



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Não precisamos de régua, sim de Álgebra e compasso

Ronaldo Lugli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

2014

512 Lugli, Ronaldo
L951n Não precisamos de régua, sim de Álgebra e compasso/ Ronaldo
Lugli- Rio Claro: [s.n.], 2014.
49 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento

1. Números construtíveis. 2. Problemas gregos. 3. Pontos Inversos. 4. Construções de Mascheroni. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Ronaldo Lugli

NÃO PRECISAMOS DE RÉGUA, SIM DE ÁLGEBRA E COMPASSO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva
IGCE / UNESP / Rio Claro - SP

Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi
UnB / Brasília - DF

Rio Claro, 23 de Janeiro de 2014

*Dedico este trabalho à minha esposa Noely,
meus filhos Matheus e Pedro e
minha mãe Lourdes.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter permitido que eu concluísse essa etapa de minha vida. Agradeço a companhia de Jesus e Nossa Senhora em momentos alegres e difíceis, também pela força e discernimento nas horas das decisões importantes em minha vida.

A minha esposa, Noely, meus filhos Matheus e Pedro, por todo carinho e apoio recebidos tanto nos momentos de alegria como de angústias e que durante esta caminhada foram privados de minha presença e mesmo assim não mediram esforços para esta realização.

A minha mãe, Lourdes, pelo incentivo e apoio, pois só consegui chegar até aqui devido sua dedicação aos seus filhos.

Ao Prof. Dr. Vanderlei pela acolhida e orientação, principalmente por sua paciência e dedicação com que me orientou e tornou este trabalho possível; por suas valiosas sugestões diante das minhas inúmeras desatenções ao elaborar este texto.

À Prof. Dra. Suzinei Aparecida Sequeira Marconato por acreditar no Profmat, em mim e em cada um de meus colegas da turma evitando que desanimássemos a cada novo tropeço ou dificuldade.

A todos os companheiros de Mestrado, em especial à Patrícia, ao Pedro, Roberto e Ricardo. Obrigado pela companhia, apoio, compreensão, incentivo e amizade de vocês. Aos colegas de trabalho (professores, coordenadores e diretoria) pelo apoio. Em especial Claudio, Merly e Yeda que sempre incentivaram a superar dificuldades.

A querida Márcia que com palavras de apoio e otimismo estimulou que eu fizesse mestrado, inclusive me informando sobre o Profmat. Ao colega de curso, Luciano M., que colaborou na digitação do texto.

Aos meus “amigos-família” por todas as vezes que entenderam a minha ausência. Vocês são especiais e importantes em minha vida.

*Se eu vi mais longe, foi por estar
de pé sobre ombros de gigantes.*

Isaac Newton

Resumo

A presente dissertação foi dividida em duas partes. A primeira apresenta a ideia de traduzir os problemas geométricos para a linguagem da álgebra caracterizando-os e, após solução, verificar se a resposta corresponde a construção com régua e compasso. Com a utilização de conceitos da álgebra é que é provada a impossibilidade, utilizando somente régua e compasso, de trisseção do ângulo e da duplicação do cubo. Na segunda parte abordamos alguns métodos para realizar construções geométricas, baseados nas reflexões circulares e construções de Mascheroni.

Palavras-chave: Números construtíveis, Problemas gregos, Pontos Inversos, Construções de Mascheroni.

Abstract

This work was divided into two parts. The first one presents how the geometric constructions are understood within the Algebra. This allows to see the impossibility, by using only ruler and compass, of trisecting certain angles and also of the duplication of a cube. The second part deals with some methods to perform constructions based on circular reflections and on the constructions of Mascheroni.

Keywords: Constructible numbers, Greek problems, Inverse points, Mascheroni constructions.

Lista de Figuras

2.1	Construção de $a + b$.	20
2.2	Construção de $a - b$.	20
2.3	Construção de $a \times b$.	20
2.4	Construção de $\frac{a}{b}$.	21
2.5	Construção de \sqrt{a} , com a racional.	22
2.6	Máquina de Platão.	29
2.7	Construção de um ângulo de 60° .	29
2.8	Representação do ponto construtível $(\cos \theta, \sin \theta)$.	30
3.1	Representação de pontos inversos.	33
3.2	Propriedade 2 das inversões.	34
3.3	Propriedade 3 das inversões.	34
3.4	Circunferência que não passa pelo centro de inversão.	35
3.5	Propriedade 04 das inversões.	35
3.6	Segundo Caso da Propriedade 04 das inversões.	36
3.7	Construção do inverso de P , exterior à circunferência C .	37
3.8	Construção do inverso de P , interior à circunferência C .	37
3.9	Passo 01 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .	38
3.10	Passo 02 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .	38
3.11	Passo 03 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .	38
3.12	Passo 01 da construção.	39
3.13	Passo 02 da construção.	39
3.14	Passo 03 da construção.	39
3.15	Passo 01 da construção.	40
3.16	Passo 02 da construção.	40
3.17	Passo 03 da construção.	40
3.18	Passo 04 da construção.	41
3.19	Passo 05 da construção.	41
3.20	Passo 01 da construção.	41
3.21	Passo 02 da construção.	42
3.22	Passo 03 da construção.	42
3.23	Passo 01: Interseção de duas retas.	42

3.24	Passo 02: Interseção de duas retas.	43
3.25	Passo 03: Interseção de duas retas.	43
3.26	Passo 01 da construção.	44
3.27	Passo 02 da construção.	44
3.28	Passo 02 da construção.	44
3.29	Segmento de comprimento $\sqrt{p^2 - q^2}$	45
3.30	Segmento de comprimento $a\sqrt{2}$	45
3.31	Segmento de comprimento $\sqrt{p^2 + q^2}$	46
3.32	Construção de um segmento de comprimento $p + q$	46
3.33	Construção de um segmento de comprimento $p - q$	47
3.34	Círculo de centro A intersectando a reta em P e Q	47
3.35	Círculos de centro P e Q com raio PA	47
3.36	Círculo de centro R e raio PR	48
3.37	Círculo de centro Q e raio QS	48
3.38	Projeção ortogonal do ponto A sobre uma reta.	48

Sumário

1	Introdução	17
2	Construções geométricas e álgebra	19
2.1	Construções geométricas fundamentais	19
2.2	Números construtíveis e extensão de corpos	22
2.3	A insolubilidade de problemas gregos	26
2.3.1	Teorema sobre equações cúbicas	26
2.3.2	Duplicação do cubo	28
2.3.3	A trissecção do ângulo	29
3	Métodos diferentes para realizar construções geométricas	33
3.1	Construção geométrica de pontos inversos	36
3.2	Bissecção de um segmento	37
3.3	Determinação do centro de um círculo utilizando apenas o compasso	39
3.4	Bissecção do arco AB de um círculo de centro O	40
3.5	Algumas aplicações	43
	Referências	49

1 Introdução

Este trabalho, como seu título sugere, aborda aspectos distintos sobre construções geométricas. Acreditamos que essas construções são bastante motivadoras no ensino de Matemática, já no ensino médio. Ora, elas propõem desafios que, por um lado, devem ser vencidos com certo apelo prático daquilo que é feito a mão, por outro lado, elas mostram rapidamente que as restrições ao uso apenas de régua (não graduada) e de compasso trazem dificuldades dificilmente compreendidas dentro da própria geometria mas de fácil interpretação sob o olhar da Álgebra. Isso é tratado na primeira parte do trabalho. Já quanto a segunda parte, o que quisemos foi explorar o seguinte. É axioma da Geometria Euclidiana que dois pontos determinam uma única reta. Naturalmente, não se diz "como" ou o que seja "determinar". Então, na verdade, seja lá o que pensemos ao dizer reta, tudo o que precisamos para dizer de uma reta é dizer de dois de seus pontos. Nesse sentido, se esses pontos forem construídos pelo uso apenas do compasso, temos a reta. Essa idealização, tão comum em matemática, é que, afinal, permite a tradução algébrica dos problemas de construções geométricas, já que, pela Álgebra o que se caracteriza são pontos construtíveis. É interessante então poder concluir que toda construção com régua e compasso pode ser realizada com o uso apenas do compasso.

2 Construções geométricas e álgebra

Um modo de se abordar as construções geométricas clássicas consiste em traduzir os problemas geométricos para a linguagem da Álgebra. Qualquer problema de construção geométrica é do seguinte tipo: um certo conjunto de segmento de retas, digamos a, b, c, \dots é dado e um ou mais segmentos x, y, z, \dots são procurados. Suponha que apenas um segmento x seja procurado. A construção geométrica então corresponde a resolver um problema algébrico e, após solução, deve-se determinar se a resposta pode ser obtida por operações algébricas que correspondam à construção com régua e compasso. O objetivo deste capítulo é explorar essa correspondência.

2.1 Construções geométricas fundamentais

Definiremos na sequência o conceito de *número construtível*.

Definição 2.1. *Diremos que um número real x é construtível se $x = 0$ ou se um segmento de comprimento $|x|$ pode ser construído usando apenas compasso e régua não graduada, por um número finito de passos de construção, a partir de um segmento cujo comprimento tomado seja igual a 1.*

Vamos denotar por \overline{OA} o comprimento do segmento OA .

A partir do segmento U com $\overline{U} = 1$, o número inteiro a é construtível, pois basta tomar a unidades de $\overline{U} = 1$. Se $a < 0$ considere o número a em módulo.

O teorema seguinte mostra que um problema com números que envolve as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) mais a raiz quadrada traduz-se num problema geométrico que pode ser resolvido usando apenas a régua não graduada e o compasso.

Teorema 2.1. *Se a e b são números reais construtíveis, então $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$, ($b \neq 0$) e \sqrt{a} também são números construtíveis.*

Demonstração. Tome um segmento de reta cujo comprimento é $\overline{U} = 1$ e considere dois segmentos de reta de comprimentos construtíveis a e b . Construamos os segmentos de reta que têm como medida de comprimento:

- $a + b$

Tracemos uma reta e sobre ela assinalemos com o compasso as distâncias $\overline{OA} = a$ e $\overline{AB} = b$. Então $\overline{OB} = a + b$.

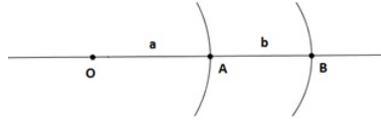


Figura 2.1: Construção de $a + b$.

- $a - b$

De forma semelhante, marcamos $\overline{OA} = a$ e $\overline{AB} = b$, porém desta vez o segmento AB na direção oposta ao segmento AO . Assim, $\overline{OB} = |a - b|$.

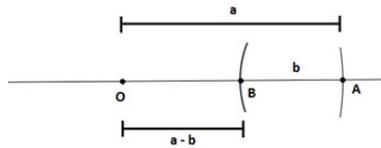


Figura 2.2: Construção de $a - b$.

- $a \times b$

Para construir um segmento de comprimento $a \times b$, marcamos sobre uma reta o segmento OB de comprimento $\overline{OB} = b$, em outra reta, passando por O , o segmento OA de comprimento $\overline{OA} = a$, e sobre o segmento OA marcamos $\overline{OC} = 1$. Traçamos por A uma paralela ao segmento BC , encontrando D na reta que contém o segmento OB . Os triângulos BCO e DAO são semelhantes pelo caso AA e portanto

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{\overline{OD}} \quad (2.1)$$

donde OD tem comprimento $a \times b$, como queríamos.

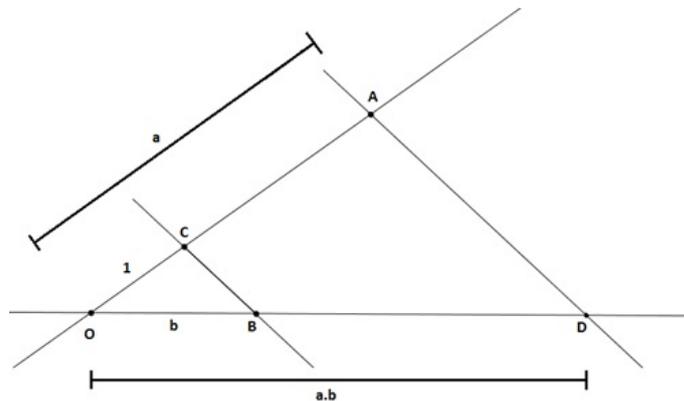


Figura 2.3: Construção de $a \times b$.

- $\frac{a}{b}$

Para construir um segmento de comprimento $\frac{a}{b}$, marcamos sobre uma reta o segmento OD de comprimento $\overline{OD} = b$, em outra reta, passando por O , o segmento OA de comprimento $\overline{OA} = a$ e sobre o segmento OD marcamos $\overline{OB} = 1$. Ligamos A e D , e traçamos por B uma reta paralela a AD encontrando OA em C . Assim, por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}, \quad (2.2)$$

donde OC tem comprimento $\frac{a}{b}$, como queríamos.

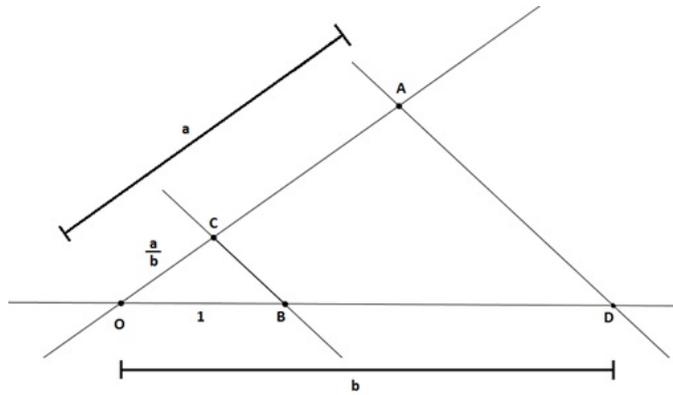


Figura 2.4: Construção de $\frac{a}{b}$.

Das considerações feitas acima, segue-se que os processos algébricos de adição, subtração, multiplicação e divisão têm seus correspondentes nas construções geométricas com régua e compasso iniciando-se com um segmento de comprimento unitário U , e que, portanto, os números racionais formam um conjunto de números construtíveis.

- \sqrt{a}

A construção que nos leva além dos racionais é a extração de raiz quadrada: se um segmento racional de comprimento a é dado, então \sqrt{a} também pode ser construído utilizando somente régua e compasso.

Dado um triângulo retângulo OBC inscrito em uma semicircunferência e A o pé da altura relativa à hipotenusa, com $OA = a$ e $AB = 1$. Os triângulos ACO e ABC são semelhantes pelo caso AA de semelhança, portanto temos:

$$\frac{a}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{1} \quad (2.3)$$

donde o segmento AC tem comprimento $\overline{AC} = \sqrt{a}$.

□

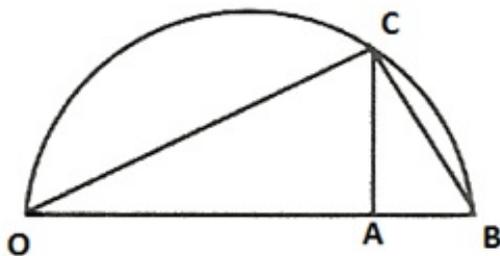


Figura 2.5: Construção de \sqrt{a} , com a racional.

2.2 Números construtíveis e extensão de corpos

Toda construção com régua e compasso consiste em uma sequência de etapas, sendo cada uma delas uma das seguintes:

1. Unir dois pontos por uma reta;
2. Achar o ponto de interseção de duas retas;
3. Desenhar um círculo com um raio dado e com centro em um ponto dado;
4. Encontrar os pontos de interseção de um círculo com um outro círculo ou com uma reta.

A ideia agora é estender a noção de números construtíveis para o sistema de coordenadas cartesianas expressando a construtibilidade de um ponto em termos de coordenadas (a, b) onde a, b são construtíveis e caracterizar figuras como conjuntos de soluções de equações. Conforme já visto, podemos construir segmentos de comprimento racional, que são obtidos, a partir da unidade pelos processos de adição, subtração, multiplicação e divisão, isto é, todos os racionais $\frac{r}{s}$, onde r e s são inteiros.

Sendo $\sqrt{2}$ construtível, também o são todos os números da forma

$$a + b\sqrt{2}, \tag{2.4}$$

onde a e b são racionais.

Sejam $F_0 = \mathbb{Q}$ e F_1 o conjunto dos números cuja forma é dada por (2.4), $F_0 \subset F_1$, pois para todo $a \in F_0$, é possível escrever $a = a + 0\sqrt{2} \in F_1$.

Olhemos para os números que resultam das quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) entre os elementos de F_1 ; considere $a, b, c, d \in F_0$.

1. $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} = m + n\sqrt{2}$, com $m, n \in F_0$;
2. $(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} = t + w\sqrt{2}$, com $t, w \in F_0$;
3. $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$, com $r, s \in F_0$;

$$4. \frac{(a + b\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})} = \frac{ac + 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}, \text{ com } p, q \in F_0 \text{ e } c^2 - 2d^2 \neq 0,$$

pois caso contrário $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$ seria racional, o que é um absurdo.

Por serem válidas as igualdades 1, 2, 3 e 4 acima e m, n, t, w, r, s, p e q são racionais quando a, b, c e d sejam racionais, temos que, tal qual \mathbb{Q} , o conjunto $\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo; vamos denotá-lo por $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como consequência imediata das igualdades de 1 a 4 acima e das construções apresentadas na Seção 2.1 temos o seguinte:

Corolário 2.1. *O corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ é formado por números construtíveis.*

Podemos estender nossas construções, por exemplo, tomando um número de $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, digamos, $k = 1 + \sqrt{2}$ e, extraindo sua raiz quadrada, obtemos o número construtível

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{k}. \tag{2.5}$$

Então se repassarmos o raciocínio feito com os racionais, numa segunda etapa de nossa construção, com régua e compasso, os novos números obtidos formarão o corpo de todos os números da forma

$$p + q\sqrt{k}, \tag{2.6}$$

onde p e q podem ser agora números de F_1 , isto é, da forma $a + b\sqrt{2}$, com a, b em $F_0 = \mathbb{Q}$. Repetindo o procedimento acima chegaremos a um corpo F_n após n adjunções de raízes quadradas (F_2, F_3, \dots, F_n)

Pode-se verificar que a soma, a diferença, o produto e o quociente de elementos da forma (2.6) são novamente da forma (2.6):

1. $(a + b\sqrt{k}) + (c + d\sqrt{k}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{k};$
2. $(a + b\sqrt{k}) - (c + d\sqrt{k}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{k};$
3. $(a + b\sqrt{k}).(c + d\sqrt{k}) = (ac + kbd) + (bc + ad)\sqrt{k};$
4. $\frac{(a + b\sqrt{k})}{(c + d\sqrt{k})} = \frac{ac - kbd}{c^2 - kd^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - kd^2}\sqrt{k}.$

Portanto, o conjunto dos números da forma $p + q\sqrt{k}$ constitui uma extensão de F_1 , que será denotado por F_2 .

Com o uso da régua podemos fazer a interseção de retas; assim, construiremos pontos através desta interseção.

Proposição 2.1. *Supondo que as retas r e s de equações $r : A.x + B.y + C = 0$ e $s : A'.x + B'.y + C' = 0$ onde A, B, C e A', B', C' pertencem a F com $(A \neq 0$ ou $B \neq 0)$ e $(A' \neq 0$ ou $B' \neq 0)$ se intersectem em um único ponto, então $A.B' - B.A' \neq 0$.*

Demonstração. Seja (x_0, y_0) o único ponto de interseção, então suas coordenadas constituem a única solução do sistema:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ A'x_0 + B'y_0 + C' = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

de onde,

$$\begin{cases} (AB' - BA')x_0 = BC' - CB' \\ (AB' - BA')y_0 = CA' - AC' \end{cases} \quad (2.8)$$

cuja solução é

$$x_0 = \frac{B.C' - C.B'}{A.B' - B.A'} \quad e \quad y_0 = \frac{C.A' - A.C'}{A.B' - B.A'}. \quad (2.9)$$

Para que exista (x_0, y_0) único devemos ter nas igualdades acima $A.B' - B.A' \neq 0$.

Casos em que as retas são paralelas ao eixo x ou ao eixo y :

- Se $A = 0$ temos r paralela ao eixo x (reta horizontal).

Como existe o ponto de interseção de r e s , s não pode ser horizontal, logo $A' \neq 0$.

Como A e B não são simultaneamente nulos, então $B \neq 0$. Daí, $B.A' \neq 0$. Portanto:

$$A.B' - B.A' = 0.B' - B.A' = 0 - B.A' = -B.A' \neq 0.$$

- Se $A' = 0$ temos s paralela ao eixo x (reta horizontal).

Por raciocínio análogo ao caso anterior, concluímos $A.B' - B.A' \neq 0$.

- Se $B = 0$ temos r paralela ao eixo y (reta vertical).

Como existe o ponto de interseção de r e s , s não pode ser vertical, logo $B' \neq 0$.

Como A e B não são simultaneamente nulos, então $A \neq 0$. Daí, $A.B' \neq 0$. Portanto:

$$A.B' - B.A' = A.B' - 0.A' = A.B' - 0 = A.B' \neq 0.$$

- Se $B' = 0$ temos s paralela ao eixo y (reta vertical).

Por raciocínio análogo ao caso anterior, concluímos $A.B' - B.A' \neq 0$.

□

Teorema 2.2. *Se temos condições de construir todos os números de algum corpo F , o uso apenas de régua nunca nos fará sair do próprio F .*

Demonstração. Considere a reta que passa por dois pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) distintos, com coordenadas em F e $a_1 \neq a_2$. O coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) distintos com $x_1 \neq x_2$ é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.10)$$

Como a reta passa por (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , então

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}. \quad (2.11)$$

Substituindo na equação da reta por um ponto (x_p, y_p) e de coeficiente angular (2.11) temos

$$y - y_p = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot (x - x_p), \quad (2.12)$$

e tomando $P = (a_1, b_1)$ obteremos

$$y - b_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot (x - a_1), \quad (2.13)$$

donde teremos uma equação dessa reta:

$$(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \quad (2.14)$$

Tomando $A = b_1 - b_2$, $B = a_2 - a_1$ e $C = a_1b_2 - a_2b_1$, obtemos

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.15)$$

onde A, B e C são resultados de operações elementares de a_1, a_2, b_1 e b_2 em F e portanto A, B, C pertencem a F .

Se $a_1 = a_2$, vamos obter uma reta paralela ao eixo y (reta vertical) cuja equação é $Ax + C = 0$, com coeficientes em F .

Também, se tivermos duas retas, que se intersectem, digamos em (x_0, y_0) de equações $Ax + By + C = 0$ e $A'x + B'y + C' = 0$ com coeficientes em F , as coordenadas do ponto de interseção são

$$x_0 = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}, \quad (2.16)$$

com $AB' - BA' \neq 0$, do contrário as duas retas seriam ou paralelas ou coincidentes.

Logo, x_0 e y_0 pertencem a F , já que resulta de operações elementares de A, A', B, B', C e C' que pertencem a F . Assim, com o uso apenas da régua não se pode ir além do corpo F . \square

Teorema 2.3. *Se construirmos segmentos com apenas uma aplicação do compasso somente obteremos números construtíveis do mesmo corpo F .*

Demonstração. O compasso define pontos como pontos de intersecção de um círculo com uma reta, ou de dois círculos. Um círculo de centro $O(m, n)$ e raio de comprimento r , com $m, n, r \in F$, tem a equação $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Essa equação do círculo pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0, \quad (2.17)$$

com os coeficientes α, β e γ em F , já que resultam das operações elementares de m, n e r que pertencem a F . Uma reta $ax + by + c = 0$ unindo quaisquer dois pontos cujas

coordenadas estejam em F , tem coeficientes a, b e c em F . Agora podemos obter o ponto de interseção (x_0, y_0) do círculo com a reta conforme o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax^2 + By + C = 0, \quad (2.18)$$

com $A = a^2 + b^2$, $B = 2.(a.c + b^2\alpha - a.b.\beta)$ e $C = c^2 - 2.b.c.\beta + b^2.\gamma$ sendo elementos de F , cuja solução é

$$x_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.19)$$

que é da forma (2.6).

Analogamente, a coordenada y_0 terá forma semelhante.

Finalmente, pela interseção de dois círculos recaímos em um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}, \quad (2.20)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

claramente da forma (2.18) e, portanto, leva à mesma conclusão. \square

Assim, se existir solução para o sistema (2.21), então esta será formada por um ou dois pontos, com ambas as coordenadas na forma $p + q\sqrt{k}$, com p, q e $k \geq 0$ racionais.

Agora, se prosseguirmos fazendo construções com régua e compasso, construiremos novas retas e novas circunferências com os pontos obtidos das interseções e encontraremos novos pontos de interseções que serão racionais ou da forma $p' + q'\sqrt{k'}$, onde p', q' e k' são da forma $p + q\sqrt{k}$ dos pontos de interseção anteriores.

Por exemplo, se na primeira etapa tivermos obtido $1 + \sqrt{2}$, na segunda etapa poderemos ter $4(1 + \sqrt{2}) + 5.\sqrt{3.(1 + \sqrt{2})}$.

2.3 A insolubilidade de problemas gregos

Considerando que alguns problemas clássicos de construções com régua e compasso estão relacionados algébricamente com equações cúbicas, ressalta-se o importante resultado:

2.3.1 Teorema sobre equações cúbicas

Dada a equação cúbica

$$z^3 + a.z^2 + b.z + c = 0, \quad (2.22)$$

com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e x_1, x_2, x_3 raízes desta equação, então através das relações de Girard¹ escrevemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a. \quad (2.23)$$

Teorema 2.4. *Se uma equação cúbica com coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível a partir do corpo F_0 .*

Demonstração. Vamos supor que x_1 seja uma raiz construtível. Então x_1 estaria incluído no último corpo F_k , com $k \geq 0$. Supondo, por absurdo, que k seja o menor inteiro tal que uma raiz da equação cúbica (2.22) esteja incluída em um corpo de extensão F_k . Portanto, x_1 pode ser escrito na forma

$$x_1 = p + q.\sqrt{w}, \quad (2.24)$$

onde p, q , e w estão no corpo F_{k-1} .

Um fato importante para esta demonstração é provar que se $x_1 = p + q.\sqrt{w}$ é solução de (2.22), então $x_2 = p - q.\sqrt{w}$ também o é.

Assim, para $x_1 = p + q.\sqrt{w}$ temos:

$$(p + q.\sqrt{w})^3 + a.(p + q.\sqrt{w})^2 + b.(p + q.\sqrt{w}) + c = 0, \quad (2.25)$$

donde

$$(p^3 + 3.p.q^2.w + a.p^2 + a.q^2.w + b.p + c) + (3.p^2.q + q^3.w + 2.a.p.q + b.q).\sqrt{w} = 0. \quad (2.26)$$

Como $x_2 = p - q.\sqrt{w}$ também é raiz temos:

$$(p^3 + 3.p.q^2.w + a.p^2 + a.q^2.w + b.p + c) - (3.p^2.q + q^3.w + 2.a.p.q + b.q).\sqrt{w} = 0. \quad (2.27)$$

Observa-se que x_1 e x_2 são raízes distintas, pois como $x_1 - x_2 = 2.q.\sqrt{w}$, $x_1 - x_2 = 0$ implicaria $q = 0$ e assim $3.p^2.q + q^3.w + 2.a.p.q + b.q = 0$ e, portanto, a raiz $x_1 = x_2 = p$ pertenceria a F_{k-1} , o que seria absurdo pois $x_1 \in F_k$.

Assim temos $x_1 \neq x_2$ sendo $x_1 = p + q.\sqrt{w}$ e $x_2 = p - q.\sqrt{w}$ raízes de (2.22).

A partir de (2.23) sabemos que a terceira raiz $x_3 = u$ da equação (2.22) é dada por $u = -a - x_1 - x_2$. Como $x_1 + x_2 = 2.p$, temos que

$$u = -a - 2p \quad (2.28)$$

de modo que u é um número no corpo F_{k-1} . Isto contradiz a hipótese de que k é o menor número tal que algum F_k contém uma raiz de (2.22). Portanto, a hipótese é absurda, e nenhuma raiz de (2.22) pode estar incluída neste corpo F_k . \square

Com base neste Teorema mostraremos o desfecho dado no século XIX, dos problemas da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo, que por muito tempo foi motivo de preocupação de grandes matemáticos desde os gregos antigos.

¹Albert Girard (1590 - 1633) foi um matemático belga que estabeleceu relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial. O polinômio $z^3 + a.z^2 + b.z + c$ pode ser fatorado no produto $(z - x_1).(z - x_2).(z - x_3)$, onde x_1, x_2, x_3 são as três raízes da equação (2.22). As relações entre as raízes e os coeficientes são dadas por $z^3 + a.z^2 + b.z + c = z^3 - (x_1 + x_2 + x_3)z^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)z - x_1x_2x_3$.

2.3.2 Duplicação do cubo

Deseja-se construir a aresta de comprimento x de um cubo, cujo volume será o dobro do de aresta unitária. A aresta de comprimento x exigida, portanto, satisfaz a equação cúbica

$$x^3 - 2 = 0. \quad (2.29)$$

Em razão do Teorema provado na Seção anterior, basta mostrar que esta equação não tem raiz racional.

Fazendo a pesquisa de raízes racionais em (2.29), temos as possíveis raízes racionais desta equação na forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -2 e q é divisor de 1 , isto é, $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ e $q \in \{-1, 1\}$. Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estão no conjunto

$$\frac{p}{q} = \{-2, -1, 1, 2\}. \quad (2.30)$$

Mas, por inspeção, observa-se que não há raízes racionais. Portanto, pelo Teorema sobre equações cúbicas, nenhuma das raízes de (2.29) é construtível a partir de F_0 e como $\sqrt[3]{2}$ é uma delas, têm-se a impossibilidade de duplicação do cubo utilizando régua e compasso.

Observação 2.1. Construções que se restringem à utilização (numa quantidade finita de vezes) dos chamados instrumentos euclidianos que são uma régua não graduada, isto é, sem marcas e um compasso que, ao levantar um de seus braços do papel, ele se desmonta. Com a régua euclidiana é permitido tão somente desenhar a reta passando por dois pontos dados enquanto o compasso euclidiano é usado apenas para traçar a circunferência que passa por um dado ponto e que tem um segundo ponto dado como centro. Com o chamado compasso moderno (o qual estamos utilizando) pode-se traçar a circunferência de centro dado e raio igual ao comprimento de um dado segmento. Assim, a diferença essencial entre o compasso euclidiano e o compasso moderno seria que este último permite explicitamente o transporte de distâncias e o primeiro necessita da presença da régua euclidiana (evidentemente com um número maior de operações gráficas), de modo que, nessas condições, eles são equivalentes.

Observação 2.2. (Construção clássica para duplicar o cubo) Até agora consideramos problemas de construção geométrica que utilizam apenas a régua e o compasso. Quando outros instrumentos são permitidos, a variedade de construções possíveis torna-se naturalmente mais ampla. A seguir apresentamos uma solução, dos gregos, da duplicação do cubo conhecida como **máquina de Platão**.

Considere na figura a seguir um ângulo reto MZN e uma cruz de ângulos retos móveis B, V, W, P, Q . Dois lados adicionais RS e TU deslizam perpendicularmente aos braços do ângulo reto. Sobre a cruz, escolha dois pontos fixos E e G tais que $\overline{GB} = a$ e $\overline{BE} = f$ tenham comprimentos prescritos. Colocando a cruz de maneira que os pontos E e G fiquem sobre NZ e MZ respectivamente, e deslizando os lados

TU e RS , podemos colocar todo o aparelho em uma posição onde temos um retângulo $ADEZ$ por cujos vértices A, D e E passam os braços BW , BQ e BV da cruz.

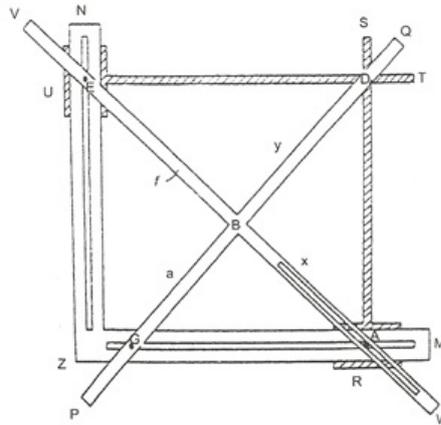


Figura 2.6: Máquina de Platão.

Uma disposição como esta é sempre possível se $f > a$. Por semelhança de triângulos temos que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{f}$, donde, se f é ajustado igual a $2a$ no aparelho temos:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x \cdot y = a(2a) \end{cases} \Rightarrow x^3 = 2a^3. \quad (2.31)$$

Portanto, x será a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do cubo com arestas a . É isto que se requer para duplicar o cubo.

2.3.3 A trisseccção do ângulo

O problema da trisseccção de um ângulo consiste em dividir em três partes iguais um ângulo qualquer utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Para efeito de prova da impossibilidade de trissecar um ângulo, é suficiente apresentar apenas um ângulo que não possa ser trissecado. Consideremos um ângulo de 60° , o qual pode ser construído com régua e compasso. Dado um segmento de reta AO , deve-se construir uma reta OB tal que o ângulo $A\hat{O}B$ tenha abertura igual a 60° .

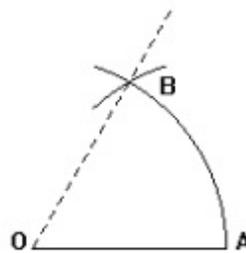


Figura 2.7: Construção de um ângulo de 60° .

Definição 2.2. Um ângulo é construtível se seu vértice é construtível e se cada um de seus lados passa por um ponto construtível diferente do vértice.

Para construir um ângulo θ , podemos supor que seu vértice seja a origem e que um de seus lados passa pelo ponto $(1, 0)$. Assim, o ângulo é construtível se o ponto $(\cos \theta, \sin \theta)$ é construtível.

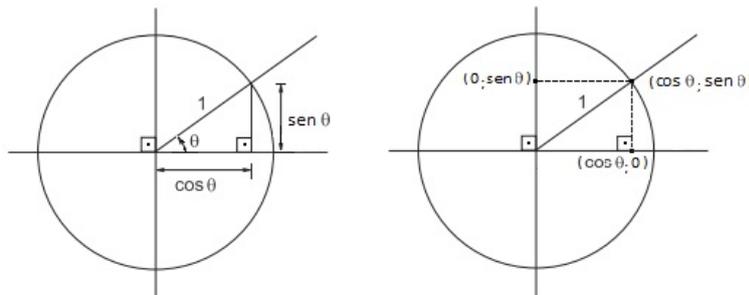


Figura 2.8: Representação do ponto construtível $(\cos \theta, \sin \theta)$.

Como $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, concluímos que $\cos \theta$ e $\sin \theta$ são construtíveis e, conseqüentemente, o ângulo θ é construtível. De fato, o ângulo de 60° é construtível, pois $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ é construtível. Veja também que $\sin 60^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é construtível.

Se, porém, fosse possível trissecar um ângulo qualquer, então o ângulo de 20° seria construtível e, portanto, $\cos 20^\circ$ também o seria.

Fazendo $\theta = 20^\circ$ na fórmula trigonométrica²

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \quad (2.32)$$

e considerando $z = \cos 20^\circ$, a equação (2.32) torna-se

$$4z^3 - 3z - \frac{1}{2} = 0 \quad (2.33)$$

ou seja,

$$8z^3 - 6z - 1 = 0. \quad (2.34)$$

Em razão do Teorema sobre equações cúbicas, basta mostrar que esta equação não tem raiz racional.

²A relação expressa é obtida através das fórmulas trigonométricas de adição de arcos e arco duplo das funções seno e cosseno ($\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ e $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$) e da identidade trigonométrica fundamental ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), conforme segue: $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = [2 \cos^2 x - 1] \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Essa conclusão é óbvia, pois fazendo a pesquisa de raízes racionais em (2.34) temos as possíveis raízes racionais dessa equação na forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -1 e q é divisor de 8 , isto é, $p \in \{-1; 1\}$ e $q \in \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$.

Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estão no conjunto $\frac{p}{q} \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1\right\}$. Mas, por inspeção, observa-se que não há raízes racionais e a impossibilidade de trissecção do ângulo é provada.

3 Métodos diferentes para realizar construções geométricas

O italiano Mascheroni (1750-1800) fez uma descoberta do fato de que todas as construções possíveis com régua e compasso podem ser executadas apenas com compasso. Naturalmente, não se pode traçar uma reta ligando dois pontos sem uma régua, de modo que esta construção fundamental não está realmente abrangida pela teoria de Mascheroni. Ao invés disso, deve-se imaginar uma reta como dada por dois pontos quaisquer sobre ela. Utilizando apenas o compasso, pode-se encontrar o ponto de interseção de duas retas dadas nesta forma e, do mesmo modo, as interseções de um dado círculo com uma reta.

Por transformação do plano em si mesmo queremos exprimir uma regra que associa a cada ponto P do plano um outro ponto P' , chamado de imagem do ponto P sob a transformação de reflexão. A classe particular de transformações que nos interessam são reflexões circulares (inversões com respeito a círculos). Em um plano, seja C um círculo dado com centro O (chamado centro da inversão) e raio r . A imagem de um ponto P é definida como sendo o ponto P' contido na semirreta OP , tal que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Diz-se que os pontos P e P' são pontos inversos um do outro com respeito a C . Uma inversão permuta as partes interna e externa ao círculo C , uma vez que para $\overline{OP} < r$ temos $\overline{OP'} > r$ e, para $\overline{OP} > r$ temos $\overline{OP'} < r$.

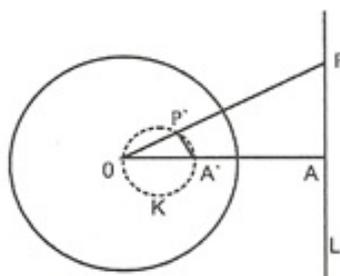


Figura 3.1: Representação de pontos inversos.

A propriedade mais importante de uma inversão é a de que ela transforma retas e círculos em retas e círculos. Após uma inversão:

1. uma reta que passa por O torna-se uma reta que passa por O ;
2. uma reta que não passa por O torna-se um círculo que passa por O ;
3. um círculo que passa por O torna-se uma reta que não passa por O ;
4. um círculo que não passa por O torna-se um círculo que não passa por O .

A primeira das propriedades acima se justifica pela própria definição de inversão.

A segunda delas, se justifica do seguinte modo: dada uma reta s que não passa por O , trace a semirreta AO perpendicular a s no ponto A e o ponto A' , inverso de A .

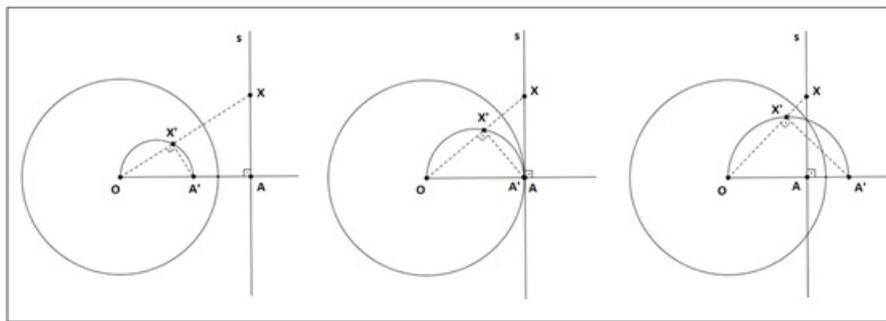


Figura 3.2: Propriedade 2 das inversões.

Para cada $X \in s$ e $X \neq A$, construa seu inverso X' . Tem-se $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2$, logo os triângulos $OX'A'$ e OAX são semelhantes pelo caso LAL de semelhança e, portanto, o triângulo $A'OX'$ é retângulo em X' e inscrito no círculo de diâmetro OA' . Segue que X' pertence ao círculo de diâmetro OA' .

Para justificar a terceira das propriedades, considere um círculo que passe por O , de diâmetro AO e A' o inverso de A . Marque nele um ponto $X \neq A$ e trace seu inverso X' . Para cada ponto X desse círculo, trace seu inverso X' .

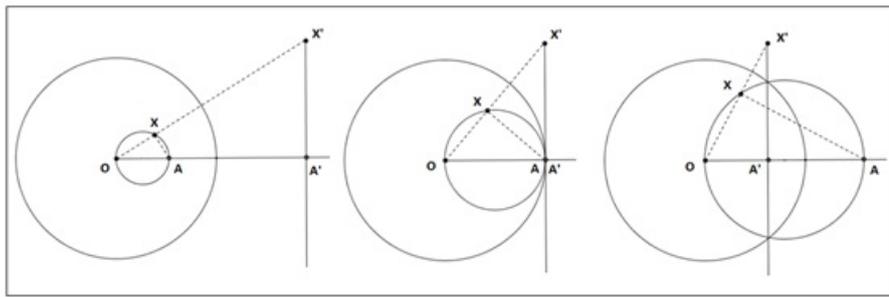


Figura 3.3: Propriedade 3 das inversões.

Os triângulos OAX e $OX'A'$ são semelhantes, pelo caso LAL de semelhança, pois $\frac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OX'}} \Leftrightarrow \overline{OX} \cdot \overline{OX'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$. Logo, a medida do ângulo $O\hat{A}'X'$ é igual a 90° e, portanto, $OA' \perp A'X'$, sendo $A'X'$ uma reta perpendicular ao diâmetro do círculo de inversão que não passa por O .

Finalmente, podemos justificar a quarta propriedade do seguinte modo: seja c um círculo que não passa pelo centro O do círculo de inversão e considere O exterior à c .

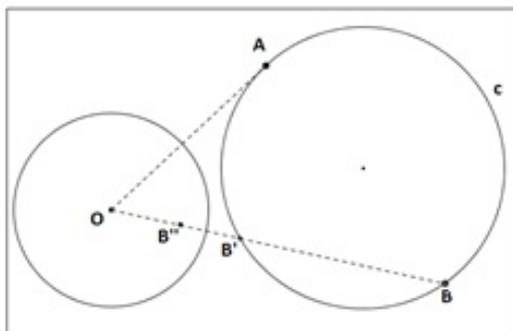


Figura 3.4: Circunferência que não passa pelo centro de inversão.

Trace AO tangente a c . Para cada ponto $B \in c$, considere B' o outro ponto de encontro de c com a semirreta OB . Tem-se pela propriedade de potência de ponto,

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA}^2. \quad (3.1)$$

Se B'' é o inverso de B' em relação ao círculo de inversão de centro O que tem raio r , então

$$\overline{OB'} \cdot \overline{OB''} = r^2. \quad (3.2)$$

Das equações (3.1) e (3.2), segue que $\overline{OB''} = \left(\frac{r}{\overline{OA}}\right)^2 \cdot \overline{OB}$. Logo, em relação ao círculo de inversão, o círculo c possui como imagem o círculo de inversão c' pela homotetia de centro O e razão $\left(\frac{r}{\overline{OA}}\right)^2$.

Assim, a inversão leva o círculo c , com $O \notin c$, num círculo c' .

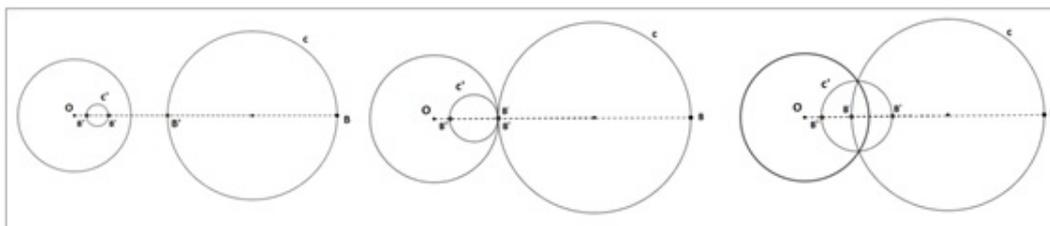


Figura 3.5: Propriedade 04 das inversões.

Agora consideremos o caso em que O está no interior de c . Fixe um ponto $B \in c$ e trace B' o outro ponto de encontro da reta OB com c . Considere $k = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.

Para cada $A \in c$ seja A' o outro ponto de encontro de c com a reta AO . Tem-se $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k$, pelo teorema das cordas. Se A'' é o inverso de $A' \in c$, em relação ao círculo de inversão, então $\overline{OA'} \cdot \overline{OA''} = r^2$, onde r é o raio do círculo do raio de inversão. Logo, $\overline{OA''} = r^2 \cdot \frac{1}{\overline{OA'}}$. Como $\overline{OA'} = \frac{k}{\overline{OA}}$, temos $\overline{OA''} = \frac{r^2}{k} \cdot \overline{OA}$. Assim, a inversão, em relação ao círculo de inversão, leva c na sua imagem homotética de centro O e razão $\frac{r^2}{k}$ e, portanto, numa circunferência c' .

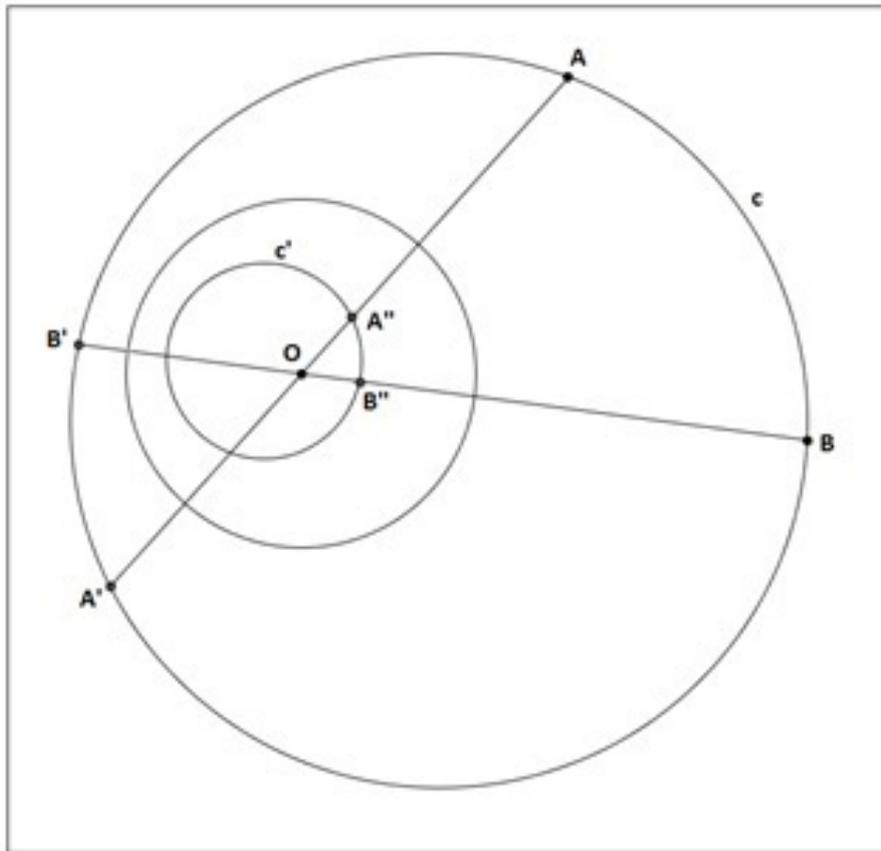


Figura 3.6: Segundo Caso da Propriedade 04 das inversões.

3.1 Construção geométrica de pontos inversos

O ponto P' inverso de um ponto P dado, com respeito a um círculo C pode ser construído geometricamente com o uso apenas do compasso. De fato, consideremos primeiro o caso em que o ponto dado P seja exterior a C . Com OP como raio e P como centro, descrevemos um arco cruzando C nos pontos R e S . Com estes dois pontos como centros, descrevemos arcos com raio r que se cortem em O e em um ponto P' sobre a reta OP .

Os triângulos ORP e $OP'R$ são semelhantes (Figura 3.7) e portanto $\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP'}}$, isto é, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Dessa forma, P' é o inverso requerido de P , que deveria ser

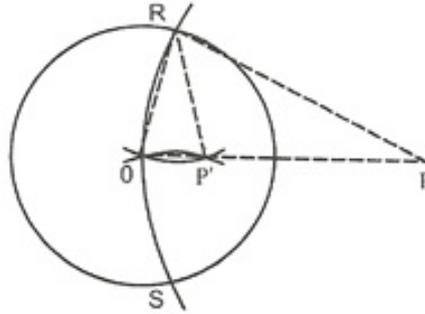


Figura 3.7: Construção do inverso de P , exterior à circunferência C .

construído.

Se o ponto P estiver contido no interior de C , a mesma construção e prova serão válidas, desde que o círculo de raio OP em torno de P corte C em dois pontos. Caso contrário, podemos reduzir a construção do ponto inverso P' ao caso abaixo.

Primeiro, encontramos um ponto R sobre a reta OP cuja distância de O seja um inteiro múltiplo de OP e que esteja no exterior de C ,

$$\overline{OR} = n \cdot \overline{OP}.$$

e construímos o ponto R' inverso a R pela construção anteriormente dada. Então:

$$r^2 = \overline{OR'} \cdot \overline{OR} = (\overline{OR'}) \cdot (n \cdot \overline{OP}) = (n \cdot \overline{OR'}) \cdot \overline{OP}.$$

Portanto, o ponto P' para o qual $\overline{OP'} = n \cdot \overline{OR'}$ é o inverso desejado.

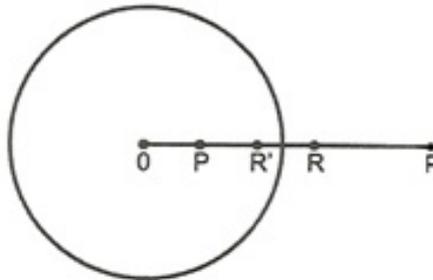


Figura 3.8: Construção do inverso de P , interior à circunferência C .

3.2 Bissecção de um segmento

Para encontrar o ponto médio entre dois pontos dados A e B utilizando apenas o compasso podemos utilizar o seguinte procedimento:

1. (Passo 01) Trace o círculo com raio AB e centro em B , demarque três arcos com raio AB , começando em A e com ponto final C o qual estará sobre a reta AB , pois desse modo construiremos três arcos de 60° .

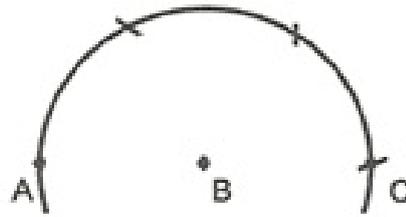


Figura 3.9: Passo 01 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .

2. (Passo 02) Trace o círculo com raio AB e centro A . (A ilustração pode ser vista na figura 3.10 abaixo).

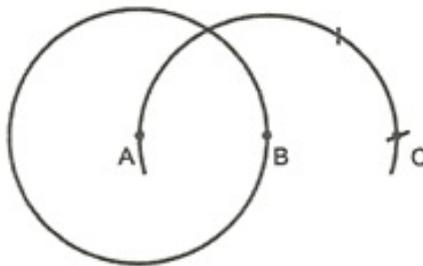


Figura 3.10: Passo 02 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .

3. (Passo 03) Construa C' , o ponto inverso a C com respeito ao último círculo. Então:

$$\overline{AC'} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2,$$

donde

$$\overline{AC'} \cdot 2 \cdot \overline{AB} = \overline{AB}^2$$

e portanto,

$$2 \cdot \overline{AC'} = \overline{AB}.$$

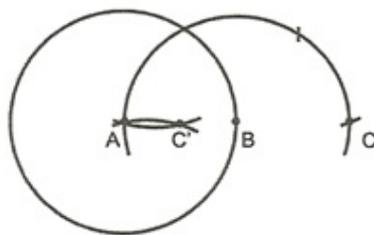


Figura 3.11: Passo 03 da construção do ponto médio entre os pontos A e B .

3.3 Determinação do centro de um círculo utilizando apenas o compasso

Uma construção com compasso utilizando pontos inversos é a de encontrar o centro de um círculo do qual apenas a circunferência é dada, sendo o centro desconhecido.

1. Escolher um ponto P qualquer sobre uma circunferência.

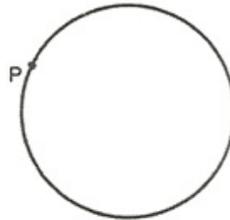


Figura 3.12: Passo 01 da construção.

2. Em torno dele traçamos um círculo cortando o círculo dado nos pontos R e S .

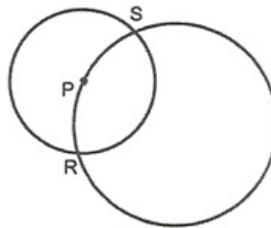


Figura 3.13: Passo 02 da construção.

3. Tomando estes como centros, traçamos arcos com os raios RP e SP , intersectando-se em Q .

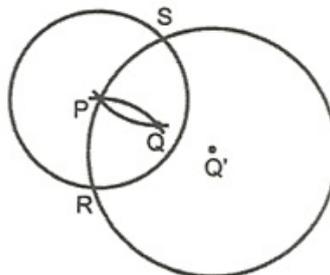


Figura 3.14: Passo 03 da construção.

O centro desconhecido, Q' , é o inverso a Q com respeito ao círculo em torno de P pois os triângulos isósceles SPQ e $SQ'P$ são semelhantes, portanto $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'}^2 = r^2$. Então Q' pode ser construído apenas por compasso.

3.4 Bissecção do arco \widehat{AB} de um círculo de centro O

Designando por \widehat{AB} o arco compreendido, no sentido horário, entre os pontos A e B . A construção é a seguinte:

1. Dado um arco \widehat{AB} de um círculo e seu centro O .

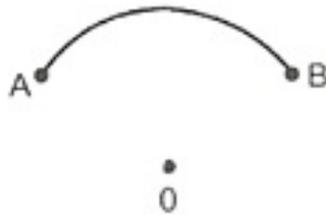


Figura 3.15: Passo 01 da construção.

2. A partir de A e B como centros, trace dois arcos com raio AO , sendo O centro do círculo que contém o arco \widehat{AB} .

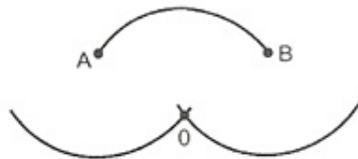


Figura 3.16: Passo 02 da construção.

3. Com centro em O trace arcos \widehat{OP} e \widehat{OQ} , iguais a \widehat{AB} .

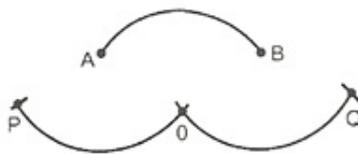


Figura 3.17: Passo 03 da construção.

4. Trace dois arcos com PB e QA como raios com P e Q como centros, intersectando-se em R .
5. Finalmente, com OR como raio, descreva um arco com P ou Q como centro até que ele corte \widehat{AB} em X (veja ilustração abaixo), o ponto médio requerido ao arco \widehat{AB} .

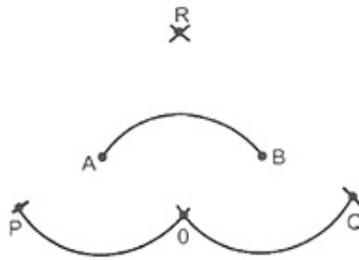


Figura 3.18: Passo 04 da construção.

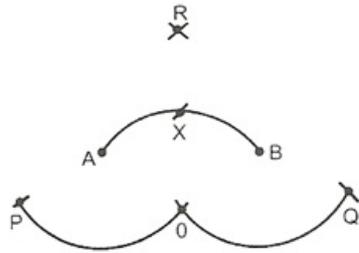


Figura 3.19: Passo 05 da construção.

Seria impossível provar o teorema geral de Mascheroni fornecendo efetivamente uma construção somente por compasso para toda construção possível com régua e compasso. Porém, podemos chegar à mesma meta provando que cada uma das seguintes construções fundamentais é possível apenas por compasso: (o que é claramente verdade para as duas primeiras)

- Traçar um círculo com centro e raio dados;
- Encontrar os pontos de interseção de dois círculos;
- Encontrar, se houverem, os pontos de interseção de uma reta e um círculo dado;

Considere um círculo C de centro O e uma reta dada por dois pontos A e B . Com centros em A e B e raios AO e BO , respectivamente, trace dois arcos intersectando-se em O e P .

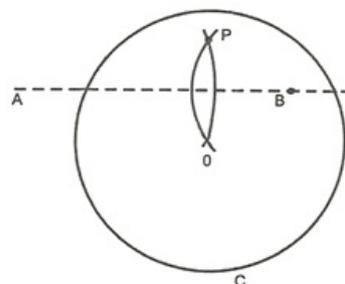


Figura 3.20: Passo 01 da construção.

Determinar o ponto Q inverso de P com respeito a C , pela construção apenas por compasso já apresentada.

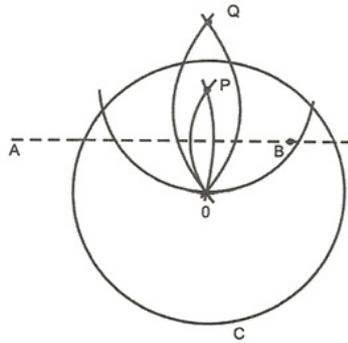


Figura 3.21: Passo 02 da construção.

Trace um círculo com centro Q e raio QO , intersectando o círculo C em X e X' .

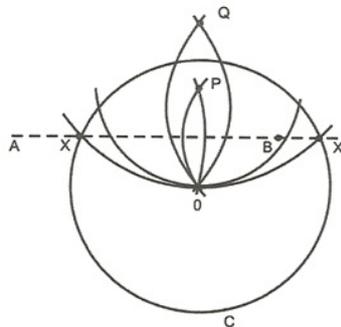


Figura 3.22: Passo 03 da construção.

Vamos mostrar que X e X' são equidistantes de O e P , uma vez que A e B o são, por construção.

Isto decorre do fato de que o inverso de Q , o ponto P , dista de X e X' igual ao raio de C . Observe que o círculo que passa por X , X' e O é o inverso da reta AB , uma vez que este círculo e a reta AB cortam C nos mesmos pontos.

- Encontrar os pontos de interseção de duas retas;

O método para determinar o círculo inverso à reta unindo dois pontos dados permite uma solução imediata deste caso. Sejam AB e $A'B'$ as retas dadas e um círculo C .

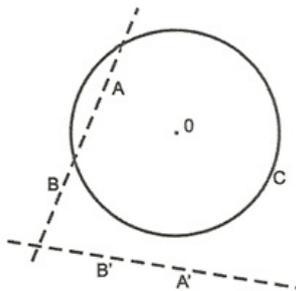


Figura 3.23: Passo 01: Interseção de duas retas.

Pelo método anterior, encontre os círculos inversos a AB e a $A'B'$. Esses círculos se intersectam em O (propriedade 2) e em um ponto $Y \neq O$ (as retas AB e $A'B'$ não são paralelas).

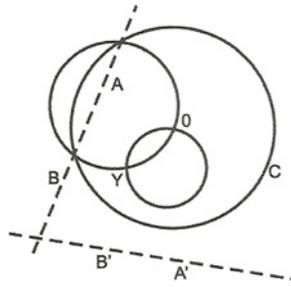


Figura 3.24: Passo 02: Interseção de duas retas.

O ponto X inverso de Y é o ponto de interseção requerido e pode ser construído pelo processo já utilizado.

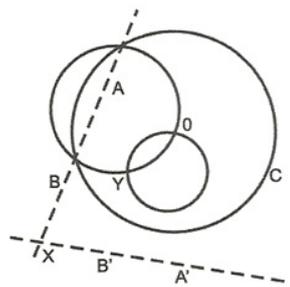


Figura 3.25: Passo 03: Interseção de duas retas.

Fica evidente que X é o ponto requerido a partir do fato de que Y é o ponto que é inverso a um ponto de AB quanto de $A'B'$; portanto, o ponto X inverso de Y deve pertencer a ambos, AB e $A'B'$.

Com estas duas demonstrações, completamos a prova de equivalência entre as construções de Mascheroni utilizando apenas o compasso e as construções geométricas convencionais com régua e compasso.

3.5 Algumas aplicações

Apresentamos nesta seção algumas aplicações da teoria apresentada, que inclusive, podem ser desenvolvidas pelo professor da Educação Básica em suas aulas.

- Sobre um segmento AB de comprimento p , levante um segmento perpendicular AE .

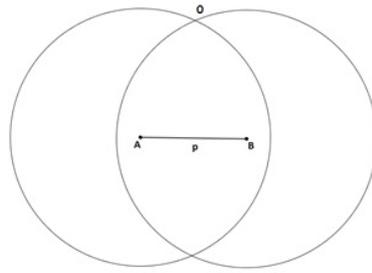


Figura 3.26: Passo 01 da construção.

Com uma abertura do compasso invariável e igual ao segmento de comprimento arbitrário R , traçamos as circunferências (A, R) e (B, R) que se intersectam em O .

Descrevemos a circunferência (O, R) e construímos neste o ponto E que é diametralmente oposto ao ponto B .

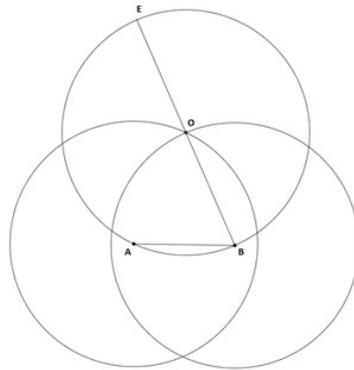


Figura 3.27: Passo 02 da construção.

Assim teremos o triângulo ABE , retângulo em A . Logo, podemos concluir que $AE \perp AB$.

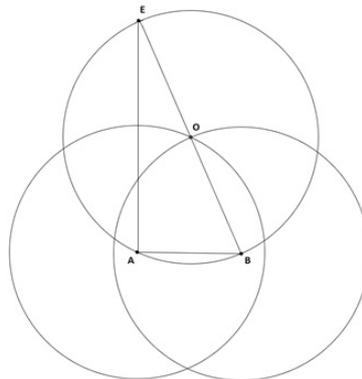


Figura 3.28: Passo 02 da construção.

• Dois segmentos de comprimento p e q com $p > q$ são dados no plano. Encontre um segmento de comprimento $x = \sqrt{p^2 - q^2}$, utilizando a construção anterior.

Para resolver este item basta considerar o segmento AB de comprimento q , proceder conforme o item anterior e obter a perpendicular AE com AB . Agora basta fazer um círculo com centro em B e raio de comprimento p intersectando a perpendicular AE em C .

Assim, obtemos o triângulo retângulo ABC de catetos AB e AC e hipotenusa BC . Tomando $\overline{AB} = q$, $\overline{BC} = p$ e $\overline{AC} = x$, temos:

$$x^2 + q^2 = p^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{p^2 - q^2}$$

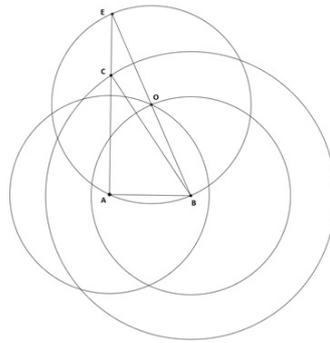


Figura 3.29: Segmento de comprimento $\sqrt{p^2 - q^2}$.

• **A partir de um dado segmento de comprimento a construa o segmento de comprimento $a\sqrt{2}$.**

Para resolver este item basta considerar o segmento AB de comprimento a e proceder conforme o primeiro item, considerando os círculos (AR) e (BR) de raio também de comprimento a . Assim teremos o triângulo ABC , retângulo em A , de catetos de comprimento a e hipotenusa $\overline{BC} = x$, conforme segue:

$$x^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{a^2 + a^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

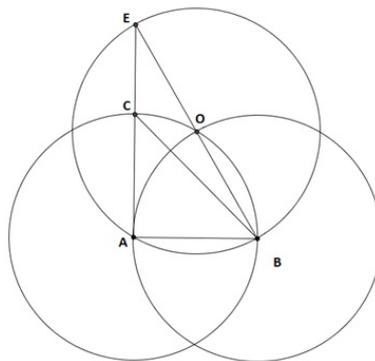


Figura 3.30: Segmento de comprimento $a\sqrt{2}$.

• **Com segmentos dados de comprimentos p e q encontre um segmento de comprimento $x = \sqrt{p^2 + q^2}$.**

Para resolver este item basta considerar o segmento AB de comprimento q e proceder conforme o primeiro dos itens, tendo como raio (AR) de comprimento p . A interseção da perpendicular AE com o círculo (AR) chamamos de C . Assim obtemos o triângulo retângulo ABC com catetos de comprimentos p e q e hipotenusa BC de comprimento x conforme segue:

$$x^2 = p^2 + q^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

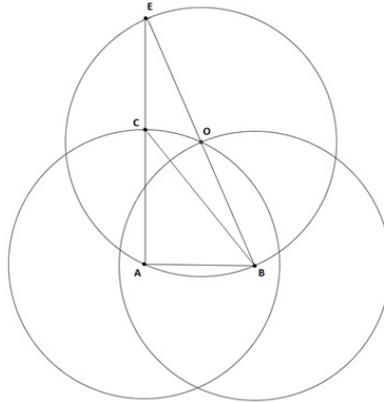


Figura 3.31: Segmento de comprimento $\sqrt{p^2 + q^2}$.

• **Utilizando os resultados anteriores, encontre segmentos de comprimento $p + q$ e $p - q$ se segmentos de comprimento p e q forem dados no plano.**

Podemos obter o triângulo ABC , retângulo em A com catetos $\overline{AB} = p$ e $\overline{AC} = q$, utilizando a construção anterior. Traçamos um círculo com centro em A e raio de comprimento q . A partir da interseção do círculo com o segmento AB encontramos o ponto D , obtido através da construção de três arcos de 60° . Logo, temos que o comprimento de AD vale $p + q$.

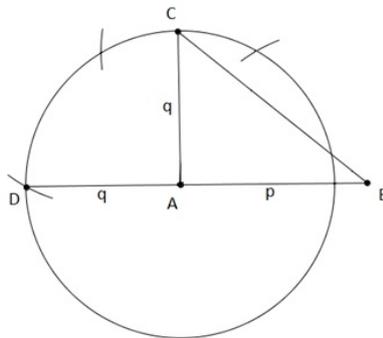


Figura 3.32: Construção de um segmento de comprimento $p + q$.

Consideremos agora o mesmo triângulo ABC , com D sobre AB . Assim temos $\overline{AD} = q$ e como $\overline{AB} = p$ concluímos que $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = p - q$.

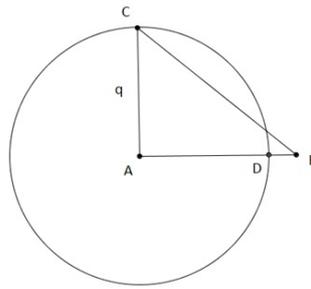


Figura 3.33: Construção de um segmento de comprimento $p - q$.

• **Encontre a projeção ortogonal de um ponto A sobre um reta.**

Para esta construção, devemos inicialmente traçar um círculo com centro em A , intersectando a reta dada nos pontos P e Q .

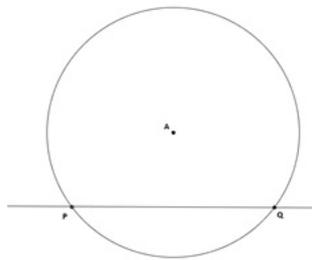


Figura 3.34: Círculo de centro A intersectando a reta em P e Q .

Na sequência, traçar círculos de centros em P e Q com raio PA (Figura 3.35 abaixo).

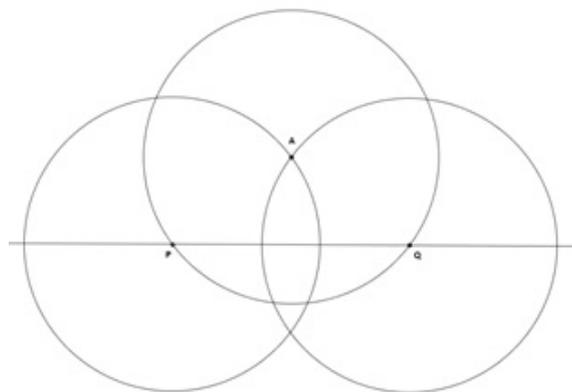


Figura 3.35: Círculos de centro P e Q com raio PA .

Obter o ponto R que é a interseção dos círculos de centros P e Q . Traçar o círculo de centro R e raio PR (conforme Figura 3.36 abaixo).

Obter o ponto S , interseção dos círculos de centros P e R (analogamente T). Com centro em Q traçar o círculo de raio QS (observe a Figura 3.37 abaixo).

O ponto da interseção A' da reta dada com o círculo de centro Q e raio QS é a projeção ortogonal de A sobre a reta.

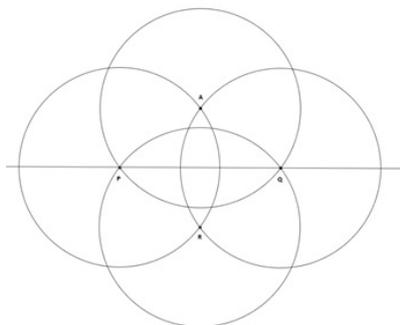


Figura 3.36: Círculo de centro R e raio PR

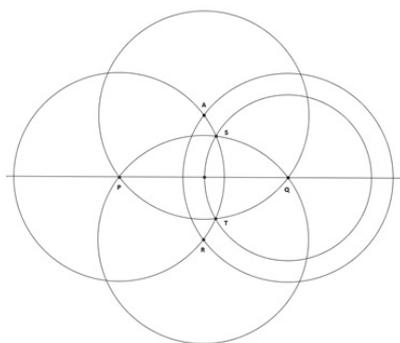


Figura 3.37: Círculo de centro Q e raio QS .

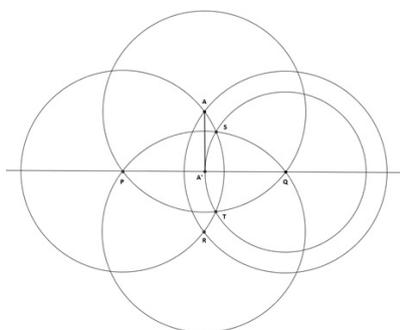


Figura 3.38: Projeção ortogonal do ponto A sobre uma reta.

Referências

- [1] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.
- [2] WAGNER, E. *Construções Geométricas, Coleção do Professor de Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1993.
- [3] REVISTA do Professor de Matemática, nº 81. São Paulo: SBM, 2013.
- [4] CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história, vol. 01*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [5] LIMA, E. *Coordenadas no Plano, Coleção do Professor de Matemática*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.