UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

André Gaglianone de Almeida Kasprzykowski

Análise Comparativa da Prova de Matemática do ENEM e do Vestibular da UFRJ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.
Orientadora: Professora Walcy Santos

Rio de Janeiro
2014

K19a Kasprzykowski, André Gaglianone de Almeida.

Análise comparativa da prova de matemática do Enem e do vestibular da UFRJ / André Gaglianone de Almeida Kasprzykowski. -- Rio de Janeiro, 2013.

vii, 58 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Walcy Santos

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática,

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.2013.

André Gaglianone de Almeida Kasprzykowski

Análise Comparativa da Prova de Matemática do ENEM e do Vestibular da UFRJ

Dissertação Submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por**:**

Walcy Santos

Prof.ª Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora/Presidente da Banca Examinatória

Prof.ª Dra. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Instituto de Matemática – UFRJ

Cláudia Ferreira Reis Concordido

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Aprovado em:.

Local de defesa: Sala C–116, bloco C – Instituto de Matemática,

Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dedicatória

Aos Professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro que ministraram aulas na minha turma de Mestrado.

Agradecimentos

A minha orientadora Walcy Santos pela valiosa orientação e incentivo ao longo desses dois anos.

RESUMO

Entre o vestibular unificado realizado pela Fundação CESGRANRIO e o Exame Nacional do Ensino Médio, houve um momento no Estado do Rio de Janeiro de melhoria substancial no ensino influenciado pelo vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Sem tratar das razões políticas, eleitorais ou partidárias que envolvem os vestibulares e acreditando que a Universidade é o lugar para quem tem mérito, independente de ser oriundo de escola pública ou privada, esse trabalho compara textos de múltipla escolha onde se procura uma sentença verdadeira com textos discursivos onde se exige a escrita. Em ambas, o rigor matemático deve prevalecer, além do bom senso quanto ao número de questões para o tempo de prova e abrangência dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

ABSTRACT

Considering the time between the Cesgranrio Unified University Extrance Exam (Vestibular) and the High School National Exam (Exame Nacional do Ensino Médio) there was a moment, in the state of Rio de Janeiro of considerable improvement due to the Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) Exam Entrance. It is worth mentioning that political, electoral and parties reasons involved in the University Entrance Exam were not taken into considerations and it is our belief that the University is the place for those who deserve it regardeless their backgroung: be it private or public schools. The main aim of this work is to compare multiple choice texts where a true sentence is sought with discursive texts where the written ability is demanded. Both texts should consider the mathematical accuracy, besides the fair number of questions assigned for the test duration and the High School mathematical contents.

Sumário

INTRODUÇÃO 9
Capítulo I.. 11
Vestibular UFRJ x ENEM... 11
Algumas questões com defeito no ENEM e correspondência com questões do Vestibular UFRJ 23
Belas Questões do Vestibular UFRJ e que nunca aparecerão no ENEM. 59
CONCLUSÕES: 64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 66

INTRODUÇÃO

Em 1987, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) rompe com a Fundação CESGRANRIO, instituição esta responsável pela elaboração do vestibular unificado no Rio de Janeiro. À época, dizia-se que as provas de múltipla escolha apenas "adestravam" alunos e professores a macetes e dicas. A Universidade Federal do Rio de Janeiro adota o modelo discursivo que passa a qualificar positivamente não apenas seus novos discentes, mas também os professores de ensino médio e o próprio ensino médio. As provas eram bem elaboradas de forma a avaliar os conteúdos e habilidades de um estudante de ensino médio e candidato a uma vaga na Universidade.

Em 2010, infelizmente, a mesma Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) decide adotar como exame de acesso ao ensino superior a prova do ENEM- Exame Nacional do Ensino Médio. Um retrocesso! De volta à prova de múltipla escolha!

Mas o que é o ENEM?

ENEM – Exame Nacional de Ensino Médio, criado pelo ex-ministro Paulo Renato no governo do Presidente Fernando Henrique Cardoso. Uma onda de avaliação foi criada pelo ex-ministro, a fim de avaliar todos os segmentos de ensino no Brasil. A prova – o ENEM tinha esse caráter: avaliar o ensino! Relatórios eram elaborados e enviados às instituições e através deles era possível fazer ajustes para a melhoria do ensino. Pois bem, eis que surge no governo do Presidente Luiz Inácio Lula da Silva o NOVO ENEM. Uma análise superficial do exame mostra que 80% dos conteúdos exigidos nas questões são de ensino fundamental e tal prova não serve para avaliar estudantes do ensino médio e principalmente não qualifica o estudante a ter um bom desempenho no ensino superior, pois os colégios, professores e alunos relaxaram e passaram a conhecer e praticar apenas os poucos conteúdos exigidos no exame. E mais, a prova é cansativa, nada criativa e parece ser elaborada pelo computador.

Pensando em tudo que ocorreu de 1987 a 2013, escrevi esse trabalho crítico sobre algumas questões da prova de Matemática que deveriam ser anuladas ou simplesmente não existir devido aos erros que elas contêm.

Classificação dos erros encontrados:

Erro do tipo 1 – Texto correto e o gabarito não se encontra nas opções.

Erro do tipo 2 – Texto incorreto e o gabarito não se encontra nas opções.

Erro do tipo 3 – Distância enorme entre as informações e pergunta.

Erro do tipo 4 – Contextualização forçada no texto.

Antes de expor tais erros nas questões do ENEM e comparar cada uma delas com as questões da UFRJ, no capítulo II, faremos uma comparação atenta dos conteúdos e habilidades que moldam cada um dos dois exames, seus objetivos e como eles influenciam ou influenciaram o Ensino Médio no Rio de janeiro. Isto será feito no primeiro capítulo deste trabalho. Finalmente, no capítulo III, iremos contemplar uma seleção de questões do vestibular da UFRJ que por sua natureza de construção ou de apresentação de conteúdo jamais irão constar no ENEM.

Capítulo I

Vestibular UFRJ x ENEM

Objetivos e conteúdo Programático de Matemática

Nesse capítulo iremos fazer uma comparação dos dois exames, visando seus objetivos e conteúdos programáticos da área de Matemática. Também iremos comparar as duas provas e suas consequências no Ensino Médio. Para isto, vamos inicialmente comparar a Matriz da Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio e o conteúdo programático do último Vestibular da Universidade Federal do Rio de janeiro como forma exclusiva de acesso a UFRJ. Em seguida iremos comparar os objetivos de cada exame e como estes são implementados. Finalmente faremos uma análise da influência de cada exame no Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro.

I.1– A comparação dos Conteúdos Programáticos dos exames.

Segundo descrito no sítio do INEP (www.inep.gov.br), os conteúdos das provas do Exame Nacional do Ensino Médio são determinados pelas Matrizes de Referência em quatro áreas do conhecimento, e estamos interessados especificamente na prova de Matemática e suas Tecnologias. A seguir vamos transcrever esta matriz para que possamos comparar com o conteúdo programático indicado pela UFRJ em seu vestibular próprio.

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM EIXOS COGNITIVOS
(comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações problema.

IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

2. Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

2.1Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

2.2 Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

2.3 Competência de área 3 -

Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

2.4 Competência de área 4 -

Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

2.5 Competência de área 5 -

Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

2.6 Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

2.7 Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

ANEXO

Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

- **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
- **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
- **Conhecimentos de estatística e probabilidade**: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
- **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

- **Conhecimentos algébricos/geométricos**: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Estes conteúdos são associados a cada uma das sete competências listadas acima da forma especificada a seguir. Observamos que esta distribuição é indicada pelo próprio INEP, na capacitação para elaboração de questões para o ENEM.

A Competência I é composta por cinco habilidades e refere-se ao pensamento numérico. O pensamento numérico permite ao examinando explorar situações presentes no contexto social e analisar situações da realidade. Essa Competência refere-se, ainda, à capacidade de identificar diferentes representações dos números, seus significados e operações. Cabe destacar que os números podem ser utilizados para quantificar, ordenar ou construir códigos. Estão presentes em diferentes situações do cotidiano, tais como notícias veiculadas em jornais e revistas, em textos científicos, em jogos etc.

Conhecimentos numéricos: operações com conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

A segunda Competência com quatro habilidades refere-se ao uso da geometria na leitura e representação da realidade. O pensamento geométrico é um recurso importante para a resolução de diversas atividades do cotidiano por permitir a descrição e a representação do mundo em que vivemos. Além disso, este conhecimento revela-se em situações associadas às artes, à arquitetura, às atividades profissionais, aos esportes, entre outros. As questões que essa Competência pode apresentar caracterizam-se por situações em que o examinando deva ser capaz de identificar e interpretar conceitos e propriedades geométricas usando a percepção espacial para compreender e representar fenômenos naturais, histórico-geográficos, sócio-culturais, manifestações artísticas ou produções tecnológicas.

Conhecimentos geométricos: geometria plana e espacial; características das superfícies planas e dos sólidos; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; teorema de Tales; formas geométricas e simetrias; congruência e semelhança de triângulos; relações métricas nos triângulos; trigonometria do ângulo agudo.

Relacionam-se à Competência III cinco habilidades que envolvem as noções de grandezas e medidas, temas matemáticos presentes em diversas situações do cotidiano. Os itens exploram ações como selecionar instrumentos de medida mais adequados a uma determinada situação proposta; identificar e relacionar unidades de medidas adequadas a uma determinada grandeza que se queira medir.

Conhecimentos de Grandezas e Medidas: medidas de grandezas (superfície, volume, massa, tempo, temperatura, volume, ângulos...), unidades de medida de grandezas (metro, metro cúbico, quilograma, segundo, anos, radianos, Celsius,...); instrumentos de medida, sistemas de medidas, conversão entre sistemas de medidas, escalas, plantas, mapas.

Na quarta Competência, com quatro habilidades, é importante que o examinando identifique a interdependência de duas grandezas e suas variações em situações-problema que permitam analisar a natureza dessa relação.

Conhecimentos de variação de grandezas: Leis de formação de funções, grandezas direta ou inversamente proporcionais, juros simples ou compostos, aumentos e descontos sucessivos, razão e proporção.

A Competência V, expressa em cinco habilidades, trata do desenvolvimento do pensamento algébrico/geométrico para resolver situações-problema. O conhecimento matemático construído ao longo da vida, muitas vezes contextualizado em situações do cotidiano, pode e deve ser generalizado e transferido a outros contextos. Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Conhecimentos algébricos: funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; gráficos; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas; sistemas lineares e matrizes

Na sexta Competência, com três habilidades, os conceitos matemáticos envolvidos relacionam-se com o tratamento da informação a partir dos quais é possível analisar a variedade de informações que nos chegam a todo o momento e selecionar aquelas que são importantes para uma determinada situação. Em particular, a leitura de tabelas e gráficos permite interpretar adequadamente o significado dos dados, tomar decisões, fazer inferências, diante de questões de natureza científica ou sócio-econômica. Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Conhecimentos de leitura de gráficos e tabelas: análise de dados, distribuição de frequências, representações gráficas (colunas, linha ou setores) e tabelas simples ou de múltiplas entradas.

A Competência VII tem quatro habilidades e explora a compreensão de fenômenos aleatórios naturais e/ou sociais e utiliza conhecimentos de probabilidade e estatística na seleção, resumo e interpretação de informações. Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

Para podermos comparar os conteúdos programáticos dos dois exames, vamos transcrever a parte do Manual do Candidato do Vestibular 2009 da UFRJ, no que diz respeito à parte de Matemática deste exame.

Matemática (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RO DE JANEIRO)

A prova de Matemática tem os seguintes objetivos: avaliar a capacidade do candidato de interpretar enunciados lógicos e gráficos, de expressar seu raciocínio, seja em linguagem matemática ou linguagem corrente, e de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação, análise e solução de problemas reais.

Especificamente, acrescente-se aos objetivos descritos a avaliação criteriosa dos conhecimentos mínimos indispensáveis ao bom desempenho dos alunos em cursos que se apóiam numa sólida formação matemática.

PARTE 1 – ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E ANÁLISE

- Noções de lógica. Noção intuitiva de conjunto. Operações com conjuntos.
- Sistemas de numeração. Números naturais, inteiros, racionais e reais: propriedades, operações, ordem, valor absoluto e proporcionalidade. Números complexos: formas trigonométrica e algébrica, representação e operações.
- Funções: gráficos e operações. Inversa de uma função. Estudo das seguintes funções reais: 1ºgrau, 2º grau, módulo, exponencial e logarítimica.
- Equações e inequações de 1º e 2º graus. Sistemas de equações e inequações de 1º e 2º graus.
- Sequência: noção intuitiva de sequência e de limite de uma sequência. Progressões aritméticas e geométricas. Juros simples e compostos.
- Polinômios, relações entre coeficientes e raízes. Teorema Fundamental da Álgebra.
- Análise Combinatória. Binômio de Newton. Noções de Probabilidades.

PARTE 2 – GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

- Geometria Plana – Figuras planas: caracterização e propriedades. Teorema de Tales. Semelhança de triângulos e polígonos. Relações métricas em triângulos, polígonos regulares e círculo. Perímetros e áreas de figuras planas.

- Geometria Espacial – Posições relativas de retas e planos. Poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas: áreas e volumes. Sólidos semelhantes. Troncos. Inscrição e circunscrição de sólidos. Superfícies e sólidos de revolução.
- Trigonometria – Arcos e ângulos, relações entre arcos. Funções trigonométricas. Sistemas de medida.

PARTE 3 – ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO.

- Operações com vetores de R^2 e R^3.
- Reta e circunferência no R^2.
- Elipse, hipérbole e parábola no R2; equações cartesianas, representação gráfica e identificação dos elementos.
- Reta, plano e esfera no R^3: equações e identificação dos elementos.
- Matrizes: operações. Inversa de uma matriz.
- Transformações lineares simples do R2 e R3.
- Determinantes de matrizes 2x2 e 3x3.
- Sistemas de equações.

Claramente, a quantidade de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio é menor do que a quantidade de conteúdos do vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Mesmo com conteúdo mais restrito, na prática, o que ocorre é que a prova do Exame Nacional do Ensino Médio é de pouca abrangência e isso fica pior ainda considerando uma prova com 45(quarenta e cinco) questões em que, sua maioria, são cobrados conteúdos do Ensino Fundamental, fatos que não ocorriam no vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Além do exposto, ficam de fora do programa de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio, alguns temas de supra importância para o seguir na vida acadêmica universitária: Álgebra Linear, Geometria Analítica, Números Complexos e Polinômios.Observe que no próprio Manual do Candidato transcrito acima, a Universidade indica que esta prova deveria ser uma avaliação criteriosa dos conhecimentos **mínimos indispensáveis** ao bom desempenho dos alunos em cursos que se apóiam numa sólida formação matemática. Mesmo com a longa descrição de habilidades e competências que deveriam ser mensuradas pela prova do ENEM, pelos conteúdos programáticos associados, são aquém de uma formação mínima de Matemática neste nível, ficando mais próxima de uma avaliação do Ensino Fundamental.

I.2 – Objetivos de cada Exame.

Os dois exames possuem certamente objetivos bem distintos.

Quando criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio tinha como único objetivo realizar avaliação sistemática da Educação Básica em todo pais e utilizar seus resultados para contribuir para a melhoria da qualidade do ensino no país. Desde 2009 passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Algumas Universidades usam o exame como parte de seu processo seletivo, ou exclusivamente este exame como seu vestibular, usando ou não o Sistema SISU para seleção de seus novos alunos.

Segundo o site do INEP, na descrição do Exame Nacional do Ensino Médio, foram implementadas mudanças no Exame que contribuem para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para a mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio.

O uso deste exame como mecanismo de seleção implicou a mudança na Matriz de referência conforme descrito na seção anterior, tornando o exame um pouco mais "conteudista". Ele também é usado para certificação do Ensino Médio, substituindo o antigo supletivo.

Observamos que ao ser usado nos processos seletivos para as Universidades, o Exame passa a perder parte de seu objetivo principal, uma vez que os candidatos a entrar nas Universidades fazem o Exame várias vezes, mascarando o resultado de cada Instituição de Ensino Médio. Muitos alunos fazem formação complementar via cursinhos preparatórios para melhorar seu desempenho para permitir entrar em Universidade em cursos mais concorridos, porém ele se inscreve sempre com vínculo de sua escola que o certificou no Ensino Médio. No ano de 2013, aproximadamente 7800000 fizeram a prova do ENEM, porém destes, apenas 1600000 eram concluintes do Ensino Médio naquele ano.

Apesar dos múltiplos papéis da prova do ENEM, ela continua sendo, em sua essência, uma avaliação do sistema do Ensino Básico. Com este papel, não apresenta questões com maior grau de dificuldade, já que deve ser capaz de estratificar toda a qualidade deste ensino em todo Brasil.

Por outro lado, o Vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro tinha como objetivo a seleção dos melhores candidatos para seus cursos. Dividido em duas etapas, com provas específicas e não específicas que tinham graus de dificuldade distintos e eram usadas de formas variadas pelas diversas carreiras. Nas carreiras da área tecnológica, a prova de Matemática era específica com maior dificuldade do que, por exemplo, para Letras que usava a prova de Matemática não específica. Em relação à Matemática, seus objetivos eram avaliar a capacidade do candidato de interpretar enunciados lógicos e gráficos, de expressar seu raciocínio, fosse em linguagem matemática ou linguagem corrente, e de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação, análise e solução de problemas reais.

Além dos objetivos muito distintos, as duas provas são muito diferentes. O Vestibular da UFRJ tinha uma característica única que o tornou revolucionário levando-se em conta o número de candidatos deste vestibular: era totalmente discursivo. Em sua implementação, houve uma revolução no Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro. O candidato passava a ter que redigir sua solução; tinha que escrever!!!! Expor suas ideias e argumentações passou a fazer parte das competências exigidas para se entrar na UFRJ.

As provas eram em média com 10 questões e o aluno poderia receber pontuação por desenvolvimentos parciais da solução em cada questão. Observamos que este é o modelo de avaliação dos alunos da UFRJ e este modelo de vestibular já preparava o aluno para sua vida universitária, diminuindo o choque cultural da mudança do Ensino Médio para o Ensino Superior.

A prova de Matemática do Exame ENEM é constituída de 45 questões objetivas. O aluno tem em média 3 minutos para ler, refletir, resolver e marcar o cartão de resposta em cada questão. A técnica de elaboração das questões indica que cada questão deve ter 5 opções de respostas, das quais apenas uma deve ser correta, enquanto as outras quatro opções devem ser opções “plausíveis” de um aluno chegar com um raciocínio errado de resolução. Uma análise ainda superficial mostra que a grande maioria das questões é de conteúdos do ensino fundamental, em sua maioria mais fáceis do que as questões das provas não específicas do Vestibular da UFRJ. Cobrando de forma mais elementar, esta prova tende a não identificar os estudantes com um potencial diferenciado para área de Matemática.

I.3- O Impacto no Ensino Médio

O vestibular da UFRJ gerou um movimento na comunidade escolar. Alunos e professores passaram a estudar mais, pesquisar novas bibliografias, acompanhar as provas e resolvê-las, o Ensino Médio ficou mais forte. Houve uma mudança na postura de ensinar e aprender, e cada tema da Matemática era ensinado com cuidado, rigor e com riqueza de detalhes. A prova do vestibular da UFRJ foi de fato um estímulo à qualidade do ensino. No atual momento, as escolas de Ensino Médio trabalham apenas, e de forma superficial, os conteúdos do ENEM; ninguém quer saber de algo além das provas. A qualidade que pairou durante quase 20 anos, despencou. Não há mais o cuidado na contratação de professores experientes e estudiosos, bem formados. Os salários pagos são iguais ao piso salarial da categoria e o ranking das escolas divulgado nada acrescenta ou atrapalha. No vestibular da UFRJ, o ranking era esperado, comemorado pelas instituições que conseguiam êxitos e aquelas que não o conseguiam geravam um movimento do tipo “vamos aprimorar” nosso ensino. Lamentavelmente, o NOVO ENEM trouxe uma acomodação aos professores e alunos e como uma das conseqüências é que o bom estudante migrou para Universidades Particulares de ótima referência no país, em particular, no Rio de Janeiro ou para a UERJ- Universidade do Estado do Rio de Janeiro que não aderiu ao NOVO ENEM.

Capítulo II

Algumas questões com defeito no ENEM e correspondência com questões do Vestibular UFRJ

Normalmente, nos exames unificados, as provas são de múltipla escolha com muitas questões; no antigo vestibular da Fundação Cesgranrio eram trinta e cinco e no atual Exame Nacional do Ensino Médio, quarenta e cinco. Se os textos de múltipla escolha não forem muito bem pensados e escritos podem levar a erros de baixa ou alta relevância, mas são erros. Para uma prova com essa quantidade de questões, deve-se ter textos curtos e rápidos na assimilação do que se pretende. A análise feita nesse capítulo mostra claramente a perda do "rigor matemático" quanto à linguagem escrita nos textos. Há confrontos entre o que se ensina e o que neles se vê, entre a teoria e a prática nas questões do cotidiano, além da exaustão que uma prova dessas provoca.

Nos vestibulares da Universidade Federal do Rio de Janeiro, totalmente discursivos, em duas fases: conhecimentos não específicos e específicos, o aluno tinha a liberdade para expor no papel aquilo que ele pensava, suas ideias, sua criatividade. Na prova discursiva, a linguagem matemática era precisa, com textos bem escritos, claros, sem dupla interpretação. O aluno precisava ler, pensar no que fazer e aplicar os conteúdos aprendidos, permitindo por exemplo a associação entre conteúdos programáticos, o que deixava a prova, com poucas questões, abrangente. Uma boa leitura da prova mostrava que a Universidade queria saber do aluno seus conhecimentos básicos e sólidos da Matemática, como foi seu Ensino Médio e no final da prova constava aquela questão que dizia: você está com um pé na Universidade, seu começo será quase assim. Perfeita, elogiada por todos os segmentos da comunidade escolar.

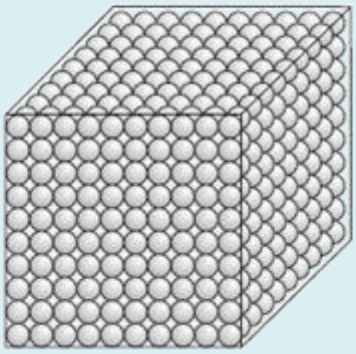
A partir de agora vamos apresentar uma seleção de questões encontradas nas provas do ENEM que apresentaram erros ou que consideramos inadequadas ao Exame. Após uma análise criteriosa das provas do ENEM de 1998 a 2013, separamos trinta e sete questões e escolhemos as questões a seguir para esse trabalho.

Questões escolhidas no conjunto de questões com erros.

A primeira questão de que iremos fazer a análise é uma questão sem gabarito devido a forma não precisa de descrever o problema proposto. Para um mesmo texto base foram feitas duas questões, a primeira das quais está correta, porém muito elementar. Na segunda pergunta é que temos a imprecisão na descrição do problema proposto. As duas questões têm como objetivo verificar o conhecimento de contagem e visualização geométrica

1. **Exame Nacional do Ensino Médio - 1998**

Observe nas questões 49 e 50 o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta.



49. Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas e iguais, tendo assim empregado:

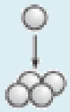
A) 100 bolinhas

B) 300 bolinhas

C) 1000 bolinhas

D) 2000 bolinhas

E) 10000 bolinhas



50. Uma segunda pessoa procurou encontrar outra maneira de arrumar as bolas na caixa achando que seria uma boa idéia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura. Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:

A) 729 bolinhas

B) 984 bolinhas

C) 1000 bolinhas

D) 1086 bolinhas

E) 1200 bolinhas

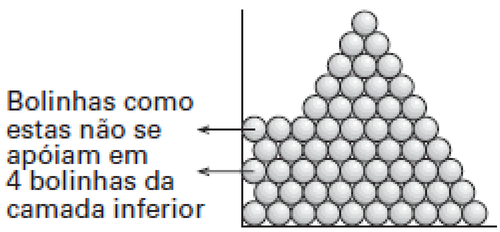
Comentários:

O gabarito proposto indica que a solução deveria ser feita calculando da seguinte forma:

6 camadas com 100 bolinhas + 6 camadas com 81 bolinhas

600+486=1086

Pelo enunciado, as camadas deveriam ser formadas de modo que em cada camada uma bolinha deveria se apoiar em **quatro** bolinhas da camada anterior. A ilustração a seguir mostra que com esta condição algumas bolas não tocam em 4 bolas da camada anterior.



Solução:

Se cada bolinha de uma camada se apoiasse em 4 bolinhas da camada inferior, o conjunto das bolinhas assim distribuídas formaria uma estrutura piramidal quadrangular com 10 camadas assim organizadas:

1ª camada: 10 x 10 = 100 bolinhas

2ª camada: 9 x 9 = 81 bolinhas

3ª camada: 8 x8 = 64 bolinhas

4ª camada: 7 x 7 = 49 bolinhas

6ª camada: 6 x 6 = 36 bolinhas

7ª camada: 5 x 5 = 25 bolinhas

8ª camada: 4 x 4= 16 bolinhas

9ª camada: 3 x 3 = 9 bolinhas

10ª camada: 2 x 2 = 4 bolinhas

11ª camada: 1 x 1 = 1 bolinha

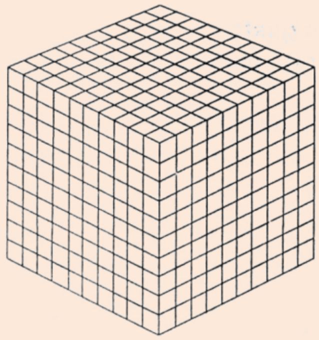
Portanto, o número de bolinhas na caixa seria 385.

Como proposto, a seguir iremos apresentar uma questão do Vestibular UFRJ que tinha os mesmos objetivos da questão acima, porém descrita de forma precisa.

É uma questão que trabalha percepção geométrica, contagem simples e a definição de probabilidade com texto curto e perguntas claras sem dupla interpretação:

2. **Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 1998**

Um marceneiro cortou um cubo de madeira maciça pintado de azul em vários cubos menores da seguinte forma: dividiu cada aresta em dez partes iguais e traçou as linhas por onde serrou, conforme indica a figura abaixo.



a)Determine o número de cubos menores que ficaram sem nenhuma face pintada de azul.

b)Se todos os cubos menores forem colocados em um saco, determine a probabilidade de se retirar, ao acaso, um cubo com pelo menos duas faces azuis.

Solução:

a) O número de cubos menores que ficaram sem nenhuma face pintada de azul é obtido calculando o volume de um cubo de aresta 8, isto é:

   (10-2) x (10-2) x (10-2) = 512.

b) **Definição clássica de probabilidade**: é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

   Número de casos possíveis: 10 x 10 x 10 = 1000

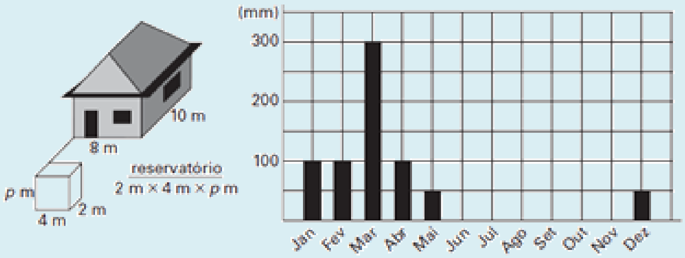
Número de casos favoráveis (cubos localizados ao longo das arestas e nos vértices): 8 x 12 + 8 = 104.

Portanto, a probabilidade pedida é 104/1000= 0,104.

Na próxima questão, mais um exemplo de questão onde o enunciado não é claro para o problema proposto. Nesta questão falta uma informação importante para a solução do problema. Aqui os conhecimentos a serem testados pela questão são leitura e interpretação de dados numa tabela ou em um gráfico para relacionar com o conteúdo diferente citado ao longo do texto.

Exame Nacional do Ensino Médio - 2003

Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso. As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.



Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir:

A) 4m

B) 5m

C) 6m

D) 7m

E) 8m

Solução:

Chovem 700 milímetros por ano e, portanto, são acumulados 700 litros por metro quadrado. O telhado apóia-se sobre uma superfície plana horizontal de 80 m^2 e recebe 80 x 700L = 56000L = 56m^3. Assim sendo,

pm x 8m x 7m = 56m^3 e conclui-se que p=7m.

Comentários:

Pelo gabarito proposto, o estudante deveria admitir que a superfície plana a ser considerada é a superfície retangular de dimensões 8m e 10m(base do telhado) , observando que a quantidade de água que nela incide independe da forma do telhado, ou seja que a chuva incide de forma **perpendicular** no telhado e esta informação não é dada no texto. .

Agora, uma questão com as mesmas habilidades a serem aferidas (consultar dados numa tabela ou em um gráfico para relacionar com o conteúdo diferente citado ao longo do texto).

Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 2008

Dados *a* e *b* números reais positivos, $b \neq 1$,define-se *logaritmo de a na base b* como o número real *x* tal que $b^x = a$, ou seja, $x = \log_b a$.

Para $\alpha \neq 1$, um número real positivo , a tabela ao lado fornece valores aproximados para α^x e α^{-x}.

x	α^x	α^{-x}
2,0	6,250	0,160
2,1	6,850	0,146
2,2	7,507	0,133
2,3	8,227	0,122
2,4	9,017	0,111
2,5	9,882	0,101
2,6	10,830	0,092
2,7	11,870	0,084
2,8	13,009	0,077
2,9	14,257	0,070
3,0	15,625	0,064

Com base nesta tabela, determine uma boa aproximação para:

a) o valor de α;

b) o valor $\log_\alpha \frac{1}{10}$ de

Solução:

a) $\alpha = \alpha^3 x\ \alpha^{-2} = 15{,}625\ x\ 0{,}16 = 2{,}5.$

b) $x = \log_\alpha(\frac{1}{10})$ que equivale a $\alpha^x = 0{,}1$. Da tabela, verifica-se que $0{,}1 \approx 0{,}101 = \alpha^{-2{,}5}$. Então, $x \approx -2{,}5$.

O próximo exemplo é de um texto pouco preciso, que poderia levar o aluno a erro. Nesta questão é cobrada a habilidade de decompor um número racional em soma de outros racionais, com alguma restrição.

3. Exame Nacional do Ensino Médio - 2009

A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for 1/2. Poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é ¾, poderia ser preenchido com

A) 24 fusas

B) 3 semínimas

C) 8 semínimas

D) 24 colcheias e 12 semínimas

E) 16 semínimas e 8 semicolcheias

Solução:

Cada um dos oito compassos tem fórmula 3/4. A duração total do trecho musical é 8 x 3/4 =6. Devemos então escrever uma combinação dos números racionais associados as notas de modo a combinar 8 compassos de fórmula ¾ e cuja soma total seja 6.

Na opção (a), 24 fusas comporiam 8 compassos de 3 fusas e portanto 8 compassos de formula 3/32, o que não é solução.

Na opção (b), 3 notas apenas não são suficientes para formar 8 compassos.

Na opção (c), com 8 notas, poderíamos formar compassos de uma nota apenas. Como a nota é semínima, as formulas destes compassos seriam ¼ e, portanto, não é solução.

Na opção (e), o comprimento total do trecho seria 16.1/4+8.1/16=9/2 e, portanto, também não é solução.

Resta a opção (d), cujo comprimento total está correto, e as notas podem ser divididas em 8 compassos da seguinte forma: 2 compassos com 3 seminimas e 6 compassos formados com 1 seminima e 4 colcheia. Esta é a opção correta.

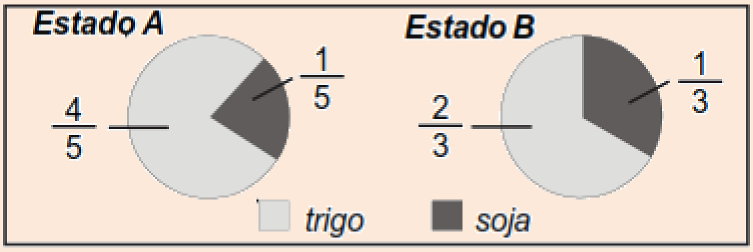
Comentários:

Esta questão inicialmente tem texto não preciso, não deixando claro se ¾ é fórmula do trecho musical ou de cada compasso que a compõe, levando o aluno a ter dúvidas. Além deste defeito grave, o candidato deve testar as opções para verificar qual é verdadeira.

Abaixo temos um exemplo simples para trabalhar com números racionais, do cotidiano, sem dupla interpretação, comparando duas situações com total atenção do aluno ao fato de que o total da produção dos dois Estados não é dado, o que torna a questão bastante interessante.

4. **Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 2006**

Dois estados produzem trigo e soja. Os gráficos abaixo representam a produção relativa de grãos de cada um desses estados.



a) A produção de trigo do estado A corresponde a que porcentagem da produção de grãos do estado?
b) É possível afirmar, a partir dos gráficos, que a produção total de trigo do estado A é maior do que a do estado B? Justifique sua resposta.

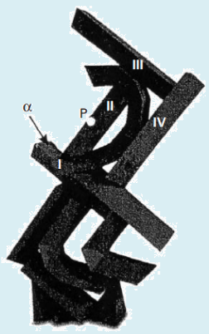
Solução:

a) 4/5 x 100% = 80%.
b) Nada se pode afirmar sem saber a produção total de grãos dos dois Estados.

Na próxima questão, temos dois erros: um no conceito de perpendicularismo entre superfícies e o outro erro é que não tem gabarito para a pergunta feita.

5. **Exame Nacional do Ensino Médio - 2009**

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: www.escritosriodearte.com.br. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

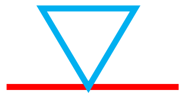
A) Dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos
B) Dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos
C) Dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares
D) Dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos
E) Dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

Solução:

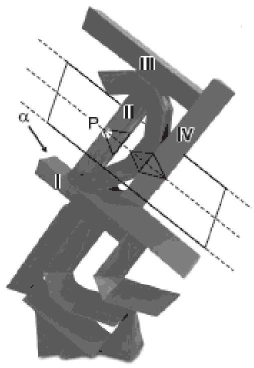
Vamos admitir que prismas perpendiculares são tais que as arestas laterais de um são ortogonais às arestas laterais do outro. Sendo assim, o plano paralelo a α que contém P intersecta os prismas II e IV, formando duas regiões triangulares paralelas e congruentes às bases dos prismas. GABARITO DIVULGADO: (A)

Comentários:

Observamos que o prisma III intersecta o poliedro II por sua aresta. Neste caso a noção de ângulo, e portanto de perpendicularismo entre estes sólidos não está bem definida. Veja o corte transversal da interseção:



Nas condições propostas, a interseção do plano com a escultura é a união de um triângulo com um quadrilátero, como mostra a figura abaixo. Se os prismas forem regulares, o triângulo será equilátero e o quadrilátero será um losango.

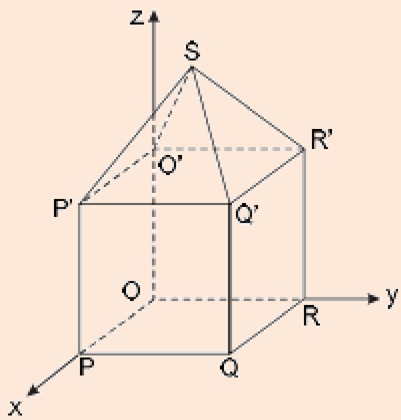


www.escritoriodearte.com.br

Se a interseção pedida fosse do plano com os prismas II e IV; considerando as faces destes dois prismas respectivamente paralelas; então a alternativa A seria correta.

6. **Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 2000**

O sólido representado na figura é formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular cuja base coincide com a face superior do cubo. O vértice O do cubo é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas Oxyz. Os vértices P, R e O' pertencem respectivamente aos semi-eixos positivos Ox, Oy e Oz.O vértice S tem coordenadas (2,2,8).



Considere o plano z = k que divide o sólido em duas partes de volumes iguais. Determine o valor de k.

Solução:

Seja T=(2,2,0) a projeção ortogonal de S sobre o plano xy. Como a pirâmide é quadrangular regular, T coincide com o ponto de interseção dos segmentos PR e OQ. Portanto, a aresta do cubo mede 4. Como o segmento ST mede 8, concluímos que a altura da pirâmide mede 4. O plano z=k, que é um plano paralelo ao plano xy, divide o sólido em duas partes, cujos volumes denotaremos por V1 (parte inferior) e V2 (parte superior). Se V1 = V2 temos necessariamente $0<k<4$. Portanto,

$V1 = 16k$ e $V2 = 64/3 + 16(4-k)$,

$V1 = V2$ e daqui conclui-se que $k = 8/3$.

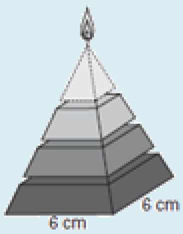
Comentários:

As duas questões apresentadas apresentam o mesmo nível de dificuldade, porém a da UFRJ trabalha um pouco mais de conteúdo. Desenhar o plano z=k torna a questão bem interessante, tema de Ensino Médio próximo a uma realidade que o estudante encontrará na Universidade em Álgebra Linear, tema este fora dos conteúdos programáticos do Exame Nacional do Ensino Médio, uma pena. Pois o que ocorre no momento na maioria das escolas de Ensino Médio é ensinar apenas o que prevê o edital do mesmo.

Na próxima questão, temos novamente o uso incorreto de termos matemáticos.

Exame Nacional do Ensino Médio - 2009

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19cm de altura e 6cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior, espaçados de 1cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem, 1,5cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

A) $156cm^3$
B) $189cm^3$
C) $192cm^3$
D) $216cm^3$
E) $540cm^3$

Solução:

Gabarito (B). De acordo com o enunciado (?), pode-se concluir que a altura da pirâmide de parafina é 16cm e que a altura da pirâmide menor retirada é 4cm. Assim, o volume, em centímetros cúbicos, de parafina para fabricar o novo modelo de vela é igual a:

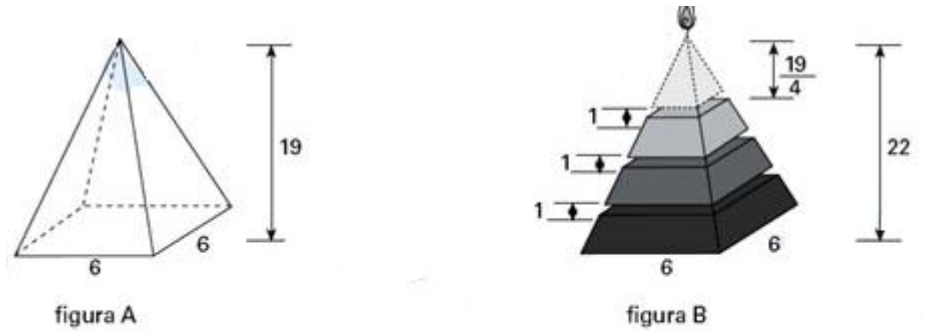
$1/3 \times 6^2 \times 16 - 1/3 \times (1{,}5)^2 \times 4 = 192 - 3 = 189$.

Comentários:

A figura dada não é uma pirâmide!

Definição de Pirâmide (sólido): Dado uma região limitada por um polígono P em um plano e um ponto V fora desse plano, a pirâmide de base P e vértice V é a figura formada pela união de todos os segmentos de reta com extremidades em V e um ponto Q em P.

Do enunciado, considere as figuras A e B, cotadas em cm:



A pirâmide representada na figura A contém a parafina que será utilizada na produção da vela indicada na figura B (mais uma vez, não é uma pirâmide!). Retirando-se do sólido da figura A a pirâmide de altura 19/4 cm e aresta da base 1,5 cm, indicada na figura B, obteremos o volume V, em cm^3, de parafina que será gasta na fabricação:

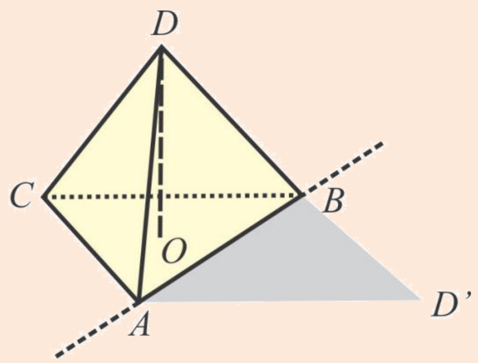
$$V = 1/3 \times 6^2 \times 19 - 1/3 \times (1{,}5)^2 \times 19/4 = 228 - 3{,}5625 = 224{,}4375.$$

Logo, a questão não apresenta alternativa correta.

Notem agora o início perfeito do texto abaixo: ”Um sólido tem a forma de uma pirâmide”, seguido de informações bem detalhadas a respeito do movimento que deverá ocorrer.

7. Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova específica - 2009

Um sólido tem a forma de uma pirâmide *ABCD* e está apoiado sobre uma mesa. A base da pirâmide é o triângulo eqüilátero *ABC* e as outras faces são triângulos isósceles congruentes. A altura *OD* mede 5 cm e a aresta *AD* mede 10cm. A pirâmide é girada em torno da aresta *AB*. O vértice *D* percorre um arco *DD'* tal que *D'* fica situado sobre a mesa.



Determine o comprimento do arco *DD´*.

Solução:

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo OAD: OA = $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$.

Seja H o ponto médio de AB. Como ABC é um triângulo equilátero:

OH = 1/2OA = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e DH^2 = DO^2 + OH^2 = 25 + 75/4. Daí, DH=$\frac{5\sqrt{7}}{2}$. Seja α

O ângulo OHD. Então, $tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Logo, o comprimento S do arco DD' é:

$\frac{5\sqrt{7}}{2}(\pi - arctg(\frac{2\sqrt{3}}{3}$)).

A próxima questão envolve um conhecimento não abordado no Ensino Médio – a permutação caótica.

8. **Exame Nacional do Ensino Médio - 2009**

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava - se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

A) 1/24
B) 3/24
C) 1/3
D) 1/4
E) 1/2

Comentários:

Trata-se claramente de permutação caótica, tema não abordado no ensino médio.

Definição: Uma permutação caótica ou desarranjo de n objetos distintos ocorre quando nenhum objeto ocupa sua posição original.

Porém, os estudantes poderiam resolver a questão sem esse conhecimento: construindo uma tabela com todos os casos possíveis (P_4=4!= 24 no total) o que perderia muito tempo.

Solução:

Permutação Caótica ou Desarranjo de n objetos distintos ocorre quando nenhum objeto ocupa sua posição original. Seja D_n o número de desarranjos. D_n é o inteiro mais próximo do resultado de n!/e, onde e representa a constante de Euler (e=2,718...)

Portanto, a probabilidade pedida é calculada por $D_4/P_4 = 9/24 = 3/8$.

Trazer para a prova um conhecimento não adquirido no ensino médio pode ser ruim, pois o aluno jamais vivenciou uma situação semelhante e com certeza tentará resolver na força bruta, o que convenhamos para uma tarde com 90 questões com textos de tamanhos exagerados, além da redação, não é uma boa opção.

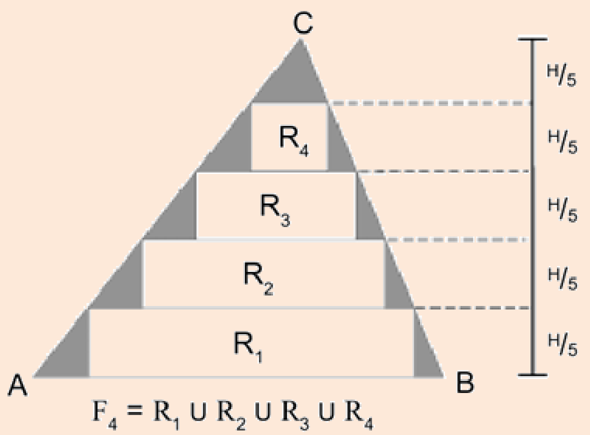
Foi selecionada uma questão do vestibular da UFRJ onde o conceito de limite aparece de forma intuitiva, e com uma rápida percepção geométrica, o estudante sabe a resposta e tem conteúdos para chegar nela:

Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova específica - 2003

Considere o triângulo *T*, de vértices *A*, *B* e *C*, tal que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos. Seja *H* a altura relativa ao lado *AB*. Para cada número natural *n*, seja *Fn* a figura formada pela união de *n* retângulos justapostos contidos em *T* (veja na figura o caso *n* = 4). Cada retângulo tem dois lados perpendiculares a *AB* medindo

$$\frac{H}{n+1}$$

e um lado ligando *AC* a *BC* (o maior dos retângulos tem um lado contido em *AB*).



Sabendo que a área de T é α , calcule, em função de e α de n, a diferença entre a área de T e a área de Fn. Qual o limite da área de Fn, quando n tende ao infinito?

Solução:

Seja A_n o triângulo A'B'C' de vértice C e altura H/(n+1). Como A_n e T são semelhantes, temos AB = (n+1)A'B'. Portanto, a área de A_n mede:

$$\frac{H}{2(n+1)}A'B' = \frac{\alpha}{(n+1)^2}.$$

A diferença entre a área de T e a área de F_n é igual à soma das áreas dos triângulos sombreados da figura. Como a soma das áreas dos dois triângulos laterais ao retângulo R_k, k=1,2,...,n, é igual à área do triângulo A_n, temos

$$área(T) - área\ F_n = (n+1)área(A_n) = \frac{\alpha}{n+1}$$

Portanto, podemos escrever a área de F_n em função de α e de n pela expressão

$$área(F_n) = \alpha - \frac{\alpha}{n+1}$$

Passando ao limite quando n tende ao infinito, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} área(F_n) = \alpha.$$

A próxima questão contém um erro não admissível em Matemática que é usar a mesma notação para objetos distintos.

9. Exame Nacional do Ensino Médio - 2009

A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função 180x-116. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

A) 10
B) 30
C) 58
D) 116
E) 232

Comentários:

O aluno deveria ter admitido que as funções dadas no texto representam o custo de fabricação de x unidades e o valor de venda de x unidades.

Solução:

Considerando o comentário feito acima, deve-se subtrair uma função da outra e achar o x do vértice da parábola y = 180x-116 – $(3x^2 + 232)$,que vale 30.

Tal imperfeição no texto irá aparecer novamente na próxima questão:

10. Exame Nacional do Ensino Médio - 2009

A empresa SWK produz um determinado produto x, cujo custo de fabricação é dado pela equação de uma reta crescente, com inclinação dois e de variável x. Se não tivermos nenhum produto produzido, a despesa fixa é de R$7,00 e a função venda de cada unidade x é dada por $-2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$. Tendo em vista uma crise financeira, a empresa fez algumas demissões. Com isso, caiu em 12% o custo da produção de cada unidade produzida. Nessas condições, a função lucro da empresa pode ser expressa como

A) $L(x) = -2x^2 + 228x - 448{,}00$
B) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}84$
C) $L(x) = -2x^2 + 228x - 441{,}84$
D) $L(x) = -2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$
E) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}96$

Comentários:

Além do exposto anteriormente, ao citar "reta crescente de inclinação dois", é inadequado o termo crescente, utilizado para função e não para seu gráfico.

Solução:

Considerando o texto correto, para x unidades, a expressão do custo inicial é 2x + 7, a receita obtida é R= $-2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$. Portanto, o lucro é a diferença

$$-2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84 - 0{,}88(2x + 7) = L(x) = -2x^2 + 228x - 448$$

Gabarito: (A).

Um excelente exemplo de equacionamento envolvendo temas ligados a matemática financeira comercial encontra-se abaixo onde a diferença entre lucro e margem de lucro é explorada.

11. Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova específica - 1997

Para montar uma fábrica de sapatos, uma empresa fez um investimento inicial de R$ 120.000,00. Cada par de sapatos é vendido por R$ 30,00, com uma margem de lucro de 20%. A venda mensal é de 2.000 pares de sapato. Determine o número de meses necessários para que a empresa recupere o investimento inicial.

Solução:

Eis aqui um ótimo texto para ser transcrito para a linguagem matemática com o detalhe bem sutil que é a diferença entre lucro e margem de lucro.

Definições: Lucro é o percentual sobre o preço de custo e Margem de lucro é o percentual sobre o preço de venda.

Investimento inicial :R$ 120.000,00

Margem de lucro = 20% x R$ 30,00 = R$ 6,00 para cada par de sapato.

Como a venda mensal é de 2000 pares de sapato, a empresa fatura por mês, R$12.000,00. Logo, serão necessários 10 anos para recuperar o investimento inicial.

A próxima questão está mal formulada, não apresentando gabarito.

12. Exame Nacional do Ensino Médio - 2009

Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc.XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM	
72% das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping *No entanto, apenas* **39%** dos homens disseram achar a atividade insuportável	**65%** pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa *No entanto,* **84%** deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal

Correio Braziliense, 29 jun. 2008 (adaptado).

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é

A) Inferior a 80
B) Superior a 80 e inferior a 100
C) Superior a 100 e inferior a 120
D) Superior a 120 e inferior a 140
E) Superior a 140

Solução:

O valor mínimo pedido é dado por 300 x (65/100 + 72/100)-300=111 e o valor máximo pedido é calculado por 300 x 65/100 = 195.

Portanto, não há opção correta.

Comentários:

A questão acima é interessante, pois trabalha com a variação da quantidade de elementos da interseção em um diagrama convencional e fácil de ser construído. O

Gabarito indicado era a letra (c) e, portanto, a pergunta correta seria “que o número mínimo de mulheres que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é: ”.

Abaixo temos uma questão cuja construção do diagrama explora praticamente todas as possibilidades de reconhecimento de cada região, novamente, criativa, do cotidiano e com pergunta clara.

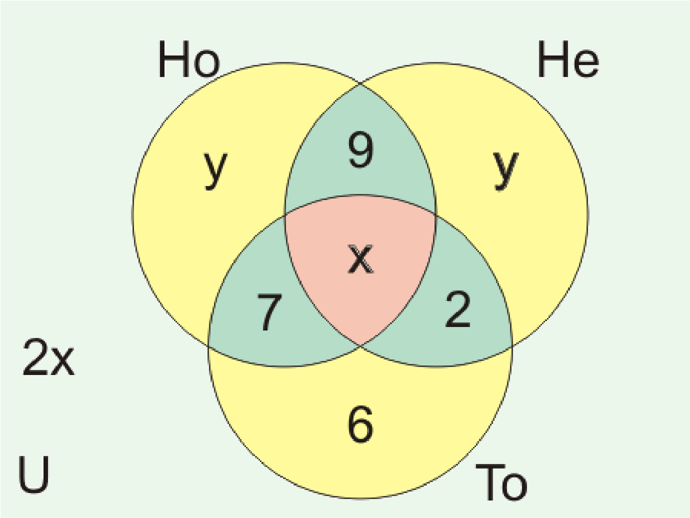
13. Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova específica - 1988

Considere os pacientes de AIDS classificados em 3 grupos de risco: hemofílicos, homossexuais e toxicômanos. Num certo país, de 75 pacientes verificou-se que:

41 são homossexuais;
9 são homossexuais e hemofílicos, e não são toxicômanos;
7 são homossexuais e toxicômanos, e não são hemofílicos;
2 são hemofílicos e toxicômanos, e não são homossexuais;
6 pertencem apenas ao grupo de risco dos toxicômanos;
o número de pacientes que são apenas hemofílicos é igual ao número de pacientes que são apenas homossexuais;
o número de pacientes que pertencem simultaneamente aos 3 grupos de risco é a metade do número de pacientes que não pertencem a nenhum dos grupos de risco.

Quantos pacientes pertencem simultaneamente aos 3 grupos de risco?

Solução:



Legenda:

U = conjunto universo

Ho = homossexuais

He = hemofílicos

To = toxicômanos

O valor externo aos três conjuntos vale o dobro do valor central. Logo ele 2x. As regiões exclusivas para apenas hemofílicos e homossexuais são desconhecidas. Chamei de y. O resto preenchi de acordo com os dados do enunciado. Podemos ainda montar duas equações: O total de homossexuais é 41, ou seja:

$$y + 9 + 7 + x = 41 \text{ e}$$

$$y+x=25 \qquad (1)$$

O total de pacientes é a soma dos números de todas as regiões e vale 75 (afinal são 75 pacientes). Dai temos:

$$2x+y+9+y+7+x+2+6=75$$

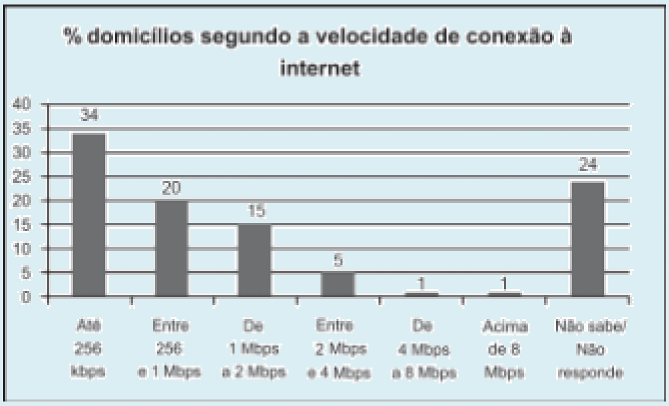
$$3x+2y = 51 \qquad (2)$$

Das equações 1 e 2 concluímos que x = 1.

A próxima questão confunde os termos chance e probabilidade, que são conceitos distintos em matemática:

14. Exame Nacional do Ensino Médio - 2011

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

A) 0,45
B) 0,42
C) 0,30
D) 0,22
E) 0,15

Solução:

Novamente, "admitindo" que entre os 24% que não sabem ou não responderam não haja domicílios com conexão de pelo menos 1 Mbps, há pelo menos 1 Mbps em (15+5+1+1)% domicílios. Logo, em 22%=0,22 dos domicílios há pelo menos 1 Mbps.

Comentários:

A prova do ENEM usa a palavra ***chance*** como sinônimo de ***probabilidade***. (ERRO!)

Definições: Chance é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos não favoráveis e **Probabilidade** é a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

É sempre muito bom trabalhar com gráficos ou tabelas (dadas ou a serem construídas) em diversos ramos da matemática, o que não pode é haver informação que não leva a nada e também "essa coisa" de que o aluno precisa toda hora admitir algo. Imagine 5 milhões de estudantes, cada um admitindo uma coisa diferente. Foi selecionada a questão abaixo por ter sido considerada ótima para o Ensino Médio. Além de organizar os dados do texto (o que pode ser feito através de uma tabela) o aluno precisa ter atenção a duas situações do texto: uma probabilidade simples e outra condicional.

15. Universiade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 2005

Um novo exame para detectar certa doença foi testado entre trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras da tal doença.

Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo.

(b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou - se que ele era positivo.

Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença.

Solução:

a) Ao todo, têm-se 90 laudos positivos de pessoas doentes e 30 laudos positivos de pessoas sadias. Assim, a probabilidade de se sortear um laudo positivo é 120/300 = 2/5 = 0,4.
b) Entre os laudos positivos (120), 90 referem-se de fato a pessoas doentes. Logo, a probabilidade condicional de o laudo sorteado referir-se a uma pessoa doente é 90/120 = ¾ = 0,75.

Na próxima questão, o enunciado admite uma modelagem matemática que não está explicitada no enunciado e que não corresponde com a realidade.

16. Exame Nacional do Ensino Médio - 2011

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode, também pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças (FNDE);

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizadas na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

A) 20 mL
B) 24 mL
C) 100 mL
D) 120 mL
E) 600 mL

Solução:

Em centímetros cúbicos, o volume do copo é de 3 x 4 x 10 = 120. Levando-se em conta que 1/5 x 120 = 24 e que 120 mL de água dissolvem completamente 24 mL de açúcar, sem alterar significativamente o volume total, a quantidade de água que deve ser utilizada na mistura para encher completamente o copo é cerca de 120 mL (alternativa (D)).

Admitindo que o volume da mistura seja a soma do volume (x) da água com o volume (y) do açúcar, ambos em mL, temos: $x + y = 120$ e $x = 5y$, daí, $x = 100$ e $y = 20$, tornando correta a alternativa (C).

Comentários:

Apesar da bela aula exposta no texto, há uma imperfeição entre a teoria e a prática. Misturando-se 100 mL de água com 20 mL de açúcar, o volume da mistura será de aproximadamente 100 mL e, portanto, o copo não estará completamente cheio.

Trazer para prova uma situação do dia a dia é interessante desde que não haja incoerência entre a teoria exposta e a prática, fato ocorrido na questão acima.

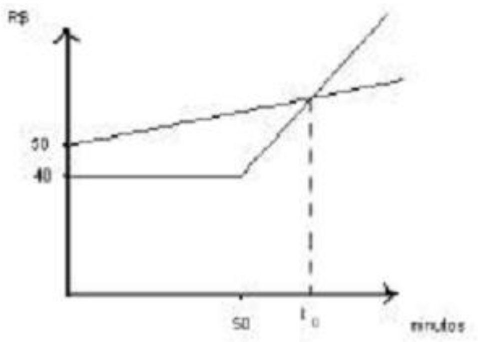
17. Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova não específica - 2006

Uma operadora de celular oferece dois planos no sistema pós-pago.No plano A, paga-se uma assinatura de R$ 50,00 e cada minuto em ligações locais custa R$ 0,25. No plano B, paga-se um valor fixo de R$ 40,00 para até50 minutos em ligações locais e, a partir de50 minutos, o custo de cada minuto em ligações locais é de R$ 1,50.

a) Calcule o valor da conta em cada plano para um consumo mensal de 30 minutos em ligações locais.

b) Determine a partir de quantos minutos, em ligações locais, o plano B deixa de ser mais vantajoso do que o plano A.

Solução:



Sejam A(t) e B(t) os valores das contas nos planos A e B, em função do tempo (em minutos) em ligações locais.

$$A(t) = 50 + 0{,}25t$$
$$B(t) = \begin{cases} 40, & 0 \le t \le 50 \\ 40 + 1{,}5(t-50), & t > 50 \end{cases}$$

a) A(30) = 57,50 e B(30) = 40,00.

b) A(t)≤B(t) equivale a

   t > 50 e 50 + 0,25t ≤ 40 +1,5(t-50)

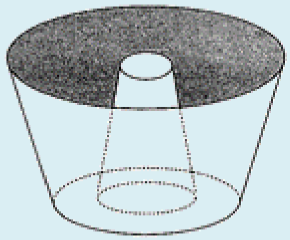
   t ≥ 68.

   Logo, o plano B deixa de ser vantajoso a partir de 68 minutos em ligações locais.

A próxima questão também usa de forma errada um termo matemático.

18. Exame Nacional do Ensino Médio - 2013

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

A) Um tronco de cone e um cilindro
B) Um cone e um cilindro
C) Um tronco de pirâmide e um cilindro
D) Dois troncos de cone
E) Dois cilindros

Comentários:

O gabarito divulgado foi a opção (D). Pelas opções, a questão quer identificar se o aluno reconhece a diferença entre cilindro, pirâmide e cone, como superfícies. Observe que no texto pede para o aluno reconhecer duas figuras tridimensionais. Observe que nenhuma parte da forma é uma figura de dimensão 3. São superfícies e, portanto, bidimensionais.

Definição: Um cone ou superfície cônica de base circular C e vértice P, com P um ponto fora do plano que contem a circunferência C é a figura formada pelas semirretas de origem P e passando por pontos de C. Esta é uma figura de dimensão 2 ou bidimensional. Um cone sólido de base circular D e vértice P, com P um ponto fora do plano que contém o disco D, é a figura formada pelas semirretas de origem P e passando por pontos de D. Esta é uma figura tridimensional.

Definição de tronco de cone: Um tronco de cone (de cone sólido) é a parte do cone (do cone sólido) que está entre planos paralelos ao plano que contém a base e que não contém o vértice. As figuras A e B representam tronco de cones sólido (tridimensional) e tronco de cone ou superfície cônica (bidimensional), respectivamente.

Figura A

Figura B

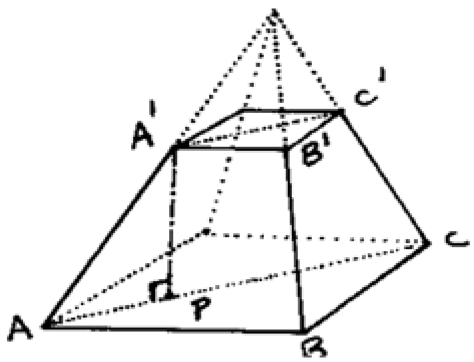
Uma possível forma de ajustar o texto para a questão ficar correta seria trocar a palavra "tridimensionais" por "não planares".

A seguir uma questão envolvendo tronco de uma figura, porém com a pergunta corretamente formulada.

19. Universidade Federal do Rio de Janeiro – prova específica – 2000

Uma pirâmide regular de base quadrada tem área 4. Ela é seccionada por um plano paralelo à base de modo a formar um trono de pirâmide de altura 2 e de base superior de altura 1. Determine o valor da aresta lateral do tronco de pirâmide.

Solução:



Sejam A,B,C e D os vértices da base da pirâmide, A',B',C' e D' os respectivos vértices da base superior do tronco de pirâmide (como na figura acima) e l o valor da aresta AA'. Considerando-se o triângulo com vértices AA'P, onde P é a projeção ortogonal do vértice A sobre a base da pirâmide, temos A'P = 2. Como AC = $2\sqrt{2}$ e A'C' = $\sqrt{2}$, concluímos que AP = $\sqrt{2}/2$. Segue do Teorema de Pitágoras: l^2 = 18/4 e portanto: l=$3\sqrt{2}/2$.

A próxima questão apesar de não conter erros, explora e privilegia a nomenclatura do que a beleza da Análise Combinatória.

20. Exame Nacional do Ensino Médio - 2010

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

A) Uma combinação e um arranjo, respectivamente

B) Um arranjo e uma combinação, respectivamente

C) Um arranjo e uma permutação, respectivamente

D) Duas combinações

E) Dois arranjos

Solução:

A primeira ação é escolher 4 times dos 12 sem se preocupar com a ordem no sorteio e isso pode ser feito com o cálculo de uma combinação simples ($C_{12,4}$). A segunda ação, feita após a primeira ter sido realizada é decidir (com ordem) quais os dois times dos quatro sorteados que jogarão o jogo de abertura e isso pode ser calculado com um arranjo simples ($A_{4,2}$).

Comentários:

É muito comum e praticado por alguns autores de Análise Combinatória não se falar em arranjos simples podendo tratá-los como o produto de uma combinação simples pela permutação, isto é, escolhe primeiro e permuta (verifica a ordem) depois. No exercício do ENEM, teríamos:

$C_{12,4} \times C_{4,2} \times P_2$ e quem nunca estudou arranjos não saberia marcar a opção correta.

O que mais atrai na Análise Combinatória é a criatividade, ela é vasta de problemas diferentes, interessantes e importantes para a Matemática e também como aplicações em diversas áreas. Esse exercício não está errado, mas não apresenta nada de construtivo, o que é a característica principal da Análise Combinatória.

Abaixo, tem-se uma das melhores questões do vestibular da UFRJ, com duas perguntas bem dosadas em graus de dificuldades. O item (A) cobra praticamente o mesmo da questão acima do ENEM.

Universidade Federal do Rio de Janeiro - 2001

Uma agência de turismo está fazendo uma pesquisa entre seus clientes para montar um pacote de viagens à Europa e pede aos interessados que preencham o formulário abaixo com as seguintes informações:

- a ordem de preferência entre as 3 companhias aéreas com que trabalha a agência;

•a 1ª e a 2ª opções dentre 4 possíveis datas de partida apresentadas pela agência;
•os nomes de 4 cidades diferentes a serem visitadas, que devem ser escolhidas de uma lista de 10 fornecida pela agência (sem ordem de preferência).

Preencher todos os campos, sem repetição.		
Companhias Aéreas	Datas	Cidades (ordem indiferente)
1ª	1ª opção	
2ª		
	2ª opção	
3ª		

a) Supondo que nenhum campo seja deixado em branco, determine de quantas maneiras diferentes pode o formulário ser corretamente preenchido.

Tendo a pesquisa sido inconclusiva, a agência decidiu montar o pacote escolhendo aleatoriamente uma das 3 companhias aéreas, 3 das 4 datas de partida e 6 das10 cidades.O Sr.Y deseja viajar e não tem preferência de companhia aérea, mas faz questão de ir a Paris e Praga (que constam da lista de 10 cidades apresentada pela agência);

além disso, somente pode viajar em uma das 4 datas oferecidas.

b) Qual a probabilidade de que o pacote esteja de acordo com as expectativas do Sr.*Y*?

Solução:

a) O número de maneiras diferentes de preencher o formulário é:

$$P_3 \text{ x } C_{4,2} \text{ x } P_2 \text{ x } C_{10,4} = 15120.$$

b) O número total de casos favoráveis é 3 x $C_{3,2}$ x $C_{8,4}$ = 630 e o número de casos possíveis é 3 x $C_{4,3}$ x $C_{10,6}$ = 2520. Portanto, a probabilidade de que o Sr. Y seja atendido é 630/2520 = ¼ = 0,25.

Capítulo III

Belas Questões do Vestibular UFRJ e que nunca aparecerão no ENEM.

Pelo primor do raciocínio, uso adequado dos conteúdos, textos claros e curtos, importância dos temas para a continuidade do estudante na Universidade em acordo com a carreira escolhida, pela associação entre temas da matemática e principalmente por abordar a demonstração, foram selecionadas algumas questões que nunca irão constar em provas do Exame Nacional do Ensino Médio.

1. O polinômio

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d, d \in R$$

é divisível por $(x - 2)$.

a) Determine d.
b) Calcule as raízes da equação $P(x) = 0$.

Tema: Equações polinomiais.

Conteúdos: Teoremas de D'Alembert e Briot-Ruffini.

Solução:

Do texto conclui-se que P(2)=0 o que equivale a dizer que x=2 é uma das raízes da equação P(x)=0.

Aplicando o Teorema de Briot:

	1	**-2**	**-5**	**d**
2	**1**	**0**	**-5**	**-10+d**

Tem-se:

d-10 =0. Logo, d=10 e as outras raízes de P(x)=0 são as raízes de x^2-5=0, isto é, x=+$\sqrt{5}$ ou x=-$\sqrt{5}$.

2. Prove que, se o quadrado de um número natural n é par, então o próprio número n tem que ser, obrigatoriamente, par

(isto é, $n \in N, n^2 par => n\ par$).

Tema: números naturais

Conteúdo: Lógica das proposições

Solução:

A demonstração pode ser feita pela contrapositiva da proposição dada, isto é:

Se n não é par então n^2 não é par.

n=2k+1 , n natural

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+k)+1$ é ímpar. CQD

3. Seja z o número complexo

$$\frac{2+3i}{\alpha+i}$$

Determine o valor de α para que z seja um imaginário puro.

Tema: números complexos

Conteúdos: operações com números complexos

Solução:

Se $\alpha = a + bi$, então

$$z = \frac{2 + 3i}{a + (b + 1)i}$$

Multiplicando o numerador e denominador por a-(b+1)i, temos

$$z = \frac{2a + 3b + 3 + (3a - 2b - 2)i}{a^2 + (b + 1)^2}$$

Para que z seja imaginário puro, devemos ter $2a + 3b + 3 = 0$.

Como $\alpha + i$ deve ser não nulo, temos

$$\alpha = a - \left(\frac{2a + 3}{3}\right) i, a \neq 0$$

4. n e m são números naturais, $n = 1000! + 18$ e $m = 50! + 37$.

a) Calcule o resto da divisão de n por 18;

b) mé um número primo? Justifique sua resposta.

Tema: Divisibilidade em N

Conteúdos: fatorial e números primos

Definição: Seja n um número natural, isto, é $n \in N$, onde $N = \{0,1,2,3,4, \dots\}$. Fatorial de n, denotado por $n!$, é definido do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{l} Para\ n = 0,\ \ 0! = 1; \\ Para\ n \geq 1,\ \ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \end{array}}$$

Solução:

a) $n = 18(\frac{1000!}{18} + 1)$ é múltiplo de 18. Portanto o resto pedido é zero.

b) $m = 37(\frac{50!}{37} + 1)$ possui pelo menos quatro divisores positivos:

$$1, 37, \frac{50!}{37} + 1, m$$

Portanto m não é primo.

5. A equação

$$x^2 - 2xcos\theta + sen^2\theta = 0$$

possui raízes reais iguais.

Determine $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tema: funções trigonométricas

Conteúdos: equações do segundo grau e trigonométricas

Solução:

Do enunciado, podemos escrever que $\Delta = 0$:

$$4cos^2\theta - 4sen^2\theta = 0$$

$$cos^2\theta = sen^2\theta$$

$$cos\theta = sen\theta \text{ ou } cos\theta = -sen\theta$$

Logo, $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

6. Prove que $99^{99} - 51^{51}$ é divisível por 4.

Tema: Binômio de Newton

Conteúdo: divisibilidade por 4

Solução:

$$99^{99} - 51^{51} = (100 - 1)^{99} - (52 - 1)^{51}$$

Nos dois binômios, todos os termos exceto os últimos são divisíveis por quatro (pela fórmula do binômio, são múltiplos de 100 e 52, respectivamente), logo a diferença entre eles o é. Agora, a diferença entre os últimos termos dos dois binômios, respectivamente:

$$(-1)^{100} - (-1)^{52} = 0.$$

Portanto, $99^{99} - 51^{51}$ é divisível por 4.

CONCLUSÕES:

O Estudo comparativo que fizemos entre o Vestibular da Universidade Federal do Rio de Janeiro e a Prova do Exame Nacional do Ensino Médio, usada pela maioria das Universidades, inclusive a UFRJ, como Exame de Seleção de seus futuros alunos demonstrou que:

1 – O conteúdo programático da Matemática e suas tecnologias no Exame ENEM é menor do que antes era exigido pela UFRJ, ficando de fora conteúdos importantes na formação de um aluno de Ensino Médio, como Álgebra Linear, Geometria Analítica, Números Complexos e Polinômios. Ressaltamos que os conteúdos exigidos pela UFRJ eram considerados os conteúdos mínimos na formação de um candidato a uma carreira tecnológica.

2- A estrutura dos dois exames é bastante distinta, sendo que o vestibular totalmente discursivo levava o aluno a desenvolver suas ideias e permitia a cobrança de forma muito mais aprofundada, mesmo com um número bem menor de questões.

3- A prova de Matemática e suas tecnologias do Exame ENEM tem como objetivo principal a avaliação da Educação Básica nesta área de todo o país, possui questões de nível mais elementar e em sua maioria cobrando conteúdos do Ensino Fundamental.

4- Muitas questões da prova de Matemática e suas tecnologias do Exame ENEM apresentam erros graves de matemática e não foram anuladas.

5- A comparação qualitativa entre questões com erros da prova de Matemática e suas tecnologias do Exame ENEM e do Vestibular da UFRJ, nos mostra que mesmo que não houvesse erros, as questões da UFRJ eram melhor elaboradas e cobravam de forma melhor os conteúdos. Cabe aqui indicar que em sua grande maioria a comparação se deu com questões da prova não específica da UFRJ, cujo nível já comentamos era inferior ao da prova feita pelos candidatos das carreiras tecnológicas.

6- Belas questões demonstrativas, com mistura de conteúdos ou de parte do conteúdo importante na formação de um estudante não têm espaço na prova de Matemática e suas tecnologias do Exame ENEM.

7- O peso que a prova do ENEM ganhou ao ser o principal exame para entrada nas Universidades Públicas Brasileiras faz com que o ensino médio no país esteja se moldando ao seu nível de cobrança, muito inferior ao desejado para um aluno de carreira Tecnológica nas principais Universidades Públicas do Brasil.

A consequência natural desta mudança no processo de seleção dos alunos é que devem entrar na Universidade alunos menos preparados para o aprendizado da Matemática do nível superior, menos preparados para o desenvolvimento de suas ideias e do rigor matemático. Sugerimos como uma pesquisa futura um estudo comparativo do rendimento dos estudantes nos cursos iniciais de Cálculo, antes e depois da adoção do Exame ENEM como única forma de seleção para os alunos da UFRJ.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MACHADO, Antônio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 3 ed. São Paulo: Atual, 1982.

[2] MORGADO, Augusto César de Oliveira, CARVALHO, João Bosco Pitombeira de, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de, FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[3] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. Geometria Espacial. 7 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[4] PROVAS ENEM - http://inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos - 03/01/2014.

[5] PROVAS UFRJ - http://www.vestibular.ufrj.br/index.php?option=com_rokdownloads&view=folder&Itemid=16&id=4:acesso-a-graduacao-2009 – 03/01/2014.

[6] MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM - http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf - 03/01/2014.

[7] EDITAL DO VESTIBULAR DA UFRJ - http://www.vestibular.ufrj.br/index.php?option=com_rokdownloads&view=folder&Itemid=16&id=11:edital – 03/01/2014.