



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Transformação de Mobius no Plano Complexo

José Miguel Bezerra Filho

São José do Rio Preto

Dezembro - 2013

Transformação de Mobius no Plano Complexo

José Miguel Bezerra Filho

Orientador: Prof^o. Dr^o. Paulo Ricardo da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Dezembro - 2013

Bezerra Filho, José Miguel.

Transformação de Mobius no Plano Complexo / José Miguel

Bezerra Filho – São José do Rio Preto, 2013.

92 f. : il

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Trabalho de conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT– Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Números complexos 2. Transformações de Mobius. 3. Transformações no plano. I. Silva, Paulo Ricardo da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 511.2

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

ATESTADO DE APROVAÇÃO - DEFESA

ATESTAMOS que **JOSÉ MIGUEL BEZERRA FILHO**, RG 726.412 SSP/SP, defendeu, no dia 19/12/2013, a dissertação intitulada "Transformações de Mobius no Plano Complexo", junto ao Programa de Pós-graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, tendo sido "APROVADO".

Atestamos ainda que a obtenção do título dependerá de homologação pelo Órgão Colegiado competente.

São José do Rio Preto, 19 de dezembro de 2013.



ROSEMAR ROSA DE CARVALHO BRENA
Supervisor Técnico de Seção

Agradeço...

À minha esposa Edna pela paciência, e apoio permanente.

Ao professor Paulo Ricardo que cedeu gentilmente o material que serviu de ponto de partida para o desenvolvimento deste trabalho e prestou as orientações necessárias até chegar ao resultado final.

Aos professores e colegas de curso.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, iniciamos definindo os números complexos como pontos de um plano, suas diversas formas de representação, suas propriedades operatórias intrinsecamente relacionadas às propriedades operatórias de um grupo especial de matrizes de ordem 2 e com transformações no plano. Em seguida, a partir do significado geométrico dessas operações e conceitos, apresentamos algumas curvas do plano como subconjuntos especiais do plano complexo e na sequência, apresentamos algumas transformações do plano no plano enfatizando as transformações isomorfas e concluímos apresentando a Transformação de Mobius como uma síntese dos conceitos abordados. Apresentamos algumas propostas de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, as quais servirão para o aprofundamento da compreensão das ideias fundamentais, fixação da aprendizagem e motivação para estudos mais avançados em matemática.

Abstract

In this work, we study the set of complex numbers as points of the plane. We relate this set with the group of symmetric matrices of order 2. Moreover we study some transformations on the plane emphasizing the Mobius Transformation.

Sumário

1	Números Complexos	12
1.1	Aspectos Históricos	12
1.2	O plano de Argand-Gauss	16
1.3	A Forma Matricial de um Número Complexo	17
1.4	A Forma Algébrica de um Número Complexo	18
1.5	A Forma Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo	18
1.6	Propriedades Operatórias dos Números Complexos	20
2	Transformações no Plano Complexo	35
2.1	Translação	36
2.2	Rotação	36
2.3	Simetria ou Reflexão em Relação à Origem	36
2.4	Simetria ou Reflexão em Relação ao eixo OX	37
2.5	Simetria ou Reflexão em Relação ao eixo OY	37
2.6	Homotetia	37
2.7	Cisalhamento	38
2.8	Transformação Exponencial	38
2.9	Transformações Trigonométricas	39
2.10	A transformação Inversa	40
2.11	Transformação de Mobius	41
2.11.1	Projecção Estereográfica	46
2.11.2	Plano complexo estendido e esfera de Rieman	49
2.12	As tranformações de Schirnhausen	52

3	Alguns Subconjuntos Notáveis e Aplicações em \mathbb{C}	60
3.1	A Reta	60
3.2	A Parábola	62
3.3	A Circunferência	63
3.4	A Elipse	66
3.5	A Hipérbole	66
3.6	Usando a Forma Polar	69
4	Atividades para Sala de Aula Relacionadas a Números Complexos e Transformações	71
4.1	Operações com números complexos	71
4.2	Uso das transformações para representar movimentação no plano	73
4.3	Representação de algumas curvas algébricas no plano complexo	79
4.4	Uso de transformações do plano complexo para resolver equações polinomiais	84
5	Conclusão	90

Introdução

Neste texto apresentamos uma possibilidade de abordagem para o estudo dos números complexos, numa perspectiva geométrica e tendo em vista a motivação de estudos mais avançados de matemática.

O conceito de número complexo representa um divisor de águas entre a matemática primordial e a matemática moderna sintetizando as ideias da matemática básica. Deve, conseqüentemente, ser tratado com uma atenção especial no ensino de matemática, com o mesmo grau de importância que ocupa no cenário geral da matemática.

A nossa intenção é apresentar os números complexos como elo de ligação entre vários e importantes conteúdos de matemática da educação básica, como por exemplo, conjuntos numéricos, matrizes, funções, trigonometria, geometria plana e espacial, gráficos e curvas no plano entre outros. Estabelecer uma relação destes conteúdos entre si por meio dos números complexos, além de revelar a importância desse tema, ajuda a tornar os diversos conteúdos relacionados mais significativos, favorece o desenvolvimento das competências fundamentais relacionadas à aprendizagem matemática moderna e apresenta novas formas de abordagem para esse tema, muitas vezes, relegados a segundo plano, supostamente, por encontrar aplicação apenas em matemática mais avançada, prejudicando a formação matemática elementar.

Entendemos que a integração entre as diversas áreas da própria matemática propiciada pelo estudo dos números complexos pode aguçar as capacidades de raciocínio matemático e de apreciação desta disciplina além de propiciar uma certa concretude e aplicabilidade dos temas abordados em matemática em outras áreas. A integração entre os conteúdos matemáticos abre novas possibilidades de representação e resolução de certos problemas e favorece a própria aprendizagem de matemática, motiva o aprofundamento dos estudos na área e, conseqüentemente, promove a ampliação e aperfeiçoamento do conhecimento matemático.

O estudo dos números complexos, geralmente, é realizado de forma tão superficial que o estudante, às vezes, fica com a impressão que eles não servem para nada, quando na

realidade, as operações no plano complexo fornecem uma conexão da matemática com a realidade e abre novas possibilidades de pensar matematicamente. O estudo dos números complexos pode ser portanto, um fator de motivação para a aprendizagem matemática nas escolas de educação básica.

Conjuntos e subconjuntos do Plano Complexo são muito mais significativos e concretos que conjuntos na reta. No plano podemos desenhar e interpretar desenhos e gráficos, enquanto na reta não existe essa possibilidade. Funções do plano no plano complexo produzem efeitos visíveis, enquanto funções da reta real agem de forma invisível.

Também é nosso objetivo motivar os leitores a iniciar o estudo dos números complexos e, conseqüentemente, despertar o interesse para o estudo das transformações, das estruturas algébricas mais complexas e suas aplicações.

O plano complexo já vem de fábrica com estruturas que nos permitem operar com seus elementos, ou seja, com os pontos ou pares ordenados. Podemos então utilizar suas propriedades para resolver diversos tipos de problemas e até mesmo descobrir novas estruturas e operar sobre elas. Os números complexos, muito mais que um convite, representam a porta de entrada do estudante para o universo matemático do ponto de vista moderno.

Neste trabalho, iniciamos definindo os números complexos como pontos de um plano, suas diversas formas de representação, suas propriedades operatórias intrinsecamente relacionadas às propriedades operatórias de um grupo especial de matrizes de ordem 2 e com transformações no plano. Em seguida, a partir do significado geométrico dessas operações e conceitos, apresentamos algumas curvas do plano como subconjuntos especiais do plano complexo e na sequência, apresentamos algumas transformações do plano no plano enfatizando as transformações isomorfas e concluímos apresentando a Transformação de Mobius como uma síntese dos conceitos abordados.

No final apresentamos algumas propostas de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, as quais servirão para o aprofundamento da compreensão das idéias fundamentais, fixação da aprendizagem e motivação para estudos mais avançados em matemática.

Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Aspectos Históricos

Os números surgiram, sem dúvida, das observações, interações e busca de regularidades do homem primitivo em meio as suas experiências e vivências. Foram criados para responder às necessidades específicas dos povos primitivos.

Num primeiro estágio os números naturais eram mais que suficientes, pois, não haviam outras necessidades além da simples comparação e contagem nas sociedades tribais.

Hoje a base dez é uma unanimidade, mas nem sempre foi assim. Muitas bases numéricas diferentes foram utilizadas por diferentes povos. As bases numéricas surgiram de forma quase que intuitiva e foram empregadas para a representação numérica em praticamente todas as culturas. Os babilônicos, por exemplo, adotaram a base 60, os maias a base 20 e apenas os hindus e árabes, a base dez. Nos primórdios da matemática existiram muitas outras formas de representação numérica. A maioria dessas formas de representação numérica não sobreviveram aos desafios da sociedade moderna.

Com a evolução das formas de organização social surgiram novas demandas como a necessidade de representar quantidades não inteiras e negativas. Surgiram então as frações e os “números com sinais”. As frações tornaram possível a resolução e expressão matemática de problemas simples, como “se três pescadores conseguem pescar apenas um peixe trabalhando juntos, cada um terá direito a exatamente $\frac{1}{3}$ deste” e outros envolvendo os números negativos para indicar falta, profundidade, direção contrária, etc.

Para as sociedades primitivas, como os egípcios, babilônicos e mesopotâmicos, os números racionais positivos bastavam para representar qualquer tipo de quantidades existente no universo por eles perceptível.

Os pitagóricos chegaram a construir um sistema filosófico baseado na matemática dos números racionais para explicar o universo como relata Stewart(2007, p. 26-28). Construíram também um sistema religioso e uma sociedade secreta baseado nas suas crenças. No entanto, os próprios pitagóricos concluíram que o sistema por eles concebido era falho e precisava reformulações profundas. Eles descobriram números que não podem ser representados por frações. Depararam-se com a incomensurabilidade. Depararam-se com os números irracionais. Como não foram capazes de reformular o conceito de número de uma forma coerente com o sistema filosófico para incluir a incomensurabilidade, a sociedade secreta dos pitagóricos, tanto quanto o seu sistema filosófico entrou em colapso. Não obstante, sua influência permaneceu.

Os pitagóricos acreditavam, embora não tenham conseguido provar, que o universo pode ser entendido em termos de números naturais. Essa crença resultou de observações em música, matemática e astronomia. Por exemplo, os pitagóricos criaram instrumentos de cordas baseado na observação de que cordas vibrantes produzem tons harmoniosos quando as relações entre seus comprimentos são números inteiros, defendiam o atomismo de todas as coisas, a comensurabilidade, ou seja, que a medida de duas coisas de mesma natureza sempre corresponde a quantidades inteiras de uma mesma unidade de referência. Por exemplo, eles acreditavam que seria sempre possível estabelecer a medida de um segmento de tal forma que esse segmento coubesse uma quantidade inteira de vezes tanto na diagonal quanto no lado de um quadrado e isso não é verdade.

Os próprios pitagóricos descobriram que o universo não pode ser compreendido totalmente utilizando-se apenas números inteiros. Depararam-se com os números irracionais, provavelmente, ao tentar calcular o comprimento da diagonal de um quadrado de lado igual à unidade. É bastante impressionante, mas as antigas civilizações já estavam cientes da necessidade de números irracionais como $\sqrt{2}$.

Com Platão, no auge da civilização grega, passou-se a estabelecer uma relação entre número e geometria e então a representação matemática do universo conhecido até então

pode ser reestabelecida, pois qualquer número irracional positivo pode ser representado geometricamente. Começava a surgir, então, um novo conceito de número a partir da geometria. A idéia de número evoluiu, portanto, junto com a humanidade.

Foi a partir das diversas tentativas de salvar o ideal pitagórico de que seria possível expressar o universo em termos de números que nasceu a idéia de que o mundo pode ser compreendido por meio da matemática, uma idéia fundamental para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia modernas.

A conceitualização e formalização dos números só ocorreu, portanto, motivada pela evolução e aumento da complexidade da própria sociedade e dos problemas inerentes, relacionados à economia, tecnologia, ciência e a própria matemática.

Em diversas áreas, especialmente na física, engenharias e microeletrônica, mas principalmente na própria matemática, foram surgindo a necessidade de se operar com estruturas matemáticas mais gerais. Apenas os números já não são mais suficientes para dar conta da complexidade demandada pela sociedade moderna. A grande maioria dos problemas atuais que demandam matemática para sua resolução nem sequer são de natureza numérica e conseqüentemente, nem sequer podem ser expressos por números. Criaram-se então objetos matemáticos mais genéricos, como os números complexos, grupos e outras estruturas como os espaços vetoriais e métricos.

Heron de Alexandria foi um grande matemático grego e inventor como relata Boyer(1974, p.126). A ele é creditado a descoberta de uma fórmula para a área de um triângulo como uma função das medidas dos lados. Ele inventou diversos tipos de máquinas que funcionavam valendo-se das propriedades dos líquidos, inclusive o *Aeolípico*, o precursor da máquina a vapor e do motor a jato.

Referência às raízes quadradas de números negativos, já haviam ocorrido no trabalho de Heron, cerca de 60 dC. Heron deparou-se com eles, enquanto calculava volumes de sólidos geométricos.

No seu método para aproximar a raiz quadrada de um número, Heron efetivamente chegou muito próximo do conceito moderno de número complexo. É fascinante, mas os números complexos, realmente, foram utilizados, implicitamente, muito antes de sua introdução formal no século XVI.

Cerca de 200 anos mais tarde que Heron, Diofanto (cerca de 275 dC) também deparou-se com os números complexos resolvendo problemas simples de geometria como: encontre os lados de um triângulo retângulo de perímetro 12 unidades e sete unidades quadradas de área. Um problema semelhante foi apresentado por Cardano em 1545. Ele tentou encontrar dois números tais que a soma fosse 10 e o produto 40 obtendo $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.

A formalização conceitual dos números, frações e até mesmo dos números negativos, inicialmente, originaram-se da necessidade de resolver um problema prático específico. Os naturais para contagem, as frações para resolver problemas de partilha e os números negativos para representar dívidas, por exemplo. Não obstante, a consolidação conceitual e estabelecimento de um conjunto numérico, extrapola os problemas originários encontrando aplicação numa infinidade de outros problemas não apenas práticos mas também teóricos e conceituais inerentes à própria matemática.

Os conjuntos dos números inteiros racionais, irracionais e complexos é uma obra da matemática moderna, mas certamente, foram inspirados nos ideais pitagóricos e é o melhor resultado das inúmeras tentativas de matemáticos de diversas épocas em expressar o universo matematicamente.

Além desses conjuntos, inúmeros outros foram e ainda são formalizados continuamente e rigorosamente numa busca de expressar o universo e os fenômenos em termos matemáticos, resgatando, talvez ainda que inconscientemente, o ideal pitagórico de expressar o universo em números.

Todos esses objetos matemáticos são construções teóricas que em determinados momentos, situações pressupostos e objetivos, coincidem conceitualmente com determinadas partes específicas ou fenômenos do universo, mesmo que, de um ponto de vista muito específico. Ao longo deste trabalho pretendemos mostrar como a compreensão do conjunto dos números complexos é o primeiro e necessário passo para aquele que pretende iniciar o estudo da matemática moderna. O primeiro capítulo mostra como podemos relacionar o estudo das matrizes com o estudo dos números complexos. No segundo capítulo apresentamos o conceito de transformações, suas relações com as operações com números complexos, apresentamos a transformação de Mobius como uma composição de trans-

formações rígidas e como a expressão algébrica da projeção estereográfica e concluímos apresentando as transformações de Schirnhau e as possibilidades do seu emprego na resolução de equações polinomiais de grau arbitrário. No terceiro capítulo apresentamos as cônicas como subconjuntos de números complexos e a expressão dessas curvas na linguagem dos números complexos. Concluímos apresentando propostas de atividades com o objetivo de apresentar exemplos de situações que podem ser exploradas nas salas de aulas para proporcionar situações de aprendizagem que possam facilitar a aprendizagem dos conceitos fundamentais discutidos ao longo dos capítulos. As atividades são apenas pretextos para praticar e aprofundar a compreensão dos conceitos fundamentais apresentados. Estão focadas no desenvolvimento das habilidades fundamentais para iniciar o estudo das transformações no plano complexo e suas interpretações geométricas e visam o desenvolvimento da compreensão dos conceitos abstratos relacionados aos números complexos e as transformações geométricas no plano, ou seja, representam apenas uma sugestão, do nosso ponto de vista, de situações que podem ser utilizadas para facilitar a compreensão e atribuição de significados desses conceitos. Em muitos casos é recomendado a utilização de softwares como Maple, Mathematica, Mupad, Derive ou outros para realização das atividades de aprofundamento conceitual. Com a ajuda do computador as dificuldades operatórias ficam a cargo da máquina e deixam de ser um obstáculo à aprendizagem matemática propriamente dita.

1.2 O plano de Argand-Gauss

A partir das constatações pitagóricas de que existem números que não podem ser expressos como uma quantidade inteira de nenhum outro número racional, ou seja, a descoberta da incomensurabilidade, a geometria, aos poucos foi tomando o lugar dos números para modelar o universo e até mesmo os números passaram a ser representados geometricamente. Estabeleceu-se o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) como o conjunto que está em correspondência biunívoca com os pontos de uma reta. A cada ponto de uma reta, denominada Reta Real, corresponde um número denominado Número Real. Analogamente, definiu-se o conjunto dos números complexos (\mathbb{C}): cada Número Complexo

está em correspondência biunívoca com os pontos de um plano denominado “Plano de Argand-Gauss ” como mostra a figura 1.1. O ponto P corresponde ao número complexo z que representaremos apenas por z assim como fazemos com os números reais. Dessa maneira,

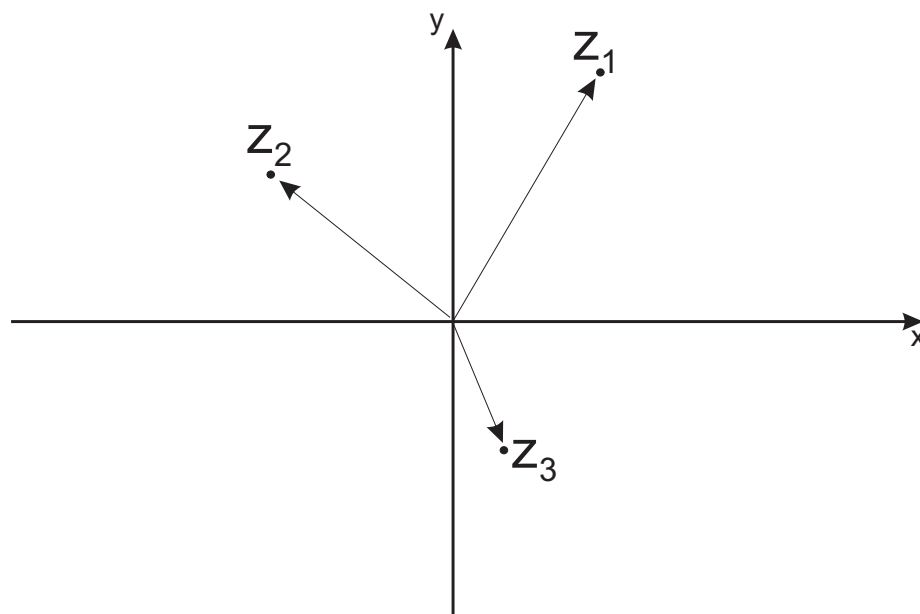


Figura 1.1: Plano Complexo.

os números complexos podem, portanto, ser perfeitamente determinados por pares ordenados de números reais ou vetores do \mathbb{R}^2 . Qualquer número complexo pode ser definido como um par ordenado ou vetor do plano cartesiano. Portanto $z = (x, y)$, onde x e y são números reais. Números complexos da forma $(0, y)$ são chamados de números imaginários puros e os da forma $(x, 0)$ números reais puros. Os números reais x e y na expressão $z = (x, y)$ são denominados partes real e imaginária de z , respectivamente, e escrevemos $Re(z) = x$, $Im(z) = y$.

Dizemos que dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ são iguais, sempre que e, somente se, eles têm as mesmas partes reais e imaginárias.

1.3 A Forma Matricial de um Número Complexo

Podemos também representar números complexos matricialmente utilizando matrizes

2×2 . Essa forma de representação dos números complexos pode ser muito interessante, considerando que esse grupo de matrizes já possuem as operações de adição e multiplicação definidas.

$$z = (x, y) \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}.$$

1.4 A Forma Algébrica de um Número Complexo

Fazendo

$$a = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos a forma algébrica de um número complexo a partir da sua forma matricial.

$$z = (x, y) \leftrightarrow a + ib.$$

Como x e y são números reais e estão em correspondência biunívoca com, a e b respectivamente, podemos então tomar a e b reais tais que $a = x$ e $b = y$ e definir algebricamente um número complexo como uma soma algébrica, cujas parcelas são constituídas por um número real e um produto de uma unidade imaginária i com um número real, embora isso só faça algum sentido do ponto de vista da notação matemática. Assim,

$$z = a + ib \longleftrightarrow z = x + iy \longleftrightarrow z = (x, y) \longleftrightarrow z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

1.5 A Forma Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo

Dado um número complexo na sua forma algébrica $z = a + bi$ representado geometricamente pelo ponto $P = (a, b)$ temos, conforme Carmo(2009), que

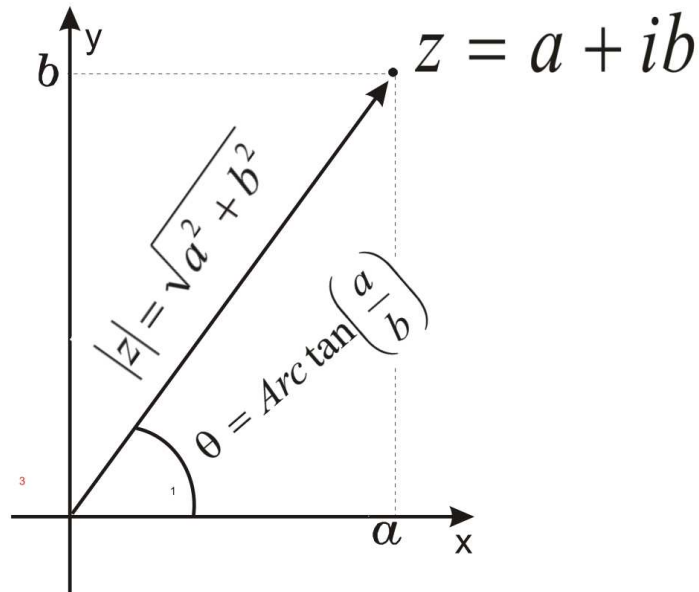


Figura 1.2: Forma Trigonômica de um Número Complexo

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta$$

e

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\sin\theta.$$

Assim,

$$z = a + ib \Rightarrow$$

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \Rightarrow$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Podemos, dessa forma, escrever qualquer número complexo na sua forma trigonométrica ou polar, que depende apenas de dois parâmetros: o módulo e o argumento.

Matricialmente,

$$z = |z| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

onde θ corresponde ao ângulo, ou argumento, entre o vetor z e o eixo x e

$$|z|^2 = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}$$

corresponde ao módulo de z , ou seja, a distância de $z = (x, y)$ até a origem do plano complexo. Observe que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$e$$
$$\theta = \text{Arctan} \left(\frac{x}{y} \right).$$

Assim qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser representado na sua forma polar.

Uma outra notação muito conveniente, consequência da identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

muito utilizada para expressar um número complexo z na forma polar é

$$z = r e^{i\theta}$$

sendo r o módulo e θ o argumento. Adotar essa notação, em muitos casos pode facilitar os cálculos.

1.6 Propriedades Operatórias dos Números Complexos

Qualquer número complexo pode ser representado matricialmente por meio de uma matriz quadrada de ordem 2 que depende apenas de dois parâmetros. Assim, as operações com números complexos podem ser realizadas a partir da sua representação matricial.

Os números complexos herdam as propriedades operatórias das matrizes quadradas 2×2 que os representam, ou seja:

- a) A adição é comutativa e associativa, pois, dados

$$z_1 = \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix},$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} e$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} c_r & -c_c \\ c_c & c_r \end{bmatrix},$$

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2 , pois,

$$\begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_r + b_r & -(a_c + b_c) \\ a_c + b_c & a_r + b_r \end{bmatrix}.$$

Além disso, $z_1(z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, para quaisquer três números complexos z_1 , z_2 e z_3 , pois,

$$\begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_r + c_r & -(b_c + c_c) \\ b_c + c_c & b_r + c_r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_r + b_r & -(a_c + b_c) \\ a_c + b_c & a_r + b_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r & -c_c \\ c_c & c_r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_r + b_r + c_r & -(a_c + b_c + c_c) \\ a_c + b_c + c_c & a_r + b_r + c_r \end{bmatrix}.$$

c) O elemento neutro da adição é número complexo

$$z \leftrightarrow 0 + 0i \leftrightarrow (0, 0) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pois, quando somamos este número com qualquer número complexo

$$z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

obtemos sempre o próprio número complexo como resultado, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

c) A multiplicação é comutativa e distributiva em relação a adição, pois, dados três números complexos quaisquer

$$z_1 = \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix},$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix}$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} c_r & -c_c \\ c_c & c_r \end{bmatrix},$$

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2 , pois,

$$\begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_r b_r - a_c b_c & -(a_c b_r + b_c a_r) \\ a_c b_r + b_c a_r & a_r b_r - a_c b_c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

Temos também que $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ para quaisquer três números complexos z_1 ,

z_2 e z_3 , pois,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r + c_r & -(b_c + c_c) \\ b_c + c_c & b_r + c_r \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_r(b_r + c_r) - a_c(b_c + c_c) & -a_r(b_c + c_c) - a_c(b_r + c_r) \\ a_r(b_c + c_c) + a_c(b_r + c_r) & a_r(b_r + c_r) - a_c(b_c + c_c) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_r b_r - a_c c_c - a_c b_c + a_r c_r & -a_c b_r - b_c a_r - a_c c_r - c_c a_r \\ a_c b_r + b_c a_r + a_c c_r + c_c a_r & a_r b_r - a_c c_c - a_c b_c + a_r c_r \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_r b_r - a_c b_c & -a_c b_r - b_c a_r \\ a_c b_r + b_c a_r & a_r b_r - a_c b_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_r c_r - a_c c_c & -a_c c_r - c_c a_r \\ a_c c_r + c_c a_r & a_r c_r - a_c c_c \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r & -b_c \\ b_c & b_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_r & -a_c \\ a_c & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_r & -c_c \\ c_c & c_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d) O número complexo

$$z = 1 + 0i \leftrightarrow (1, 0) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é o elemento neutro da multiplicação, pois, quando multiplicado por qualquer número complexo

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

retorna o próprio número complexo como produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

e) Todo número complexo

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

possui um inverso aditivo ou simétrico dado por

$$-z = - \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix},$$

pois

$$z + (-z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

f) Todo número complexo não nulo

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \neq 0,$$

possui um inverso multiplicativo dado por

$$z^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix},$$

pois

$$z.z^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z.z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z.z^{-1} = \frac{|z|^2}{|z|^2} \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z.z^{-1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z \cdot z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A subtração de dois números complexos é definida como a adição do primeiro com o inverso aditivo do segundo. Dados

$$z_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \text{ e } z_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$z_1 - z_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_2 & b_2 \\ -b_2 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, o quociente entre dois números complexos pode ser definido como a multiplicação do primeiro pelo inverso multiplicativo do segundo, ou seja, dados

$$z_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \text{ e } z_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \begin{bmatrix} \frac{a_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} & \frac{a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} \\ -\frac{a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} & \frac{a_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ -a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 + b_1 b_2 \end{bmatrix}.$$

Para que exista o quociente entre dois números complexos é necessário, obviamente, que o divisor possua módulo não nulo para que possa existir um inverso multiplicativo, ou seja,

$$|z_2|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

É importante diferenciar a inversão algébrica da inversão geométrica. Dado um ponto P contido num círculo λ de centro O , o seu inverso geométrico segundo o polo O ou a circunferência λ é o ponto P' obtido da seguinte maneira: Traça-se por P uma reta r perpendicular a OP obtendo-se $Q = \lambda \cap r$ e em seguida traça-se por Q uma reta t tangente a λ obtendo P' . Para um ponto fora do círculo procedemos na ordem inversa.

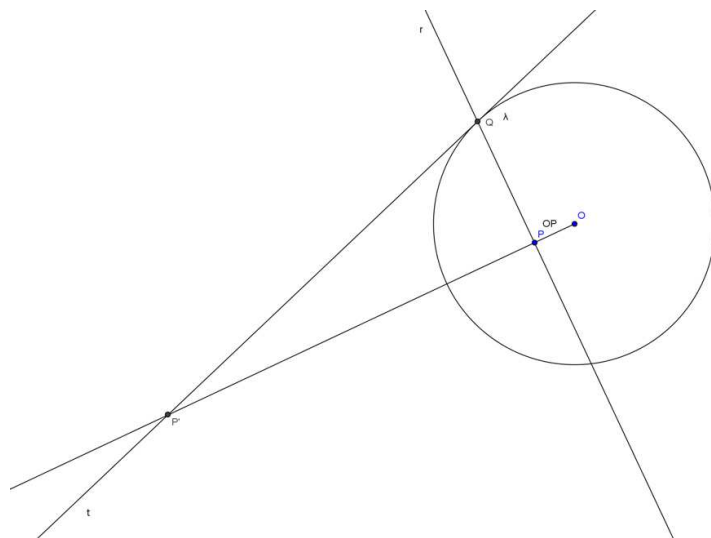


Figura 1.3: Inversão Geométrica.

Por meio de inversões geométricas retas que passam pelo polo e a própria circunferência de inversão são invariantes. Circunferências que passam pelo polo são transformadas em retas e retas e circunferências que não passam pelo polo são transformadas em circunferências.

A inversão geométrica no plano complexo em relação à circunferência unitária, corresponde a inversão multiplicativa seguida de reflexão em relação ao eixo x .

Convencionou-se que o zero seja levado ao infinito e vice-versa para que essa relação possa gozar de bijetividade.

No estudo dos números complexos adota-se, por padrão a circunferência unitária com centro na origem como circunferência de inversão e, conseqüentemente, a origem do sistema como polo. Utiliza-se o termo “inversão” como sinônimo de inversão multiplicativa. Mas é claro que a inversão geométrica também pode auxiliar na resolução de certos problemas e pode ser empregada na resolução de problemas envolvendo números complexos.

O inverso multiplicativo de um número complexo

$$z^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

pode ser representado mais simplesmente por

$$z^{-1} = \frac{1}{r^2} e^{i(-\theta)}.$$

Representando o inverso de um número complexo dessa forma fica mais fácil perceber que sob a inversão, um número complexo é refletido em relação ao eixo x e em seguida, contraído se $r > 1$ ou expandido se $0 < r < 1$, na razão inversa do seu módulo.

A circunferência unitária é invariante, como conjunto, sob a inversão pois, números complexos sobre a circunferência unitária, não sofrem alteração no módulo. No entanto, são refletidos em relação ao eixo x.

Do ponto de vista geométrico, as operações com números complexos estão associadas a uma ou mais movimentações ou transformações no plano. A soma de dois números ou vetores, $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ representa uma translação de z_1 na direção e segundo o módulo de $z_2 = (x_2, y_2)$, ou vice-versa, pois a adição é comutativa.

$$Soma(z_1, z_2) = Soma(z_2, z_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

A subtração de dois números complexos,

$$z_1 = (x_1, y_1) \text{ e } z_2 = (x_2, y_2),$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ou

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$$

corresponde, conseqüentemente, também, a uma translação no plano complexo. Numa subtração, o minuendo é deslocado na direção contrária do subtraendo segundo o seu módulo. Mas é importante observar que a subtração não é comutativa,

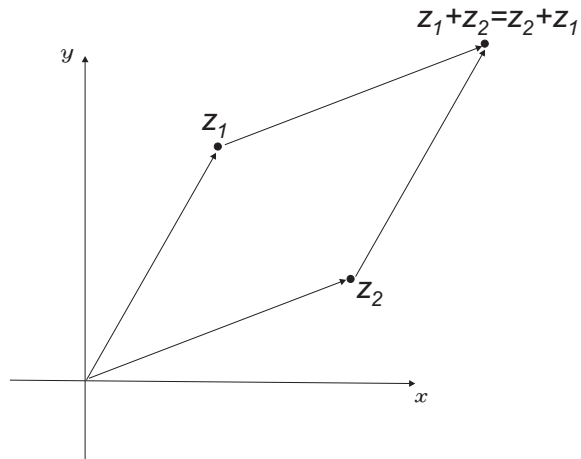


Figura 1.4: Adição no Plano de Argand-Gauss

$$z_1 - z_2 = z_2 - z_1 \Rightarrow$$

$$2z_1 = 2z_2 \Rightarrow$$

$$z_1 = z_2.$$

Logo,

$$z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1 \Rightarrow z_1 \neq z_2.$$

Graficamente, temos

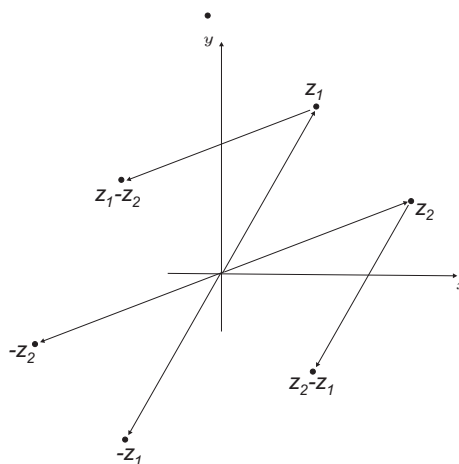


Figura 1.5: Subtração no Plano de Argand-Gauss

Multiplicar um número complexo qualquer z por um número real k corresponde a uma Homotetia no plano complexo. Se $|k| < 1$ teremos uma redução e se $|k| > 1$, uma ampliação.

Sendo $z = (x, y)$, $kz = (kx, ky)$ possuem a mesma direção de z . Essa transformação afeta apenas o módulo de z que fica multiplicado por k . Multiplicar z pelo simétrico de k , ou seja $-k$, resulta na simetria de kz em relação à origem do plano. Graficamente,

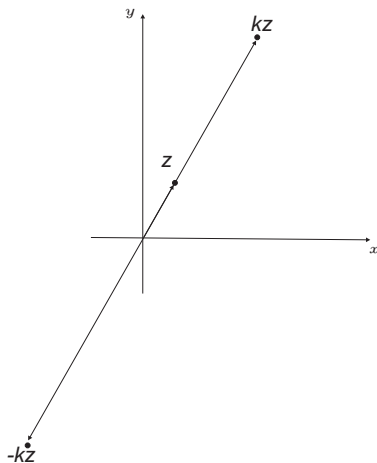


Figura 1.6: Produto por Escalar.

Matrizes do tipo de

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

são conhecidas como matrizes de rotação no plano, conforme explica Steinbruch(2001, p.201). Qualquer vetor, quando multiplicado por uma matriz desse tipo, sofre uma rotação, no sentido anti- horário de acordo com o argumento da matriz que o transforma. O argumento, que é o elemento diferenciador desses objetos matemáticos, ou seja, dessas matrizes, é a medida de um arco em radianos e, conseqüentemente, um número real.

A multiplicação de números complexos está, portanto, associada a uma rotação seguida de uma dilatação no plano complexo (ou vice-versa) pois, dados

$$z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = |z_1| e \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = |z_2| \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} |z_2| \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \\
z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \\
z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega & -\cos \theta \sin \omega - \cos \omega \sin \theta \\ \cos \theta \sin \omega + \cos \omega \sin \theta & \cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \\
z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| \begin{bmatrix} \cos(\omega + \theta) & -\sin(\omega + \theta) \\ \sin(\omega + \theta) & \cos(\omega + \theta) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Multiplicar dois números complexos z_1 e z_2 de argumentos θ e ω , que possuem módulos $|z_1|$ e $|z_2|$, corresponde a uma transformação composta, que consiste em dilatar z_1 segundo o módulo de z_2 e em seguida girar, no sentido horário, segundo um arco igual ao argumento de z_2 . Ou vice-versa, a uma dilatação de z_2 segundo o módulo de z_1 , seguida de uma rotação, no sentido horário, segundo um arco igual ao argumento de z_1 .

Graficamente,

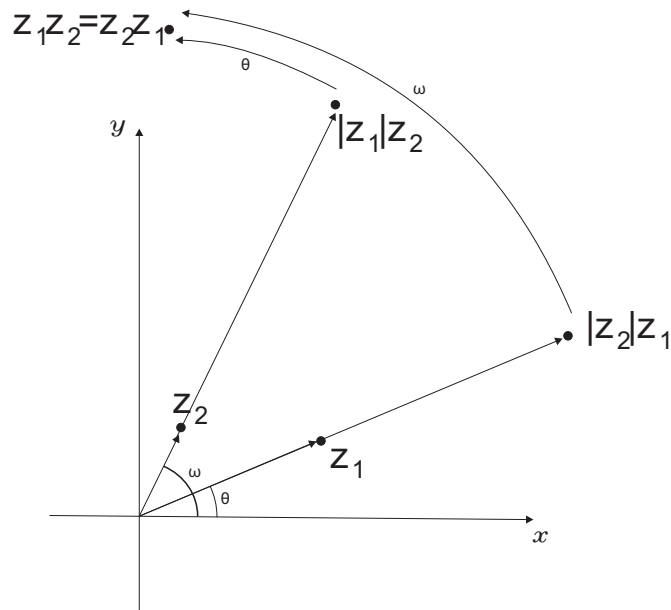


Figura 1.7: Multiplicação em \mathbb{C}

Para obter potências naturais de um número complexo z é conveniente representá-lo sob a forma matricial trigonométrica

$$z = |z| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

pois, como

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é uma matriz de rotação, quando multiplicamos qualquer número complexo por si mesmo n vezes, ou seja, quando elevamos z a um número natural n , z gira no plano no sentido horário, segundo um ângulo igual a $n\theta$, enquanto sofre uma dilatação de $|z|^{n-1}$.

Consequentemente,

$$z^n = |z|^n \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n \Rightarrow$$

$$z^n = |z|^n \begin{bmatrix} \cos (n\theta) & -\sin (n\theta) \\ \sin (n\theta) & \cos (n\theta) \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Girar n vezes, no sentido horário, um número complexo z segundo um ângulo θ é o mesmo que girar apenas uma vez esse mesmo número segundo um ângulo de medida $n\theta$ no mesmo sentido.

Podemos então definir z^n , a potência natural n -ésima de um complexo z , como a operação que consiste em girar z no sentido horário sob um ângulo de medida θ , n vezes no plano de Argand-Gauss e, ao mesmo tempo, aplicar a z uma dilatação de $|z|^{n-1}$ ou seja, dado um $n \in \mathbb{N}$ e um $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = |z|^n \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n,$$

ou, de forma equivalente,

$$z^n = |z|^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

Como a radiciação deve ser a operação inversa da potenciação, a raiz n -ésima de um complexo $z = |z| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ deve ser expressa por

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{n} & -\sin \frac{\theta}{n} \\ \sin \frac{\theta}{n} & \cos \frac{\theta}{n} \end{bmatrix}.$$

A radiciação de números complexos é uma operação sobrejetiva mas não injetiva, quer dizer, qualquer número complexo possui uma e apenas uma potência n -ésima, mas a recíproca não é verdadeira. Pode existir mais de uma raiz n -ésima para um mesmo número complexo z .

Na verdade existem, sempre, n raízes n -ésimas para um mesmo número complexo z , pois θ e $\theta+2k\pi$ são arcos cômugros e portanto, $\cos \frac{\theta}{n} = \cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ e $\sin \frac{\theta}{n} = \sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & -\sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & \cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

também representa raízes n -ésimas de z .

Existem, então, n raízes n -ésimas de qualquer complexo diferente de zero.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & -\sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ \sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & \cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix}, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Para $k \geq n$ os valores de $\cos \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ e $\sin \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ começarão a repetir-se. Portanto, um número complexo z possui, sempre, n e apenas n raízes n -ésimas distintas.

A identidade $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$, também conhecida por Lei de Moivre, bastante empregada para efetuar cálculos trigonométricos, representa a síntese das propriedades da multiplicação de números complexos.

Está fartamente ilustrada na literatura, inclusive em Ávila(2008, p. 21-22), a expansão de $\sin z$, $\cos z$ e e^z , $z \in \mathbb{R}$ em séries de potências:

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 - \frac{1}{11!}z^{11} + \frac{1}{13!}z^{13} - \frac{1}{15!}z^{15} + \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \frac{1}{8!}z^8 - \frac{1}{10!}z^{10} + \frac{1}{12!}z^{12} - \frac{1}{14!}z^{14} + \dots \\ e^z &= 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{6!}z^6 + \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{8!}z^8 + \dots\end{aligned}$$

Tomando como base as propriedades das potências de números reais e o desenvolvimento da exponencial real em séries de potências de números reais podemos definir a potência de um número complexo $w=x+yi$, para quaisquer x e y reais, como

$$\begin{aligned}e^w &\Rightarrow e^{x+yi} \Rightarrow e^x e^{yi} \Rightarrow \\ e^x \left(1 + yi + \frac{1}{2!} (yi)^2 + \frac{1}{3!} (yi)^3 + \frac{1}{4!} (yi)^4 + \frac{1}{5!} (yi)^5 + \frac{1}{6!} (yi)^6 + \frac{1}{7!} (yi)^7 + \frac{1}{8!} (yi)^8 \dots \right) &\Rightarrow \\ e^x \left(1 + yi - \frac{1}{2!} y^2 - i \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{4!} y^4 + i \frac{1}{5!} y^5 - \frac{1}{6!} y^6 - i \frac{1}{7!} y^7 - \frac{1}{8!} y^8 \dots \right) &\Rightarrow \\ e^x \left[\left(1 - \frac{1}{2!} y^2 + \frac{1}{4!} y^4 - \frac{1}{6!} y^6 - \frac{1}{8!} y^8 \dots \right) + i \left(y - \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{5!} y^5 - \frac{1}{7!} y^7 + \dots \right) \right] &\Rightarrow \\ e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y) .\end{aligned}$$

Portanto, dado um número complexo qualquer $z = a + bi$ de módulo $r = e^x$ e argumento $\theta = y$,

$$z = e^x (\cos \theta + i \sin \theta) = e^x e^{i\theta} = r e^{i\theta},$$

A identidade $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ é conhecida como relação de Euler e pode ser utilizada para expressar um número complexo na sua forma polar com algumas vantagens. Usando a forma polar e a notação sugerida pela identidade de Euler podemos escrever $z^n = r^n e^{in\theta}$ para as potências e $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{k\theta}{n}}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ para as raízes, muitas vezes mais adequadas do ponto de vista das aplicações.

Além do produto usual entre vetores existem ainda outros produtos como por exemplo

o produto interno e o produto vetorial. Dados dois vetores $v = (a, b)$ e $u = (c, d)$, o produto interno é definido por $vu = ac + bd$ e o produto vetorial definido por

$$v \times u = \begin{vmatrix} p & q & u \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

que representa um vetor no espaço tridimensional e perpendicular ao plano complexo sendo p, q e r vetores unitários, $p = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$ e $u = (0, 0, 1)$.

Esses produtos podem ser utilizados para obter o seno e cosseno do ângulo entre os vetores v e u , pois $\cos \theta = \frac{|uv|}{|u||v|}$ e $\sin \theta = \frac{|u \times v|}{|u||v|}$.

Capítulo 2

Transformações no Plano Complexo

Uma Transformação no Plano Complexo é uma função definida de \mathbb{C} em \mathbb{C} que estabelece uma relação entre dois subconjuntos de números complexos que podem ou não ser formas geométricas conhecidas, como retas, parábolas, círculos, elipses, hipérbolas, polígonos ou outras figuras do plano complexo menos conhecidas como as curvas elípticas, ou simplesmente, curvas abertas ou fechadas. Quando a relação é estabelecida biunivocamente temos um isomorfismo, ou seja, uma transformação que preserva a forma geral do objeto transformado.

Uma transformação isomorfa do plano complexo é uma transformação que deixa a imagem do objeto transformado com a forma parecida à do objeto original. Quando as distâncias entre os pontos correspondentes são preservadas temos uma isometria. São exemplos de transformações isométricas, ou seja aquelas que preservam as distâncias originais entre dois pontos nos objetos transformados, as Simetrias (rotação de 180 graus) ou Reflexões, Rotações e Translações.

De uma forma intuitiva, se uma transformação preserva a forma geral da figura transformada em relação à original ela é isomorfa, ou seja, temos um Isomorfismo. Além das rotações e translações, as dilatações ou homotetias e a inversão são exemplos de Transformações Isomorfas.

2.1 Translação

Uma translação no plano complexo é uma transformação que pode ser expressa por

$$T(z) = z + u \Rightarrow$$
$$T(z) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$
$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e \quad u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

onde u é uma constante e z variável complexa.

2.2 Rotação

Uma rotação no plano complexo é uma transformação expressa por

$$T(z) = \rho z \Rightarrow$$
$$T(z) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde ρ é uma constante complexa de módulo unitário z uma variável complexa.

2.3 Simetria ou Reflexão em Relação à Origem

Uma simetria no plano complexo é uma transformação que quando aplicada a um número complexo z retorna o número complexo $-z$, ou seja

$$T(z) = -z.$$

Uma simetria em relação à origem corresponde a uma rotação de π *radianos* em torno da origem, ou seja,

$$T(z) = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

2.4 Simetria ou Reflexão em Relação ao eixo OX

Em relação ao eixo OX , o reflexo de um complexo $z = (a, b)$, também denominado Conjugado de z , é o complexo $\bar{z} = (a, -b)$ que pode ser expresso pela transformação

$$T(z) = |z| z^{-1}$$

ou,

$$T(x, y) = (x, -y).$$

Matricialmente,

$$T \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right) = |z| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1}.$$

2.5 Simetria ou Reflexão em Relação ao eixo OY

Em relação ao eixo OY , o reflexo de um complexo $z = (a, b)$, é o complexo $z' = (-a, b)$. No plano complexo, a expressão dessa transformação é dada por

$$T(x, y) = (-x, y).$$

Matricialmente,

$$T \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{bmatrix} = -|z| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1}.$$

2.6 Homotetia

Uma homotetia no plano complexo é uma transformação expressa por

$$T(z) = kz$$

sendo k uma constante real e z variável complexa.

2.7 Cisalhamento

Um cisalhamento no plano complexo é uma transformação expressa por

$$T(x + yi) = (kx + yi)$$

ou

$$T(x + yi) = (x + kyi)$$

que consiste em ampliar ou reduzir apenas uma das componentes de um número complexo.

Multiplicar apenas uma das coordenadas de um número complexo por um número real corresponde, portanto, a um cisalhamento, ou seja, apenas uma das coordenadas x ou y é modificada enquanto a outra mantém-se inalterada. Uma parábola do tipo $y = ax^2$, por exemplo, pode ser obtida aplicando-se um cisalhamento a uma outra parábola do tipo $y = x^2$. Uma elipse, por exemplo, pode ser obtida pelo cisalhamento de um círculo ou vice-versa.

De forma geral qualquer elipse pode ser obtida aplicando-se um cisalhamento seguido de homotetia e translação ao círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, não necessariamente nessa ordem.

2.8 Transformação Exponencial

A partir da relação de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ podemos definir a função exponencial complexa da seguinte maneira:

$$\text{Exp} : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Exp}(z) = e^z, z = x + yi \Rightarrow$$

$$\text{Exp}(z) = e^x e^{yi} \Rightarrow$$

$$\text{Exp}(z) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

A função exponencial complexa portanto, pode ser vislumbrada como uma transformação que, dado um número complexo $z = x + yi$, deforma o número real x exponencialmente e em seguida gira o segmento determinado por e^x sobre a reta real segundo um arco de medida y sobre a circunferência unitária.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} \cos y \\ \sin y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), z = (x, y).$$

Assim fica mais intuitivo perceber que submetidos a ação da transformação exponencial números complexos (x, y) sobre uma mesma reta paralela ao eixo x e que, portanto possuem o mesmo argumento e portanto a mesma inclinação, são sempre transformados em pontos pertencentes a uma reta passando pela origem cuja inclinação corresponde a um arco de medida y . Enquanto pontos sobre uma mesma reta paralela ao eixo y são transformados em uma circunferência de raio e^x . Observa-se também que, submetidos a ação da transformação exponencial, números complexos sobre o eixo x resultam em números reais e números complexos sobre o eixo y resultam em números complexos sobre a circunferência unitária e portanto, suas coordenadas são senos e cossenos de números reais.

2.9 Transformações Trigonômétricas

A partir da transformação exponencial $Exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ podemos definir as transformações trigonométricas ou funções trigonométricas de variável complexa.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e^{z-x} = \cos y + i \sin y \\ e^{-z+x} = \cos y - i \sin y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{z-x} + e^{-z+x}}{2} = \frac{e^{x+iy-x} + e^{-x-yi+x}}{2} = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{z-x} - e^{-z+x}}{2i} = \frac{e^{x+iy-x} - e^{-x-yi+x}}{2i} = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \end{cases}$$

Como a função exponencial complexa estende o seu domínio ao conjunto dos números complexos e podemos expressar as funções seno e cosseno complexos em termos da função exponencial complexa da seguinte forma

$$\sin : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

$$\begin{aligned}\cos &: \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C} \\ \cos z &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}\end{aligned}$$

$$\tan : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}}{\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}} = -\frac{ie^{2iz} - i}{e^{2iz} + 1},$$

o domínio das funções trigonométricas podem também ser estendidos ao conjunto dos números complexos. As demais transformações trigonométricas em \mathbb{C} podem ser obtidas a partir de $\sin z$, $\cos z$ e $\tan z$ analogamente às definições em \mathbb{R} .

2.10 A transformação Inversa

A transformação inversa no plano complexo é definida por

$$T(z) = \frac{1}{z}.$$

Sob a inversão, $T(z) = \frac{1}{z}$ retas e círculos são transformadas em retas ou círculos.

As imagens dos pontos de retas que passam pela origem e circunferências com centro na origem, sob inversão, sofrem apenas reflexões em torno do eixo x e contração, portanto, formarão novamente retas passando pela origem e circunferências com centro na origem, respectivamente, pois sob reflexão e contração a forma geral desses objetos são sempre preservadas.

Uma reta que não passa pela origem, sob uma inversão é transformada em uma circunferência passando pela origem.

Sendo x, y, a, b e $c \neq 0$ números reais, a reta $ax + by = c$ formada pelos números complexos $z = x + yi$, obviamente, não passa pela origem e sua imagem sob inversão é formada pelos números complexos do tipo $w = u + vi$ onde

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u+vi} = \frac{u-vi}{u^2+v^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a \frac{u}{u^2+v^2} - b \frac{v}{u^2+v^2} = c \Rightarrow$$

$$au + bv = (u^2 + v^2) c \Rightarrow$$

$$cu^2 + cv^2 - au - bv = 0,$$

que representa uma circunferência passando pela origem.

Como as inversões são transformações bijetivas, se invertéssemos um círculo que passa pela origem, obteríamos também uma reta que não passa pela origem.

Círculos com centro fora da origem e que não passam pela origem sofrem apenas contração e reflexão em relação ao eixo x e, conseqüentemente, são transformados em outros círculos.

2.11 Transformação de Mobius

A transformação de Mobius é uma função complexa, ou seja, de variável complexa definida de \mathbb{C} em \mathbb{C} por

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ tal que } ad - bc \neq 0.$$

Uma transformação de Mobius é equivalente a uma composição de transformações mais simples do plano, pois,

para $c \neq 0$,

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow$$

$$M(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \Rightarrow$$

$$M(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \Rightarrow$$

$$M(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} \Rightarrow$$

$$M(z) = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right).$$

Fazendo,

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}$$

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

$$R(z) = \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) z$$

$$T_2(z) = z + \frac{a}{c}$$

Concluimos que para $c \neq 0$

$$M = T_1 \circ I \circ R \circ T_2.$$

Portanto, quando $c \neq 0$ uma transformação de Möbius é uma transformação composta por uma translação (T_1) seguida de uma inversão (I), seguida de uma rotação com dilatação (R) e, finalmente, por uma translação (T_2). Ou seja,

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right).$$

Se $c = 0$, $M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d}$, o que nos permite concluir que a Transformação de Möbius sempre poderá ser representada por meio de transformações isomorfas mais simples do plano no plano como inversões, dilatações, rotações e translações, sendo também, conseqüentemente, isomorfa, ou seja preserva a forma geral dos objetos transformados, mais especificamente, preserva os ângulos. Além disso é imediato concluir que possui uma inversa.

Dada uma transformação de Möbius

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right),$$

a sua inversa será dada por

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{M^{-1}(z')+\frac{d}{c}}\right) \Rightarrow \\
\frac{z'-\frac{a}{c}}{\frac{bc-ad}{c^2}} &= \left(\frac{1}{M^{-1}(z')+\frac{d}{c}}\right) \Rightarrow \\
\frac{1}{\frac{bc-ad}{(z'-\frac{a}{c})c^2}} &= \left(\frac{1}{M^{-1}(z')+\frac{d}{c}}\right) \Rightarrow \\
M^{-1}(z') &= \frac{bc-ad}{(z'-\frac{a}{c})c^2} - \frac{d}{c} = -\frac{dz'-b}{a-cz'} \Rightarrow \\
M^{-1}(z') &= -\frac{dz'-b}{cz'-a}.
\end{aligned}$$

Olhando para a Transformação de Mobius representada como uma composição, de transformações mais simples do plano complexo fica evidente que se $bc - ad = 0$ a transformação ficaria reduzida a uma transformação constante que levaria todos os pontos do plano a um único ponto.

Podemos também perceber diretamente da forma canônica que no caso de tomarmos $c = 0$, a transformação reduz-se ao tipo

$$M(z) = az + b,$$

ou seja, uma rotação com dilatação seguida de translação e, nesse caso, $M(\infty) = \infty$.

Para $c \neq 0$,

$$M(\infty) = \frac{a}{c}, M(0) = \frac{b}{d} \text{ e } M(z) = \infty \Rightarrow z = -\frac{d}{c}.$$

A mais simples de todas as transformações de Mobius é a Transformação Identidade $I(z) = z$ que possui todos os seus pontos fixos, ou seja, todos os pontos são levados a si mesmo. Se uma Transformação de Mobius possui pelo menos três pontos fixos, então essa é a Transformação Identidade.

Com exceção da transformação identidade, todas as outras transformações de Mobius possuem no máximo dois pontos fixos, ou seja, dois pontos invariantes cuja imagem é igual a si mesmo.

Para o caso linear

$$M(z) = az + b,$$

o único ponto fixo é, evidentemente, o infinito, pois, $M(\infty) = \infty$ e $z = \frac{b}{1-a}$, pois,

$$z = az + b \iff z = \frac{b}{1-a}.$$

O zero, obviamente, também não é um ponto fixo no caso linear. Então não existe nenhum caso em que poderia ocorrer de $c = 0$ e 0 ser ponto fixo.

Para o caso em que $c \neq 0$, $M(\infty) = \frac{a}{c}$, ou seja, o infinito não pode ser ponto fixo exceto no caso linear. Além disso,

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Os únicos valores que z pode assumir quando $c \neq 0$, para que seja ponto fixo, são as soluções da equação quadrática com coeficientes complexos $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Portanto, os únicos dois pontos fixos de $M(z)$ são as soluções de uma equação quadrática que, conforme mostra Andrescu e Andrica (1956, p. 15-16) tem no máximo duas soluções complexas.

Dados três pontos distintos quaisquer do plano complexo e suas imagens, tais que $z_i \neq M(z_i), i = 1, 2, 3$

$$z_1 = (x_1, y_1),$$

$$z_2 = (x_2, y_2) \text{ e}$$

$$z_3 = (x_3, y_3),$$

a transformação

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(z_2 - z_3)z + (z_1z_3 - z_1z_2)}{(z_2 - z_1)z + (z_1z_3 - z_2z_3)}$$

é certamente uma Transformação de Mobius com

$$a = z_2 - z_3, \quad b = z_1z_3 - z_1z_2, \quad c = z_2 - z_1 \quad \text{e} \quad d = (z_1z_3 - z_2z_3).$$

Além disso

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
T(z_1) &= \frac{0(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = 0, \\
T(z_2) &= \frac{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} = 1, \\
T(z_3) &= \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_3)}{0(z_2 - z_1)} = \infty.
\end{aligned}$$

Analogamente, conhecendo também a imagens $z'_1 = T(z_1)$, $z'_2 = T(z_2)$ e $z'_3 = T(z_3)$, podemos também supor que existe uma outra Transformação de $S(z')$ a partir de z'_1 , z'_2 e z'_3 .

$$\begin{aligned}
S(z') &= \frac{(z' - z'_1)(z'_2 - z'_3)}{(z' - z'_3)(z'_2 - z'_1)} \Rightarrow \\
S(z'_1) &= \frac{0(z'_2 - z'_3)}{(z' - z'_3)(z'_2 - z'_1)} = 0, \\
S(z'_2) &= \frac{(z'_2 - z'_1)(z'_2 - z'_3)}{(z'_2 - z'_3)(z'_2 - z'_1)} = 1, \\
S(z'_3) &= \frac{(z'_3 - z'_1)(z'_2 - z'_3)}{0(z'_2 - z'_1)} = \infty.
\end{aligned}$$

Observa-se que

$$T(z_1) = S(z'_1), T(z_2) = S(z'_2), T(z_3) = S(z'_3).$$

A transformação obtida pela composição de T e S^{-1} , mapeia os três pontos distintos z_1, z_2, z_3 em si mesmo.

$$\left. \begin{aligned}
T \circ S^{-1}(z_1) &= z_1, \\
T \circ S^{-1}(z_2) &= z_2, \\
T \circ S^{-1}(z_3) &= z_3.
\end{aligned} \right\} \Rightarrow T \circ S^{-1} = I \Leftrightarrow T(z) = S(z).$$

A composição $T \circ S^{-1}$ é certamente uma única Transformação de Möbius, pois, T e S^{-1} são ambas Transformação de Möbius. A única Transformação de Möbius que possui três pontos fixos é a Identidade I . Mas se a composição de uma função T com a inversa

de uma outra S transforma três pontos do plano complexo em si mesmo, ou seja, resulta na Transformação Identidade, então trata-se da mesma transformação, ou seja, $T=S$.

Portanto, uma transformação de Mobius fica inequivocamente definida por três pontos e suas imagens.

A única transformação de Mobius que aplicada aos pontos z_1, z_2, z_3 resulta em z'_1, z'_2, z'_3 pode então ser obtida algebricamente, pois,

$$\left\{ \begin{array}{l} M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \\ M^{-1}(z') = -\frac{dz'-b}{cz'-a} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} M(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} = \frac{(z_2-z_3)z+(z_1z_3-z_1z_2)}{(z_2-z_1)z+(z_1z_3-z_2z_3)} \\ z = M^{-1}(z') = -\frac{(z_1z_3-z_2z_3)z'-(z_1z_3-z_1z_2)}{(z_2-z_1)z'-(z_2-z_3)} \\ M(M^{-1}(z')) = \frac{\left(-\frac{(z_1z_3-z_2z_3)z'-(z_1z_3-z_1z_2)}{(z_2-z_1)z'-(z_2-z_3)} - z_1 \right) (z_2-z_3)}{\left(-\frac{(z_1z_3-z_2z_3)z'-(z_1z_3-z_1z_2)}{(z_2-z_1)z'-(z_2-z_3)} - z_3 \right) (z_2-z_1)} = z' = M(z). \end{array}$$

2.11.1 Projeção Estereográfica

De forma análoga aos círculos que podem ser transformados em retas por inversão no plano e vice-versa, esferas podem ser transformadas em planos por uma inversão geométrica no espaço e vice-versa .

Escolhendo-se um ponto qualquer de uma esfera de raio unitário que será denominado Polo Norte, conseqüentemente fica definido um Polo Sul, ou seja, o ponto simétrico ao Polo Norte em relação ao centro da esfera. Por um dos polos construímos uma nova esfera de mesmo raio e fazemos passar um plano contendo o círculo formado pela intersecção das duas esferas. O eixo norte-sul, desta forma, fica perpendicular ao plano contendo o círculo de intersecção das esferas como mostra a figura 2.1.

Traçando um plano pelos polos e conseqüentemente pelo centro das duas esferas, vamos obter duas circunferências de raio unitário, uma passando pelo centro da outra e a reta de inversão dessas circunferências que passa pelos dois pontos intersecção das circunferências secantes como mostra a figura 2.2.

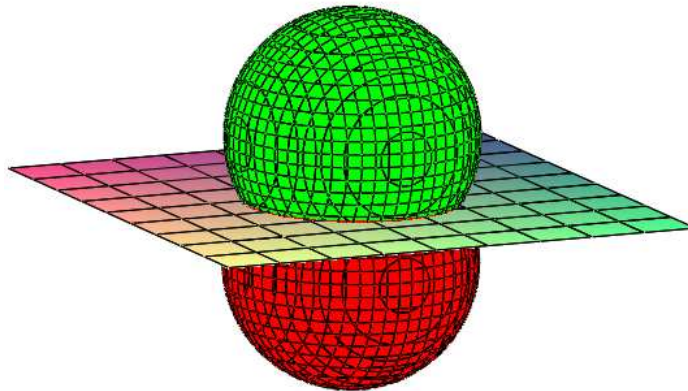


Figura 2.1: Esferas Secantes e Plano

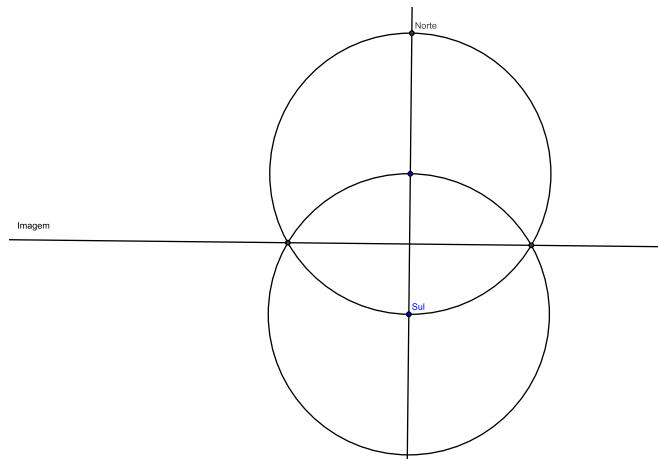


Figura 2.2: Reta de Inversão

Em cada uma dessas duas esferas, todas as circunferências que passam pelos dois polos são transformadas em retas sobre o plano por alguma inversão cuja circunferência de inversão, de raio unitário, está centrada em um dos polos.

Como o conjunto de todas as circunferências que passam pelos polos geram a esfera, ou seja, cada uma das esferas podem ser geradas pela rotação em torno do eixo polar de qualquer uma das circunferências que passam pelos polos, teremos também infinitas retas perpendiculares ao eixo polar, gerada por uma família de inversões com centro em um dos polos. O conjunto de todas essas retas poderia ser obtido pela rotação de qualquer uma delas tracionadas pelo eixo polar que é perpendicular a todas elas gerando assim o plano secante perpendicular ao eixo polar comum às esferas.

Dessa forma então, o plano secante às duas esferas que passa pela circunferência da interseção é gerado pela inversão de todas as circunferências que passam pelos polos Norte e Sul por meio inversões com centro no polo comum às duas esferas. A esfera pode ser, desta forma, transformada em um plano secante formado pela união das imagens de todos os pontos das circunferências.

A bijetividade das inversões garante também a bijetividade entre os pontos da esfera e do plano, tomando-se o cuidado de definir adequadamente as imagens dos polos.

A projeção estereográfica, analogamente a inversão, transforma a esfera unitária num plano, a menos de uma translação e, conseqüentemente, quaisquer objetos pertencendo à superfície esférica de raio unitário tangenciando a origem do plano complexo podem ser estereograficamente projetado sobre o plano complexo.

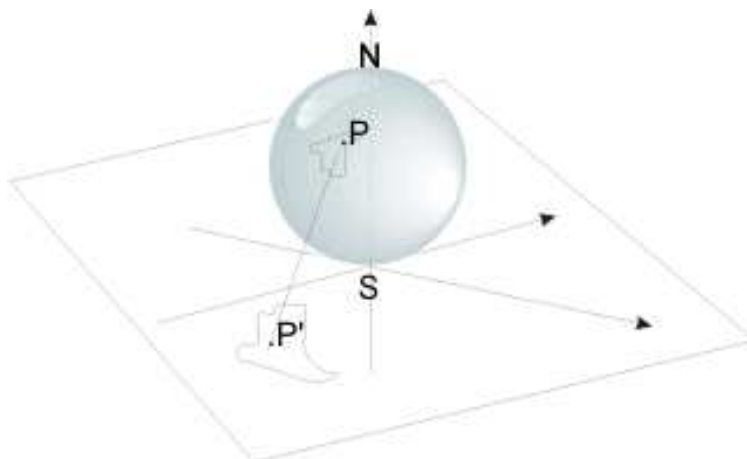


Figura 2.3: Projeção Estereográfica.

Com exceção dos pontos localizados nos polos, uma semirreta partindo do Polo Norte que atravessa a superfície esférica e o plano complexo como mostra a figura 2.3 estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos da superfície esférica e os pontos do plano tangente ao Polo Sul.

Com exceção dos polos, cada ponto da esfera está relacionado a um único ponto do plano e vice-versa. Fazendo a imagem do Polo Norte corresponder ao infinito e a imagem

do Polo Sul ao 0 obtém-se uma relação bijetiva entre os pontos da esfera e do plano complexo por meio de projeção estereográfica.

De um modo mais geral, dado um ponto qualquer P da esfera de raio unitário tangenciando a origem do plano complexo e fixando-se o Polo Norte N , o Polo Sul S , e suas respectivas imagens, a imagem de P por meio de projeção estereográfica será o ponto P' , intersecção da semirreta NP com o plano complexo. Todos os pontos de uma superfície esférica, podem ser projetados estereograficamente sobre o plano complexo.

A projeção estereográfica, assim como a inversão, transforma as retas e círculos da esfera unitária em retas círculos, elipses ou parábolas no plano complexo.

2.11.2 Plano complexo estendido e esfera de Rieman

Para atribuir uma significação ao plano complexo estendido, precisamos fazer uma experiência mental: acrescentar mais um ponto, o infinito, ao conjunto dos número complexos. Sabemos que o infinito não pode pertencer ao plano dos complexos. Chamaremos então esse novo conjunto de plano complexo estendido e simbolizamos por $\overline{\mathbb{C}}$.

Cada ponto desse novo espaço pode ser colocado em correspondência biunívoca com os pontos de qualquer esfera. A esfera de raio unitário sobre a qual projeta-se um a um, biunivocamente relacionados, o infinito e todos os pontos do plano complexo estendido e o representa canonicamente é a Esfera de Rieman. Assim podemos falar indistintamente da Esfera de Rieman e do plano Complexo Estendido e representar ambos por $\overline{\mathbb{C}}$ e operar sobre eles por meio dessa representação canônica pois entre eles existe uma relação de bijetividade.

Sabemos que todas as retas prolongam-se indeterminadamente até o infinito. Mas agora, para nós, o infinito é apenas mais um ponto do nosso Plano Complexo Estendido ou da nossa Esfera de Rieman. Então todas as retas encontram-se nesse ponto: no infinito, fora do plano complexo. O infinito não é um número complexo e não pode ser representado por um par ordenado de números reais se quisermos manter o nosso modelo coerente com as definições preexistentes.

Vamos escolher um ponto N que corresponderá ao infinito ou polo norte e o seu

simétrico S em relação ao centro da esfera ao polo sul. Os polos norte e sul da Esfera do plano complexo estendido estão, portanto, a uma distância infinitamente grande um do outro.

Vamos fazer coincidir com o polo norte, ou ponto N , os extremos de todas as retas que passam pela origem do plano complexo. A esfera assim obtida corresponderá ao plano complexo estendido, uma esfera tangente ao plano complexo que contém todos os números complexos e mais um ponto representando o infinito como exemplifica a figura 2.4.

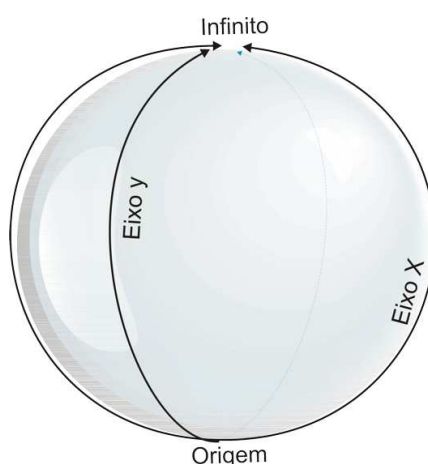


Figura 2.4: Esfera do Plano Complexo Estendido.

Na esfera do plano complexo estendido, evidentemente, todas as retas são círculos de raios infinitamente grandes que intersectam-se em dois pontos simétricos em relação ao centro da esfera: os polos norte e sul.

A esfera do plano complexo estendido, por ter diâmetro infinito, não está diretamente acessível ao nosso intelecto. Só podemos estudar objetos sobre o plano complexo estendido e compreender alguns dos seus elementos fazendo uma nova experiência mental: aplicando a ela uma contração, reduzindo-a a uma esfera de raio unitário, tangente à origem do plano complexo.

Todas as esferas são isomorfas, ou seja, sempre é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de duas esferas, independente do tamanho do diâmetro: basta imaginá-las como esferas concêntricas. Se duas esferas são concêntricas, então existe

uma semi-reta partindo do centro, relacionando de maneira biunívoca os pontos de cada uma delas. Se não são concêntricas podemos aplicar uma translação a uma delas e torná-las concêntricas. Então, sempre, podemos estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos de duas esfera por meio de uma função composta bijetiva. Sendo assim, podemos dizer que o plano complexo estendido também é isomorfo a uma esfera de raio unitário.

Podemos agora raciocinar sobre o plano complexo para estudar objetos contidos no Plano Complexo Estendido ou na Esfera de Rieman, assim como algumas propriedades desses objetos pois o plano complexo possui todos os elementos desses espaços, com exceção do infinito mas apresenta a grande vantagem de apresentar-se planejado e mais facilmente compreensível à inteligência humana.

Todos os subconjuntos do plano complexo estendido possuem um correspondente isomorfo sobre a superfície esférica de raio unitário e vice-versa. Por meio de projeção estereográfica podemos projetar todos esses pontos sobre o plano complexo fazendo o polo norte corresponder ao infinito.

Assim podemos acessar, indiretamente, os objetos matemáticos contidos na esfera do plano complexo estendido trabalhando sobre o nosso velho e conhecido plano complexo onde já temos uma certa intimidade.

A Transformação de Mobius é, exatamente, a transformação que projeta estereograficamente subconjuntos da Esfera de Rieman no Plano Complexo, como esclarece Olsen(2010).

Podemos pensar na Transformação de Mobius como uma transformação composta que contrai as formas geométricas contidas no plano complexo estendido trazendo-as para a circunferência de raio unitário e em seguida projeta-as estereograficamente sobre o plano complexo. Consequentemente, a Transformação de Mobius herda as propriedades da projeção estereográfica.

Mas podemos também estudar, de forma mais conveniente, a Transformação de Mobius, trabalhando apenas no plano complexo. Isso é possível porque, exceto o infinito, entre o plano complexo e a esfera de Rieman existe um homeomorfismo, ou seja, é possível identificar cada ponto do plano complexo com os pontos da Esfera de Rieman por meio de transformação bijetiva.

Então aquela condição inicial de que o plano complexo teria a forma de uma esfera nem era absolutamente necessária. Quem sabe o Plano Complexo Estendido não possa ter a forma de uma casca de ovo? Nunca saberemos. Mais isso não vai afetar muito as nossas vidas. Afinal já pensamos que a terra era plana depois que era uma superfície esférica perfeita e depois descobrimos que havia um achatamento nos polos e isso não modificou muito a nossa vida. Mas agora pelo menos conhecemos um modelo geométrico que nos permite acessá-lo e compreender algumas de suas propriedades. Então será que existem outros modelos para o plano complexo também? Claro que sim. Mas isto já é outra história.

E se, ao invés de acrescentar o infinito ao plano complexo a fim estabelecer a bijetividade tivéssemos suprimido o zero? Afinal de contas o zero é uma invenção bastante recente tendo em vista os primórdios do desenvolvimento matemático. O modelo geométrico para um espaço assim seria o Toro. Aquela forma geométrica parecida com biscoito de polvilho, com a mesma forma das câmaras de ar dos pneus de automóveis. Porquê? Oras para suprimir o infinito e o zero do Plano Complexo Estendido podemos estabelecer uma transformação desse espaço nele mesmo de tal forma que o zero seja ponto fixo e que o infinito seja levado ao zero. Pense numa bolha de sabão obtida colando os dois polos de um esfera. Depois eliminamos também o zero. Obtemos assim um grupo, mas isto também já é outra história.

2.12 As transformações de Schirnhausen

Uma transformação, de Mobius ou não, é denominada transformação de Schirnhausen se ela pode ser utilizada para simplificar uma equação polinomial. A transformação

$$T(z) = z + u,$$

sendo u uma constante e z variável complexa é o exemplo mais trivial de transformação de Schirnhausen.

Dada uma equação do segundo grau $az^2 + bz + c = 0$ com variável complexa, sempre existe uma transformação $T(z) = z + u$ que a reduz à forma $Az^2 = B$, pois $y = ax^2 + bx + c$

difere de $y = Ax^2 - B$ apenas por uma translação horizontal, ou seja, paralela ao eixo x . Trata-se, obviamente de uma transformação de Mobius que, conseqüentemente, não altera a forma geral da parábola que está sendo transformada, pois a transformação de Mobius é uma transformação isomorfa.

Então,

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= (x, y) + (u_1, u_2) = (x', y') \Rightarrow \\
 T^{-1}(x', y') &= (x', y') - (u_1, u_2) = (x, y) \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' \\ \lambda(x')^2 - \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, x' \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} x \\ ax^2 + bx + c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' - u_1 \\ \lambda(x')^2 - \beta - u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 a(x' - u_1)^2 + b(x' - u_1) + c &= \lambda(x')^2 - \beta - u_2 \Rightarrow \\
 a(x')^2 - 2ax'u_1 + bx' + au_1^2 - bu_1 + c - (\lambda(x')^2 - \beta - u_2) &= 0 \Rightarrow \\
 a(x')^2 - \lambda(x')^2 - 2au_1x' + bx' + c + \beta + u_2 - bu_1 + au_1^2 &= 0 \Rightarrow \\
 (a - \lambda)(x')^2 - (2au_1 - b)x' + (c + \beta + u_2 - bu_1 + au_1^2) &= 0.
 \end{aligned}$$

Basta tomarmos

$$A = a - \lambda, \quad 2au_1 - b = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{b}{2a}$$

e

$$-B = c + \beta + u_2 - bu_1 + au_1^2$$

para obtermos a forma simplificada, ou seja, $A(x')^2 = B$.

De forma geral uma transformação de Mobius do tipo

$$M^{-1}(x, y) = (x, y) - \left(\frac{b}{2a}, u_2\right)$$

transforma uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com a , b e c constantes e x uma variável complexa, numa outra mais simples do tipo $Ax^2 = B$. A transformação inversa $M(x, y) = (x, y) + \left(\frac{b}{2a}, u_2\right)$ permite enviar propriedades e conclusões obtidas, de volta ao referencial inicial.

Vamos obter a solução geral da equação $ax^2 + bx + c = 0$ empregando transformação de Schirnhausen.

Sendo $y = ax^2 + bx + c$,

$$\begin{aligned} M(x, y) = (x, y) + \left(\frac{b}{2a}, u_2\right) &\Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ax^2 + bx + c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{2a} \\ u_2 \end{bmatrix} &\Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y' - u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - \frac{b}{2a} \\ ax^2 + bx + c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quando $y' - u_2 = 0$ vamos obter

$$\begin{aligned} a\left(x' - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x' - \frac{b}{2a}\right) + c &= 0 \Rightarrow \\ a(x')^2 &= \frac{1}{4a}b^2 - c \Rightarrow \\ x' &= \sqrt{\frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

Lembrando que as raízes quadradas de um número complexo são sempre pares de números z_1 e z_2 localizadas numa mesma circunferência centrada na origem que obedecem a relação $z_2 = e^{\pi i} z_1 = -z_1$ obtemos $x' = \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{c}{a}}$.

Aplicando agora a transformação inversa $M^{-1}(x, y) = (x, y) - \left(\frac{b}{2a}, u_2\right)$ podemos obter a solução no referencial inicial.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{c}{a}} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{2a} \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ x &= \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2}b^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a} \Rightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Portanto a solução geral de uma equação quadrática corresponde a um número complexo $z = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, u_2\right)$.

Vamos obter agora uma transformação de Schirnhausen que simplifica uma equação de variável complexa do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Infelizmente essa transformação já não pode ser totalmente expressa por uma transformação de Möbius. Mas ainda podemos utilizar uma transformação do tipo $M(z) = z + v$, para eliminar o termo de grau dois pois, sendo

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ e } y' = A(x')^3 - B,$$

$$\begin{aligned} M(z) &= z + v \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ A(x')^3 - B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - v \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A(x')^3 - B = a(x' - v)^3 + b(x' - v)^2 + c(x' - v) + d \Rightarrow$$

$$A(x')^3 - B - (-av^3 + 3av^2x' + bv^2 - 3av(x')^2 - 2bv x' - cv + a(x')^3 + b(x')^2 + cx' + d) = 0$$

ou seja

$$(A - a)(x')^3 + (3av - b)(x')^2 + (2bv - c - 3av^2)x' + av^3 + cv - d - B - bv^2 = 0$$

Para que a simplificação ocorra totalmente envolvendo apenas translação é necessário que

$$\begin{cases} 3av - b = 0 \\ 2bv - c - 3av^2 = 0 \\ v = \frac{b}{3a} \end{cases} \Rightarrow$$

ou

$$2bv - c + bv = 0 \Rightarrow$$

$$v = \frac{c}{3b}.$$

Isso significa que uma tal simplificação ocorreria satisfatoriamente apenas para as equações $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tais que $\frac{c}{3b} = \frac{b}{3a}$, ou seja, $c = \frac{b^2}{3a}$.

Mas ainda podemos utilizar a transformação $T^{-1}(z) = z - \frac{b}{3a}$ a fim de eliminar o termo de grau dois.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{b}{3a} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' - \frac{b}{3a} \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \end{bmatrix} \Rightarrow \\ y' &= a \left(x' - \frac{b}{3a}\right)^3 + b \left(x' - \frac{b}{3a}\right)^2 + c \left(x' - \frac{b}{3a}\right) + d \Rightarrow \end{aligned}$$

$$d + cx' + a(x')^3 + \frac{2}{27a^2}b^3 - \frac{1}{3a}b^2x' - \frac{1}{3a}bc$$

$$y' = a(x')^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x' + \frac{2}{27a^2}b^3 + d - \frac{1}{3a}bc.$$

Fazendo $p = \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)$ e $q = \frac{2}{27a^3}b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2}bc$, obtemos

$$y' = x'^3 + px' + q$$

que pode ser obtida a partir de uma parábola, pois pode ser transformada na sua equação resolvente de grau dois mediante a utilização da transformação de Schirnhausen

$$T(z) = z - \frac{p}{3z} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' - \frac{p}{3x''} \\ (x')^3 + px' + q \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$y' = \left(x'' - \frac{p}{3x''}\right)^3 + p \left(x'' - \frac{p}{3x''}\right) + q \Rightarrow$$

$$y' = (x'')^3 - \frac{1}{27} \frac{p^3}{(x'')^3} + q.$$

$$y' = 0 \Rightarrow (x'')^6 + q(x'')^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

$$T(z) = \sqrt[3]{z} \Rightarrow$$

$$x'' = \sqrt[3]{x'''}$$

$$(x''')^2 + qx''' - \frac{p^3}{27} = 0$$

que é uma equação do segundo grau cuja solução é

$$x''' = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}.$$

Realizamos uma transformação composta $x \Rightarrow x' \Rightarrow x'' \Rightarrow x'''$ e obtemos o valor de x''' . Basta agora realizar a transformação inversa $x''' \Rightarrow x'' \Rightarrow x' \Rightarrow x$ a fim de obter o valor de x .

$$\begin{aligned} x'' &= \sqrt[3]{x'''} \Rightarrow \\ x'' &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} \Rightarrow \\ x' &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}} \end{aligned}$$

e, finalmente

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{b}{3a} \Rightarrow \\ x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}} - \frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Fazendo as substituições

$$p = \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right) \text{ e } q = \left(\frac{2}{27a^3} b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2} bc \right)$$

podemos obter expressão da solução exata (e quase inútil) de uma equação de terceiro grau em função dos coeficientes utilizando apenas operações elementares, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{\left(\frac{2}{27a^3} b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2} bc\right)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{27a^3} b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2} bc\right)^2 + \frac{4\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)^3}{27}}} - \\ &\frac{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)}{3 \sqrt[3]{-\frac{\left(\frac{2}{27a^3} b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2} bc\right)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{27a^3} b^3 + \frac{d}{a} - \frac{1}{3a^2} bc\right)^2 + \frac{4\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)^3}{27}}}} - \frac{b}{3a}. \end{aligned}$$

A solução geral da equação de quarto grau também pode ser obtida apoiando-se em transformações de Schinhausen.

Qualquer equação polinomial do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

pode ser reduzida à forma incompleta

$$x'^4 + px'^2 + qx' + r = 0.$$

Para isso, inicialmente dividimos todos os termos por a e em seguida empregamos a transformação de Schirnhausenen

$$T(z) = z - \frac{b}{4} \Rightarrow \\ x = x' - \frac{b}{4}.$$

Após essa transformação, devemos fatorar $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ em fatores de segundo grau da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (x'^2 + \alpha x' + \beta)(x'^2 - \alpha x' + \gamma) &= x'^4 + px'^2 + qx' + r = 0 \Rightarrow \\ +x'^4 + (\beta + \gamma - \alpha^2)x'^2 + (\alpha\gamma - \alpha\beta)x' + \beta\gamma &= x'^4 + px'^2 + qx' + r \Rightarrow \\ \begin{cases} \beta + \gamma - \alpha^2 = p \\ \alpha\gamma - \alpha\beta = q \\ \beta\gamma = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = p + \alpha^2 \\ \gamma - \beta = \frac{q}{\alpha} \\ \beta\gamma = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{q}{\alpha} + p) \\ \beta = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{q}{\alpha} + p) \\ \beta\gamma = r \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(\alpha^2 + \frac{q}{\alpha} + p)(\alpha^2 - \frac{q}{\alpha} + p) = 4r \Rightarrow$$

$$\alpha^4 - \frac{q^2}{\alpha^2} + 2p\alpha^2 + p^2 = 4r \Rightarrow$$

$$\alpha^6 - q^2 + 2p\alpha^4 + p^2\alpha^2 = 4r\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0.$$

Esta equação de sexto grau na variável α pode então ser facilmente convertida numa outra de terceiro grau mediante a transformação

$$U(z) = z^3 \Rightarrow \\ \alpha' = \alpha^2.$$

Após essa transformação obtemos $\alpha'^3 + 2p\alpha'^2 + (p^2 - 4r)\alpha' - q^2 = 0$ que é uma equação de terceiro grau que já sabemos resolver. Após resolver essa equação obtendo os valores de α'^3 podemos empregar a transformação U^{-1} para obter α e voltarmos ao sistema que a originou e então obter os valores de β e γ . De posse desses valores podemos resolver a equação $(x'^2 + \alpha x' + \beta)(x'^2 - \alpha x' + \gamma) = 0$ e, finalmente, empregar a transformação inversa

$$\begin{aligned} T(z) &= z + \frac{b}{4} \Rightarrow \\ x &= x' + \frac{b}{4} \end{aligned}$$

para enviar as soluções obtidas ao referencial inicial.

Embora, como esclarece Stewart(2003), a solução geral das equações de grau maior que quatro não possam ser expressas usando apenas operações elementares, as tranformações são ferramentas poderosas na resolução de quaisquer equações.

Capítulo 3

Alguns Subconjuntos Notáveis e Aplicações em \mathbb{C}

3.1 A Reta

Qualquer conjunto de pontos contido no plano, obviamente, é um subconjunto do Conjunto (\mathbb{C}) dos Números Complexos. Desta forma, uma reta, um segmento de reta, uma parábola, elipse, hipérbole, circunferência ou qualquer polígono ou curva no plano complexo representa um subconjunto de \mathbb{C} . Um grande número de subconjuntos do plano podem ser expressos algebricamente sem muita dificuldade usando a notação dos números complexos e transformações no plano.

$$r = (x, y) = \lambda(x_0, y_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

onde x_0 e y_0 são constantes reais, representa uma reta que passa pela origem. A multiplicação é comutativa e representa uma rotação seguida de dilatação no plano. Como λ representa todos os números reais, o produto $(x_0, y_0)\lambda$ representa uma rotação da reta real, logo $r = \lambda(x_0, y_0)$ é a reta obtida pela rotação do eixo x, ou seja, uma reta passando pela origem do plano complexo. Consequentemente,

$$r = (x, y) = \lambda(x_0, y_0) + z, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{C}$$

representa uma reta qualquer do plano pois corresponde a translação de uma reta passando

pela origem. Em outras palavras, dado um ponto ou vetor $v = (x_0, y_0)$ e fazendo λ variar

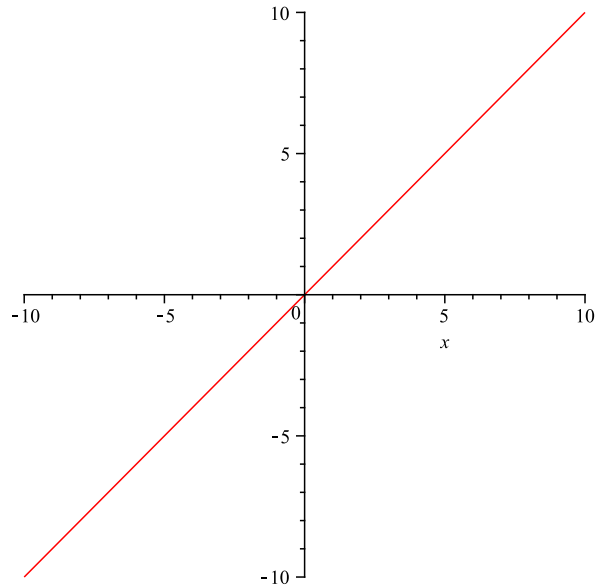


Figura 3.1: Reta Pela Origem do Plano.

em todo conjunto (\mathbb{R}) dos números reais podemos obter todos os vetores $\lambda(x, y)$ múltiplos de v ou, analogamente, todo o conjunto de pontos do tipo $(\lambda x_0, \lambda y_0)$.

O conjunto de todos esses pontos ou vetores $\lambda(x_0, y_0)$ correspondem, exatamente, a uma reta r que passa pela origem do plano complexo. A figura 3.1 ilustra essa situação.

Desta forma,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \longrightarrow \\ \begin{cases} x = x_0 \lambda \\ y = y_0 \lambda \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{x_0} \\ \lambda = \frac{y}{y_0} \end{cases} \longrightarrow \\ \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} &\longrightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x. \end{aligned}$$

Assim, uma reta que passa pela origem do plano cartesiano é um subconjunto de \mathbb{C} formado pelos pontos do plano tais que a relação entre as suas coordenadas x e y pode ser expressa pela relação de proporcionalidade $y = mx$, onde $m = \frac{y_0}{x_0}$, ou seja, m é a tangente

do ângulo que o vetor diretor da reta considerada forma com o eixo x , ou simplesmente, a inclinação de tal reta quando expressa em coordenadas cartesianas. E para obter uma reta qualquer do plano basta transladar uma paralela passando pela origem.

3.2 A Parábola

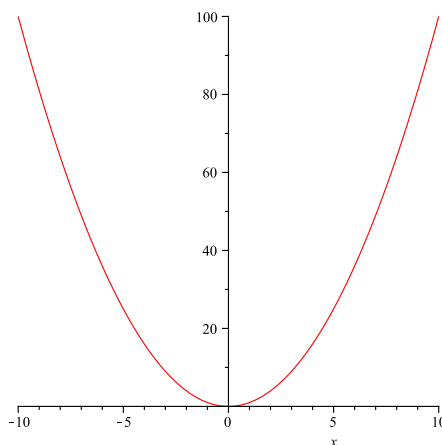


Figura 3.2: Parábola com Vértice na Origem

O conjunto de todos os pontos do Plano de Argand-Gauss cuja coordenada y é o quadrado da coordenada x quando x percorre toda a reta real desde o infinito negativo até o infinito positivo forma uma parábola como a da figura 3.2, de vértice em $(0,0)$ e foco em $(0, \frac{1}{4})$.

Considerando que uma das formas padrão de uma parábola, no plano cartesiano, com vértice em $(0,0)$ e foco em $(0,p)$ é $y = 4px^2$ e que,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = 1 \cdot x^2,$$

comparando o resultado obtido com a forma padrão, obtemos

$$4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}.$$

Desta forma, a expressão vetorial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

representa o mesmo subconjunto de números complexos que distribuem-se pelo plano complexo segundo uma parábola de foco $f = (0, \frac{1}{4})$, vértice $v = (0, 0)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$.

Aplicando-se cisalhamentos, rotações e translações podemos obter quaisquer outras parábolas do plano a partir dessa forma básica.

Aplicando-se apenas uma translação de $z = (x_0, y_0)$ à forma básica $y = x^2$ seguida de um cisalhamento de fator a obtemos as parábolas para as quais é válida a famosa fórmula de Bhaskara, pois obtemos,

$$y + y_0 = a(x + x_0)^2 \Rightarrow$$

$$y = ax^2 + 2ax_0x + a^2 - y_0.$$

Fazendo $m = a$, $n = 2ax_0$ e $p = a^2 - y_0$ obtemos a forma padrão deste tipo de parábola,

$$y = mx^2 + nx + p.$$

3.3 A Circunferência

O conjunto de números complexos representado pelos vetores do tipo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \lambda e t \in \mathbb{R}$$

está disposto no plano complexo segundo uma circunferência centrada na origem, pois

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \lambda e t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x = \lambda \sin t \\ y = \lambda \cos t \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} x^2 = \lambda^2 \sin^2 t \\ y^2 = \lambda^2 \cos^2 t \end{cases} \Rightarrow \\
& x^2 + y^2 = \lambda^2 \sin^2 t + \lambda^2 \cos^2 t \Rightarrow \\
& |z|^2 = \lambda^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow \\
& |z|^2 = \lambda^2 \cdot 1 \Rightarrow \\
& |z|^2 = \lambda^2 \Rightarrow \\
& |z| = \lambda
\end{aligned}$$

ou seja, o conjunto de todos os números complexos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \lambda e t \in \mathbb{R}$$

possuem o mesmo módulo, assim estão a uma mesma distância da origem do plano e então formam uma circunferência de raio λ e centro $(0, 0)$.

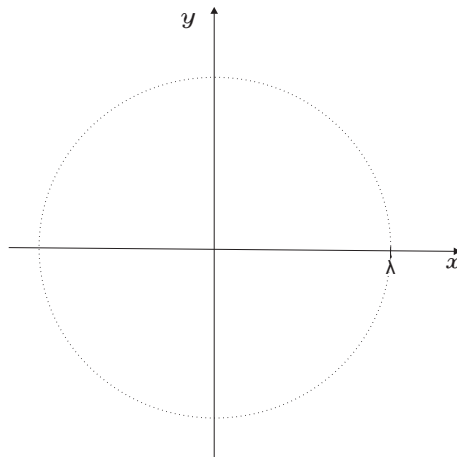


Figura 3.3: Conjunto de Números Complexos, $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = \lambda$

Dilatando o raio em seguida transladando a circunferência de raio unitário centrado na origem podemos obter qualquer circunferência do plano complexo que assume a forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \lambda \sin t + x_0 \\ y = \lambda \cos t + y_0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = (\lambda \sin t + x_0)^2 \\ y^2 = (\lambda \cos t + y_0)^2 \end{cases} \Rightarrow \\ x^2 + y^2 &= (\lambda \sin t + x_0)^2 + (\lambda \cos t + y_0)^2 \\ x^2 + y^2 &= \lambda^2 \cos^2 t + \lambda^2 \sin^2 t + 2\lambda x_0 \sin t + 2\lambda y_0 \cos t + x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 &= \lambda^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + 2\lambda x_0 \sin t + 2\lambda y_0 \cos t + x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 - \lambda^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) - 2\lambda x_0 \sin t - 2\lambda y_0 \cos t - x_0^2 + y_0^2 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 - \lambda^2 - 2\lambda x_0 \sin t - 2\lambda y_0 \cos t - x_0^2 + y_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \\ &\begin{bmatrix} \sin t = \frac{x-x_0}{\lambda} \\ \cos t = \frac{y-y_0}{\lambda} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

podemos reescrever a equação geral de uma circunferência no plano complexo sob a forma

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \lambda^2 - 2\lambda x_0 \frac{x-x_0}{\lambda} - 2\lambda y_0 \frac{y-y_0}{\lambda} - x_0^2 + y_0^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - \lambda^2 + x_0^2 + 3y_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tomando $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = -\lambda^2 + x_0^2 + 3y_0^2$ a equação geral da circunferência no plano complexo adquire a forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ com a, b e c reais.

3.4 A Elipse

Podemos conceber uma elipse como uma circunferência que foi submetida a um cisalhamento, ou seja, uma circunferência que sofreu um “achatamento”. O conjunto de números complexos representados pelos vetores do tipo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{bmatrix}, \quad a, b, e \quad t \in \mathbb{R}$$

está, portanto, disposto no plano complexo segundo uma elipse. Observe que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{bmatrix}, \quad a, b, e \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa a equação cartesiana de uma elipse centrada na origem, com raios a e b .

Outras elipses do plano complexo podem ser obtidas por meio de uma rotação seguida de translação aplicada a essa forma inicial.

3.5 A Hipérbole

Para representar um conjunto de números complexos dispostos no plano segundo uma hipérbole de centro $(0, 0)$, vértices $(0, \lambda)$ e $(0, -\lambda)$ e assíntotas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

podemos escrever,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t - \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad t \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

Este subconjunto complexo representa de fato uma hipérbole, pois

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} t - \frac{1}{t} \\ t + \frac{1}{t} \end{bmatrix}, t e \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \\ y = \frac{\lambda}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\lambda^2}{4} \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) \\ y^2 = \frac{\lambda^2}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \\ &x^2 - y^2 = \lambda^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$$

que é a conhecida expressão cartesiana de uma hipérbole de centro centro $(0, 0)$, vértices $(0, \lambda)$ e $(0, -\lambda)$ e assíntotas $y = x$ ou $y = -x$.

A assíntota desta hipérbole é de fato a reta cujos pontos possuem coordenadas de mesmo módulo, ou seja, $y = x$ ou $y = -x$, pois caso contrário, deveríamos ter

$$\begin{aligned} \begin{cases} t + \frac{1}{t} = t - \frac{1}{t} \\ \text{ou} \\ -t - \frac{1}{t} = -t + \frac{1}{t} \end{cases} &\Rightarrow \\ -\frac{1}{t} = \frac{1}{t} &\Rightarrow \\ -t = t &\Rightarrow \\ -1 = 1 & \end{aligned}$$

que é, obviamente, um absurdo!

As demais hipérboles do plano também podem ser obtidas aplicando-se cisalhamentos, rotações e translação àquela forma hiperbólica obtida inicialmente como exemplificamos a seguir.

Dada a hipérbole H' obtida aplicando-se um cisalhamento de fator igual a 3 às coordenadas x' seguida de uma homotetia de fator 5 àquela hipérbole apresentada inicialmente,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \left(t + \frac{1}{t}\right) \\ t - \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

estamos aplicando à hipérbole inicial uma transformação que também pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 6 \\ y - 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y - \frac{36}{13} \\ \frac{3}{13}y - \frac{2}{13}x - \frac{15}{13} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Substituindo $\begin{bmatrix} \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y - \frac{36}{13} \\ \frac{3}{13}y - \frac{2}{13}x - \frac{15}{13} \end{bmatrix}$ na hipérbole inicial obtemos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y - \frac{36}{13} \\ \frac{3}{13}y - \frac{2}{13}x - \frac{15}{13} \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 3 \left(t + \frac{1}{t}\right) \\ t - \frac{1}{t} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} \frac{1}{65}x + \frac{2}{195}y - \frac{12}{65} \\ \frac{3}{65}y - \frac{2}{65}x - \frac{15}{65} \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t - \frac{1}{t} \end{bmatrix}^2 \Rightarrow \\
 \begin{cases} \frac{1}{4225}x^2 + \frac{4}{12675}xy - \frac{24}{4225}x + \frac{4}{38025}y^2 - \frac{16}{4225}y + \frac{144}{4225} = \frac{1}{t^2} + t^2 + 2 \\ \frac{4}{4225}x^2 - \frac{12}{4225}xy + \frac{12}{845}x + \frac{9}{4225}y^2 - \frac{18}{845}y + \frac{9}{169} = \frac{1}{t^2} + t^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \\
 \frac{1}{4225}x^2 + \frac{4}{12675}xy - \frac{24}{4225}x + \frac{4}{38025}y^2 - \frac{16}{4225}y + \frac{144}{4225} - \frac{4}{4225}x^2 + \frac{12}{4225}xy - \frac{12}{845}x - \frac{9}{4225}y^2 + \\
 \frac{18}{845}y - \frac{9}{169} - 4 = 0 \Rightarrow \\
 -\frac{3}{4225}x^2 - \frac{77}{38025}y^2 + \frac{8}{2535}xy - \frac{84}{4225}x + \frac{74}{4225}y - \frac{16981}{4225} = 0
 \end{aligned}$$

que representa a expressão cartesiana da hipérbole obtida após transformar H' por meio da transformação T .

3.6 Usando a Forma Polar

Muitas tarefas, especialmente a modelagem de problemas, algumas vezes podem ser simplificadas sob a notação $z = re^{i\theta}$ onde r é o módulo e θ o argumento de um número complexo z .

Por exemplo, apenas fixando-se o valor de θ , tomando-se uma constante real ω e encarando r como variável real, obtemos o subconjunto de números complexos

$$z = re^{i\omega}$$

que representa a equação de uma a reta do tipo $y = \tan(\omega)x$ que passa pela origem do plano e possui inclinação ω . A equação de uma reta que não passa pela origem pode ser escrita como $z = u + re^{i\omega}$, onde u é uma constante complexa, ou seja, pode ser obtida aplicando translação à reta $z = re^{i\omega}$.

Para representar o conjunto de números complexos sobre a circunferência C de raio 1 com centro na origem, poderíamos simplesmente escrever

$$C(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

A equação de uma circunferência de raio r que não passa pela origem pode também ser obtida aplicando uma translação a todos os pontos de uma outra circunferência de mesmo raio passando pela origem, ou seja,

$$C(\theta) = w + e^{i\theta}.$$

Às vezes também é possível e muito conveniente, representar curvas do plano valendo-se da notação na forma polar e expressando-se o módulo como função da variável livre θ e obtendo-se a forma

$$C(\theta) = f(\theta)e^{i\theta}.$$

A equação de uma elipse com centro na origem, por exemplo, pode ser obtida fazendo o raio de uma circunferência unitária de mesmo centro dilatar enquanto gira em torno da origem.

Vamos então obter a equação de uma elipse com centro na origem e raio maior sobre o eixo x medindo a e raio menor medindo b .

Devemos ter

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix}$$

o que significa que os módulos do conjunto de números os complexos que satisfaz o problema podem ser expressos por

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$$

ou seja, a equação polar da elipse em questão, com centro na origem pode ser expressa por

$$E(\theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} e^{i\theta}$$

Para obter a equação da parábola

$$y = x^2 \Rightarrow (x, x^2),$$

por exemplo, onde devemos ter

$$|(x, x^2)| = \sqrt{x^4 + x^2}$$

e

$$\tan(\theta) = \frac{x^2}{x} = x,$$

basta fazer

$$P(\theta) = \sqrt{\tan^4(\theta) + \tan^2(\theta)} \Rightarrow$$

$$E(\theta) = \tan(\theta) \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} e^{i\theta} \Rightarrow$$

$$E(\theta) = \tan(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)} e^{i\theta} \Rightarrow$$

$$E(\theta) = \tan(\theta) \sec(\theta) e^{i\theta}.$$

De forma análoga podemos obter equações de outras curvas do plano complexo cujo módulo pode ser expresso em função do argumento.

Capítulo 4

Atividades para Sala de Aula

Relacionadas a Números Complexos e Transformações

Neste capítulo vamos apresentar uma série de atividades que podem ser realizadas em sala de aula e que envolvem números complexos e transformações no plano. Destacamos as seguintes atividades:

- Operações com números complexos
- Uso da transformação de Mobius para representar movimentação no plano
- Representação de algumas curvas algébricas no plano complexo
- Uso de transformações do plano complexo para resolver equações polinomiais

4.1 Operações com números complexos

Empregando as definições e conceitos apresentados podemos operar com números complexos e resolver problemas envolvendo as operações de adição, subtração multiplicação,

potenciação e radiciação como os apresentados a seguir.

Exemplo.

Dados os números $x = 5 - 3i$ e $y = 2 + 4i$, vamos efetuar as seguintes operações

$$a) x + y \quad b) x - y \quad c) xy \quad d) \frac{x}{y} \quad e) 2x^2 + 2y + 3xy - 2x + 3y.$$

Podemos representar os números complexos x e y na forma matricial a fim de facilitar a resolução. Fazendo isso vamos obter $x = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, assim podemos resolver facilmente problemas como estes, pois:

$$a) x + y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = 7 + i.$$

$$b) x - y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 7i.$$

$$c) xy = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 5(-4) + 3 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & -3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -14 \\ 14 & 22 \end{bmatrix} = 22 + 14i.$$

$$d) \frac{x}{y} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -2 & 26 \\ -26 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i.$$

$$e) 2x^2 + 2y + 3xy - 2x + 3y =$$

$$2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 98 & -8 \\ 8 & 98 \end{bmatrix} = 98 + 8i.$$

4.2 Uso das transformações para representar movimentação no plano

Vamos ver agora como podemos aplicar alguns dos conceitos apresentados para resolver problemas envolvendo a movimentação e deformação de formas geométricas do plano complexo.

Exemplo 01.

Aplicando-se, por exemplo, um cisalhamento seguido de uma homotetia, uma rotação e uma translação podemos deformar o quadrado Q de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$, ou seja, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, em qualquer retângulo do plano e vice-versa. Naturalmente esta transformação não preserva a medida dos lados, área e diversas outras propriedades por envolver cisalhamento. Outras propriedades como a medida dos ângulos serão preservadas.

Vamos transformar o quadrado Q em um retângulo com um dos lados medindo o dobro do outro e em seguida amplia-lo mutiplicando todos lados por 3, gira-lo em 45 graus á direita e finalmente translada-lo segundo a direção e o módulo do vetor $v = (4, 6)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} 3 \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{9}{2}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 4 & 4 - \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} + 4 & 3\sqrt{2} + 4 \\ 6 & \frac{3}{2}\sqrt{2} + 6 & \frac{9}{2}\sqrt{2} + 6 & 3\sqrt{2} + 6 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 4 & 4 - \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} + 4 & 3\sqrt{2} + 4 \\ 6 & \frac{3}{2}\sqrt{2} + 6 & \frac{9}{2}\sqrt{2} + 6 & 3\sqrt{2} + 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 02.

Vamos agora obter matricialmente a transformação que relaciona as coordenadas dos vértices do triângulo cujos vértices são $(2, 3)$, $(4, 5)$ e $(3, 1)$, $T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ aos vértices de um outro triângulo semelhante cujos vértices são $(12, 15)$, $(18, 32)$ e (x, y) , $T_2 = \begin{bmatrix} 12 & 18 & x \\ 15 & 32 & y \end{bmatrix}$ respectivamente e obter os valores de x e y .

Podemos iniciar observando que é mais fácil resolver este problema começando com um dos vértices de cada triângulo sobre a origem. Resolve-se isso facilmente aplicando translação aos triângulos. Então podemos obter $T'_1 = \begin{bmatrix} 2-2 & 4-2 & 3-2 \\ 3-3 & 5-3 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $T'_2 = \begin{bmatrix} 12-12 & 18-12 & x-12 \\ 15-15 & 32-15 & y-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & x-12 \\ 0 & 17 & y-15 \end{bmatrix}$.

Para transformar o vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ no vetor $\begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$, deveremos ter rotação seguida de ampliação, ou seja, o produto de $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ por alguma matriz do tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - 2b \\ 2a + 2b \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{cases} 2a - 2b = 6 \\ 2a + 2b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{23}{4} \\ b = \frac{11}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim a transformação completa de T_1 em T_2 pode ser matricialmente descrita por

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{4} & -\frac{11}{4} \\ \frac{11}{4} & \frac{23}{4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 15 & 15 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & \frac{93}{4} \\ 15 & 32 & \frac{25}{4} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x = \frac{93}{4}$ e $y = \frac{25}{4}$ e a expressão da transformação que resulta na solução deste problema é

$$T(x + yi) = \left(\frac{23}{4} + \frac{11}{4}i\right)(x + yi - 2 - 3i) + 12 + 15i.$$

Exemplo 03.

Atribuindo valores específicos aos coeficientes a, b, c e d podemos ajustar a transformação de Mobius de tal forma que passe a representar uma composição de movimentos de translação, rotação e inversão específicos.

Dada a Transformação de Mobius

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right),$$

podemos atribuir valores a, b, c e d de tal forma que $M(z)$ represente apenas:

a) uma translação;

$$M(z) = z + b \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \in \mathbb{C} \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

b) uma rotação seguida de dilatação;

$$M(z) = az \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{C} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

c) uma dilatação;

$$M(z) = az \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

d) uma rotação com dilatação seguida de inversão;

$$M(z) = \frac{1}{cz} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c \in \mathbb{C} \\ d = 0 \end{cases}$$

e) uma rotação apenas;

$$M(z) = az \Rightarrow \begin{cases} a \in x^2 + y^2 = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

f) uma inversão seguida de translação.

$$M(z) = \frac{1}{z} + a = \frac{az+1}{z} \Rightarrow \begin{cases} a \in x^2 + y^2 = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Exemplo 04.

Na notação da transformação de Mobius, uma rotação de 45° seguida de uma translação de 2 unidades à direita e 3 unidades para cima

$$M(z) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pode ser representada por $M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right) \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right)$ com $c = 0$, $d = 1$ e $b = 2 + 3i$ e $a = \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}i$.

Exemplo 05.

Vamos obter a reta s simétrica de $r : y = 3x + 2$ em relação a $t : y = 2x - 1$. Para isso, precisamos compor uma transformação iniciando por transladar o referencial cartesiano de tal forma que a origem coincida com a intersecção das retas

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}.$$

No novo sistema obtemos as equações

$$r' : y' - 7 = 3(x' - 3) + 2 \Rightarrow y' = 3x'$$

e

$$t' : y' - 7 = 2(x' - 3) - 1 \Rightarrow y' = 2x'$$

Vamos agora descobrir quanto devemos girar r' a fim obter t' . Para isso podemos tomar um vetor sobre r' e outro sobre t' e fazer uso dos produtos interno e vetorial. Vamos utilizar os vetores $u = (1, 3)$ sobre r' e $v = (1, 2)$ sobre t' obtendo

$$\cos \theta = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \text{ e } \sin \theta = \frac{\left\| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right\|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

A equação da reta simétrica de r' no referencial $x'Oy'$ poderá ser então obtida aplicando T^2 à reta r' , ou seja, girando r' duas vezes do mesmo ângulo θ .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5}t \\ \frac{13}{5}t \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{\frac{9}{5}} \\ \frac{y'}{\frac{13}{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{x'}{9} = \frac{y'}{13} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{13}{9}x'.$$

Para voltar ao sistema de referência inicial basta aplicar uma translação inversa obtendo

$$y + 7 = \frac{13}{9}(x + 3) \Rightarrow$$

$$y = \frac{13}{9}x - \frac{8}{3}.$$

A transformação que explica o processo de relacionamento dos pontos de r com os pontos de sua simétrica num mesmo referencial envolve, portanto duas translações intercaladas por uma rotação e pode, portanto, ser representada pela seguinte transformação de Möbius

$$M(z) = \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, z = (x, y) \Rightarrow$$

$$M(z) = \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M(z) = \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{196}{25} \\ \frac{322}{25} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ou seja, uma transformação

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

com

$$c = 0, \frac{a}{d} = \frac{24}{25} - \frac{7}{25}i \text{ e } \frac{b}{d} = \frac{196}{25} + \frac{322}{25}i.$$

4.3 Representação de algumas curvas algébricas no plano complexo

As transformações, de forma geral, podem ser entendidas como instrumentos geradores de formas geométricas mais complexas a partir de formas elementares e de complexidade mais facilmente inteligíveis ou vice-versa.

Exemplo 01.

Aplicando apenas uma translação de $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ à reta $y = mx$ podemos gerar

$$\begin{aligned}y + b &= mx + a \Rightarrow \\y &= mx + a - b,\end{aligned}$$

as retas paralelas a $y = mx$ passando pelo ponto $z = (a, b)$.

Exemplo 02.

Uma rotação de θ rad quando aplicada ao eixo x gera a família de retas que passam pela origem do plano complexo.

Exemplo 03.

Aplicando uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos ao eixo x , seguida de uma translação de $2 + 3i$ obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}t + 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}t + 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ \frac{y-3}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{y-3}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$y = x + 1,$$

uma reta paralela à reta que divide os quadrantes pares em partes iguais passando pelo ponto $(0, 1)$.

Exemplo 04.

Vamos obter a transformação $T(z)$ que leva cada ponto da parábola $y = x^2$ a um ponto da parábola $y = x^2 + 5x - 6$.

$$y' = (x')^2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ (x')^2 \end{bmatrix}$$

$$y = x^2 + 5x - 6 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 + 5x - 6 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = (\lambda x, y) + (a, b).$$

Aplicando essa transformação à forma básica $y' = (x')^2$ devemos obter $y = x^2 + 5x - 6$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda x' \\ (x')^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ x^2 + 5x - 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} \lambda x' + a = x \\ (x')^2 + b = x^2 + 5x - 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x-a}{\lambda} \\ (\frac{x-a}{\lambda})^2 + b = x^2 + 5x - 6 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{2ax}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^2} + b &= x^2 + 5x - 6 \Rightarrow \\ \begin{cases} \frac{x^2}{\lambda^2} = x^2 \\ -\frac{2ax}{\lambda^2} = 5x \\ \frac{a^2}{\lambda^2} + b = -6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ a = -\frac{5}{2} \\ b = -\frac{49}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, sendo $z = (x, y)$ um ponto da parábola $y = x^2$,

$$T(z) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{49}{4} \end{bmatrix}$$

expressa a transformação que leva cada ponto de $y = x^2$ a um ponto correspondente de $y = x^2 + 5x - 6$.

Assim, podemos utilizar $T(z)$ para obter o vértice de $y = x^2 + 5x - 6$ aplicando T ao vértice de $y = x^2$.

$$T(0, 0) = (0, 0) + \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right),$$

ou ainda obter a coordenadas do foco da parábola $y = x^2 + 5x - 6$ aplicando T ao foco de $y = x^2$.

$$T\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -12\right).$$

$$\begin{aligned} y' &= (x')^2 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x' \\ (x')^2 \end{bmatrix} \\ y = x^2 + 5x - 6 &\Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ x^2 + 5x - 6 \end{bmatrix} \\ T(x, y) &= (\lambda x, y) + (a, b). \end{aligned}$$

Aplicando essa transformação à forma básica $y' = (x')^2$ devemos obter $y = x^2 + 5x - 6$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda x' \\ (x')^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ x^2 + 5x - 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} \lambda x' + a = x \\ (x')^2 + b = x^2 + 5x - 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x-a}{\lambda} \\ \left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^2 + b = x^2 + 5x - 6 \end{cases} \Rightarrow \\ \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{2ax}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^2} + b &= x^2 + 5x - 6 \Rightarrow \\ \begin{cases} \frac{x^2}{\lambda^2} = x^2 \\ -\frac{2ax}{\lambda^2} = 5x \\ \frac{a^2}{\lambda^2} + b = -6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ a = -\frac{5}{2} \\ b = -\frac{49}{4} \end{cases} . \end{aligned}$$

Logo, sendo $z = (x, y)$ um ponto da parábola $y = x^2$,

$$T(z) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{49}{4} \end{bmatrix}$$

expressa a transformação que leva cada ponto de $y = x^2$ a um ponto correspondente de $y = x^2 + 5x - 6$.

Assim, podemos utilizar $T(z)$ para obter o vértice de $y = x^2 + 5x - 6$ aplicando T ao vértice de $y = x^2$.

$$T(0, 0) = (0, 0) + \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right),$$

ou ainda obter a coordenadas do foco da parábola $y = x^2 + 5x - 6$ aplicando T ao foco de $y = x^2$.

$$T\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -12\right).$$

Não precisamos estudar, por exemplo, determinadas propriedades de uma cônica complicada complicada do plano complexo se podemos analisar e compreender essas propriedades analisando a forma mais simples, centrada na origem e, posteriormente, transferir as conclusões para a forma mais complexa que queremos entender. Analogamente, sempre existe uma transformação que estabelece uma relação biunívoca entre os pontos de uma

cônica mais complicada com uma forma mais simples onde as propriedades de interesse podem ser estudadas e depois transferidas para a cônica inicial por meio da transformação inversa.

Quando a transformação da forma mais simples da cônica envolver também rotações obtemos a chamada equação completa do segundo grau da cônica cuja característica é o aparecimento de um termo do tipo cxy onde c é uma constante e x e y variáveis reais.

Exemplo 05.

Vamos aplicar uma transformação T composta por uma rotação seguida de uma translação sobre a parábola $y' = (x')^2$ para obter um conjunto de pontos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

sobre alguma outra parábola P do plano complexo. Isso significa que a transformação inversa T^{-1} deve relacionar os pontos da parábola P , aos pontos da parábola $y' = (x')^2$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x + 3y - 48 \\ 2y - 3x + 20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores relativos de x' e y' na equação inicial $y' = (x')^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 2y - 3x + 20 &= (2x + 3y - 48)^2 \\ 4x^2 + 12xy - 192x + 9y^2 - 288y + 2304 - 2y + 3x - 20 &= 0 \\ 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 189x - 290y + 2284 &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 06.

Aplicando a transformação

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

à elipse

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ 3 \cos t \end{bmatrix}$$

Vamos obter

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ 3 \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ 3 \cos t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{34} & \frac{5}{34} \\ -\frac{5}{34} & \frac{3}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 7 \\ y - 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{68}x + \frac{5}{68}y - \frac{81}{68} \\ \frac{3}{102}y - \frac{5}{102}x - \frac{1}{102} \end{bmatrix}^2 \\ \begin{cases} \sin^2 t = \frac{9}{4624}x^2 + \frac{15}{2312}xy - \frac{243}{2312}x + \frac{25}{4624}y^2 - \frac{405}{2312}y + \frac{6561}{4624} \\ \cos^2 t = \frac{25}{10404}x^2 - \frac{5}{1734}xy + \frac{5}{5202}x + \frac{1}{1156}y^2 - \frac{1}{1734}y + \frac{1}{10404} \end{cases} \Rightarrow \\ \sin^2 t + \cos^2 t &= \frac{9}{4624}x^2 + \frac{15}{2312}xy - \frac{243}{2312}x + \frac{25}{4624}y^2 - \frac{405}{2312}y + \frac{6561}{4624} + \frac{25}{10404}x^2 - \frac{5}{1734}xy + \\ &\quad \frac{5}{5202}x + \frac{1}{1156}y^2 - \frac{1}{1734}y + \frac{1}{10404} \Rightarrow \\ \frac{181}{41616}x^2 + \frac{29}{4624}y^2 + \frac{25}{6936}xy - \frac{2167}{20808}x - \frac{1219}{6936}y + \frac{59053}{41616} - 1 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{181}{41616}x^2 + \frac{29}{4624}y^2 + \frac{25}{6936}xy - \frac{2167}{20808}x - \frac{1219}{6936}y + \frac{17437}{41616} &= 0, \end{aligned}$$

que corresponde a equação cartesiana da elipse após as transformações a que a elipse inicial foi submetida.

4.4 Uso de transformações do plano complexo para resolver equações polinomiais

Uma consequência do fato de que todo número complexo possuir n raízes enésimas é que equações do tipo $x^n - \beta = 0$; $n, \beta \in \mathbb{N}$ possuem, sempre, n soluções complexas, as raízes $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ de $x^n - \beta = 0$ são sempre expressas por

$$\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{|\beta|} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

e diferem-se entre si apenas por uma rotação de $\frac{2\pi}{n}$ *radianos* pois possuem o mesmo módulo, variando apenas o ângulo de rotação. Pertencem, portanto, a uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|\beta|}$ centrada na origem. Além disso, sendo $z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ as raízes de $x^n - \beta = 0$,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(k-1)} \\ y_{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2k}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k}{n}\right) \end{bmatrix},$$

ou seja, girando sucessivamente uma das raízes de $x^n - \beta = 0$ de um mesmo arco de $\frac{2\pi}{n}$ *radianos* podemos obter todas as outras. Ou ainda, podemos obter todas as raízes multiplicando sucessivamente uma delas por

$$\omega = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix}.$$

De forma geral $z_k = \omega^{(k-1)} z_1$.

Exemplo 01.

A equação de segundo grau $x^2 - 16 = 0$, por exemplo, possui duas raízes complexas. Uma dessas raízes é $z_1 = (4, 0)$ e a outra

$$z_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação $x^3 - 27 = 0$ possui três raízes. Uma delas é $z_1 = (3, 0)$

e as outras serão

$$z_2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

e novamente,

$$z_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 02.

Vamos agora resolver a equação do segundo grau $2x^2 - 10x + 16 = 0$. Podemos iniciar dividindo todos os termos da equação por 2 a fim de obter a forma mais simples $x^2 - 5x + 8 = 0$. Em seguida podemos empregar a transformação de Schirnhausenen

$$T(z) = z - \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$x = x' + \frac{5}{2}.$$

$$\left(x' + \frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(x' + \frac{5}{2}\right) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$(x')^2 + \frac{7}{4} = 0$$

$\pm \frac{1}{2}\sqrt{7}i$. Finalmente enviamos os valores encontrados ao referencial inicial por meio da transformação inversa

$$T^{-1}(z) = z + \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}i + \frac{5}{2}.$$

Exemplo 03.

Vamos resolver a equação cúbica empregando transformações de Schirnhausenen $3x^3 - 27x^2 + 108x - 240 = 0$.

Inicialmente convém dividir todos os termos por 3 a fim de obter a equação mais simples $x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$. Vamos agora aplicar a transformação de Schirnhausen

$$T_1(z) = z + 3 \Rightarrow$$

$$x = x' + 3$$

a fim de eliminar o termo de segundo grau.

$$(x' + 3)^3 - 9(x' + 3)^2 + 36(x' + 3) - 80 = 0 \Rightarrow$$

$$(x')^3 + 9x' - 26 = 0.$$

Vamos aplicar uma nova transformação de Schirnhausen

$$T_2(z) = z - \frac{3}{z} \Rightarrow$$

$$x' = x'' - \frac{3}{x''}$$

a fim de eliminar o termo de primeiro grau.

$$\begin{aligned}(x'' - \frac{3}{x''})^3 + 9(x'' - \frac{3}{x''}) - 26 &= 0. \\ (x'')^3 - \frac{27}{(x'')^3} - 26 &= 0 \Rightarrow \\ (x'')^6 - 26(x'')^3 - 27 &= 0.\end{aligned}$$

Vamos aplicar uma última transformação

$$\begin{aligned}T(z) &= \sqrt[3]{z} \Rightarrow \\ x'' &= \sqrt[3]{x'''}\end{aligned}$$

a fim de reduzir a equação obtida a uma forma quadrática.

$$\begin{aligned}(x''')^2 - 26x''' - 27 &= 0 \Rightarrow \\ x''' = 27 \text{ ou } x''' &= -1.\end{aligned}$$

Vamos utilizar $x''' = 27$ e fazer o caminho de volta lembrando que no universo complexo existem três raízes cúbicas de cada número.

$$\begin{aligned}x'' &= \sqrt[3]{x'''} \Rightarrow \\ x'' &= \sqrt[3]{27} = 3 \\ &\text{ou} \\ \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x'' = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i \\ &\text{ou} \\ \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x'' = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

Como $x' = x'' - \frac{3}{x''}$ obtemos

$$x' = 3 - \frac{3}{3} = 2$$

ou

$$x' = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{3}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i} = 2i\sqrt{3} - 1$$

ou

$$x' = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{3}{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i} = -2i\sqrt{3} - 1.$$

Finalmente, podemos obter o valor de a solução da equação inicial

$$x = x' + 3 \Rightarrow$$

$$x = 2 + 3 = 5$$

ou

$$x = 2i\sqrt{3} - 1 + 3 = 2i\sqrt{3} + 2$$

ou

$$x = -2i\sqrt{3} - 1 + 3 = -2i\sqrt{3} + 2.$$

Se tivéssemos utilizado $x''' = -1$ teríamos chegado à mesma solução.

Exemplo 04

Vamos agora resolver a equação de quarto grau

$$3x^4 + 6x^3 - 123x^2 - 126x + 1080 = 0.$$

por meio do uso de transformações de Schirnhausen. Como de praxe, dividimos todos os termo por 3 obtendo

$$x^4 + 2x^3 - 41x^2 - 42x + 360 = 0.$$

Vamos agora aplicar a transformação

$$T_1(z) = z - \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$x = x' - \frac{1}{2}$$

a fim de eliminar o termo de terceiro grau.

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(x' - \frac{1}{2}\right)^3 - 41\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 - 42\left(x' - \frac{1}{2}\right) + 360 = 0.$$

$$(x')^4 - \frac{85}{2}(x')^2 + \frac{5929}{16} = 0$$

Vamos agora aplicar uma nova transformação

$$T(z) = \sqrt{z} \Rightarrow \\ x'' = \sqrt{x'''}$$

a fim de obter uma forma quadrática.

$$(x''')^2 - \frac{85}{2}x''' + \frac{5929}{16} = 0 \Rightarrow \\ x''' = \frac{121}{4} \text{ ou } x''' = \frac{49}{4}.$$

Retornando ao referencial inicial vamos obter

$$x = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} - \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -6$$

e

$$x = \pm \sqrt{\frac{49}{4}} - \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -4.$$

Capítulo 5

Conclusão

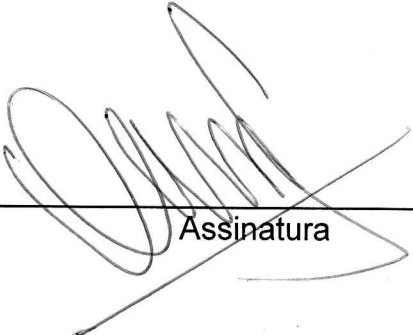
Chegamos assim ao final do nosso trabalho. Esperamos ter contribuído na abordagem dos números complexos como elo de ligação entre os diversos conteúdos da matemática elementar e das transformações no plano como instrumento de resolução de problemas. Os exemplos apresentados não esgotam nem de longe as possibilidades de exploração dos números complexos e suas relações com os demais conteúdos do currículo. Muitas vezes um conhecimento matemático puramente teórico e aparentemente desvinculado da realidade física, encontra aplicações na resolução dos problemas mais inusitados. Estudar os números complexos significa passar por essa experiência. Esperamos ter contribuído, principalmente com os professores de matemática do ensino básico, na abordagem e desenvolvimento desse maravilhoso tema que, muitas vezes, fica deixado de lado e tratado como um conteúdo sem muita importância.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, GERALDO. Variáveis complexas e aplicações. LTC. 2000.
- [2] ANDRESCU, TITU; ANDRICA, DORIN. Complex numbers from a to z. Birkhausen. Boston. 1956.
- [3] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO; et all. Trigonometria e números complexos. SBM. 2009
- [4] OLSEN, JOHN. The Geometry of Möbius Transformations. Disponível em <http://www.johnno.dk/mathematics/moebius.pdf>. Acessado em 19/12/2013.
- [5] STEWART, IAN N. Galois theory. Chapman e Hall/CRC. Londres. 2004.
- [6] STEWART, IAN N. História de las Matemáticas en los últimos 10000 años. CRÍTICA. Barcelona. 2007.
- [7] STEINBRUCH, ALFREDO; WINTERLE, PAULO. Introdução à álgebra linear. Makron Books. São Paulo. 1987.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 19 / 12 / 2013


Assinatura