estudar. Vitória: Oficina de Letras. 2003.