UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Jadson David Oliveira da Silva

PROCESSAMENTO DE IMAGENS DIGITAIS E O ENSINO DE MATRIZES

Santarém (PA)
2014

Jadson David Oliveira da Silva

PROCESSAMENTO DE IMAGENS DIGITAIS E O ENSINO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Aldenize Ruela Xavier

Santarém (PA)

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Gestão da Informação – SIGI/UFOPA

S586p Silva, Jadson David Oliveira da

Processamento de imagens digitais e o ensino de matrizes/ Jadson David Oliveira da Silva. – Santarém, 2014.

58 f.: il.

Orientador Aldenize Ruela Xavier.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2014.

1. Matriz. 2. Imagem digital - processamento. 3. Sequência didática. I. Xavier, Aldenize Ruela, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 512.9434

Bibliotecário - Documentalista: Sheyla G. A. Ribeiro – CRB/2 1372

Jadson David Oliveira da Silva

PROCESSAMENTO DE IMAGENS DIGITAIS E O ENSINO DE MATRIZES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Profª. Drª. Aldenize Ruela Xavier

Orientadora – UFOPA

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra

Examinador – UFOPA

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

Examinador – UFRJ

Santarém (PA)

2014

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Mary e as minhas filhas Sarah e Rebeca pela compreensão nos momentos que estive ausente.

AGRADECIMENTOS

A Deus por conceder-me esta oportunidade de aprofundar meus conhecimentos.

A minha mãe Leonita por suas orações sempre rogando a Deus para dar-me sabedoria.

A minha orientadora Drª Aldenize Xavier por sua dedicação, paciência e tudo que me ensinou.

Aos caros colegas do PROFMAT/UFOPA 2011 pelas tão proveitosas horas de estudos em grupo.

A mente que se abre a uma ideia jamais volta ao seu tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho vem lançar um novo desafio no modo de pensar a matemática, através de um fazer matemático muito conhecido pelos usuários de linguagem de programação - a construção de algoritmo para solucionar um problema - abordando uma aplicação pouco difundida de matrizes e o processamento de imagens digitais nos moldes estabelecidos pelo projeto Klein. O trabalho aborda o tema a partir de três aspectos principais: a relação matrizes e imagens digitais; o uso do software no processamento de imagens digitais; e uma sequência de atividades planejadas e organizadas de forma prática com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos e permitindo a construção do conhecimento. Tem como principal objetivo o aprimoramento do conhecimento através do fortalecimento das definições e propriedades aliando o uso do computador ao ensino de matemática, levando o aluno a alterar sua forma de agir, pensar e questionar o conteúdo trabalhado de maneira diferente da qual estão habituados, servindo de instrumento para professores e fonte de pesquisa para alunos que queiram aprofundar seus conhecimentos sobre o tema.

Palavras-chave: Matriz, Processamento de Imagem Digital e Sequência Didática.

ABSTRACT

This work has lauched a new challenge in thinking mathematics, through a mathematical doing very known to users of programming language – constructing algorithm to solve a problem – approaching a bit widespread application of matrices and processing of digital images in the manner established by Klein's project. The work approaches the topic from three main aspects: the relationship matrices and digital images; the use of the software in digital image processing; and a sequence of activities planned and organized in a practical way with concrete and differentiated material, introducing increasingly challenges to the students and allowing the construction of knowledge. Its main objective is the improvement of knowledge by strengthening definions and properties combining the use of the computer to the teaching of mathematics, taking the students to change their way of acting, thinking and questioning content worked differently which way they are accustomed, serving as a techer's tool and resource for students who want to deepen their knowledge on the subject.

Keywords: Matrix, Digital Image Processing and Teaching Sequence.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

É senso comum o reconhecimento do estado crítico que se encontra o Ensino de Matemática em todo o País. Segundo a quinta edição do relatório *De Olho nas Metas 2012*[1], do movimento Todos Pela Educação, baseado nos resultados da Prova Brasil/Saeb 2011, apenas 10,3% dos jovens brasileiros têm aprendizado adequado em Matemática ao final do ensino médio, o que aponta o aprendizado como sendo um dos maiores entraves da educação brasileira.

As razões pelas quais o aluno fracassa são diversas, entre elas podemos citar: o fato de o aluno não ter construído o conceito, mas esse ter sido passado a ele, neste caso, não ouve a apropriação do conceito e sim a sua memorização; mesmo que houvesse a apropriação do conceito num determinado contexto, a aplicação desse conceito em outro contexto deve ser encarada como uma nova questão; o fato de o aluno não ter chance de adquirir o conceito matemático está relacionado também com a própria Matemática, definições e notações complexas para o aluno dificultam o pensamento e o exercício do raciocínio.

A fim de superar as dificuldades com a Matemática, iniciativas como o Projeto Klein[2] propõe a professores e matemáticos que considerem a relação entre a aprendizagem da Matemática e a natureza da disciplina, tem como princípio estabelecer conexões entre os tópicos e as abordagens dos professores do ensino médio ou de cursos de graduação e a área da Matemática, desafiando o professor, através do currículo escolar, transmitir a riqueza da Matemática em suas aplicabilidades.

Quem dentre os professores de Matemática, do ensino médio, nunca foi questionado a respeito da aplicação de determinado conteúdo na vida do aluno? E quantas vezes a resposta dada foi: “isto consta no vestibular”. No entanto, essa resposta, já não convence os alunos, que cada vez mais ligados nas tecnologias atuais tem preferido passar horas de seu precioso tempo nas redes sociais ao gastar

---

[1] De Olho nas Metas é o relatório anual do movimento Todos Pela Educação para o acompanhamento dos indicadores educacionais do País sobre o atendimento escolar à população de 4 a 17 anos. Nesta quinta edição, o destaque fica por conta da meta 3, que monitora o desempenho dos alunos no ensino fundamental e médio.

[2] É um projeto idealizado pelos comitês executivos da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) e União Internacional de Matemática (IMU) que tem como princípio estabelecer conexões entre os tópicos e as abordagens dos professores do ensino médio ou de cursos de graduação e a área da Matemática, levantando discussões em torno deste enfoque.

alguns minutos estudando Matemática, por achar chata, descontextualizada e desnecessária para a sua vida.

Diante disso, a mudança do paradigma educacional deve ser acompanhada da introdução de novas ferramentas, como por exemplo, softwares que permitam explorar os conceitos da Matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada, de maneira que o educando possa construir seu próprio conhecimento.

Para Valente (1993), o computador passa a ser uma ferramenta de complementação e aperfeiçoamento educacional, possibilitando mudanças na qualidade do ensino em virtude das próprias mudanças das condições de vida da humanidade e também a alteração da natureza do conhecimento, visto que vive-se em um mundo dominado pela informação onde tudo muda rapidamente. Os fatos e alguns processos que a escola ensina rapidamente se tornam obsoletos e de pouca utilidade, portanto, ao invés de memorizar informação, os estudantes devem ser ensinados a buscar e a usar a informação. Essas mudanças podem ser introduzidas com o uso do computador, proporcionando condições para o educando exercitar sua capacidade de procurar e selecionar informações úteis para solucionar problemas.

Nesse sentido, este trabalho lança um novo desafio no modo de pensar Matemática na educação básica através de um fazer matemático muito conhecido pelos usuários de linguagem de programação, abordando uma aplicação pouco difundida de matrizes e o processamento de imagens digitais, com o uso do software MATLAB nos moldes estabelecidos pelo Projeto Klein. Apresentando uma sequência didática planejada e organizada de forma prática com material concreto e diferenciado para aprimoramento do conhecimento e fortalecimento das definições, através de uma linguagem simples, porém mantendo o rigor e a formalidade matemática, que possa servir de instrumento para o Professor do Ensino Médio além de fonte de pesquisa para alunos interessados em aprofundar seus conhecimentos.

Muito utilizado por pesquisadores das mais diversas áreas, o MATLAB é um sistema interativo que trabalha essencialmente com matrizes numéricas retangulares, constituindo uma ferramenta eficiente para resolver problemas de otimização e interpretação de imagens.

Desta forma, ao ser utilizado pelo aluno do ensino médio, este software mostra-se como um instrumento pedagógico de grande poder para desenvolver as habilidades que o educando necessita ao trabalhar com matrizes, pois este não ficará apenas visualizando a matriz como simples tabela mais poderá relacioná-la a imagem característica, alterando sua forma de pensar a matriz, levando-o a questionar resultados obtidos através desta ferramenta ao mesmo tempo em que visualiza aplicação do conteúdo estudado, algo que não seria possível sem a ajuda do software.

Como este sistema possui uma linguagem simples comparada às linguagens de programação clássicas capazes de resolver os mesmos problemas numéricos, o aluno poderá efetuar um maior volume de cálculos em apenas uma fração do tempo que se gastaria manualmente ou mesmo usando outra ferramenta de programação.

Para facilitar a compreensão da abordagem, este trabalho está organizado em cinco capítulos, todos com o mesmo grau de importância, voltados para o professor de Matemática e alunos de ensino médio. O capítulo a seguir, trata do processamento de imagem digital, desde a sua representação, passos necessários para um processamento de imagem digital, até as operações básicas, que na verdade são operações entre matrizes ensinadas no ensino médio; o próximo mostra como operar o processamento de imagem digital descrito no capítulo 2, com o auxilio do software MATLAB; já o quarto, apresenta uma metodologia para o ensino de matrizes, através de uma sequência didática proposta para o estudo de matrizes relacionando-o ao processamento de imagens digitais; o último, constitui-se das considerações finais, que são seguidas pelas referências, lista de sites consultados, apêndice A e o apêndice B.

2 - PROCESSAMENTO DE IMAGEM DIGITAL

Técnicas de processamento de imagens digitais são atualmente utilizadas para resolver uma variedade de problemas que requerem métodos capazes de melhorar a informação visual para análise e interpretação humana, como por exemplo, na medicina, na qual procedimentos computacionais melhoram o contraste ou codificam os níveis de intensidades em cores, de modo a facilitar a interpretação de imagens de raios-X e outras imagens biomédicas. Geógrafos usam técnicas similares para estudar padrões de poluição em imagens aéreas ou de satélites. Em arqueologia tais processamentos de imagens têm sido usados com sucesso para restaurar registros fotográficos borrados de artefatos raros que não possuem outros registros.

Ao longo deste capítulo, serão apresentados conceitos básicos necessários para a compreensão do processamento de imagens digitais. Nele será visto as relações entre imagem e matriz, entre pixel e elemento de uma matriz, os passos necessários para se efetuar um processamento de imagem digital, a vizinhança de um pixel, além de algumas operações entre pixels.

2.1 REPRESENTAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS

O termo imagem monocromática, ou simplesmente imagem, refere-se à função bidimensional $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow U$ $(U \subset \mathbb{N})$ de intensidade da luz $f(x, y)$, onde x e y denotam as coordenadas espaciais e o valor de f em qualquer ponto (x, y) é proporcional ao brilho da imagem naquele ponto. Às vezes se torna útil a visualização da imagem em perspectiva com um terceiro eixo representando o brilho, vista dessa maneira a imagem aparece como uma série de picos em regiões com numerosas modificações de nível de brilho e regiões planas ou platôs em que os níveis de brilho variam pouco ou são constantes, ou seja, a imagem digital é uma imagem $f(x, y)$ discretizada tanto em coordenadas espaciais quanto em brilho.

A figura 1, a seguir, mostra os eixos x e y na representação de imagens digitais, nesta convenção a origem localizada no canto superior esquerdo é o ponto $(1, 1)$.

Figura 1 – Convenção dos eixos para representação de imagens digitais

Fonte: Aldenize Xavier

Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica a pigmentação naquele ponto, ou seja, a cor preta ou a cor branca em imagens binárias, o nível de cinza em imagens em tons de cinza. Os elementos dessa matriz digital são chamados de elementos da imagem, elementos da figura, “pixels” ou “pels”, estes dois últimos, são abreviações de “Picture elements” (elementos de figura).

Dessa forma, podemos representar uma imagem digital através de uma matriz A de elementos $a_{x,y}$ com m linhas e n colunas, em que cada elemento $a_{x,y}$ dessa matriz é um pixel da imagem digital onde x representa a linha e y a coluna, assim: $1 \leq x \leq m$ e $1 \leq y \leq n$.

$$f(x,y) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A localização (x, y) do pixel não deve ser confundida com as coordenadas de um mapa, por exemplo, que podem ser geográficas ou planas, enquanto que (x, y) é uma referência do pixel em um grid, com x e y assumindo valores inteiros, ao tempo que, as coordenadas geográficas ou planas de um mapa é um par de valores reais (X, Y) associados a um referencial. Desta forma, a “origem” mostrada na figura 1 corresponde a primeira linha e a primeira coluna (elemento a_{11} de uma matriz A representativa da imagem digital), ou seja, corresponde a localização $(1,1)$ do pixel.

2.2 PASSOS FUNDAMENTAIS EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS

O processamento de imagens digitais abrange ampla escala de hardware, software e fundamentos teóricos. Neste trabalho, será usado o software MATLAB, que mesmo sendo um software pago, é sem dúvida o mais utilizado no processamento de imagens digitais e também possui um sistema operacional todo fundamentado em matrizes, que é a ferramenta fundamental desse trabalho.

Nesta seção apresenta-se os passos necessários para executar uma tarefa de processamento de imagem.

O primeiro passo no processo é a aquisição da imagem, para fazer isso, dois elementos são necessários. O primeiro é um dispositivo físico que seja sensível a uma banda do espectro de energia eletromagnética (como raios X, Ultravioleta, visível, ou banda infravermelha) e que produza um sinal elétrico de saída proporcional a um nível de energia percebida. O segundo, chamado de digitalizador, é um dispositivo para a conversão da saída elétrica de um dispositivo de sensoriamento físico para a forma digital. Para isso, pode-se usar uma câmera digital.

O segundo passo, trata-se de pré-processar aquela imagem, melhorando-a de forma a aumentar as chances para o sucesso dos processos seguintes. É a partir deste momento que se faz necessário o uso de ferramentas, como um software, e conhecimentos teóricos previamente adquiridos.

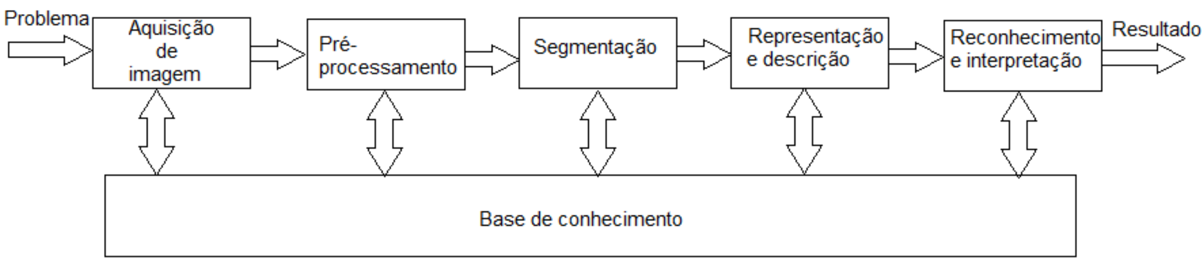
O próximo estágio trata-se da segmentação, que definida em termos gerais, é a divisão de uma imagem de entrada em partes ou objetos constituintes.

A saída do estágio de segmentação é constituída tipicamente por dados na forma de pixels (“raw pixel data”), correspondendo tanto a fronteira de uma região como a todos os pontos dentro dela. Em ambos os casos, é necessário converter os dados para uma forma adequada ao processamento computacional.

A escolha de uma representação é apenas parte da solução para transformar os dados iniciais numa forma adequada para o subsequente processamento computacional, pois um método para descrever os dados também deve ser especificado, de forma que as características de interesse sejam enfatizadas. O processo de descrição, também chamado de seleção de característica, procura extrair características que resultem em alguma informação quantitativa de interesse ou que sejam básicas para discriminação entre classes de objetos.

O ultimo estágio envolve reconhecimento e interpretação. Reconhecimento é o processo que atribui um rótulo a um objeto, baseado na informação fornecida pelo seu descritor. A interpretação envolve a atribuição de significado a um conjunto de objetos reconhecidos.

Figura 2 – Passos fundamentais em processamento de imagens



Fonte: Adaptado de GONZALEZ e WOODS (2000)

2.3 UM MODELO SIMPLES DE IMAGEM

O termo imagem, como já visto anteriormente, refere-se a uma função de intensidade luminosa bidimensional, denotada por $f(x,y)$, em que o valor da amplitude de f nas coordenadas espaciais (x,y) dá a intensidade (brilho) da imagem naquele ponto. Como a luz é uma forma de energia, $f(x,y)$ deve ser uma quantidade positiva e finita, ou seja,

$$0 < f(x,y) < \infty$$

As imagens que as pessoas percebem em atividades visuais corriqueiras consistem de luz refletida dos objetos. A natureza básica de $f(x,y)$ pode ser caracterizada por dois componentes: (1) a quantidade de luz incidindo na cena observada e (2) a quantidade de luz refletida pelos objetos da cena. Esses componentes são chamados iluminação e reflectância, respectivamente, e são representados por $i(x,y)$ e $r(x,y)$, onde o produto das funções $i(x,y)$ e $r(x,y)$ resulta $f(x,y)$:

$$f(x,y) = i(x,y) \cdot r(x,y)$$

onde $$0 < i(x,y) < \infty$$

e $$0 < r(x,y) < 1$$

Esta última equação indica que a reflectância é limitada entre 0 (absorção total) e 1 (reflectância total). A natureza de $i(x, y)$ é determinada pela fonte de luz, e $r(x, y)$ é determinada pelas características dos objetos observados.

Denomina-se intensidade luminosa de uma imagem monocromática f nas coordenadas (x, y), de nível de cinza (l) da imagem naquele ponto, onde

$$L_{min} \leq l \leq L_{máx}$$

Em teoria, a única limitação sobre L_{min} é que seja um valor positivo e sobre $L_{máx}$ é que seja finito. Na prática $L_{min} = i_{min}r_{min}$ e $L_{máx} = i_{máx}r_{máx}$.

O intervalo $[L_{min}, L_{máx}]$ é denominado escala de cinza. A prática comum é deslocar esse intervalo para $[0, L]$, onde $l = 0$ é considerado preto e $l = L$ é considerado branco. Todos os valores intermediários são tons de cinza variando continuamente entre o branco e o preto.

2.4 OS VIZINHOS DO PIXEL

Um pixel p nas coordenadas (x, y) possui quatro vizinhos horizontais e verticais, cujas coordenadas são dadas por

$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1).$$

Esse conjunto de pixel chamado vizinhança-de-4 de p, é representado por $N_4(p)$. Cada pixel está a uma unidade de distância de (x, y), sendo que alguns dos vizinhos de p ficarão fora da imagem digital se (x, y) estiver na borda da imagem.

Os quatro vizinhos diagonais de p possuem como coordenadas

$$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)$$

e são denotados por $N_D(p)$. Esses pontos, juntos com a vizinhança-de-4, são chamados de vizinhança-de-8 de p, representada por $N_8(p)$. Como antes, alguns dos pontos de $N_D(p)$ e $N_8(p)$ cairão fora da imagem quando (x, y) se encontrar na borda da imagem.

2.5 OPERAÇÕES LÓGICAS E ARITMÉTICAS

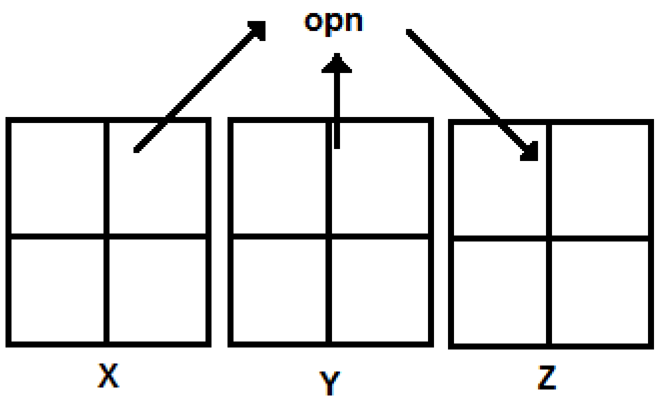
Sabe-se que após uma imagem ter sido adquirida e digitalizada, ela pode ser vista como uma matriz de inteiros e, portanto, pode ser manipulada numericamente utilizando operações lógicas e/ou aritméticas. Estas operações podem ser efetuadas pixel a pixel ou orientadas a vizinhança. No primeiro caso, elas podem ser descritas pela seguinte notação:

$$X\ opn\ Y = Z$$

onde X e Y podem ser imagens (matrizes) ou escalares, Z é obrigatoriamente uma matriz e opn é um operador aritmético $(+, -, \times e \div)$ ou lógico (AND, OR, XOR) binário.

Sejam duas imagens X e Y de igual tamanho. Estas imagens podem ser processadas pixel a pixel utilizando um operador aritmético ou lógico, produzindo uma terceira imagem Z, cujos pixels correspondem ao resultado de $X\ opn\ Y$ para cada elemento de X e Y, conforme ilustra esquematicamente a figura 3.

Figura 3 – Operações lógicas/aritméticas pixel a pixel



Fonte: MARQUES FILHO e VIEIRA NETO (1999)

2.5.1 Operações Aritméticas Pixel a Pixel

Operações aritméticas em imagens inteiras são desempenhadas pixel a pixel. O principal uso da adição de imagens ocorre ao se fazer média de imagens para redução de ruído. A subtração de imagens é uma ferramenta básica em imagens médicas, usada para remover informação estática de fundo. Um dos principais uso da multiplicação (ou divisão) de imagens é para corrigir sombras de níveis de cinza produzidas por não-uniformidades da iluminação ou sensor utilizado para a aquisição da imagem. Operações aritméticas envolvem apenas uma posição espacial de pixel por vez, de modo que elas passam a ser feitas “no local”, no sentido que o resultado da operação aritmética feita na posição (x, y) pode ser armazenada naquela mesma posição em uma das imagens existentes, visto que essa posição não mais será visitada.

Essas operações aritméticas entre pixels p e q são denotadas por:

Adição: $p + q$

Subtração: $p - q$

Multiplicação: $p * q$ (também pq e $p \times q$)

Divisão: $p \div q$

Ao executar operações aritméticas sobre imagens, deve-se tomar especial cuidado com os problemas de *underflow*[3] ou *overflow*[4] do resultado. A adição de duas imagens de 256 tons de cinza, por exemplo, pode resultar em um número maior que 255 para alguns pixels, ao mesmo tempo em que a subtração de duas imagens pode resultar em valores negativos para alguns elementos. Para contornar estes problemas, existem basicamente duas alternativas: (1) manter os resultados intermediários em uma matriz na qual o espaço em memória alocado para cada pixel permita a representação de números negativos e/ou maiores que 255 e em seguida proceder a uma normalização destes valores intermediários; (2) truncar os valores maiores que o máximo valor permitido, bem como os valores negativos, igualando-os a 255 e 0, respectivamente. A decisão depende do objetivo que se tem em mente ao executar determinada operação. Efetivamente, a segunda alternativa é mais simples que a primeira.

2.5.2 Operações Logicas Pixel a Pixel

As principais operações lógicas utilizadas em processamento de imagens são E, OU e $COMPLEMENTO$, denotadas por:

E: $p\ E\ q\ (p.q)$

OU : $p\ OU\ q\ (p + q)$

$COMPLEMENTO$: $N\tilde{a}o\ q\ (\bar{q})$

Operações lógicas podem ser efetuadas em imagens com qualquer número de níveis de cinza, mas são mais bem compreendidas quando vistas em imagens binárias. São usadas para tarefas tais como mascaramento, detecção de características e análise de forma. Como as operações lógicas envolvem apenas uma posição de pixel de cada vez, podem ser feitas no local, como no caso das operações aritméticas.

2.5.3 Operações Orientadas à Vizinhança

Além do processamento pixel a pixel em imagens inteiras, operações lógicas e aritméticas são usadas em operações orientadas à vizinhança. O processamento

---

[3] A condição de underflow ocorre quando o valor atribuído a uma variável é menor que o menor valor que o tipo desta variável consegue representar.

[4] Um overflow ocorre nos casos em que o valor que se tenha atribuído é maior que o maior valor que o tipo de variável é capaz de representar.

da vizinhança é tipicamente formulado num contexto das assim denominadas operações por máscara. A ideia por trás das operações por máscara é modificar o valor de um pixel em função do seu próprio nível de cinza e o de seus vizinhos. Como, por exemplo, subtração de imagens, filtragem espacial e filtragem por mediana.

3 – PROCESSAMENTO DE IMAGEM DIGITAL NO MATLAB

Como já visto no capítulo anterior, uma imagem digital pode ser representada por uma matriz cujos elementos são os pixel’s da imagem, viu-se também que o MATLAB é um software muito utilizado no processamento de imagem digital, sendo ele o programa usado neste trabalho para mostrar a aplicação do conhecimento de matrizes no processamento de imagens digitais.

Para utilizar esse software é necessário primeiramente adquirir a licença de uso, a qual deve dar o direito ao pacote ou coleção de funções chamadas IMAGE PROCESSING TOOLBOX, que habilita o MATLAB a executar tarefas de processamento de imagens tais como: registro de imagem, operações morfológicas, filtragem, transformadas, análise e realce de imagens. Em seguida, é preciso se familiarizar com a linguagem e funcionamento dessa ferramenta matemática. Para tanto, listar-se-ão uma série de passos a serem dados durante o uso do software, bem como algumas funções necessárias para a execução da sequência de aulas propostas no próximo capítulo.

3.1 ESCREVENDO UMA MATRIZ NO MATLAB

Escrever uma matriz no software MATLAB é uma tarefa simples, uma vez que basta você digitar uma letra maiúscula, que representará a matriz, depois o sinal de igualdade e logo em seguida abrir um colchete e digitar os elementos da primeira linha da matriz, separando-os por um espaço simples. Ao terminar de digitar os elementos da primeira linha usa-se o ponto e vírgula, então, o software entende que os próximos valores digitados pertencem à próxima linha. Feito isto, digite os elementos da segunda linha da matriz procedendo do mesmo modo que fez na primeira linha e ao final novamente use ponto e vírgula. Repita esse procedimento até que todos os elementos da matriz tenham sido digitados, porém após o último elemento da última linha não use a pontuação usada nas demais apenas feche o colchete. Dando “enter” ao final desse procedimento o software apresentará para você a matriz.

3.2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UMA IMAGEM DIGITAL

Para uma imagem ser utilizada no MATLAB, é necessário estar salva em uma pasta selecionada no subdiretório work do software. Esta imagem deve ser salva em um dos formatos compatíveis ao MATLAB, como por exemplo: “jpg”, “gif” ou “tif”. Neste capítulo, serão usadas as imagens “Pontanegra.jpg” e “pincel.jpg” para exemplificar os comandos sugeridos a cada passo.

Para selecionar uma imagem pré-definida, usar-se os comandos *imread* e *imshow*, porém é recomendado sempre zerar as variáveis e fechar as imagens em janelas de figuras pré-existentes antes de começar a executar uma sequência de processamento de imagens. Para isto, usam-se os comandos *clear*, que zera as variáveis, e o comando *close all*, que apaga qualquer janela gráfica do ambiente.

Digitando na janela de comandos do MATLAB;

```
clear;
close all;
Ponta=imread('Pontanegra.jpg');
imshow(Ponta)
```

Obtém-se:

Figura 4 – Imagem “Pontanegra.jpg”

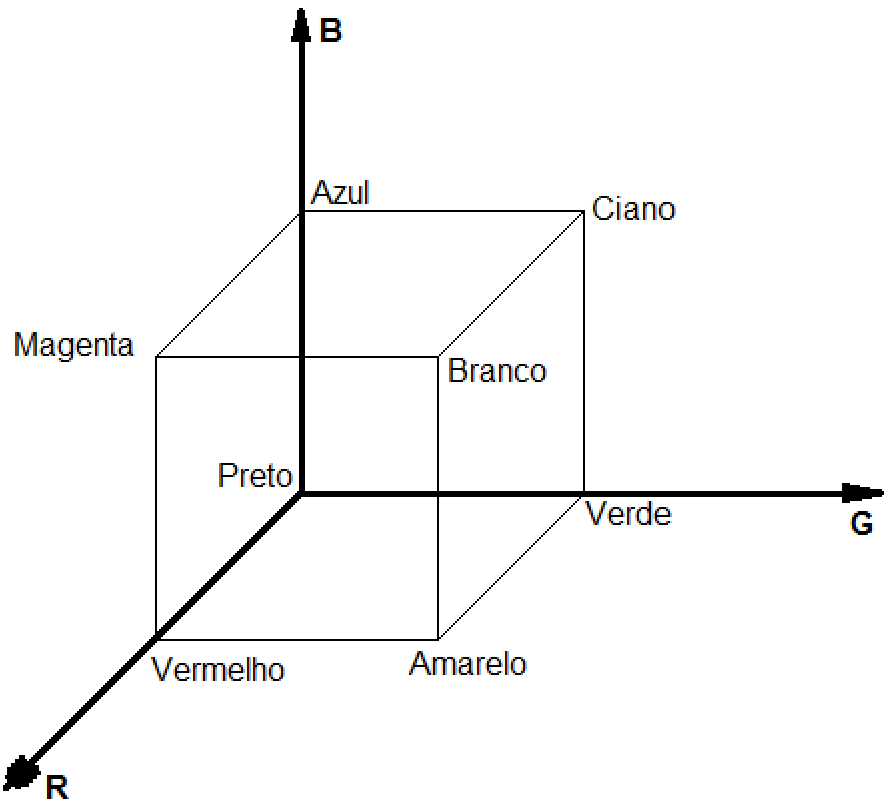
Fonte: Do autor

O comando *imread* faz a leitura da imagem “Pontanegra.jpg” e esta passa a ser uma informação armazenada na forma de matriz, a qual foi atribuído o nome matriz Ponta. Enquanto que o comando *imshow*, apresenta essa matriz na forma de imagem colorida em uma janela gráfica do ambiente.

O modelo de cores utilizado pelo MATLAB para a representação de uma imagem colorida é denominado Sistema RGB que também é utilizado na reprodução de cores em dispositivos eletrônicos como monitores de TV e computador, "datashows", scanners e câmeras digitais, assim como na fotografia tradicional.

No sistema RGB, cada cor é definida pela quantidade de vermelho (Red em inglês), verde (Green em inglês) e azul (Blue em inglês) que a compõem, baseando-se num sistema de coordenadas cartesianas. O subespaço de cores de interesse é o cubo mostrado na figura 5, no qual os valores RGB estão nos três vértices localizados sobre os eixos; ciano, magenta e amarelo estão nos outros três vértices; preto está na origem e branco no vértice mais distante da origem.

Figura 5 – Cubo de cores RGB



Fonte: Do autor

Neste modelo, as cores são pontos sobre ou dentro do cubo, definidas por vetores estendendo-se a partir da origem, ou seja, cada cor é identificada por uma tripla ordenada (R, G, B) de números inteiros. Em muitos arquivos digitais atuais usam-se números inteiros entre 0 e 255 para especificar estas quantidades, com o número 0 indicando ausência de intensidade e o número 255 indicando intensidade máxima, assim, teremos: $0 \leq R \leq 255$, $0 \leq G \leq 255$ e $0 \leq B \leq 255$. Tratando-se assim de uma imagem com resolução radiométrica[5] de 8 dígitos binários (8 bits), contendo 2^8 ou 256 níveis de cinza em cada uma das bandas R, G e B.

Observe no quadro 1, a seguir, alguns exemplos de cores nesse sistema.

Quadro 1 – Exemplos de Cores no RGB

Nome	**Cor**	**(R, G, B)**
Amarelo		(255, 255, 0)
Azul		(0, 0, 255)
Branco		(255, 255, 255)
Ciano		(0, 255, 255)
Cinza		(128, 128, 128)
Magenta escuro		(139, 0, 139)
Preto		(0, 0, 0)
Verde		(0, 255, 0)
Vermelho		(255, 0, 0)

Fonte: http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_color_cube/matrix_color_cube_br.html

As imagens digitais coloridas, neste sistema são representadas por um conjunto de três matrizes: A matriz R que especifica a quantidade de vermelho, a matriz G que especifica a quantidade de verde e a matriz B que especifica a quantidade de azul. Assim os elementos destas matrizes são números inteiros entre

[5] A resolução radiométrica é dada pelo número de dígitos binários (bits), representando a quantidade de níveis de cinza usados para expressar os dados coletados pelo sensor. O valor em bits é sempre uma potência de 2, assim, uma imagem com resolução 8 bits corresponde a 2^8 níveis de cinza.

0 e 255 e eles determinam a intensidade do pixel referente a cor da matriz. Desta forma, no sistema RGB, é possível representar 256^3 = 16777216 cores diferentes.

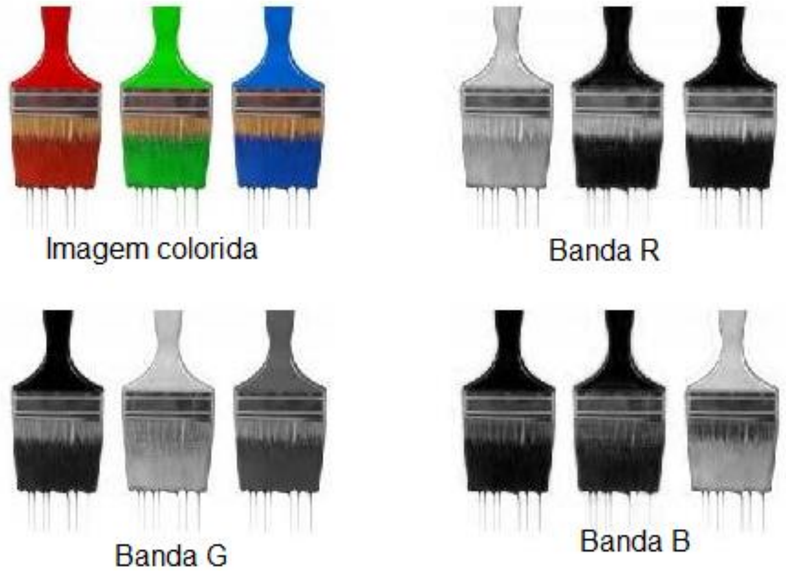
Para serem observadas as três componentes de uma imagem no formato RGB, pode-se usar os seguintes comandos:

```
clear;
close all;
Pinc=imread('pincel.jpg');
subplot(2,2,1);
imshow(Pinc);
subplot(2,2,2);
imshow(Pinc(:,:,1));
subplot(2,2,3);
imshow(Pinc(:,:,2));
subplot(2,2,4);
imshow(Pinc(:,:,3)
```

Nestes comandos, a matriz "Pinc (:, :, 1)" refere-se a componente R (red), a matriz "Pinc (:, :, 2)" refere-se a componente G (green) e a matriz "Pinc (:, :, 3)" refere-se a componente B (blue) da imagem "pincel.jpg".

O comando subplot(m, n, p) divide a janela gráfica em várias subjanelas, onde m indica o número de gráfico por linhas, n o número de gráficos por coluna e p a subjanela a ser ativada. Efetuado este comando no MATLAB, obtém-se a figura 6:

Figura 6 – Componentes da imagem "pincel.jpg" no formato RGB



Fonte: Adaptado de Kovalchuk Oleksandr

3.3 IMAGEM EM TONS DE CINZA

Para uma observação mais detalhada de uma das componentes de uma imagem digital, pode-se digitar na janela de comandos do MATLAB o comando:

```
Ponta = imread ('Pontanegra.jpg')
imshow(Ponta(:,:,1))
```

E assim, será apresentada a componente R, da imagem “pontanegra.jpg”. Observe a figura 7:

Figura 7 – Imagem em tons de cinza

Fonte: Do autor

Esta imagem mostrada trata-se de uma imagem monocromática, em que a intensidade luminosa varia desde o preto, que representa a ausência total de intensidade luminosa, ao branco que representa a intensidade luminosa máxima.

A representação matricial de uma imagem digital em níveis de cinza é composta por números inteiros que representam o nível da intensidade luminosa de cada pixel, sendo que, em teoria, a única restrição para a representação da intensidade luminosa mínima é que seja um valor positivo ou ainda nulo e sobre a intensidade luminosa máxima é que seja um valor finito. A maioria dos arquivos digitais atuais usa o número 0 para indicar a ausência total de intensidade luminosa (cor preta) e o número 255 para indicar a intensidade máxima (cor branca), totalizando então, 256 tons distintos de cinza (imagem de 8 bits).

Usando agora o comando;

```
Ponta(1:10, 1:10, 1)
```

Vê-se uma parte da codificação desses níveis, ou seja, os pixel's das dez primeiras linhas até a décima coluna. Observe:

ans =

161	161	163	163	163	163	163	164	162	162
158	159	161	161	163	163	164	164	162	162
157	158	160	161	163	163	164	164	162	161
157	157	159	159	160	161	163	163	162	161
157	158	159	159	160	160	163	163	161	161
158	158	159	160	160	163	163	163	161	161
159	160	160	161	163	163	164	164	163	164
160	160	161	161	163	163	164	164	164	164
159	159	160	160	160	160	161	161	162	162
159	159	160	160	160	160	161	162	162	162

Agora veja o comando abaixo:

```
size(Ponta)
```

O comando size(Ponta) dá o número de linhas e o número de colunas da matriz Ponta, além de uma terceira coordenada que informa o número de dimensões da imagem

>> size (Ponta)

ans =

3456 4608 3

Esse resultado mostra que a imagem 'Ponta negra.jpg' é constituída de 3456 linhas e 4608 colunas, totalizando 15925248 pixel's. Além disso, o número 3 indica que a imagem é composta por três dimensões, esse formato de gravação é na verdade uma composição colorida indicada pelo índice "3" (formato RGB).

3.4 BINARIZAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS

Uma imagem binária é uma transformação do tipo $BIN: (x, y) \rightarrow [0,1], (x, y) \epsilon \mathbb{Z}^2$, que permite associar cada par de inteiros (x, y) a um único elemento natural pertencente ao intervalo $[0,1]$. Em outras palavras, são imagens digitais que usam apenas as cores preta e branca e sua representação matricial é composta apenas por elementos 0 e 1, onde o número 0 indica a cor preta e o número 1 indica a cor branca.

Para binarizar a imagem “Pontanegra.jpg”, aqui será usado o método da limiarização[6] da imagem. Para isto, serão necessários os comandos:

```
clear;
close all;
Ponta = imread(‘pontanegra.jpg’);
R = Ponta (:, :, 1);
G = Ponta (:, :, 2);
B = Ponta (:, :, 3);
figure (1); subplot (2, 2, 1); imshow (Ponta); subplot (2, 2, 2);
imshow (R); subplot (2, 2, 3); imshow(G); subplot (2, 2, 4);
imshow (B);
figure (2); imhist (R);
[m, n] = size (R); limiar = 100;
For i = 1:m
For j = 1:n
If R(i, j) > = limiar
Rb(i, j) = 1;
Else Rb (i, j) = 0;
End
End
End
Figure(3); imshow (Rb)
```

Assim, obtém-se a figura 8:

[6] Trata-se do particionamento do histograma da imagem por um limiar único $f(x, y) = T$, com o objetivo de tornar evidente ou explicito agrupamentos de pixel's contíguos que possuam características semelhantes.

Figura 8 – Imagem Pontanegra.jpg nas bandas R, G e B

Imagem Pontanegra.jpg

Banda R

Banda G

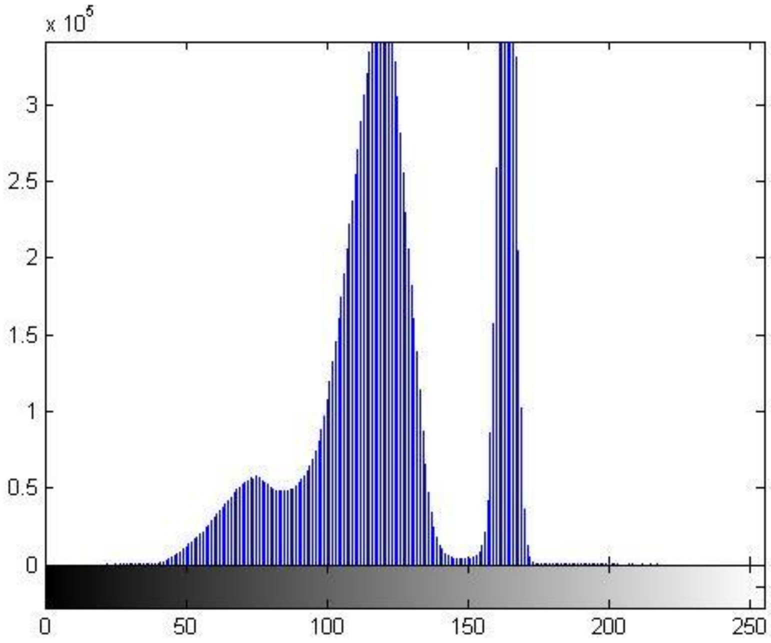
Banda B

Fonte: do autor

Neste roteiro, novos comandos aparecem, como por exemplo: *figure*, este comando serve para dar um título à janela gráfica onde a imagem é mostrada, algo de muita valia quando trabalha-se com um número grande de imagens; e também o comando *imhist*, que serve para exibir o histograma dos dados da imagem.

O histograma de uma imagem digital com níveis de cinza no intervalo [0, 255] é uma função discreta $p(r_k) = \frac{n_k}{n}$, em que r_k é o k-ésimo nível de cinza, n_k é o numero de pixel's na imagem com esse nível de cinza, n é o número total de pixel's na imagem e $k = 1, 2, \cdots, 255$. Grosseiramente falando, $p(r_k)$ dá uma estimativa da probabilidade de ocorrência do nível de cinza r_k. Um gráfico dessa função para todos os valores de k fornece uma descrição global da aparência de uma imagem. Através deste histograma é que escolhe-se o limiar para a binarização. Note que, na imagem R, a maior concentração de tons escuros está em valores inferiores a 100; logo, para se destacar a ponta negra da imagem, usa-se como limiar o número 100. Observe a figura 9:

Figura 9 – Histograma da imagem Pontanegra jpg



Fonte: Do autor

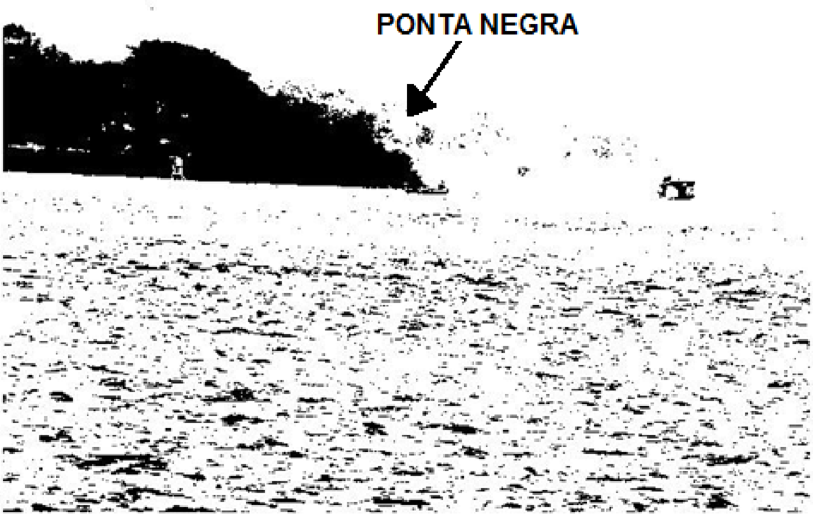
Nas dez últimas linhas de comando, têm-se os comandos necessários para a binarização da imagem R, sendo $[m, n]$, a matriz com o mesmo número de linhas e colunas que a matriz R, onde m representa o número de linhas e n o número de colunas.

Os comandos:

```
For i = 1:m
For j = 1:n
If R(i, j) > = limiar
Rb(i, j) = 1;
Else Rb (i, j) = 0;
End
End
End
```

Indicam que o elemento da matriz Rb será 1 se o elemento correspondente da matriz R for maior ou igual a 100 e que o elemento da matriz Rb será 0 se o elemento correspondente da matriz R for menor que 100. Observe a figura 10, que mostra a imagem “Pontanegra.jpg” na forma binarizada.

Figura 10 – Imagem Pontanegra.jpg binarizada



Fonte: Do autor

Nesta imagem, os elementos da matriz característica são apenas 0's e 1's. Observe os pixel's das linhas 200 a 204 e colunas 200 a 210, usando o comando:

```
Rb(200:204, 200:210)
```

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Observe agora os pixel's das linhas 3452 a 3456 e colunas 1 a 10, usando o comando:

```
Rb(3452:3456, 1:10)
```

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O recurso de binarização de uma imagem está associado, no Processamento de imagens, a atividades como realce de uma determinada região, detecção de bordas, além de outros. No entanto, este trabalho detém-se apenas à representação matricial dessa imagem.

3.5 AJUSTE DE CONTRASTE

Este recurso do processamento de imagem digital é usado para realçar uma determinada característica ou características da imagem que, devido a um baixo contraste, há dificuldade para ser identificada.

A função utilizada nesse recurso de melhoramento da imagem digital é o comando *histeq*, que melhora o contraste de imagens através da transformação dos valores dos níveis de cinza da imagem. Este recurso melhora o contraste da imagem usando equalização de histograma.

Equalizar o histograma significa obter a máxima variância do histograma de uma imagem, obtendo assim uma imagem com melhor contraste. O contraste é uma medida qualitativa e que está relacionada com a distribuição dos tons de cinza em uma imagem.

Para ajustar o contraste da imagem “Pontanegra.jpg”, foram usados os seguintes comandos:

```
clear all;
close all;
A = imread ('Pontanegra.jpg');
A1= histeq(A(:,:,1));
A2= histeq(A(:,:,2));
A3= histeq(A(:,:,3));
Ponta(:,:,1)=A1;
Ponta(:,:,2)=A2;
Ponta(:,:,3)=A3;
subplot(1,2,1);imshow(A); subplot(1,2,2); imshow(Ponta)
```

Obtendo, assim:

Figura 11 – Ajuste de contraste

Fonte: do autor

Comparando as imagens é possível distinguir, perfeitamente, o encontro das águas dos rios Amazonas e Tapajós.

4 – PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE AULAS

4.1 ASPECTOS GERAIS

O processo ensino-aprendizagem não se baseia apenas em propor ao aluno conteúdos prontos, mas também busca de métodos de envolvê-lo de forma mais concreta no processo por descoberta própria, compreendendo as ideias básicas no desenvolvimento e organização do conteúdo.

Desta forma, para se definir um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação, pesquisadores tem proposto um novo termo em educação que é a sequência didática, definida por ZABALA (1998, p.18) como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos".

Para haver a sequência didática é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento. Para tanto, é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir deles, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados.

No entanto, relacionar conteúdos ensinados em sala de aula ao cotidiano dos alunos não é tarefa fácil, sobretudo quando se busca compreender o fenômeno educativo de forma mais ampla e a realidade dos educandos, uma vez que, dependendo da região do País onde se leciona ou mesmo do bairro da cidade onde está localizada a escola em que se trabalha, a realidade varia bastante.

Contudo, independente do estado, cidade ou bairro, os alunos tem cada vez mais acesso ao "mundo digital", através da internet, quando entra em contato com: pesquisas para a escola, jogos eletrônicos e redes de relacionamento.

Implantar o computador na educação não é tarefa fácil, visto que, é necessário que sua utilização seja de forma crítica e esteja voltada para fins pedagógicos. Para isso, é preciso que o professor esteja capacitado para usar o computador como recurso educacional.

> Para que as tecnologias de informação e comunicação possam trazer alterações no processo educativo, elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente, faça diferença. (KENSKI, 2007, p.46)

Neste sentido, este capítulo propõe uma sequência didática a ser desenvolvida, em laboratório de informática, por professores e alunos do ensino médio, independente das atividades desenvolvidas em sala de aula, porém, não deixando de usar exercícios, a cargo do professor da turma, a serem manualmente desenvolvidos para fixação das definições vistas e aquisição de habilidades de execução das operações.

Esta sequência de aulas tem como principal objetivo transmitir ao professor e ao aluno do ensino médio a riqueza de um conteúdo vasto, atual e que envolve o conhecimento de matrizes, assunto pouco explorado no que diz respeito as suas aplicações, promovendo aprendizado através de situações-problema, mostrando como este conteúdo se insere nas questões do nosso cotidiano além de melhorar a percepção do aluno e estimular a busca por novos caminhos para se ensinar o conteúdo matrizes.

Para a execução da sequência de aulas sugeridas, faz-se necessário que os seguintes pré-requisitos sejam apresentados:

a) Os alunos precisam ter domínio sobre as operações: adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais.

b) Um laboratório de informática equipado com pelo menos um computador para cada dois alunos.

c) Um computador para uso exclusivo do professor conectado a um projetor multimídia.

d) A aquisição da licença de uso do Software MATLAB com pacote IMAGE PROCESSING TOOLBOX.

e) O professor precisa dominar, pelo menos, as funções do Software mostradas no capítulo anterior.

f) Cada aula com duração de 80 a 90 minutos.

4.2 Sequência didática

As atividades aqui propostas visam a atender às perspectivas de ZABALA (1998) quando defende o pensar na configuração de uma sequência didática como um dos caminhos mais acertados para melhorar a prática educativa. Além disso, consideram os parâmetros estabelecidos pelo projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa, que tem como objetivo principal, segundo o site Klein.sbm.org.br, relacionar uma visão ampla da área da Matemática com conteúdos e suas abordagens no ensino médio e na graduação universitária, produzindo recursos para fornecer continuamente aos professores de matemática a estrutura, a profundidade, a conexão, a vitalidade, a aplicabilidade, a beleza e os valores da disciplina.

Uma amostra desses recursos é o artigo de Dirce Pesco e Humberto Bortolossi intitulado *Matrizes e Imagens Digitais*, que motivou este trabalho apresentando parâmetros elementares na aplicação de matrizes no processamento de imagens digitais, que aqui serão complementados.

Para a aplicação desta sequência didática são necessárias sete aulas no laboratório de informática, ao final das quais, espera-se que os alunos tenham as definições claramente entendidas, sabendo utilizá-las para a interpretação de situações-problema envolvendo o tema matrizes de forma a situar propriedades e características, mostrando domínio na execução correta dos cálculos manuais e com uso do software.

AULA 1 – DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Definição de Matrizes: Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz A, $m \times n$, real é uma dupla sequência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente, essa matriz pode ser expressa por $A = a_{ij}$.

Após ter definido matriz, esta aula deverá prosseguir com atividades de familiarização com a linguagem usual do software, além de atividades simples como escrever matrizes distintas, usando-as para exemplificar os diferentes tipos como: matriz quadrada, matriz retangular, matriz linha, matriz coluna, matriz nula, matriz triangular e matriz diagonal. Além de adicioná-las, subtraí-las, multiplicar por um escalar, calcular a transposta e multiplicá-las.

Recomenda-se ainda que, por enquanto, não sejam definidas para os alunos as operações entre matrizes e as suas condições de existência, deixando o educando meditar sobre as possíveis razões para as operações não terem dado certo.

Aula 2 – Adição e Subtração de Matrizes

Aqui mostram-se as definições de adição e subtração de matrizes, destacando as condições para que tais operações sejam possíveis, exemplificando através de imagens digitais e mostrando aplicações dessas operações no processamento de uma imagem digital.

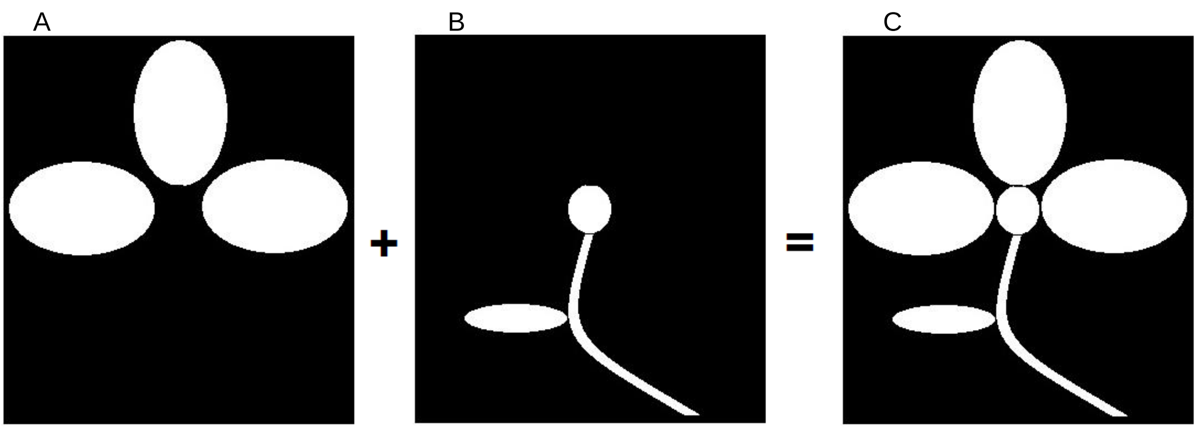
Use a seguinte sequência:

a) Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, necessariamente do mesmo tipo, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas, define-se a adição dessas matrizes, como sendo a matriz $C = (c_{ij})$,do mesmo tipo de A e B, tal que, cada elemento de C é igual a soma dos elementos correspondentes de A e B.

No exemplo a seguir, usa-se a adição entre duas imagens distintas A e B, porém de mesma dimensão, obtendo como resultado uma terceira imagem C que possui características presentes em A e B.

Figura 12 – Adição de imagens



Fonte: Do autor

MÜLLER e DARONCO (2000) usam no trabalho de pós-graduação, intitulado *Operações Aritméticas em Imagens*, a adição de imagens para retirar ruídos de uma imagem, através da média aritmética entre imagens similares de um mesmo objeto, porém com ruídos distintos.

Neste momento, proponha aos alunos alguns exercícios para a verificação das propriedades da adição de matrizes, manualmente e com o uso do software.

Propriedades1:

Sendo A, B, C e 0 matrizes do mesmo tipo valem as seguintes propriedades:

(i) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(ii) Comutativa: $A + B = B + A$;

(iii) Elemento Neutro: $A + 0 = A$;

(Demonstração no apêndice A).

b) Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes $F = \left(f_{ij}\right)$ e $H = \left(h_{ij}\right)$, necessariamente do mesmo tipo, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas, define-se a subtração dessas matrizes, como sendo a matriz $G = \left(g_{ij}\right)$,do mesmo tipo de F e H, tal que, cada elemento de G é igual a diferença entre os elementos correspondentes de F e H.

c) Aplicação no processamento de imagens digitais

A diferença entre duas imagens $f(x, y)$ e $h(x, y)$, expressa como

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

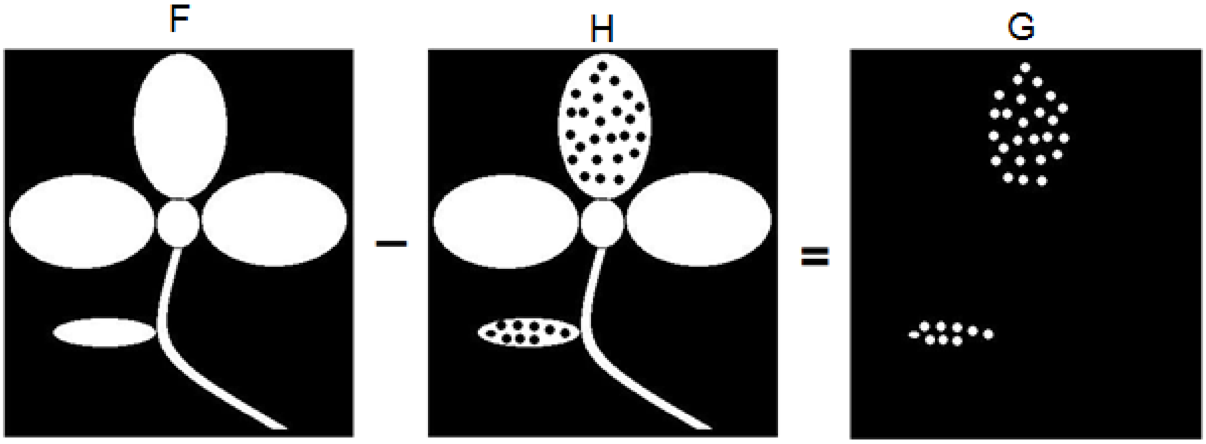
É obtida através da diferença entre todos os pares de pixel's correspondentes de f e h, ou seja, trata-se de uma subtração de matrizes:

$$G = F - H$$

Sendo F, G e H matrizes do mesmo tipo, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas, e representam respectivamente as imagens, $f(x, y)$, $g(x, y)$ e $h(x, y)$.

No exemplo abaixo, a imagem $h(x, y)$ é imagem inicial do objeto, por assim dizer, aqui definida como máscara, a imagem $f(x, y)$ é uma imagem do mesmo objeto, porém com alguns pixels distintos de $h(x, y)$ e a imagem $g(x, y)$ é a imagem formada apenas pelas regiões distintas entre $f(x, y)$ e $h(x, y)$.

Figura 13 – Subtração de imagens



Fonte: Do autor

A subtração de imagens tem diversas aplicações importantes em segmentação e realce de imagens. Um exemplo, é o usado por Gonzalez (2000) no qual é mostrada uma aplicação para realçar uma imagem na área médica chamada radiografia em modo máscara. Nesse caso $h(x,y)$, a máscara, é uma imagem de raio-X de uma região do corpo do paciente, a imagem $f(x,y)$ é uma amostra de imagem similar a $h(x,y)$, mas adquirida após a injeção de um corante na corrente sanguínea. A imagem resultante $g(x,y)$ da subtração, é apenas as áreas que são distintas entre $f(x,y)$ e $h(x,y)$ em detalhes realçados.

Aula 3 – Exercitando as operações já aprendidas

Para esta aula será necessário que os alunos tragam de casa algumas imagens digitais e o professor deverá orientá-los a salvar em uma determinada pasta previamente criada pelo educador, que deve deixar seus alunos exercitando as operações aprendidas na aula anterior e sempre observando e auxiliando as dúvidas dos alunos. Depois, deve pedir que cada um reflita sobre os resultados obtidos (imagina-se que muitos resultados estranhos aparecerão nesse momento).

Em seguida, peça para que eles tentem reproduzir ou, de preferência, produzir novos exemplos como os apresentados na aula anterior. Para isso, será necessário usar um software complementar, como por exemplo, o Paint.

Aula 4 - Transposição de Matrizes

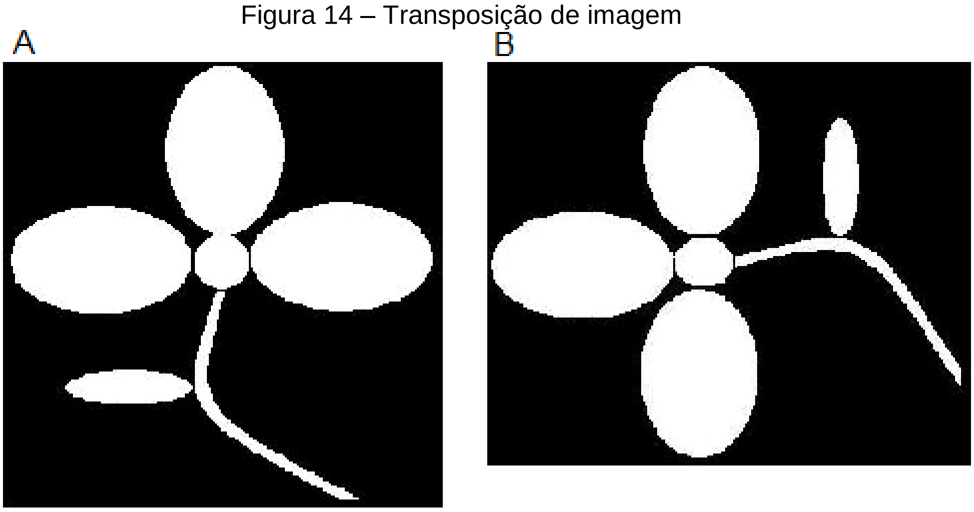
Inicie esta aula retomando a atividade proposta no final da aula anterior, verificando se todos conseguiram desenvolvê-la e mostrando alguns exemplos feitos pelos alunos destacando os acertos e corrigindo possíveis erros. Para concluir a aula defina matriz transposta, use exemplos envolvendo imagens digitais, como o proposto nesta sessão e, em seguida, deixe os alunos aplicarem a transposição de matrizes a algumas imagens e usarem exemplos numéricos para verificação das propriedades da transposição de matrizes, sempre acompanhando os resultados obtidos.

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, pode-se obter outra matriz $A^T = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada transposta de A.

Em processamento de imagens coloridas, é necessário definir a transposta para cada uma das bandas R, G e B das imagens.

Figura 14 – Transposição de imagem



Fonte: do autor

Na imagem acima, B é a matriz transposta de A.

A operação de transposição em matrizes verifica as seguintes propriedades:

Propriedades 2:

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(ii) $(A^T)^T = A$;

(iii) $(\propto A)^T = \propto A^T (\propto escalar)$;

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

(Demonstração no apêndice A).

Aula 5 – Produto por Escalar

Nesta aula, defina o produto de uma matriz por um escalar e mostre um exemplo no MATLAB de uma matriz numérica, evidenciando o que acontece com seus elementos quando multiplicada por um escalar e explicando o significado dessas alterações em se tratando de uma imagem digital. Em seguida exemplifique seus comentários usando exemplos aplicados a imagens digitais, como os propostos nesta sessão.

Produto de uma matriz por um escalar

Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$, $m \times n$, e dado um número real α, o produto de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: Dada uma imagem A, multiplicando-a pelos números reais 3 e 0,5 obtém-se as respectivas imagens $B = 3A$ e $C = 0{,}5A$.

Figura 15 – Produto de uma imagem por um escalar

Fonte: Do autor

O produto de uma imagem por um escalar, permite realçar as diferenças entre imagens com níveis de intensidades diferentes.

Neste momento proponha aos alunos alguns exercícios para a verificação das propriedades da multiplicação por escalar, manualmente resolvidos e com o uso do software.

Propriedades 3:

Para o produto de uma matriz por um escalar, valem as seguintes propriedades:

(i) $(\propto \beta)A = \propto (\beta A)$;

(ii) $(\propto + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(iii) $\propto (A + B) = \propto A + \propto B$;

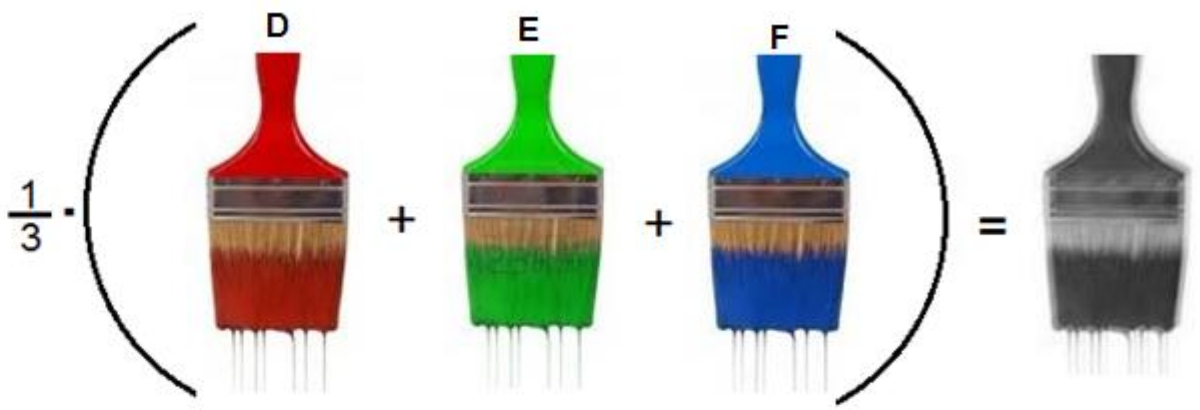
(iv) $1A = A$;

quaisquer que sejam as matrizes A e B e quaisquer que sejam os números reais $\propto$ e β.

(Demonstração no apêndice A).

Exemplo 2: Se calculada a média aritmética das imagens D, E e F que são imagens de um mesmo objeto, porém em cores de predominância vermelha, verde e azul, respectivamente, obtém-se uma imagem em tons de cinza, observe.

Figura 16 – Média Aritmética de imagens



Fonte: Adaptado de Kovalchuk Oleksandr

Exemplo 3: Usando multiplicação de uma matriz por um escalar e também a adição de matrizes, é possível criar um efeito de transição de imagem. Para tanto, necessita-se de duas imagens coloridas representadas pelas matrizes L e K.

Definindo a matriz:

$$M(x) = (1 - x).L + x.K, \text{ com } x \in [0,1].$$

(note que, como as imagens tomadas são coloridas, é necessário definir $M(x)$ para cada uma das bandas R, G e B das imagens L e K).

Obtém-se:

Figura 17 – Transição de imagens

Fonte: Do autor

Onde M(0) é a imagem L, M(0,25), M(0,4), M(0,5), M(0,75) são uma mistura dos pixels de L e de K e, M(1) é a imagem K.

Outro exemplo envolvendo o conhecimento de matrizes é o realce de imagens, que consiste em processá-la de modo que o resultado seja mais apropriado para uma aplicação específica do que a imagem original. Mostra-se aqui uma técnica de realce de imagem chamada de filtragem por mediana. Trata-se de uma técnica para remoção de ruídos, que muitas vezes contaminam a imagem no momento da aquisição ou transmissão dela, através da substituição do nível de cinza de cada pixel pela mediana dos níveis de cinza na vizinhança daquele pixel.

Para calcular a filtragem por mediana em uma vizinhança de um pixel, primeiramente selecionam-se os valores do pixel e os de seus vizinhos, determina-se a mediana, e atribui-se este valor ao pixel. Por exemplo, em uma vizinhança 3×3, a mediana é o 5º maior valor.

Observe o resultado da aplicação dessa técnica para uma vizinhança 3×3, aplicada a uma imagem com ruído.

Figura 18 – Filtragem de imagens

Imagem com ruído

Imagem com o filtro da mediana

Fonte: Do autor

Aula 6 – Multiplicação de matrizes

Inicie esta aula definindo a multiplicação de matrizes e evidenciando as condições de existência do produto entre duas matrizes quaisquer, use o software para resolver exemplos numéricos, porém, mais uma vez ressalta-se a importância de se resolver manualmente uma série de exercícios, podendo ser proposto aos alunos a verificação das propriedades da multiplicação de matrizes.

Multiplicação de matrizes

Considere a matriz $A = (a_{ij})$ de tipo $m \times n$ e a matriz $B = (b_{ij})$ de tipo $n \times p$. O produto $A \cdot B$ (também indicada por AB) é a matriz $m \times p$ cujo termo geral é dado por:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Propriedades 4:

Desde que satisfeitas as condições de existência das somas e produtos a multiplicação de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(AB)C = A(BC)$ $\quad (lei\ associativa)$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ $\quad (lei\ distributiva$ à $esquerda)$

(iii) $(B + C)A = BA + CA$ $\quad (lei\ distributiva$ à $direita)$

(iv) $\propto (AB) = (\propto A)B = A(\propto B)$ $\quad (\propto escalar)$

(Demonstração no apêndice A)

Aula 7 – Matriz inversa

Inicie esta aula com a definição de matriz inversa, em seguida use exemplos de matrizes que possuem inversa e matrizes que não possuem. Para estes cálculos recomenda-se o uso do software por se tratarem de cálculos trabalhosos demais para matrizes com mais de três linhas e três colunas. Em seguida, mostre a aplicação no processamento de imagem digital dos conteúdos visto nesta e na aula anterior e use o tempo restante para exercícios manuais.

A inversa de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, pode existir outra matriz B, quadrada $n \times n$, tal que

$$AB = I \quad e \quad BA = I$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$, cujos elementos são iguais a 0, se $i \neq j$, e iguais a 1, se $i = j$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$. Neste caso diz-se que A é inversível e que B é uma matriz inversa de A. Se C fosse outra inversa de A, teria-se $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$. Assim, quando A é inversível, sua inversa é única e denotada por A^{-1}, de modo que

$$AA^{-1} = I \quad e \quad A^{-1}A = I$$

Uma aplicação para multiplicação de matrizes, matriz transposta e matriz inversa pode ser exemplificada através da decomposição em valores singulares (DVS), que consiste em escrever uma matriz $A_{m \times n}$ como o produto de três matrizes: (veja o apêndice B).

$$A_{m\,X\,n} = U_{m\,X\,m}\, S_{m\,X\,n}\, {V^T}_{n\,X\,n}$$

onde U e V são matrizes ortogonais e S é uma matriz cujos elementos s_{ij} são iguais a zero para $i \neq j$ e $s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \cdots \geq s_{k,k} \geq 0$, com $k = min\{m, n\}$.

Uma das aplicações dessa decomposição DVS, usada por Dirce Pesco e Humberto Bortolossi no artigo *Matrizes e Imagens Digitais*, consiste na redução de informações (pixel's) a serem transmitidas de um satélite em órbita para um laboratório na terra.

Suponha que a matriz A seja uma imagem em tons de cinza, de tamanho 4000 por 4000 (imagem com resolução 16 megapixels), que deve ser transmitida do satélite para o laboratório na Terra. Em princípio o satélite teria que enviar dezesseis milhões de números. Como, tipicamente, apenas os primeiros elementos s_{ii} da matriz S da decomposição DVS de A são significantes (os demais são "pequenos"), basta então que o satélite envie, as 20 primeiras colunas de U e de V e os 20 primeiros números s_{ii}, totalizando apenas 20.4000 + 20.400 + 20 = 320020 números a serem enviados. Ao receber estes dados, o laboratório na terra calcula a matriz

$$s_{1,1}u_1{v^T}_1 + s_{2,2}u_2{v^T}_2 + \cdots + s_{20,20}u_{20}{v^T}_{20}$$

que dará a aproximação da imagem original.

Avaliação

A avaliação deverá ser composta de duas partes. A primeira qualitativa, realizada durante todo o processo e levando-se em consideração os seguintes requisitos:

a) Percepção de equívocos que levem a possíveis falhas nas operações.

b) Execução das atividades propostas no MATLAB.

c) Compreensão das definições.

d) Compreensão das propriedades e percepção da aplicação das mesmas na resolução de problemas.

A segunda parte desta avaliação será de caráter quantitativo, onde o professor verificará as habilidades e a execução correta das operações entre matrizes realizadas manualmente. Fica a critério do Educador a seleção de questões para compor esta segunda parte da avaliação.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por novos métodos de se ensinar Matemática tem sido assunto de muita discussão entre professores e pesquisadores de todo o mundo. Este trabalho veio mostrar, o estudo de matrizes através de uma aplicação prática, moderna e de interesse da juventude que é o processamento de imagens digitais, mostrando ao professor a necessidade de se buscar, conhecer e estar consciente de que a adoção de tecnologias da informação na área educacional, além de uma sequência de atividades bem elaboradas e atuais tem reflexos positivos na sua prática docente e nos processos de aprendizagem conduzindo para a apropriação do conhecimento. Ressalta, ainda, como o uso de tecnologias, como imagens digitais e softwares, podem levar os educandos a alterarem a forma de agir, pensar e questionar, desde que usados como aparatos pedagógicos para a execução de uma sequência didática cuidadosamente elaborada, visando atingir objetivos concretos como estabelecido neste trabalho.

Em outras palavras, este trabalho, mostra que é possível dinamizar o aprendizado de forma articulada, visto que os alunos são levados de uma maneira rápida a tentar coisas diferentes, a novas descobertas, a observar propriedades, a testar parâmetros, a investigar o conteúdo ministrado pelo professor de maneira diferente da qual estão habituados, uma vez que o uso de softwares ajuda a realizar com maior rapidez os cálculos, de modo que se resolve um maior número de questões distintas em um menor intervalo de tempo.

É notável que muitos professores do ensino médio, tem medo de usar tais inovações em suas aulas e correr o risco de não agradar o público ficando em uma situação difícil diante da turma; no entanto, pensar desta forma não ajudará em nada nesta luta contínua de tornar o ensino/aprendizado de Matemática algo agradável tanto para quem “ensina” quanto para quem aprende.

Desta forma, este trabalho deve servir de estímulo para professores e alunos, dando suporte para argumentações teóricas sobre o conteúdo matrizes e sua aplicação no processamento de imagens digitais, e ainda mostrar que é necessário investir na formação e qualificação do professor do ensino médio de uma forma mais sistematizada e articulada, associando as inovações tecnológicas com a prática realizada em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BOLDRINE, José Luiz ; COSTA, Sueli I. Rodrigues. **Álgebra linear**. São Paulo: Ed. Harbra ltda. 1986.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Ed. Atual. 1990.

GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. **Processamento de imagens digitais**. São Paulo: Ed. edgard Blücher ltda. 2000.

KENSKI, Vani M. **Educação e tecnologias**: O Novo Rítimo da Informação. Campinas: Ed. Papirus. 2007.

LAY, David C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: Ed. LTC. 1999.

LEON, Steven J. **Álgebra linear com aplicações**. Rio de Janeiro: Ed. LTC. 1999.

MARQUES FILHO, Ogê; VIEIRA NETO, Hgo. **Processamento digital de imagens**. Rio de Janeiro: Ed. Brasport, 1999. Disponível em: <http://www. >. Acesso em: 10/10/2012.

MÜLLER, Daniel N.; DARONCO, Everaldo L. **Operações aritméticas em imagens**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de pós-graduação em computação. 2000. Disponível em: <http://www.inf.ufrgs.br/ ~danielnm/docs/OperacoesAritmeticasImagens.pdf>. Acesso em: 09/ 01/ 2014.

PESCO, Dirce U.; BORTOLOSSI, Humberto J. **Matrizes e imagens digitais**. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.Klein.sbm.org.br>. Acesso em: 12/08/2012.

RELATÓRIO DE OLHO NAS METAS 2012. **Movimento todos pela Educação**. 5ª edição. Disponível em:<http://p.dowload.com.br/jc/-ne10/De_Olho_nas _Metas2012.pdf>. Acesso em: 23/12/2013.

REVISTA ESCOLA. **Sequência Didática**. Disponível em <http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/roteiro-didatico-sistema-numeracao-decimal-1-2-3-anos-634993.shtml?page=5.5>. Acesso em: 07/01/2013.

VALENTE, José A. **O Computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Ed. UNICAMP/NIED. 1999.

VALENTE, José A. **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas: Gráfica central da UNICAMP, 1993.

ZABALA, Antôni. **A prática educativa**: Como ensinar. Porto Alegre: Ed. Artmed. 1998.

SITES CONSULTADOS

Acesso em: 12 ago. 2012
http://Klein.sbm.org.br

http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_color_cube/matrix_color_cube_br.html

Acesso em: 12 jul. 2013
http://www.inf.ufrgs.br/~danielnm/docs/OperacoesAritmeticasImagens.pdf

http://jefersonlfmartinez.blogspot.com.br/

Acesso em: 15 jul. 2013
http://www.del.ufms.br/tutoriais/matlab/apresentacao.htm

http://ifgjatai.webcindario.com/MatLab_para_Engenharia.pdf

http://mit.universia.com.br/18/1806/pdf/matlab.pdf

Acesso em: 01 ago. 2013
http://www.diaadiaeducação.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1381-8.pdf

http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/28-1-A-gt1_marin_ta.pdf

http://sbem.esquiro.Kinhost.net/anais/XIENEM/pdf/3595_2014_ID.pdf

http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1641_416_ID.pdf

Acesso em: 07 jan. 2014
http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/cmac-se/2011/trabalhos/PDF/311.pdf

http://www.sbm.org.br/projetoKlein.asp

Acesso em: 09 jan. 2014
http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-br.html

http://www.shutterstock.com/pt/pic-98594528/stock-photo-a-paintbrush-dripping-with-rgb-paint-isolated-on-white.html?src=pp-photo-97754297-7

APÊNDICE A: Demonstrações das propriedades de operações entre matrizes.

PROPRIEDADE1:

(i) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes do mesmo tipo, então:

$A + (B + C) = \left((a_{ij}) + (b_{ij})\right) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = \left((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right)$

Como $\left((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right) = \left(A + (B + C)\right)$, pois $(a_{ij}), (b_{ij})$ e (c_{ij}) são números reais, e para eles é válida a propriedade associativa. Logo, tem-se:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(ii) Comutativa: $A + B = B + A$;

Seja $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes do mesmo tipo, então:

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = b_{ij} + a_{ij}$, pois a_{ij} e b_{ij} são números reais, e para eles é válida a propriedade associativa.

Porém, $(b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$. Logo:

$$A + B = B + A$$

(iii) Elemento Neutro: $A + 0 = A$;

Sejam $A = (a_{ij})$ e $0 = (b_{ij})$, duas matrizes do mesmo tipo, tais que, os elementos de **0** sejam todos nulos. Então, a matiz $A + 0$ será uma matriz $C = (c_{ij})$, cujos elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Como todos os elementos da matriz **0** são iguais à zero, tem-se $C = (c_{ij}) = (a_{ij}) = A$, logo:

$$A + 0 = A.$$

Propriedade 2.

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, duas matrizes do mesmo tipo, logo a soma de A com B é igual a uma matriz $C = (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$ e $(A + B)^T = C^T$, com C^T sendo a matriz transposta de C. Portanto, $C^T = (c_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji})$, pois cada coluna de C^T é igual à respectiva linha de C e cada linha de C^T é igual à respectiva coluna de C.

Como $A^T = (a_{ji})$ e $B^T = (b_{ji})$, logo: $(A+B)^T = C^T = (c_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^T + B^T$.

Assim, prova-se que:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(ii) $(A^T)^T = A$;

Seja $A = (a_{ij})$, uma matriz qualquer, logo $A^T = (a_{ji})$. E tomando a matriz $B = A^T = (a_{ji})$, tem-se: $B^T = (a_{ij})$ que é a mesma matriz A.

Como $B = A^T$, logo: $B^T = (A^T)^T = (a_{ij}) = A$, ou seja:

$$(A^T)^T = A$$

(iii) $(\propto A)^T = \propto A^T (\propto\ escalar)$;

Seja $A = (a_{ij})$, uma matriz qualquer, e $\propto$ um número real. Assim:

$$\propto A = \propto (a_{ij}).$$

Tomando uma matriz B, tal que $B = \propto A = \propto (a_{ij})$, tem-se $(\propto A)^T = B^T$ sendo a matriz cujos elementos da linha j são iguais aos elementos da coluna j de B e os elementos de sua coluna i são os elementos da linha i de B, ou seja, $B^T = \propto (a_{ji})$, porém, $A^T = (a_{ji})$. Então: $B^T = \propto (a_{ji}) = \propto A^T$, logo:

$$(\propto A)^T = \propto A^T$$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Sejam as matrizes, $A = (a_{ik})$ e $B = (b_{kj})$. Assim, o elemento de ordem ij de AB é igual a:

$$(\ a_{i1} +\ a_{i2} + \cdots +\ a_{im}).\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} +\ a_{i2}b_{2j} + \cdots +\ a_{im}b_{mj},$$

que corresponde ao ji-ézimo elemento de $(AB)^T$.

Por outro lado, a coluna j de B torna-se a linha j de B^T, e a linha i de A torna-se a coluna i de A^T. Consequentemente, o elemento de ordem ji de $B^T A^T$ é:

$$(b_{1j} +\ b_{2j} + \cdots +\ b_{mj}).\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix} = b_{1j}a_{i1} +\ b_{2j}a_{i2} + \cdots +\ b_{mj}a_{im}$$

Como a_{ik} e b_{ik} são números reais, assim:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im}$$

Logo:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Propriedades 3.

(i) $(\propto \beta)A = \propto (\beta A)$;

Sejam $A = (a_{ij})$, uma matriz qualquer e $\propto$ e β dois números reais. Assim, tem-se: $(\propto \beta)A = (\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta \cdot a_{ij})$, pois $\propto$, β e a_{ij} são números reais, portanto é válida a propriedade associativa.

Porém, $\alpha(\beta \cdot a_{ij}) = \propto (\beta A)$. Logo:

$$(\propto \beta)A = \propto (\beta A)$$

(ii) $(\propto + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

Sejam $A = (a_{ij})$, uma matriz qualquer e $\propto$ e β dois números reais. Então: $(\propto + \beta)A = (\propto + \beta)a_{ij} = \propto \cdot\, a_{ij} + \beta \cdot a_{ij} = (\propto \cdot\, a_{ij}) + (\beta \cdot a_{ij})$, pois $\propto$, β e a_{ij} são números reais, portanto é válida a propriedade distributiva.

No entanto, $(\propto \cdot\, a_{ij}) + (\beta \cdot a_{ij}) = \alpha A + \beta A$. Logo:

$$(\propto + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

(iii) $\propto (A + B) = \propto A + \propto B$;

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, duas matrizes do mesmo tipo, e $\propto$ um número real. Então $a_{ij} + b_{ij}$ é o elemento de ordem ij de $A + B$, e assim $\propto (a_{ij} + b_{ij})$ é o elemento de ordem ij de $\propto (A + B)$. Note que, $\propto \cdot\, a_{ij}$ e $\propto \cdot\, b_{ij}$ são os elementos de ordem ij de $\propto A$ e $\propto B$, respectivamente, e assim $\propto \cdot\, a_{ij} + \propto \cdot\, b_{ij}$ é o elemento de ordem ij de $\propto A + \propto B$. Porém, $\propto$, a_{ij} e b_{ij} são números reais, portanto, para eles é válida a propriedade distributiva, logo $\propto (a_{ij} + b_{ij}) = \propto a_{ij} + \propto b_{ij}, \forall\, i, j$.

Assim, $\propto (A + B) = \propto A + \propto B$, pois os elementos correspondentes são iguais.

(iv) $1A = A$;

Seja $A = (a_{ij})$, uma matriz qualquer. Então, $1A = 1a_{ij} = a_{ij} = A$.

Logo: $1A = A$

Propriedade 4.

(i) $(AB)C = A(BC)$;

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kl})$. Além disso, sejam $AB = D = (d_{ik})$ e $BC = F = (f_{jl})$. Então,

$$d_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{2m}$$

$$f_{il} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jm}c_{ml}$$

Multiplicando-se D por C, isto é, (AB) por C, o elemento na i-ésima linha e l-ésima coluna da matriz $(AB)C$ é:

$$d_{i1}c_{1l} + d_{i2}c_{2l} + \cdots + d_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

Por outro lado, Multiplicando A por F, isto é, A por BC, o elemento na i-ésima linha e l-ésima coluna da matriz $A(BC)$ é:

$$a_{i1}f_{1l} + a_{i2}f_{2l} + \cdots + a_{im}f_{ml} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}f_{jl} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

Como as somas acima são iguais, logo:

$$(AB)C = A(BC)$$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$;

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ e $C = (c_{jk})$. Além disso, sejam $D = B + C = (d_{jk})$, $E = AB = (e_{ik})$, e $F = AC = (f_{ik})$. Então,

$$d_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$$

$$e_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$f_{ik} = a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{im}c_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk}$$

Logo, o elemento na i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz $AB + AC$ é:

$$e_{ik} + f_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

Por outro lado, o elemento na i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz $AD = A(B + C)$ é:

$$a_{i1}d_{1k} + a_{i2}d_{2k} + \cdots + a_{im}d_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}d_{jk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(b_{jk} + c_{jk}\right)$$

Assim, $A(B + C) = AB + AC$, pois os elementos correspondentes são iguais.

(iii) $(B + C)A = BA + CA$

Sejam $A = \left(a_{kj}\right), B = (b_{ik})$ e $C = (c_{ik})$. Além disso, sejam $D = B + C = (d_{ik})$, $E = BA = \left(e_{ij}\right)$, e $F = CA = \left(f_{ij}\right)$. Então,

$$d_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$$

$$e_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$$

$$f_{ij} = c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \cdots + c_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj}$$

Logo, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $BA + CA$ é:

$$e_{ij} + f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (b_{ik} + c_{ik})a_{kj}$$

Por outro lado, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $DA = (B + C)A$ é:

$$d_{i1}a_{1j} + d_{i2}a_{2j} + \cdots + d_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} d_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (b_{ik} + c_{ik})a_{kj}$$

Assim, $(B + C)A = BA + CA$, pois os elementos correspondentes são iguais.

(iv) $\propto (AB) = (\propto A)B = A(\propto B)$

Sejam $A = (a_{ik}), B = \left(b_{kj}\right)$ e $\propto$ um número real. Seja ainda, $AB = C = \left(c_{ij}\right)$. Então:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$\propto A = \propto (a_{ik}) = \propto a_{ik}$$

$$\propto B = \propto \left(b_{kj}\right) = \propto b_{kj}$$

Multiplicando-se $\propto$ por C, isto é, $\propto$ por AB, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $\propto \cdot (AB)$ é:

$$\propto c_{ij} = \propto \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Multiplicando-se também, $\propto A$ por B, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $D = \left(d_{ij}\right) = (\propto A)B$ é:

$$d_{ij} = \propto a_{i1} b_{1j} + \propto a_{i2} b_{2j} + \cdots + \propto a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \propto a_{ik} b_{kj} = \propto \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Por outro lado, multiplicando-se a matriz A pela matriz $\propto B$, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $E = A(\propto B)$ é:

$$e_{ij} = a_{i1} \cdot \alpha b_{1j} + a_{i2} \cdot \alpha b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot \alpha b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \alpha b_{kj} = \propto \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Logo: $\propto (AB) = (\propto A)B = A(\propto B)$, pois os elementos correspondentes são iguais.

APÊNDICE B – Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares é fatoração de matrizes, baseada na seguinte propriedade de diagonalização usual que pode ser imitada para matrizes retangulares: os valores absolutos dos autovalores de uma matriz simétrica A medem as quantidades que A estica ou encurta os autovetores. Se $Ax = \lambda x$ e $\|x\| = 1$, então

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| = |\lambda| \qquad (1)$$

Se λ_1 é o valor de maior módulo, então um autovetor unitário associado v_1 identifica a direção na qual o efeito de esticar de A é maior. Em outras palavras, o comprimento de Ax é máximo quando $x = v_1$, e $\|Av_1\| = |\lambda_1|$, de (1).

Os valores singulares de uma matriz mxn

Seja A uma matriz $m \times n$. Então $A^T A$ é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal. Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortogonal para $\mathbb{R}^n$ consistindo em autovetores de $A^T A$, e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ os autovalores associados. Então, se $1 \leq i \leq n$,

$$\|Av_i\|^2 = (Av_i)^T Av_i = v_i^T A^T Av_i$$

$\|Av_i\|^2 = v_i^T(\lambda_i v_i)$, pois v_i é um autovetor de $A^T A$, e já que v_i é um vetor unitário, teremos:

$$\|Av_i\|^2 = \lambda_i \qquad (2)$$

Logo, os autovalores de A são todos não negativos. Trocando a numeração, se necessário, pode-se supor que os autores satisfazem:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

Os valores singulares de A são as raízes quadradas dos autovalores de $A^T A$, denotados por $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ e estão arrumados em ordem decrescente, isto é, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ para $1 \leq i \leq n$. De (2), os valores singulares de A são os comprimentos dos vetores $Av_1, Av_2, \cdots, Av_n$.

Definição 1: Numa matriz A, uma **posição de pivô** é uma posição que corresponde a um elemento líder numa forma escalonada de A. Uma **coluna pivô** é uma coluna de A que contém uma posição de pivô.

Definição 2: Dado $v_1, v_2, \cdots, v_p$ no $\mathbb{R}^n$, então o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \cdots, v_p$ é denotado por $Span\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ e é chamado de **subconjunto do $\mathbb{R}^n$ gerado por $\boldsymbol{v_1, v_2, \cdots, v_p}$**. Ou seja, $Span\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ é a coleção de todos os vetores que podem ser escritos na forma $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p$, com $c_1, \cdots, c_p$ escalares.

Definição 3: O **Espaço das Colunas** de uma matriz A, $m \times n$, é o conjunto $Col\ A$ de todas as combinações lineares das colunas de A. Se $A = [a_1 \cdots a_n]$, então $Col\ A = Span\{a_1, \cdots, a_n\}$.

Definição 4: O **posto de uma matriz** A, denotado por $posto\ A$, é a dimensão do espaço das colunas de A.

Como as colunas pivôs de A formam uma base para $Col\ A$, o posto de A é simplesmente o número de colunas pivôs de A.

Teorema 1: Suponha que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^n$ consistindo em autovetores de A^TA ordenados de tal forma que os autovalores associados satisfação $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Suponha que A tem r valores singulares não-nulos. Então $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_r\}$ é uma base ortogonal para $Col\ A$ e posto de $A = r$.

Demonstração

Como v_i e $\lambda_j v_j$ são ortogonais para $i \neq j$, temos

$$(Av_i)^T(Av_j) = v_i^T A^T A v_j = v_i^T(\lambda_j v_j) = 0$$

Logo, $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_n\}$ é um conjunto ortogonal. Além disso, como os comprimentos dos vetores $Av_1, Av_2, \cdots, Av_n$ são os valores singulares de A e como existem r valores singulares não-nulos, $Av_i \neq 0$ se e somente se $1 \leq i \leq r$. Portanto $Av_1, Av_2, \cdots, Av_r$ são vetores linearmente independentes e pertencem a $Col\ A$. Finalmente, qualquer que seja y em $ColA - y = AX$, pode-se escrever $x = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ e $y = Ax = c_1Av_1 + \cdots + c_rAv_r + c_{r+1}Av_{r+1} + \cdots + c_nAv_n$ e como $y = Ax = c_1Av_1 + \cdots + c_rAv_r + 0 + \cdots + 0$, tem-se que y pertence a $Span\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_r\}$, o que mostra que $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_r\}$ é uma base ortogonal para $Col\ A$. Portanto, posto de A é igual a dimensão de $Col\ A = r$.

A Decomposição em Valores Singulares

A decomposição de A envolve uma matriz "diagonal" $m \times n$ S da forma

$$S = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Onde D é uma matriz diagonal $r \times r$ para algum r não excedendo o menor valor entre m e n.

Teorema 2: Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Então existe uma matriz $m \times n$ $S = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde os elementos diagonais de D são os r primeiros valores singulares de A, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, e existem uma matriz ortogonal U $m \times m$ e uma matriz ortogonal V $n \times n$ tais que

$$A = USV^T$$

Demonstração

Sejam λ_i e v_i como no Teorema 1, de modo que $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_r\}$ seja uma base ortogonal para $Col\ A$. Normalizando cada Av_i para se obter uma base ortogonal $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$, onde

$$u_i = \frac{1}{\|Av_i\|} Av_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$$

$$Av_i = \sigma_i u_i \qquad (1 \leq i \leq r)$$

Agora estende-se $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ a uma base ortogonal $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ e define-se $U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]$ e $V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$.

Por construção, U e V são matrizes ortogonais. Além disso, de $Av_i = \sigma_i u_i \qquad (1 \leq i \leq r)$, tem-se

$$AV = [Av_1 \quad \cdots \quad Av_r \quad 0 \quad \cdots \quad 0] = [\sigma_1 u_1 \quad \cdots \quad \sigma_r u_r \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

Seja D a matriz diagonal cujos elementos diagonais são $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ e seja $S = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$US = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\sigma_1 u_1 \quad \cdots \quad \sigma_r u_r \quad 0 \quad \cdots\cdots \quad 0] = AV$$

Como V é uma matriz ortogonal, $USV^T = AVV^T = A$.