Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

As funções exponencial e logarítmica são assim

Henrique da Costa Figo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

2014

111 Sobrenome, Nome do Autor
X111x As funções exponencial e logarítmica são assim/ Henrique da Costa Figo- Rio Claro: [s.n.], 2014.
37 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento

1. Números reais. 2. Potenciação. 3. Funções logarítmicas. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Henrique da Costa Figo
As funções exponencial e logarítmica são assim

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento
Orientador

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Departamento de Matemática - Unesp - Rio Claro

Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília

Rio Claro, janeiro de 2014

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram de forma direta e indireta para a realização deste trabalho. Como são muitas, sinto-me na necessidade de já estar previamente desculpado, pois poderei esquecer de algum nome daqui em diante. Primeiramente agradeço à minha mãe, meu irmão e a minha amada Camila pelo apoio prestado ao longo do curso do mestrado e da elaboração dessa tese, sendo esse apoio dado de forma direta ou pelo simples fato de vocês fazerem parte da minha vida.

Agradeço imensamente ao meu orientador Vanderlei Marcos do Nascimento, por compartilhar de todo seu conhecimento e paciência na elaboração desse texto. Suas sugestões foram mais do que necessárias e valiosas. Um agradecimento especial à banca julgadora, composta pelo prof. Dr. Jamil Viana e pela profa. Dra Simone Bruschi. As críticas e sugestões foram muito proveitosas e necessárias.

À professora Suzinei Marconato, o meu muito obrigado por toda a atenção prestada durante o curso. Sempre prestativa em resolver e auxiliar nos problemas encontrados.

Um agradecimento mais do que especial à turma *nota C*: Dênis, Anderson, Mauro, Fabiana e Juliana. Acreditem: com vocês tudo foi mais fácil e prazeroso. Além do título de mestres, também conquistamos amizades valiosas nesses dois anos.

A todos os meus alunos, o meu muito obrigado pela inspiração diária. Sem vocês esse trabalho não faria sentido.

Resumo

Neste trabalho apresentamos as caracterizações mais usuais das funções logarítmicas e exponenciais, com mais detalhes do que se vê.

Palavras-chave: Números reais, Potenciação, Funções logarítmicas.

Abstract

In this work we present the most common characterizations of exponential and logarithmic functions, with more details than are usually presented.

Keywords: Real Numbers, Exponentiation, Logarithmic functions.

Sumário

1 Introdução **11**

2 Noções Preliminares **13**

3 Potências com expoentes racionais e irracionais **21**

3.1 Expoentes racionais 21

3.2 Expoentes irracionais 24

4 Funções exponenciais **29**

5 Funções logarítmicas **33**

6 Referências **37**

1 Introdução

Há uma ideia no pensamento matemático cuja importância, aparentemente, não tem sido evidenciada no ensino. Em geral esquece-se de dizer que aprendemos a fazer *composições* não simplesmente para gerar novos entes, mas também para aprendermos a ver alguns entes como gerados a partir de outros que possam ser considerados mais simples. A regra da cadeia para derivação de funções só é interessante se conseguirmos isso; o Teorema Fundamental da Aritmética é para isso. Mesmo que não decompusermos um número como produto de fatores primos, se pudermos decompô-lo como um produto de fatores distintos, não há dúvida que já teremos conseguido uma descrição desse número a qual, se não mais simples, é passível de interpretação mais simples. Assim são os números quadrados, os cúbicos, etc. Sob as considerações acima, não há dúvida de que as funções exponenciais (com expoentes inteiros) são aquelas que naturalmente se deve primeiro abordar no ensino, antes das funções logarítmicas. Contudo, essa naturalidade é perdida quando, desejo matemático, nos propomos a considerar expoentes não inteiros. A questão, portanto, pelo menos no que diz respeito ao ensino, é de onde partir ou qual rumo tomar. Convém, então, lembrar que os apelos intuitivos que a geometria capacita são fortes aliados no tratamento das funções logarítmicas. Isso é feito com bastante propriedade em [5]. No entanto, entendemos que o referido apelo geométrico, sendo forte demais, permite que, tanto aluno quanto professor do Ensino Médio, não elaborem maiores indagações, nisso perdendo-se motivações para desenvolvimentos futuros como, por exemplo, a noção de limite.

Neste trabalho preferimos, seguindo [Bartle], insistir primeiro na naturalidade de se *generalizar a potenciação*. No mínimo, isso evidencia o desejo de se ter uma função com as propriedades que aquelas com expoentes inteiros tinham e, nesse caso, coincidam, bem como evidencia o papel do Axioma do Supremo nas criações. É claro que nosso material não pode ser utilizado em sua totalidade no Ensino Médio, mas é igualmente claro que o estudante, já nesse nível, merece ter clareza sobre as dificuldades que se apresentam, bem como ter a crença de que é possível solucioná-las. Se o professor conduzí-lo nesse caminho, o estudante poderá dar saltos sem se esquecer de que existe a ponte. Sem isso, tudo fica isolado e, a maior parte, vira folclore com a resposta usual *vale porque vale*. Acreditamos que nosso trabalho mostra bem o grau de dificuldade de cada passo do assunto e que, portanto, pode ser utilizado pelo professor do Ensino

Médio na sua tarefa de decidir, diante de cada turma e com honestidade intelectual, o que fazer .

2 Noções Preliminares

Nesta seção estabeleceremos a axiomática e alguns resultados importantes no estudo do conjunto, o qual chamamos de números reais e denotaremos por $\mathbb{R}$. São dados como objetos não-definidos, o conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos chamamos de números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$ é chamado de *sucessor* de n. A função s satisfaz os seguintes axiomas:

1. m, $n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \to m = n$
2. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é formado por um único elemento, o qual se chama *"um"* e é denotado por 1. Em outras palavras, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, temos que $1 \neq s(n)$.
3. (Princípio da Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$, tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O conjunto dos *números inteiros* será denotado por $\mathbb{Z}$, isto é: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2...\}$. Finalmente, utilizaremos o símbolo $\mathbb{Q}$ para denotarmos o conjunto dos *números racionais*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Os resultados apresentados nesta seção encontram-se nas referências [2], [3] e [4] da bibliografia.

Axioma 1: No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, há duas operações binárias (denotadas por $+$ e $\cdot$, chamadas adição e multiplicação, respectivamente), que satisfazem:

- (A1) $a + b = b + a$, para todo a, $b \in \mathbb{R}$;
- (A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$;
- (A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 + a = a$ e $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
- (A4) para cada elemento a em $\mathbb{R}$ existe um elemento $-a$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo $a + (-a) = 0$ e $(-a) + a = 0$;
- (M1) $a \cdot b = b \cdot a$, para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$;
- (M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$;

- (M3) Existe um elemento $1 \in \mathbb{R}$ não nulo, tal que $1 \cdot a = a$ e $a \cdot 1 = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$;
- (M4) para todo elemento $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$ existe um elemento $\frac{1}{a}$ em $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$;
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1: Os elementos em $A3$ e em $M3$ são únicos.

Demonstração: Ver [3].

Axioma 2: Em $\mathbb{R}$, existe um subconjunto denotado por $\mathbb{R}^+$, chamado de conjunto dos números reais *positivos*, tal que

- A soma e o produto de elementos de $\mathbb{R}^+$ pertencem ao conjunto.
- Seja $x \in \mathbb{R}$. Então $x = 0$ ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Definição 2.2: Dizemos que x é menor do que y e denotamos por $x < y$ sempre que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Em outras palavras, dizemos que $x - y$ é maior do que zero. Analogamente, sendo y maior do que x, escrevemos $y > x$ então $y = x + \delta$, onde $\delta > 0$.

Proposição 2.3: Valem as seguintes propriedades de relação de ordem em $\mathbb{R}$:

- (1) se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$ (propriedade transitiva)
- (2)sejam x, $y \in \mathbb{R}$. Então $x = y$, $x > y$ ou $x < y$. (tricotomia)
- (3) se $x < y$ então $x + z < y + z$, qualquer que seja $z \in \mathbb{R}$;
- (4) se $x < y$ então $xz < yz$ e $xz > yz$ para $z > 0$ e $z < 0$, respectivamente.

Demonstração: A demonstração dessa proposição pode ser consultada em [3].

Definição 2.4: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* quando existe $M \in \mathbb{R}$ satisfazendo $x \leq M$, $\forall x \in A$. Nesse caso dizemos que M é uma cota superior de A. Caso M seja a **menor das cotas superiores**, dizemos que M é o *supremo* de A e denotamos $M = \sup A$.

Definição 2.5: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $m \in \mathbb{R}$ satisfazendo $x \geq m$, $\forall x \in A$. Nesse caso dizemos que m é uma cota inferior de A. Caso m seja a **maior das cotas inferiores**, dizemos que M é o *ínfimo* de A e denotamos $M = \inf A$.

Axioma 3 O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é **completo**, isto é, existe o supremo de todo subconjunto, de $\mathbb{R}$, não-vazio e limitado superiormente.

Pela definição dada acima, sendo $\mathbb{R}$ completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset \mathbb{R}$, possui um ínfimo. De fato, definindo $X = -Y = \{-y : y \in Y\}$, vemos que $X \neq \emptyset$ e é limitado superiormente. Logo existe $a = \sup X$. Pela construção de X, temos que $-a = \inf Y$.

Proposição 2.6: Em $\mathbb{R}$, as seguintes sentenças são equivalentes:

- (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente
- (2) dados a, $b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \cdot a > b$
- (3) seja $a > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2): pelo fato de $\mathbb{N}$ ser ilimitado, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$, onde a e b são elementos de $\mathbb{R}$, $a > 0$. Logo, vale que $n \cdot a > b$.

(2) $\Rightarrow$ (3): por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$, $a > 0$. Portanto $0 < \frac{1}{n} < a$.

(3) $\Rightarrow$ (1): seja $b \in \mathbb{R}$ positivo. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow n > b$. Isso mostra que nenhum número positivo em $\mathbb{R}$ é cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

Satisfazendo uma das três condições acima, dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo *arquimediano*. De fato, caso $\mathbb{R}$ não fosse Arquimediano, existiria $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, tal elemento x_0 seria o supremo do conjunto dos números naturais. Nesse caso existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + 1 > x_0$, contradizendo o fato de que x_0 é o supremo de $\mathbb{N}$.

Definição 2.7: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A potência de base a e expoente $n \in \mathbb{N}$ é o número a^n satisfazendo:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \ a \neq 0, \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \ n \geq 1, \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{cases}$$

Proposição 2.8: Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, m, $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Valem as seguintes propriedades:

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- (2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sempre que $m \geq n$
- (3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- (5) $(a^m)^n = a^{mn}$

Demonstração:

Demonstrando (1): Dado $m \in \mathbb{N}$, faremos indução sobre n. Se $n = 0$, temos

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0.$$

Supondo a veracidade da propriedade para $n = k$, ou seja, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$, mostramos que o mesmo ocorre para $k + 1$. De fato:

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}.$$

Demonstrando (2): Analogamente ao item anterior, fixamos m e fazemos indução sobre n. Para $n = 0$, temos

$$a^{m-0} = a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^0}.$$

Supondo a igualdade verdadeira para $n = k$, isto é,

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k},$$

temos para $k + 1$:

$$a^{m-(k+1)} = a^{(m-k)-1} = \frac{a^{m-k}}{a^1} = \frac{a^m}{a^k} \cdot \frac{1}{a^1} = \frac{a^m}{a^{k+1}}.$$

Demonstrando (3): Para $n = 0$ a propriedade é prontamente verificada:

$$(a \cdot b)^0 = 1 = a^0 \cdot b^0.$$

Assumindo a igualdade $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, provamos o mesmo para $k + 1$. Ora

$$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1 = a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

Demonstrando (4): Temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = a^0 b^0.$$

Assumindo que $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$, para $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}.$$

Demonstrando (5): Dado $m \in \mathbb{N}$, para $n = 0$, temos que

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m\cdot 0}.$$

Assumindo que a propriedade é válida para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$(a^m)^k = a^{m\cdot k},$$

mostramos a assertiva para $k + 1$:

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot a^m = a^{m\cdot k} \cdot a^m = a^{m\cdot k+m} = a^{m\cdot(k+1)}.\square$$

Proposição 2.9: Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0.$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Sendo $n > 0$, queremos que $a^n > 1$, com $a > 1$. Para $n = 1$, a desigualdade $a^1 = a > 1$ está verificada. Assumindo que $a^k > 1$ para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$a^{k+1} = a^k \cdot a > a^k > 1.$$

($\Rightarrow$) Mostraremos por contradição o resultado $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$.
Assumindo que $n \leq 0$, temos que $-n \geq 0$ e $a^{-n} \geq 1$. Então

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n.$$

Absurdo, pois contraria a hipótese inicial de que $a^n > 1$, isto é, $n > 0$. $\square$

Proposição 2.10: Sejam a e b números reais positivos e $n \in \mathbb{N}$. Então $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Supondo $a < b$, o resultado está garantido para $n = 1$. Admitindo o resultado válido para $n = k$, isto é:

$$a < b \Rightarrow a^k < b^k,$$

temos

$$a < b \Rightarrow a^k \cdot a < b^k \cdot a < b^k \cdot b = b^{k+1}.$$

Portanto $a^n < b^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a < b$.

($\Leftarrow$) Caso seja $a \geq b$, a primeira parte nos mostra que $a^n \geq b^n$, contradizendo nossa hipótese de que $a^n < b^n$. $\square$

Definição 2.11: Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, possuindo como imagem elementos de $\mathbb{R}$. Genericamente, podemos denotar a função x por (x_n).

Dizemos que o número real a é o *limite* da sequência (x_n) ($\lim x_n = a$), quando para cada número real $\epsilon > 0$, for possível obter um número natural n_0 tal que, qualquer que seja $n > n_0$ tenhamos $|x_n - a| < \epsilon$. Nesse caso, dizemos que a sequência é *convergente*.

Proposição 2.12: A sequência de números reais $x_n = a^{\frac{1}{n}}$, onde $a > 0$, é convergente e seu limite é igual a 1.

Demonstração: A sequência $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ é decrescente se $a > 1$ e crescente se $0 < a < 1$, sendo limitada em ambos os casos. Sendo limitada e monótona (crescente ou decrescente), temos que a mesma é convergente (ver [3]). Seja $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Afirmamos que $l > 0$.

De fato, sendo $0 < a < 1$, temos que $l = \sup\{a^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} \geq a > 0$. Caso tenhamos $a > 1$, sendo a sequência decrescente, é verdade que $l = \inf\{a^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$. Como $a^{\frac{1}{n}} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $l \geq 1$.

Para provarmos que o limite da sequência dada é igual a 1, tomamos a *subsequência* $a^{\frac{1}{n(n+1)}}$, a qual possui o mesmo limite da sequência original (ver [3]). Então:

$$l = \lim a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \lim \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\lim a^{\frac{1}{n}}}{\lim a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Definição 2.13: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *denso* em $\mathbb{R}$ quando, dados $a,\ b \in \mathbb{R}$, existe algum elemento de X maior que a e menor que b, isto é, $(a, b) \cap X \neq \emptyset$.

Proposição 2.14: Os conjuntos $\mathbb{Q}$ (racionais) e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (irracionais) são ambos densos em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Dado um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, devemos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a, b). Intuitivamente, como $b - a > 0$, existe um natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Todos os números da forma $\frac{m}{p}$ dividem a reta dos números reais em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$, algum dos números $\frac{m}{p}$ deve pertencer ao intervalo (a, b). Seja $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} \geq b\}$. Como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, o conjunto A é não-vazio e limitado inferiormente por $b \cdot p$. Seja k_0 o menor elemento de A. Então $b \leq \frac{k_0}{p}$. Como $k_0 - 1 < k_0$, temos que $\frac{k_0-1}{p} < \frac{k_0}{p} < b$. Precisamos mostrar agora que $\frac{k_0-1}{p} > a$ e a proposição estará demonstrada para os números racionais.

Caso não fosse verdade, teríamos

$$\frac{k_0 - 1}{p} \leq a < b \leq \frac{k_0}{p} \Leftrightarrow b - a \leq \frac{k_0}{p} - \frac{k_0 - 1}{p} = \frac{1}{p}.$$

Temos uma contradição, pois $b - a > \frac{1}{p}$.

Para obter um número irracional em (a, b), utilizamos um raciocínio análogo ao apresentado acima. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Logo, todos os números da forma $\frac{\sqrt{2}}{p}$, $m \neq 0$, dividem a reta dos números reais em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$, temos que algum $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b).

Definição 2.15: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Observemos que o conceito de continuidade só faz sentido de aplicação quando o ponto a em questão é um elemento do domínio da função.

Proposição 2.16: A função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, $\lim f(x_n) = f(a)$, qualquer que seja $(x_n) \subset X$ com $\lim x_n = a$.

Demonstração: A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [3].

Proposição 2.17: Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Demonstração: Seja $c = \frac{g(a)-f(a)}{2}$ e $\epsilon = g(a) - c = c - f(a)$. De acordo com essa escolha, temos que $c = f(a) + \epsilon = g(a) - \epsilon$ e $\epsilon > 0$. Pelo fato da continuidade de f e g, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x) < c$ e $x \in X$, $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \epsilon$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

A proposição 2.17 também é conhecida como *Teorema da Conservação do Sinal.*

Proposição 2.18: **(Teorema do Valor Intermediário).** Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: A demonstração do Teorema do Valor Intermediário pode ser vista em [3].

Proposição 2.19: Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida em um intervalo I. Então f é monótona, sua imagem $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração: A demonstração dessa proposição pode ser vista em [3].

3 Potências com expoentes racionais e irracionais

3.1 Expoentes racionais

Procurando estender o conceito de potenciação, definindo agora para expoentes racionais, seguiremos o roteiro dado pelo projeto 6.α do livro *Elementos de Análise Real, segunda edição*, de *Robert G. Bartle* [1].

Admitindo que a e b sejam números reais maiores do que 1, temos a

Proposição 3.1: Sejam m, n inteiros e $n > 0$.

- (1) O conjunto
$$S_{\frac{m}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^n \leq a^m\}$$
é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e cotado superiormente. Definimos $a^{\frac{m}{n}} = \sup S_{\frac{m}{n}}(a)$.
- (2) $z = a^{\frac{m}{n}}$ é a única raiz positiva da equação $z^n = a^m$.
- (3) $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow mq = np$
- (4) Se r, $s \in \mathbb{Q}$, então $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{rs}$.
- (5) Se $r \in \mathbb{Q}$, então $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$.
- (6) Se $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, então $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$.
- (7) Se r, $s \in \mathbb{Q}$, então $r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$.

Demonstrando (1): Seja $t = \frac{a^m}{1+a^m}$. Como $0 < t < 1$, temos que $t^n < t = \frac{a^m}{1+a^m} < a^m$, o que nos mostra que $S_{\frac{m}{n}}(a)$ é não vazio. Tomando $t_0 = 1 + a^m$, vemos que se $t > t_0$ então $t^n \geq t > x$, ou seja, $t \notin S_r(a)$ e $1 + a^m$ é um limitante superior para $S_{\frac{m}{n}}(a)$.

Demonstrando (2): Se $a^{\frac{m}{n}}$ não fosse raiz da equação $z^n = a^m$, então $(a^{\frac{m}{n}})^n < a^m$ ou $(a^{\frac{m}{n}})^n > a^m$. Suponhamos que $(a^{\frac{m}{n}})^n < a^m$. Nesse caso existe ϵ, com $0 < \epsilon < 1$, satisfazendo

$$\epsilon < \frac{a^m - z^n}{(1+z)^n - z^n}.$$

Considerando a identidade

$$(z+\epsilon)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} z^{n-2}\epsilon^2 + ... + \binom{n}{n}\epsilon^n$$

vemos que

$$(z+\epsilon)^n \leq z^n + \epsilon\left[\binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + ... + \binom{n}{n}\right] = z^n + \epsilon[(1+z)^n - z^n] < z^n + (a^m - z^n) = a^m.$$

Isso significa que $z + \epsilon \in S_r(a)$, contradizendo o fato de que $z = a^{\frac{m}{n}}$ é o supremo desse conjunto.

Caso tenhamos $(a^{\frac{m}{n}})^n > a^m$, escolhemos ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, $\epsilon < z$ satisfazendo

$$\epsilon < \frac{z^n - a^m}{(1+z)^n - z^n}.$$

Então, para todo $t \geq z - \epsilon$, nós temos

$$t^n \geq (z-\epsilon)^n = z^n - \binom{n}{1} z^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} z^{n-2}\epsilon^2 - ... + (-1)^n\binom{n}{n}\epsilon^n =$$

$$= z^n - \epsilon\left[\binom{n}{1} z^{n-1} - \binom{n}{2} z^{n-2}\epsilon + ... - (-1)^n\binom{n}{n}\epsilon^{n-1}\right] \geq$$

$$\geq z^n - k\left[\binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} + ... + \binom{n}{n}\right] = z^n - \epsilon[(1+z)^n - z^n] > z^n - (z^n - a^m) = a^m.$$

Isto é, $z - \epsilon$ é uma cota superior para $S_{\frac{m}{n}}(a)$, sendo menor que seu supremo $z = a^{\frac{m}{n}}$. Portanto $z^n = a^m \Leftrightarrow (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$.

Demonstrando (3): De fato:

$$a^{mp} = a^{mp} \Leftrightarrow a^{\frac{mp}{n}\cdot n} = a^{\frac{mp}{q}\cdot q} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{np} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.\square$$

Demonstrando (4): Tomando $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ com $q, n > 0$, queremos mostrar que $a^r \cdot a^s$ é solução da equação

$$x^{nq} = a^{mq+np}.$$

Com efeito,

$$(a^r \cdot a^s)^{nq} = (a^r)^{nq} \cdot (a^s)^{nq} = [(a^r)^n]^q \cdot [(a^s)^q]^n = (a^m)^q \cdot (a^p)^n = a^{mq} \cdot a^{nq} = a^{mq+np}.$$

Mostrar a igualdade $(a^r)^s = a^{rs}$ é mostrar que $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}$ é a única solução positiva da equação $x^{nq} = a^{mp}$.

Ora,

$$x^{nq} = \left[(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = \left[(a^{\frac{m}{n}})\right]^{np} = a^{mp}.$$

Demonstrando (5): Sendo $r = \frac{p}{q}$, sabemos que $(a^r)^q = a^p$ e $(b^r)^q = b^p$. Então

$$[a^r \cdot b^r]^q = (a \cdot b)^p.$$

A equação acima apresenta $x = (a \cdot b)^r$ como única raiz positiva, isto é

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r.$$

Demonstrando (6): Seja $r = \frac{p}{q}$ com $p,\, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$.
Temos que $a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow (a^{\frac{p}{q}})^q < (b^{\frac{p}{q}})^q$ e, pela proposição 2.11, segue que

$$a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow (a^{\frac{p}{q}})^q < (b^{\frac{p}{q}})^q \Leftrightarrow a^p < b^p \Leftrightarrow a < b.$$

Demonstrando (7):

($\Rightarrow$) Seja $s = r + \epsilon$, onde $\epsilon \in \mathbb{Q}$ e $\epsilon > 0$.

Então $a^s = a^{r+\epsilon} = a^r \cdot a^\epsilon$. Como $a > 1$ e $\epsilon > 0$, segue que $a^\epsilon > 1$. Portanto $a^s > a^r$.

($\Leftarrow$) Considerando a desigualdade $a^s > a^r$ e supondo que $s \leq r$, teríamos, pela parte já demonstrada acima, que $a^s \leq a^r$. $\square$

Definição 3.2: Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < 1$ e $r \in \mathbb{Q}$. Definimos $c^r = \left(\frac{1}{c}\right)^{-r}$.

Se c é um número real que satisfaz $0 < c < 1$, os itens 4 e 5 da proposição 3.1 permanecem válidos e, além disso, também se verifica resultado análogo ao item 7, com a desigualdade invertida.

Proposição 3.3: Sejam $r,\, s \in \mathbb{Q}$ e $c,\, d \in \mathbb{R}$, tais que $0 < c < 1$ e $0 < d < 1$. Então:

- (1) $c^r \cdot c^s = c^{r+s}$
- (2) $(c^r)^s = c^{rs}$

- (3) $c^r \cdot d^r = (cd)^r$
- (4) $r < s \Leftrightarrow c^r > c^s$

Demonstrando (1): Pela definição 3.5, temos

$$c^r \cdot c^s = \left(\frac{1}{c}\right)^{-r} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{-s} = \left(\frac{1}{c}\right)^{-(r+s)} = c^{r+s}.$$

Demonstrando (2): De fato:

$$(c^r)^s = \left[\left(\frac{1}{c}\right)^{-r}\right]^s = \left(\frac{1}{c}\right)^{-rs} = c^{rs}.$$

Demonstrando (3):

$$c^r \cdot d^r = \left(\frac{1}{c}\right)^{-r} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^{-r} = \left[\left(\frac{1}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{d}\right)\right]^{-r} = \left[\frac{1}{cd}\right]^{-r} = (cd)^r.$$

Demonstrando (4):

$$c^r > c^s \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\right)^{-r} > \left(\frac{1}{c}\right)^{-s} \Leftrightarrow -r > -s \Leftrightarrow r < s.\square$$

Esse resultado tem objetivo análogo ao item 7 da proposição 3.1.

3.2 Expoentes irracionais

Na seção anterior, definimos o conceito de potenciação com expoentes racionais. O objetivo deste capítulo é estender a teoria para expoentes reais, isto é, munir o símbolo a^x, $x \in \mathbb{R}$, de algum significado consistente com o já estudado.

Sejam u e a números reais, com $a > 1$. O conjunto $E_u = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < u\}$ é um conjunto não vazio e limitado superiormente.

Considerando $r \in \mathbb{Q}$ com $r < u$, então $a^r \in E_u$. Observemos também que, se $r_0 > u$, $r_0 \in \mathbb{Q}$, segue que a^{r_0} é sempre uma cota superior para o conjunto.

Definição 3.4: Para todo $u \in \mathbb{R}$ definimos $a^u = \sup E_u$.

No caso em que $u \in \mathbb{Q}$, a definição acima nos fornece a mesma definição dada na seção anterior. De fato, sabemos que a^u é uma cota superior de E_u e, portanto, resta mostrar que, dado $\epsilon > 0$, $a^u - \epsilon$ não pode ser uma cota superior para E_u. Mostremos:

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{a^u}, \forall n \geq n_0.$$

Tal n_0 existe e vem do fato que $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ (ver [1]).

Isso implica que $|a^r - 1| < \frac{\epsilon}{a^u}$, qualquer que seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq r < \frac{1}{n_0}$. Seja s um racional satisfazendo $u - \frac{1}{n_0} < s < u$. Então $0 \leq u - s < \frac{1}{n_0}$ e

$$0 < a^u - a^s = a^s \cdot (a^{u-s} - 1) < \frac{\epsilon \cdot a^s}{a^u} < \epsilon.$$

Logo, temos que $a^u - \epsilon < a^s$, ou seja, existe um elemento de E_u maior do que $a^u - \epsilon$.

Proposição 3.5: Sejam a e b números reais maiores do que 1, $a \geq b$ e x, $y \in \mathbb{R}$. Então:

- (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- (2) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$, sendo x e y reais positivos
- (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
- (5) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, sendo $x > y$
- (6) $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- (7) $a < b \Leftrightarrow a^x < b^x$, $x > 0$.

Demonstrando (1): Sejam os conjuntos $E_x = \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}$ e $E_y = \{a^s : s < y, s \in \mathbb{Q}\}$. Queremos mostrar a igualdade

$$\sup\{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} \cdot \sup\{a^s : s < y, s \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^t : t < x + y, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Consideremos

$$A = \{r + s : r < x, s < y, r, s \in \mathbb{Q}\}$$

e

$$B = \{t \in \mathbb{Q} : t < x + y\}.$$

Pela construção feita, afirmamos que $A = B$. Com efeito, seja $t = r + s \in A$. Então $t < x + y$, isto é, $t \in B$. Reciprocamente, pelo fato de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $t - y < r < x$. Tomando $s = t - r$, temos que $r < x$, $s < y$ e $t = r + s \in A$.

Então

$$a^{x+y} = \sup\{a^t : t < x + y, t \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^{r+s} : r < x, s < y, r, s \in \mathbb{Q}\} =$$

$$\sup\{a^r \cdot a^s : r < x, s < y, r, s \in \mathbb{Q}\} = a^x \cdot a^y.$$

Demonstrando (2): Nesse caso, o objetivo é mostrar que

$$\sup\{(ab)^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} \cdot \sup\{b^s : s < x, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Sejam os conjuntos $E_1 = \{a^r \cdot b^r : r < x\}$ e $E_2 = \{a^r \cdot b^s : r < x, s < x\}$, com r, $s \in \mathbb{Q}$. Temos que $\sup E_1 = \sup E_2$. Com efeito, todo elemento de E_2 é limitado por um elemento de E_1 (proposição 3.7). Se $a^{r_1} \cdot b^{s_1} \in E_2$, então $a^{r_1} \cdot b^{s_1} \leq a^r \cdot b^r \in E_1$, onde $r = max\{r_1, s_2\}$. Segue então que $\sup E_2 \leq \sup E_1$. Como $E_1 \subset E_2$, temos que $\sup E_1 = \sup E_2$.

Então

$$(ab)^x = \sup\{(ab)^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^r \cdot b^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^r \cdot b^s : r < x, s < x, r, s \in \mathbb{Q}\} =$$

$$\sup\{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} \cdot \sup\{b^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = a^x \cdot b^x.$$

Demonstrando (3): Pelo fato de termos definido a^x somente quando $a > 1$, precisamos que $a^x > 1$ para dar sentido a $(a^x)^y$. Como $a^r < a^x$ para $0 < r < x$ e $a^r > 1$, segue que $a^x > a^r > 1$.

Sejam $E_1 = \{(a^x)^s : 0 < s < y, s \in \mathbb{Q}\}$ e $E_2 = \{(a^r)^s : 0 < r < x \, e \, 0 < s < y, r, s \in \mathbb{Q}\}$. Sendo $(a^x)^y = \sup E_1$, devemos mostrar primeiramente que $\sup E_1 = \sup E_2$. Como $(a^x)^y$ é uma cota superior para todo elemento de E_2, temos que $\sup E_2 \leq \sup E_1$. Tomando $(a^x)^{s_1} \in E_1$, tal que $0 < s_1 < y$, seja $s_2 \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $0 < s_1 < s_2 < y$ e $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{s_1}{s_2} < r_1 < x$. Segue que $a^{r_1 s_2} \in E_2$ e

$$a^{r_1 s_2} = (a^{\frac{r_1 s_2}{s_1}})^{s_1} > (a^x)^{s_1}.$$

Portanto, $\sup E_1 = \sup E_2$ e

$$\sup\{(a^r)^s, r < x, s < y, r, s \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^{rs} : r < x, s < y, r, s \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^t : t < xy, t \in \mathbb{Q}\} = a^{xy}.$$

Demonstrando (4): Seja $x_n \subset \mathbb{Q}$ monótona não-decrescente tal que $x_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. É bem conhecido (ver [2]) que $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Considerando o supremo do conjunto $\{\left(\frac{a}{b}\right)^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}$, temos:

$$\sup\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \frac{\sup\{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}}{\sup\{b^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}}.$$

Isto é:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Demonstrando (5): Sejam $x_n = x - \frac{1}{2n}$ e $y_n = y - \frac{1}{n}$ sequências convergindo para x e y, respectivamente. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

$$\frac{a^{x_n}}{a^{y_n}} = a^{x_n - y_n}.$$

Definindo $t_n = x_n - y_n$, vemos que $\lim_{n\to\infty} t_n = x - y$ e o resultado está demonstrado.

Demonstrando (6): Sejam x, y reais tais que $x < y$. Definindo $E_x = \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}$ e $E_y = \{a^s : s < y, s \in \mathbb{Q}\}$, vemos que $E_x \subset E_y$, tendo em vista que $x < y$. Consequentemente temos que $\sup E_x \leq \sup E_y$.

Escolhemos $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r_0 < y$, o que implica que $a^{r_0} < \sup E_y$. Contudo, também é verdade que $\sup E_x \leq a^{r_0}$, ou seja:

$$a^x = \sup E_x \leq a^{r_0} < \sup E_y = a^y.$$

Reciprocamente, se $a^x < a^y$ então $\sup E_x < \sup E_y$. Caso tenhamos $y \leq x$ então $E_y \subset E_x$, implicando que $\sup E_y \leq \sup E_x$, contradizendo nossa hipótese.

Demonstrando (7): O item 6 dessa mesma proposição nos diz que $a^r < a^x$ qualquer que seja r tal que $0 < r < x$. Em particular, temos que $a^x > 1$. Se $a < b$ então $\left(\frac{b}{a}\right)^x > 1$. Pela proposição 3.14, segue que $\frac{b^x}{a^x} > 1$, isto é, $a^x < b^x$. Reciprocamente, supondo $a^x < b^x$. Caso tenhamos $b \leq a$, necessariamente segue que $b^x \leq a^x$, gerando uma contradição.□

Proposição 3.6: Seja $a > 1$. Então para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Demonstração: Sendo $x > 0$, temos

$$a^{-x} = \sup\{a^r : r < -x, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^{-r} : r > x, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\left\{\frac{1}{a^r} : r > x, r \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$= \inf\left\{\frac{1}{a^r} : r < x, r \in \mathbb{Q}\right\} = \frac{1}{\sup\{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\}} = \frac{1}{a^x}.$$

O caso em que $x < 0$ segue com o mesmo raciocínio apresentado acima. Se $x = 0$, a definição 3.4 coincide com a definição 3.1, já que 0 é racional, ou seja:

$$a^{-0} = \frac{1}{a^0} = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < 0\}.$$

Como o conjunto acima é naturalmente limitado por 1, restar verificar que $1 - \epsilon$ não é o seu supremo, qualquer que seja $\epsilon > 0$.

Tomando a sequência $x_n = -\frac{1}{n}$, e considerando $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - a^{-\frac{1}{n}} < \epsilon$, o que mostra que $a^{-\frac{1}{n}} > 1 - \epsilon$. Logo $\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < 0\} = 1$. □

Definição 3.7: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$. Então $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Com a definição 3.10 todos os resultados já estabelecidos continuam válidos, salientando a troca no sinal da desigualdade no item 6 da proposição 3.8, ou seja, se $0 < a < 1$ e $x,\, y \in \mathbb{R}$, então

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y.$$

A título de ilustração dessa afirmação, temos a

Proposição 3.8: Supondo $0 < a < 1$ e $x,\, y \in \mathbb{R}$, então $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Demonstração: Utilizando a definição 3.10, temos

$$a^{x+y} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(x+y)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-y} = a^x \cdot a^y . \square$$

4 Funções exponenciais

Seguindo o roteiro do projeto 20.α de [1], mostraremos nesse capítulo uma caracterização da função exponencial.

Seja g uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não identicamente nula, e que satisfaz a equação funcional

$$(*) \qquad g(x+y) = g(x)\cdot g(y),\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

O objetivo deste capítulo é mostrar que g é da forma $g(x) = a^x$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.1: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não identicamente nula e satisfazendo $(*)$. Então:

- (1) g é contínua em todo ponto de $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ é contínua em $x = 0$.
- (2) Temos que $g(0) = 1$. Além disso, a função g é estritamente positiva.
- (3) Seja $a = g(1)$ (então $a > 0$) e $g(r) = a^r\ \forall r \in \mathbb{Q}$.
- (4) Quando g é contínua, a função g é estritamente crescente, constante ou estritamente decrescente, conforme se tenha $g(1) > 1$, $g(1) = 1$, ou $0 < g(1) < 1$, respectivamente.
- (5) Se $g(x) > 1$ para todo x em algum intervalo $]0,\delta[$, $\delta > 0$, então g é crescente e contínua em $\mathbb{R}$.
- (6) Se $a > 0$, então existe no máximo uma função contínua que satisfaz $(*)$, cujo valor em 1 é a.

Demonstrando (1): Supondo que g seja contínua em $x = 0$, mostraremos que é contínua em todo $p \in \mathbb{R}$. De fato, escrevemos

$$g(p+h) - g(p) = g(p+h) - g(p+0) = g(p)\cdot g(h) - g(p)\cdot g(0) = g(p)\cdot(g(h) - g(0)).$$

Como g é contínua em $x = 0$, concluímos que $\lim_{h\to 0}(g(h) - g(0)) = g(0) - g(0) = 0$. Logo

$$\lim_{h\to 0} g(p+h) - g(p) = 0,$$

o que nos diz que g é contínua em cada $p \in \mathbb{R}$.

Demonstrando (2): Notemos primeiramente que $g(x) \neq 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, supondo a existência de $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$, a equação

$$g(x_0 + y) = g(x_0) \cdot g(y)$$

afirmaria que $g(x_0 + y) = 0$, para todo real da forma $x_0 + y$, isto é, g seria a função identicamente nula.

Ainda utilizando $(*)$, temos que

$$g(x+0) = g(x) \cdot g(0) \Leftrightarrow g(x) = g(x) \cdot g(0) \Leftrightarrow g(0) = 1.$$

Finalmente, para mostrarmos que g é estritamente positiva, escrevemos

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Demonstrando (3): Mostraremos primeiramente que $g(n) = a^n$, supondo $n \in \mathbb{N}$. A veracidade está verificada para $n = 0$. Para $n = 1$, a igualdade se verifica pela definição.

Supondo que para $n = p$ valha a relação $g(p) = a^p$, mostraremos que $g(p+1) = a^{p+1}$. Ora

$$g(p+1) = g(p) \cdot g(1) = a^p \cdot a = a^{p+1} \Rightarrow g(n) = a^n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela equação funcional estabelecida na formulação do problema, é possível mostrar que $g(n) = a^n$ ainda que $n < 0$. De fato, para $m > 0$, como $g(0) = g(m + (-m)) = g(m) \cdot g(-m)$, obtemos

$$g(-m) = \frac{1}{g(m)} = \frac{1}{a^m} = a^{-m}.$$

Caso $r = \frac{m}{n}$ com $n \neq 0$, escrevemos $m = rn$. Como $(g(r))^n = g(rn) = g(m) = a^m$, segue que $g(r) = a^{\frac{m}{n}} = a^r$.

Demonstrando (4):

- $a > 1$: Sejam $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Considerando que $x_2 = x_1 + \delta$, $\delta > 0$, temos:

$$g(x_2) = g(x_1 + \delta) = g(x_1) \cdot g(\delta) > g(x_1).$$

Observe que necessariamente $g(\delta) > 1$. De fato, caso fosse verdade que $g(\delta) \leq 1$, então existiria uma bola aberta $B_\delta(\delta, r_\delta)$ tal que para x_δ racional positivo com $x_\delta \in B_\delta$ teríamos $g(x_\delta) \leq 1$, contradizendo o fato de que $g(x_\delta) = a^{x_\delta} > 1$.

- $a = 1$: Nesse caso $g(r) = 1^r = 1$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Pela continuidade de g, segue que $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $0 < a < 1$: Sejam $x_1 < x_2$ números reais, onde $x_2 = x_1 + \delta$, $\delta > 0$. Da igualdade

$$g(x_2) = g(x_1 + \delta) = g(x_1) \cdot g(\delta)$$

concluímos que $g(x_2) < g(x_1)$, tendo em vista que $g(\delta) < 1$, pela mesma justificativa do caso em que $a > 1$: caso $g(\delta)$ fosse maior ou igual a 1, existiria uma bola aberta $B_\delta(\delta, r_\delta)$ tal que para um elemento x_δ da bola, racional e positivo, valeria $g(x_\delta) \geq 1$, contradizendo o fato de que $g(x_\delta) = a^{x_\delta} < 1$.

Demonstrando (5): Considerando $0 < x_1 < x_2$, seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$\frac{x_2 - x_1}{n} < \delta.$$

A existência de n satisfazendo a desigualdade acima é justificada pelo fato de $\mathbb{N}$ ser Arquimediano.

Denotamos $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{n} \in \mathbb{R}$, de modo que $x_2 = x_1 + \lambda \cdot n$. Logo

$$g(x_2) = g(x_1) \cdot g(\lambda)^n$$

Como $\lambda \in]0, \delta[$, a hipótese nos garante que $g(\lambda) > 1$. Portanto, $g(x_2) > g(x_1)$. Os casos em que $x_1 < 0 < x_2$ e $x_1 < x_2 < 0$ são tratados de maneira análoga.

Em relação à continuidade, pela proposição 1, é suficiente mostrar essa característica em $x = 0$. Seja dado $\epsilon > 0$, queremos $\lambda_\epsilon > 0$ tal que $|g(x) - g(0)| < \epsilon$ sempre que $|x| < \lambda_\epsilon$. Tomando a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $|g(x_n) - g(0)| = |a^{\frac{1}{n}} - 1|$. No caso em que $a > 1$, a sequência $(a^{\frac{1}{n}})$ é decrescente e limitada.

Então, a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, temos que $|a^{\frac{1}{n}} - g(0)| < \epsilon$, $\forall n > n_0$, o que mostra a continuidade à direita de $x = 0$. O caso $x < 0$ é resolvido através da sequência $x_n = -\frac{1}{n}$, $n > 0$. Nessa situação observamos que $g(x_n) = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$, cujo limite também é igual a 1.

Demonstrando (6): Sejam f e g funções contínuas que satisfazem $(*)$. Sendo então $f(1) = g(1) = a$, queremos que $f(x) = g(x)$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que se $f(x) = g(x)$ para todo x racional, concluímos que $f \equiv g$. De fato, sejam $f(x) = b^x$ e $g(x) = a^x$. Tomando $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r = b^r$, segue que $\left(\frac{a}{b}\right)^r = 1 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. Caso houvesse algum número real λ tal que $f(\lambda) \neq g(\lambda)$ então em torno de alguma vizinhança de λ existiriam números racionais também satisfazendo a desigualdade. Com efeito, de acordo com a proposição 2.17 e supondo $f(\lambda) < g(\lambda)$, certamente existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Em particular, existe $x_0 \in \mathbb{Q} \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, tal que $f(x_0) < g(x_0)$. Absurdo, pois mostramos que as funções f e g coincidem no conjunto dos números racionais. $\square$

5 Funções logarítmicas

O objetivo deste presente capítulo consiste em caracterizar, a exemplo da função exponencial, a existência da função logarítmica. Para isso utilizamos como roteiro o projeto $20.\beta$ de [1].

Definimos o conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e a função $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ (não identicamente nula) que satisfaz a equação funcional

$$(**) \qquad h(x \cdot y) = h(x) + h(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+.$$

A respeito das hipóteses definidas, consideramos o conjunto dos seguintes resultados.

Proposição 5.1: Seja $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ não identicamente nula e satisfazendo $(**)$.

- (1) A função h é contínua se, e somente se, o é em $x = 1$.
- (2) h não pode ser definida em $x = 0$.
- (3) Sendo $x \in \mathbb{R}^+$ e $r \in \mathbb{Q}$ então $h(x^r) = r \cdot h(x)$.
- (4) Se $h(x) > 0$ em algum intervalo $]1, \delta[$, com $\delta > 1$, então h é estritamente crescente e contínua em $\mathbb{R}^+$.
- (5) Se h é contínua, $h(x) \neq 0$ se $x \neq 1$. Além disso, ou $h(x) > 0$ ou $h(x) < 0$ para $x > 1$.
- (6) Supondo $b > 1$, existe no máximo uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ que satisfaz $(**)$ e é tal que $h(b) = 1$.

Demonstrando (1): Primeiramente, observe que $h(1) = 0$ através da identidade $h(x) = h(x \cdot 1) = h(x) + h(1), \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

Supondo a continuidade de h em $x = 1$, escrevemos $h(x + \epsilon) - h(x) = h(1 + \frac{\epsilon}{x})$. Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} h(x + \epsilon) - h(\epsilon) = 0,$$

garantindo a continuidade de h para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstrando (2): De fato, $h(0) = h(0 \cdot x) = h(0) + h(x) \Leftrightarrow h(x) = 0, \forall\, x \in P$, contradizendo a definição dada.

Demonstrando (3): Primeiramente mostra-se que $h(x^n) = n \cdot h(x)$, com $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ o resultado é nitidamente válido, pois $h(x^1) = h(x) = 1 \cdot h(x)$. Supondo que a identidade seja verificada para $n = p$, mostraremos que $h(x^{p+1}) = (p+1) \cdot h(x)$. Com efeito:

$$h(x^{p+1}) = h(x^p \cdot x) = h(x^p) + h(x) = p \cdot h(x) + h(x) = (p+1) \cdot h(x).$$

O procedimento para verificar que $h(x^n) = n \cdot h(x)$ com n sendo um inteiro negativo é feito de maneira análoga. No caso em que $r \in \mathbb{Q}$, com $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$(x^r)^n = (x^{\frac{m}{n}})^n = x^m.$$

Então

$$h((x^r))^n = h(x^m) \Leftrightarrow n \cdot h(x^r) = m \cdot h(x) \Leftrightarrow h(x^r) = \frac{m}{n} \cdot h(x) \Leftrightarrow h(x^r) = r \cdot h(x).$$

Demonstrando (4): Sejam x_1 e x_2 números reais tais que $1 < x_1 < x_2$. Nessa situação podemos escrever $x_2 = k \cdot x_1$ com $k \in \mathbb{R}$ e $k > 1$. Pela equação funcional definida, temos que $h(x_2) = h(x_1 \cdot k) = h(x_1) + h(k)$. Como $h(k) > 0$, segue que $h(x_2) > h(x_1)$. Caso tenhamos $0 < x_1 < x_2 < 1$, vale que $\frac{x_2}{x_1} > 1 \Leftrightarrow h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$. Pelo fato de que $h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = h(x_2) - h(x_1)$, concluímos que h é crescente ainda que $0 < x_1 < x_2 < 1$.

Em relação à continuidade, vimos que é suficiente mostrá-la para $x = 1$. Supondo $x > 1$, definimos a sequência $x_n = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ a qual converge para 1. Dado $\epsilon > 0$, a diferença $|h(x_n) - h(1)| < \epsilon$ equivale a $|h(x_n| < \epsilon$. Como $h(x_n) = \frac{1}{n} \cdot |h(x)|$, a partir de um n_0 conveniente, temos que $|h(x_n)| < \epsilon$, o que mostra a continuidade da função em $x = 1$.

O caso em que $0 < x < 1$ é tratado de maneira análoga.

Demonstrando (5): Primeiramente se tem $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, pois h é injetora.

Pela proposição anterior, vimos que se $x \in]1, \delta[$, $\delta > 0$ e $h(x) > 0$ nesse intervalo, a função é estritamente crescente em P. Restringindo nossa análise ao conjunto $]1, \delta[$, é claro que $h(x) > 0$.

Sendo $h(x) < 0$ para $x > 1$, a função será estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e o resultado segue.

Demonstrando (6): Sejam h_1 e h_2 funções definidas como na hipótese da proposição, tais que $h_1(b) = h_2(b)$. Para $r \in \mathbb{Q}$, temos que $h_1(b^r) = h_2(b^r)$. De fato:

$$h_1(b^r) = r \cdot h_1(b) = r \cdot h_2(b) = h_2(b^r).$$

Suponhamos que exista $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $h_1(a) \neq h_2(a)$. Sem perda de generalidade, seja $h_1(a) < h_2(a)$. Como $\mathbb{N}$ é Arquimediano, escolhemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \cdot (h_2(a) - h_1(a)) > h_1(b).$$

Então

$$\frac{1}{n} \cdot h_1(b) = h_1(b^{\frac{1}{n}}) < h_2(a) - h_1(a).$$

Denotando $h_1(b^{\frac{1}{n}}) = k$, os números k, $2k$, $3k$... dividem o conjunto $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, cujos comprimentos são iguais a k. Como $k < h_2(a) - h_1(a)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot k$ está em $(h_1(a), h_2(a))$, isto é, $h_1(a) < m \cdot k < h_2(a)$. Logo

$$m \cdot k = m \cdot h_1(b^{\frac{1}{n}}) = h_1(b^{\frac{m}{n}}) = h_2(b^{\frac{m}{n}}).$$

Da última desigualdade, temos que

$$h_1(a) < h_1(b^{\frac{m}{n}}) = h_2(b^{\frac{m}{n}}) < h_2(a).$$

Como as funções, por hipótese, são crescentes, a desigualdade acima nos mostra que $a < b^{\frac{m}{n}}$ e $b^{\frac{m}{n}} < a$, gerando uma contradição. Logo $h_1(x) = h_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Por fim, mostraremos a existência de uma função satisfazendo $(**)$. Pelo fato da função exponencial $g(x) = a^x$ ser contínua e sobrejetora em $\mathbb{R}^+$, a mesma admite inversa $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, a qual denotaremos por $h(y) = \log_a y$. Em símbolos, temos

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x.$$

Mostraremos que $h(y) = \log_a(y)$ cumpre $(**)$. Com efeito, sejam y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^+$. Pela definição da função inversa, temos que $\log_a(y_1) = x_1$ e $\log_a(y_2) = x_2$, com x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Segue que

$$a^{x_1} = y_1 \;\; e \;\; a^{x_2} = y_2.$$

Pelas propriedades já conhecidas da função exponencial, obtemos

$$a^{x_1 + x_2} = y_1 \cdot y_2,$$

isto é:

$$\log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2 = \log_a(y_1) + \log_a(y_2).$$

6 Referências

- [1] BARTLE, R.G. Introduction to Real Analysis, 2nd Edition. JOHN WILEY, 1976.
- [2] RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis. New York: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1953.
- [3] LIMA, E.L. Curso de Análise, volume 1, 11^a edição. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- [4] LIMA, E.L. Análise Real, volume 1, 2^a edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1993.
- [5] LIMA, E.L. Logaritmos, segunda edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [6] LIMA, E.L. A matemática do Ensino Médio, volume 1. Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, 9^a edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.