UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Philipe Thadeo Lima Ferreira de Albuquerque

# Ponto fixo: uma introdução no Ensino Médio

São José do Rio Preto
2014

Philipe Thadeo Lima Ferreira de Albuquerque

# Ponto fixo: uma introdução no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, e ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz.

São José do Rio Preto
2014

FICHA CATALOGRÁFICA


Albuquerque, Philipe Thadeo Lima Ferreira.
Ponto fixo: uma introdução no ensino médio / Philipe Thadeo Lima Ferreira de Albuquerque. -- São José do Rio Preto, 2013
69 f. : il., fórmulas

Orientador: German Jesus Lozada Cruz
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Teoria do ponto fixo. 3. Funções (Matemática). 4. Banach, Álgebra de. 5. Teoria da aproximação. I. Lozada Cruz, German Jesus. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Philipe Thadeo Lima Ferreira de Albuquerque

# Ponto fixo: uma introdução no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, e ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
DMAT – IBILCE/UNESP
Presidente da Banca

Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes
DMAT – UEMS

Profa. Dra. Rita de Cássia Pavani Lamas
DMAT – IBILCE/UNESP

São José do Rio Preto
21 de Fevereiro de 2014

Este trabalho é dedicado às pessoas que sempre estiveram ao meu lado pelos caminhos da vida, me acompanhando, apoiando e principalmente acreditando em mim. Dedico ainda ao meu primeiro filho, Raphael, dado por Deus durante a produção desse trabalho. E especialmente a Deus, pelas oportunidades maravilhosas que me concede.

# AGRADECIMENTO

Agradeço aos meus professores da UNESP-IBILCE pela qualificação à profissão de educador na área de Matemática, em especial ao caríssimo professor Dr. German Jesus Lozada Cruz pela sabedoria compartilhada e paciência; à minha querida e amada esposa, Fernanda Carolina de Pontes Albuquerque pela paciência, amor e zelo.

"Nós somos aquilo que repetidamente fazemos. Portanto, a excelência não é um fato, mas um hábito."

Aristóteles

# RESUMO

O principal objetivo deste trabalho consiste na produção de um referencial teórico relacionado aos conceitos de **ponto fixo**, que possibilite, aos alunos do Ensino Médio, o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas à Matemática. Neste trabalho são colocadas abordagens contextualizadas e proposições referentes às noções de ponto fixo nas principais funções reais (afim, quadrática, modular, dentre outras) e sua interpretação geométrica. São abordados de maneira introdutória os conceitos do teorema do ponto fixo de Brouwer, o teorema do ponto fixo de Banach e o método de resolução de equações por aproximações sucessivas.



**Palavras-chaves:** Ponto fixo. Teorema de Brouwer. Teorema de Banach. Resolução por aproximações sucessivas.

# ABSTRACT

The main objective of this work is to produce a theoretical concepts related to **fixed point**, enabling, for high school students, the development of skills and competencies related to Mathematics. This work placed contextualized approaches and proposals relating to notions of fixed point in the main real functions (affine, quadratic, modular, among others) and its geometric interpretation. Are approached introductory concepts of the fixed point theorem of Brouwer's, fixed point theorem of Banach and the method of solving equations by successive approximations.



**Keywords:** Fixed point. Brouwer theorem. Banach theorem. Resolution by successive approximations.

# SUMÁRIO

# MOTIVAÇÃO

Os documentos norteadores do Sistema Educacional Brasileiro[1] e da Secretaria de Educação do estado de São Paulo[2] são colocados como parâmetros que orientam a prática escolar. Eles buscam contribuir para que os alunos tenham acesso a um conhecimento matemático que desenvolva competências que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Estes documentos apresentam uma lista de temas e conteúdos para a Matemática, e têm como premissa fundamental que os conteúdos são meios para o desenvolvimento das competências almejadas.

As transformações sociais, causadas principalmente pelos computadores, trouxe a necessidade de técnicas de programação de algoritmos e análise de dados não apenas aos inseridos no Ensino Superior, mas à população em geral. Conteúdos matemáticos mais comuns no ensino superior como, por exemplo, a criptografia, a topologia e a otimização, hoje são fundamentais para a cidadania.

Inexoravelmente o avanço da computação de forma intensa e abrangente na nossa sociedade permite e exige que vários conteúdos da Matemática que antes eram restritos ao ensino superior, hoje sejam introduzidos aos alunos do Ensino Médio.

A atualização dos conteúdos, além de fundamental para o desenvolvimento de competências necessárias à vida social, deve ser colocada de forma que permita aos alunos uma interação entre a matemática e os desafios apresentados na sociedade atual.

Sobre isso, Dante [6], p.11 diz que um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e para isso nada melhor que lhe apresentar situações – problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las.

Assim, este trabalho busca apresentar referências e parâmetros teóricos para apoiar a elaboração de sequências didáticas relacionadas aos conceitos de ponto fixo de funções que podem ser empregados no Ensino Médio, visando o desenvolvimento de competências ligadas à Matemática.

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais – MEC, 1998. [3]
[2] Proposta Curricular do Estado de São Paulo – SEESP, 2008. [12]

# 1 INTRODUÇÃO

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias [4] destacam que o conteúdo parte do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”. Neste sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento.

As competências e habilidades de matemática desenvolvidas no Ensino Médio, relacionadas aos estudos das funções, desempenham um papel fundamental na formação básica do cidadão. Para isso, os conteúdos devem possibilitar um bom domínio das funções, principalmente as habilidades que exploram qualitativamente as relações entre duas grandezas em diferentes situações, destacando o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros e pontos significativos para o seu estudo.

Vários pontos ou valores relevantes aos estudos das funções são comumente abordados nos livros didáticos disponibilizados aos alunos como: zero da função, valor máximo e mínimo da função, vértice da parábola descrita por uma função quadrática, ponto de intersecção de funções, pontos da função que tocam os eixos cartesianos, dentre outros. Neste trabalho pretendemos evidenciar um ponto extremamente relevante para o estudo das funções que não é abordado nos livros didáticos do Ensino Médio, isto é, o ponto fixo de uma função. Buscamos, dessa forma, auxiliar professores e alunos com um referencial teórico acerca dos conceitos de ponto fixo, para que este conhecimento venha enriquecer os conteúdos que desenvolvem as competências e habilidades relacionadas ao estudo de funções e sequências numéricas.

No Capítulo 2 introduziremos conceitos iniciais de ponto fixo apresentando abordagens introdutórias da definição de ponto fixo e situações contextualizadas para a familiarização com o tema.

No Capítulo 3 abordaremos o ponto fixo de uma função real e sua interpretação geométrica, apresentando proposições que estão relacionadas às principais funções reais e suas operações. Apresentaremos ainda aplicações contextualizadas do teorema do ponto fixo de Brouwer.

No Capítulo 4 apresentaremos aplicações dos conceitos de ponto fixo na resolução de equações através do método de aproximações sucessivas, com base nos conceitos de sequências de números reais. Apresentaremos ainda abordagens envolvendo os conceitos referentes ao teorema do ponto fixo de Banach.

Por fim, concluiremos buscando expor nossas considerações finais acerca do tema desenvolvido.

# 2 CONCEITOS INICIAIS DE PONTO FIXO

As abordagens apresentadas a seguir buscam mostrar como o conceito de ponto fixo pode auxiliar no desenvolvimento de competências relacionadas à interpretação de tabelas, fórmulas matemáticas e resolução de problemas contextualizados.

## 2.1 Definição de ponto fixo

Amigo-secreto[3] ou amigo-oculto é uma tradicional dinâmica de final de ano que tem como objetivo, através da troca de presentes, a confraternização entre todos os participantes de um grupo. Para isso, coloca-se o nome de todos em bilhetes, que são depositados em uma urna. Aleatoriamente, cada pessoa retira apenas um bilhete, que traz escrito o nome de seu amigo-secreto. Porém, um problema muito comum desta brincadeira consiste quando a pessoa retira da urna o seu próprio nome.

Tal fato corriqueiro pode ocorrer em funções matemáticas. Consideremos, por exemplo, a função, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x - 15$, é razoável questionar se existe algum valor $x = k$, pertencente ao domínio da função, não sofre alteração pela função $f$, ou seja, tenha $y = k$. De fato, existe $x = 5$ para o qual temos $y = f(5) = 5$, ou seja, o ponto $x = k = 5$, não sofre alteração pela função $f$. Esta singularidade é a base em uma poderosa ferramenta matemática, principalmente, sobre o estudo de funções e de equações.

| | |
|---|---|
| Definição 2.1 | Dados dois conjuntos quaisquer não vazios A e B, contidos no conjunto dos números reais, e uma função $f$: A $\rightarrow$ B, define-se **ponto fixo de $\boldsymbol{f}$**, o valor $k \in$ A tal que $f(k) = k \in$ B, ou seja, um ponto fixo é um valor $k$ pertencente ao domínio de $f$ que não sofre alteração pela função $f$. |

Assim como podemos não ter problemas na retiradas dos nomes no amigo-secreto, também temos funções matemáticas que não possuem pontos fixos.

[3] Ideias adaptadas do trabalho de Moreira [10].

## 2.2 Relações definidas por fórmulas matemáticas

Como os conceitos de tabela de dupla entrada são desenvolvidos geralmente no Ensino Fundamental e ampliados no Ensino Médio, podemos verificar que, durante a introdução de relações definidas através de fórmulas matemáticas, a noção de ponto fixo pode ser apresentada como parte complementar desses conceitos.

*Exemplo 2.2.1 – Máquina de renumerar cartões*

Imaginemos, por exemplo, uma máquina que renumera cartões. A máquina lê o número original $x$ e escreve um novo número $y$, onde $y = 3x - 6$. A tabela abaixo apresenta alguns valores originais e seus novos números:

| $x$ | $y$ | |
|---|---|---|
| 0 | -6 | |
| 1 | -3 | |
| 2 | 0 | |
| 3 | 3 | Ponto fixo |
| 4 | 6 | |
| 5 | 9 | |

Observe que quando inserimos o cartão com o número 3 a máquina não altera o valor do número, ou seja, o número 3 ficará fixo.

*Exemplo 2.2.2 – Escalas termométricas*

Dentro das aplicações de proporcionalidade desenvolvidas durante o Ensino Fundamental e novamente trabalhados nas disciplinas de Matemática e Física no Ensino Médio, temos problemas, por exemplo, como os de conversões entre escalas termométricas que permitem a ampliação do conceito de ponto fixo.

Dadas duas escalas termométricas graduadas A e B, temos dois pontos conhecidos, por exemplo, o de congelamento e o de ebulição da água. Na escala A tais pontos são: 10º A e 90º A, e na escala B, –10º B e 110º B.

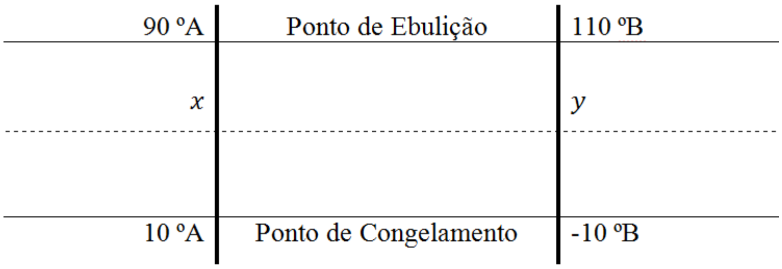



**Figura 1 - Relações entre escalas termométricas**

Pela Figura 1, temos a seguinte relação de proporcionalidade que estabelece a conversão entre as escalas:

$$\frac{x-10}{90-10} = \frac{y-(-10)}{110-(-10)} \Longrightarrow y = \frac{3x-30}{2} \qquad (2.2.a)$$

Em temas envolvendo estes assuntos, uma pergunta simples que pode ampliar o conceito de ponto fixo é: existe alguma temperatura que possui um valor na escala A que tem o mesmo valor na escala B? Em termos matemáticos, existe algum $x = k$ em A tal que $y = k$ em B?

Da equação (2.2.$a$), temos:

$$y = f(k) = k \quad \Longrightarrow \quad \frac{3k-30}{2} = k \quad \therefore \quad k = 30$$

Portanto, segue que em determinada temperatura os dois termômetros marcarão o valor 30, ou seja, o valor 30 é fixo nos dois termômetros.

Em particular, as escalas termométricas utilizadas na maioria dos países são a escala Celsius e a Fahrenheit, elas possuem ponto fixo igual a – 40.

*Exemplo 2.2.3 – Caixas d´água*

Imaginemos duas caixas d´água, uma vazia e outra com 50 litros. Elas vão ser cheias por duas bombas d´água idênticas, que iniciarão no mesmo momento, porém a que encherá a caixa com 50 litros funcionará com metade da potência da primeira. Como a primeira encherá mais rápido que a segunda, podemos afirmar que em determinado momento elas terão a mesma quantia d´água.

Seja $x$ a quantia de água da caixa 1, podemos escrever a quantia $y$ na caixa 2 em função da quantia $x$, ou seja,

$$y = \frac{x}{2} + 50 \qquad (2.2.b).$$

Logo, o problema se resume em determinar quando a quantia $x = k$ implicará numa quantia $y = k$. Ou seja, o valor corresponde a um ponto fixo. Assim, pela equação (2.2.$b$), segue que:

$$y = f(k) = k \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2} + 50 = k \quad \Rightarrow \quad k + 100 = 2k \quad \therefore \quad k = 100$$

Portando, a quantidade nas duas caixas d´água será igual em 100 litros.

# 3 PONTO FIXO DE UMA FUNÇÃO REAL

A noção de função foi desenvolvida e aperfeiçoada ao longo de vários séculos. E esta noção não é restrita apenas aos interesses da Matemática, pois, ela faz parte do nosso cotidiano e está presente em diversas áreas do conhecimento. Vários problemas que surgem de fenômenos presentes na natureza recaem no estudo das funções, possibilitando uma poderosa ferramenta na interpretação e compreensão dos fenômenos em questão.

As definições das principais funções que apresentaremos foram adaptadas do trabalho de Dante [7], que possui o seu trabalho distribuído pelo Ministério da Educação a várias escolas do país.

## 3.1 Interpretação geométrica do ponto fixo

O desenvolvimento das habilidades relacionadas ao estudo de gráficos é fundamental no estudo de funções reais. A interpretação geométrica do ponto fixo pode auxiliar no desenvolvimento destas habilidades.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.1.1 | Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui ponto fixo $x = k$ se, e somente se, o ponto $P(k, k)$ no plano cartesiano pertencer ao gráfico da função $f$. |
| | Demonstração:<br>(→) Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $k \in \mathbb{R}$ seja um ponto fixo da $f$. Logo, pela definição 2.1, para $x = k$ implica que existe $y = f(k) = k$. Como os pontos do gráfico da função $f$ são da forma $(x, y)$, podemos afirmar que o ponto $P(k, k)$ pertence ao gráfico da função $f$.<br>(←) Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que o ponto $P(k, k)$ pertence ao gráfico da função $f$. De fato, existe $x = k$ que implica em $y = f(k) = k$. Logo, pela definição 2.1, $x = k$ é ponto fixo da função $f$.<br>■ |

**Observação**: A partir desta proposição observamos uma correspondência biunívoca entre qualquer ponto fixo $x = k \in \mathbb{R}$ com o par ordenado $(k, k) \in \mathbb{R}^2$. Como todos os pontos da forma $(k, k) \in \mathbb{R}^2$ são pontos da reta definida por $y = x$ no plano cartesiano, podemos concluir que, se o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ interceptar a reta $y = x$, então este ponto será um ponto da forma $P(k, k)$, determinando assim o ponto fixo da função $f$ dado por $x = k$. Portanto, os pontos do gráfico de uma função $f$ que têm abscissas iguais às ordenadas determinarão os pontos fixos $x = k$ desta função.

A interpretação geométrica do ponto fixo de uma função $f$ será, portanto, relacionada através de um ponto auxiliar pertencente à reta $y = x$.

*Exemplo 3.1.2 – Função com um único ponto fixo.*

Consideremos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x - 10$. Pela definição 2.1 $x = k = 5$ é o único ponto fixo da função $g$. De fato,

$$g(k) = k \quad \Leftrightarrow \quad 3k - 10 = k \quad \Leftrightarrow \quad 2k = 10 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5.$$

Geometricamente, temos:

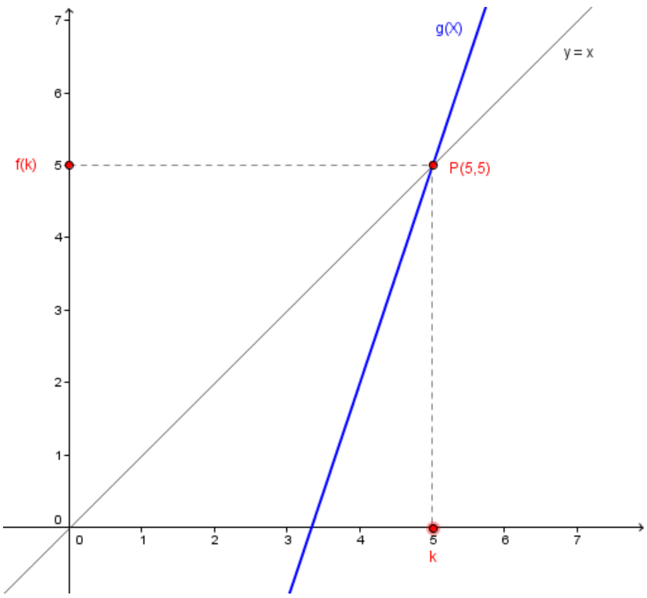



Figura 2 - Exemplo 3.1.2
Função com um único ponto fixo

A função $g$ possui um único ponto fixo dado por $x = k = 5$ que, pela proposição 3.1.1, está associado ao ponto $P(5, 5)$. Analisando geometricamente vemos que o gráfico da função $g$ intersecta a reta $y = x$ em um único ponto.

*Exemplo 3.1.3 – Função com dois pontos fixos.*

Várias funções intersectam mais de uma vez a reta $y = x$, nestes casos, pela proposição 3.1.1, existem mais de um ponto fixo. Como no exemplo anterior, consideremos o gráfico da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x^2 - 6x + 10$.

Pela proposição 3.1.1 segue que, se $x = k$ é um ponto fixo da função $h$, então:

$$\begin{cases} y = k^2 - 6k + 10 \\ y = k \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$k^2 - 6k + 10 = k \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 7k + 10 = 0 \quad \therefore \quad k_1 = 2 \text{ ou } k_2 = 5.$$

Geometricamente, temos:

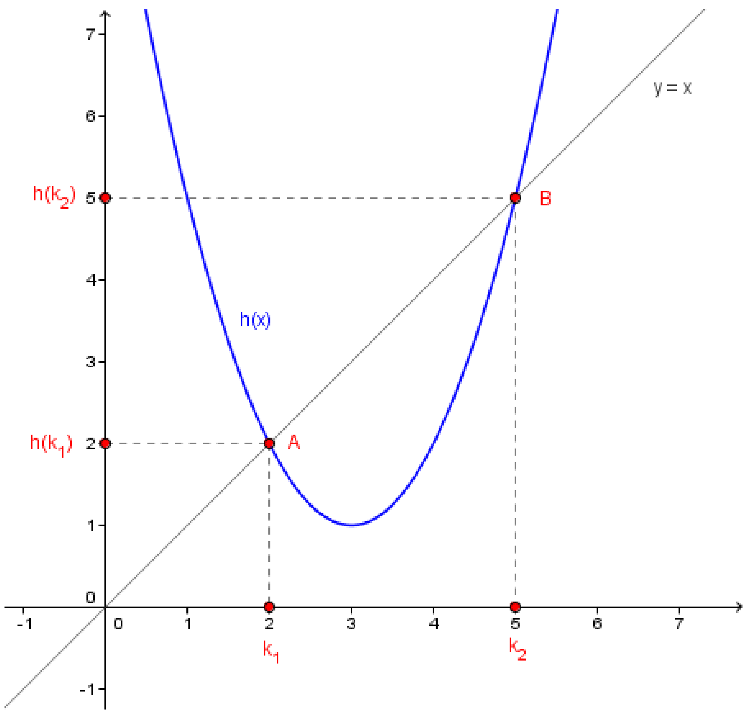



Figura 3 - Exemplo 3.1.3
Função com dois pontos fixos

Conforme a proposição 3.1.1, a função $h$ possui apenas dois pontos fixos, $k_1 = 2$ e $k_2 = 5$, que estão associados aos pontos $A(2, 2)$ e $B(5, 5)$. Analisando geometricamente vemos que o gráfico da função $h$ intersecta a reta $y = x$ nestes dois pontos.

*Exemplo 3.1.4 – Função com três pontos fixos.*

Consideremos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$. Pela definição 2.1 $k = -1,$ 0 e 1 são pontos fixos da função $f$. De fato,

$f(k) = k \;\Leftrightarrow\; k^3 = k \;\Leftrightarrow\; k^3 - k = 0 \;\Leftrightarrow\; k(k-1)(k+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -1,$ 0 ou 1.

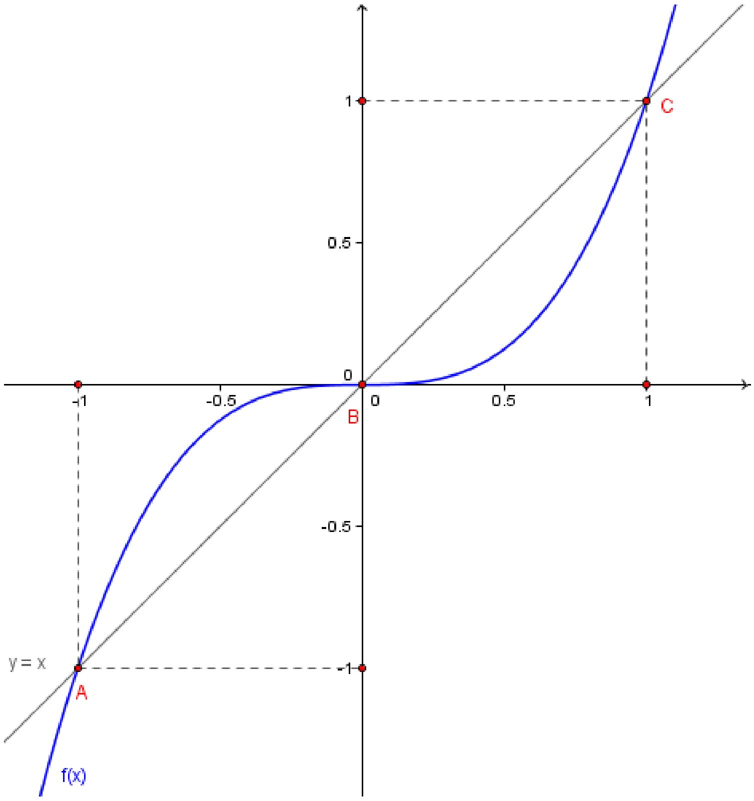



**Figura 4 - Exemplo 3.1.4**
**Função com três pontos fixos**

Analisando geometricamente segue que o gráfico da função $f$ intersectará a reta $y = x$ em três pontos, ou seja, nos pontos $A(-1,-1)$, $B(0,0)$ e $C(1,1)$, que estão associados aos pontos fixos $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ conforme a proposição 3.1.1.

## 3.2 Função afim

No estudo de função afim são desenvolvidos conteúdos referentes à taxa de crescimento/decrescimento, gráfico da função, valor inicial, zero da função, estudo do sinal da função, dentre outros.

| | |
|---|---|
| Definição 3.2.1 | Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais $a$ e $b$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. |

A partir desta definição é razoável questionarmos se uma função afim possui pontos fixos e quais são suas características. A proposição seguinte mostra como localizar um valor $k \in \mathbb{R}$, que determina o ponto fixo de uma função afim através dos coeficientes $a$ e $b$.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.2.2 | Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 1$, então ela terá um único ponto fixo $k \in \mathbb{R}$ , dado por $$k = \frac{b}{(1-a)} \qquad (3.2.a)$$ |

Demonstração:

<u>Existência</u>: Pela definição 2.1 queremos encontrar $x = k \in \mathbb{R}$, tal que $f(k) = k$. De fato,

$$f(k) = k \implies ak + b = k \implies (1-a)k = b \ \therefore \ k = \frac{b}{(1-a)}.$$

<u>Afirmação</u>: $x = k = \frac{b}{(1-a)}$ é ponto fixo da função $f$. De fato,

$$f\left(\frac{b}{(1-a)}\right) = a\left(\frac{b}{(1-a)}\right) + b = \frac{b}{(1-a)} \ \therefore \ f(k) = k.$$

<u>Unicidade</u>: Suponhamos que existam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, com $k_1 \neq k_2$, pontos fixos da função $f$. Pela definição 2.1 segue que:

$$f(k_1) = k_1 \implies ak_1 + b = k_1 \implies (1-a)k_1 = b \ \therefore \ k_1 = \frac{b}{(1-a)}.$$

$$f(k_2) = k_2 \implies ak_2 + b = k_2 \implies (1-a)k_2 = b \ \therefore \ k_2 = \frac{b}{(1-a)}.$$

Logo, $k_1 = k_2$. Isso reduz a afirmação de que a função $f$ possui pontos fixos distintos ao absurdo. Então, $f$ possui um único ponto fixo $x = k$.

■

*Exemplo 3.2.3 – Função afim com* $a \neq 1$.

Consideremos a função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + 4$. Como $a \neq 1$, pela proposição 3.2.2, existe um único $k \in \mathbb{R}$, tal que $k = \frac{b}{(1-a)}$. Logo,

$$k = \frac{4}{(1-(-1))} \Rightarrow k = \frac{4}{2} \Rightarrow k = 2.$$

Isso pode ser observado na Figura 4.

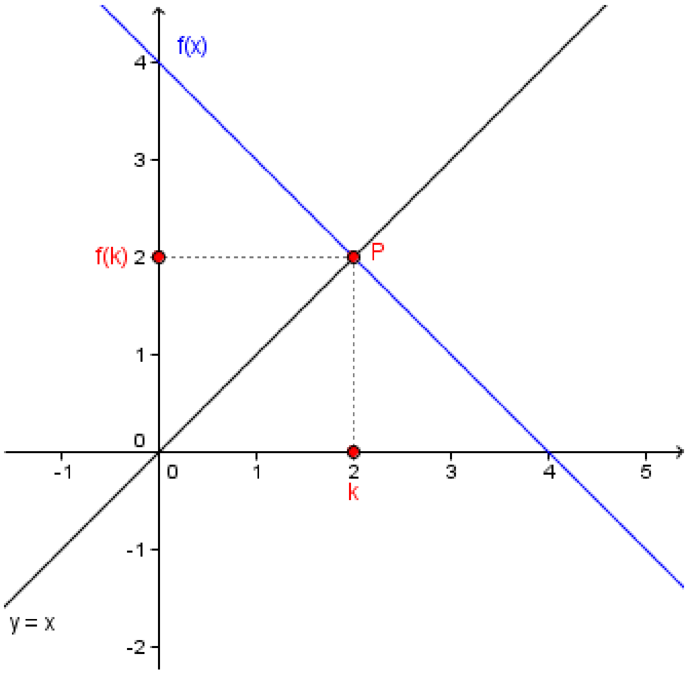



**Figura 5 - Exemplo 3.2.3**
**Função afim com a≠1.**

A função $f$ intersecta a reta $y = x$, uma única vez e o ponto fixo da função $f$ será $k = 2$.

**Observação:** Devido a condição $a \neq 1$ na proposição 3.2.2, é necessário analisar a *função identidade* e suas translações com relação ao eixo $y$, pois elas possuem coeficiente $a = 1$.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.2.4 | Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a *função identidade*, da forma $f(x) = x$. Então, todos os pontos do domínio da função $f$ são pontos fixos. |
| | Demonstração:<br><br>Decorre da definição 2.1. De fato, dado qualquer $x = k$, implica que $f(k) = k$. Logo, qualquer $x$ pertencente aos reais é um ponto fixo da função $f$.<br><br>■ |

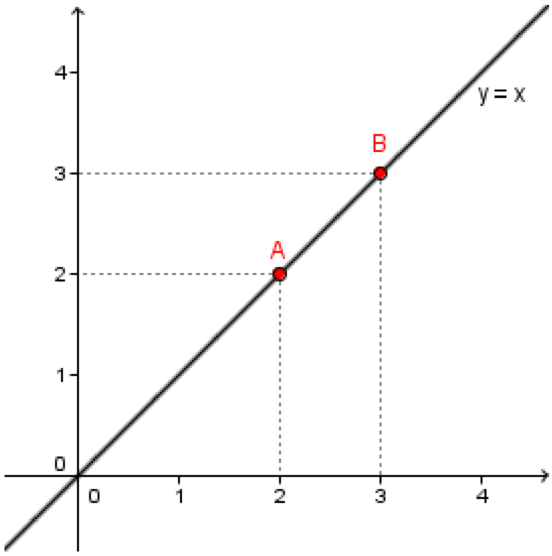



Figura 6 - Proposição 3.2.4
Gráfico da função identidade

Analisando geometricamente, os pontos A e B (Figura 5) são dois pontos da forma $(k, k)$ pertencentes ao gráfico da função identidade. Pela proposição 3.1.1 segue que pontos dados desta forma permitem a localização dos pontos fixos $x = k$ de uma função. Logo, todos os pontos do domínio da função identidade são pontos fixos.

*Exemplo 3.2.5 – Função afim com $a = 1$ e $b \neq 0$.*

Consideremos a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$, uma translação da função identidade. Vamos supor que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $f(k) = k$. Logo,

$$f(k) = k \implies k + 2 = k \implies 2 = 0.$$

A afirmação da existência de um ponto fixo em $f$ reduziu-se ao absurdo. Dessa forma, a função $f$ não possui ponto fixo.

Esta característica é verificada para qualquer translação da função identidade conforme proposição 3.2.6.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.2.6 | Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função afim. Então, $f$ é uma translação da *função identidade* se, e somente se, $f$ não possuir pontos fixos. |

Demonstração:

(→) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma translação da função identidade. Logo, $f$ pode ser expressa da forma $f(x) = x + b$, com $b \neq 0$.

Assim, pela definição 2.1 de ponto fixo segue que a função $f$ possui ponto fixo se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = k$. Então,

$$f(k) = k \quad \Longrightarrow \quad k + b = k \quad \Longrightarrow \quad b = 0.$$

Assim, a afirmação de que $f(k) = k$ se reduz ao absurdo. Pois, implicaria que $b = 0$, contrariando a afirmação inicial era de que $b \neq 0$. Portanto, $f$ não possui ponto fixo.

(←) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função afim que não possui ponto fixo $k$. Temos pela proposição 3.2.2 que, se $a \neq 1$, então $f$ possuirá ponto fixo. Logo, uma função afim poderá não ter ponto fixo somente se $a = 1$, ou seja, $f$ é da forma $f(x) = x + b$. Afirmamos que $b$ é distinto de 0, caso contrário $f(x) = x$ tem uma infinidade de pontos fixos. Isto contraria a hipótese. Logo, $f$ é uma função afim com coeficientes $a = 1$ e b $\neq 0$, ou seja, $f$ translação da função afim.

■

Analisando geometricamente através da figura 6, vemos que o gráfico da função $f$ é paralelo à reta $y = x$.

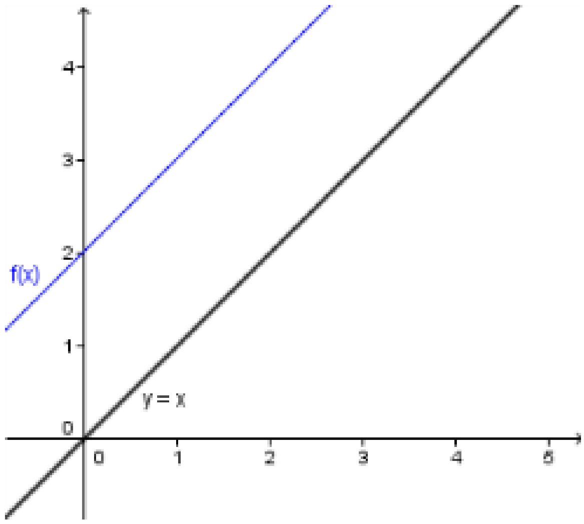
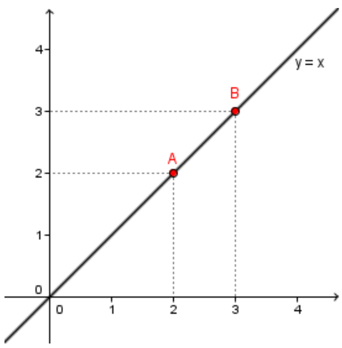
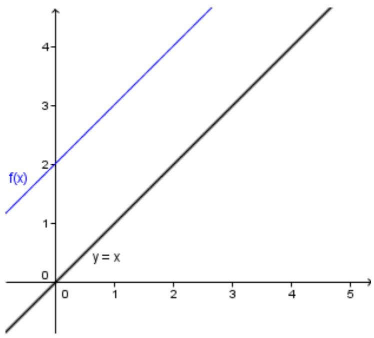
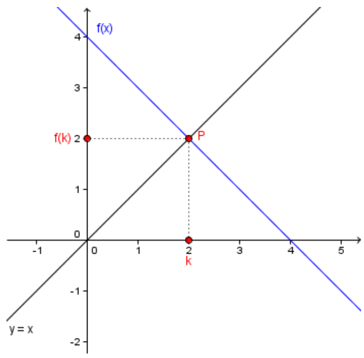



Figura 7 - Exemplo 3.2.6,
Translação do gráfico da função identidade.

Geometricamente podemos resumir os pontos fixos de funções afins em três casos:

| Caso I: Infinitos pontos fixos | Caso II: Nenhum ponto fixo | Caso III: Um único ponto fixo |
|---|---|---|
| $a = 1$ e $b = 0$  A função afim é a função identidade. | $a = 1$ e $b \neq 0$  O gráfico da função afim é paralelo ao gráfico da função identidade. | $a \neq 1$  A função afim possui coeficiente $a \neq 1$. |

Podemos ainda escrever ainda a lei de uma função afim a partir de seu ponto fixo. Tal abordagem será relevante para o entendimento de composição de funções afins que será desenvolvido posteriormente.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.2.7 | Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função afim. Então, $f$ possui ponto fixo k ∈ ℝ se, e somente se, $f(x) = ax - ak + k$, $a \in \mathbb{R}$. |
| | Demonstração:<br>(→) Sejam $f(x) = ax + b$ uma função afim e $x = k$ um ponto fixo de $f$. Logo, pela definição 2.1 segue que, $f(k) = k$, logo, $ak + b = k$, isto equivale a afirmar que $b = -ak + k$.<br>Portanto, $f(x) = ax + b$ implica que $f(x) = ax - ak + k$.<br>(←) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = ax - ak + k$. Tomando $b = -ak + k$, segue que $f(x) = ax + b$. Logo, pela definição 3.2.1, $f$ é uma função afim. É imediato seque $f(k) = ak - ak + k = k$, ou seja, $x = k$ é ponto fixo de $f$.<br>■ |

## 3.3 Função quadrática

No tema de função quadrática sempre são abordados os conteúdos referentes à concavidade da parábola, gráfico da função, zero da função e análise do discriminante, estudo do sinal da função, dentre outros. O tema do ponto fixo se mostra também significativo e relevante dentro deste contexto, pois pode ser abordado da mesma maneira como é tratado o tema zero da função ou raízes da função quadrática.

| | |
|---|---|
| Definição 3.3.1 | Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *função quadrática* quando existem números reais $a, b$ e $c$, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. |

A partir desta definição vamos supor que $f$ tenha ponto fixo, então existe $x = k \in \mathbb{R}$, tal que $f(k) = k$. Logo,

$$f(k) = k \;\Rightarrow\; ak^2 + bk + c = k \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; ak^2 + (b-1)k + c = 0 \qquad (3.3.a)$$

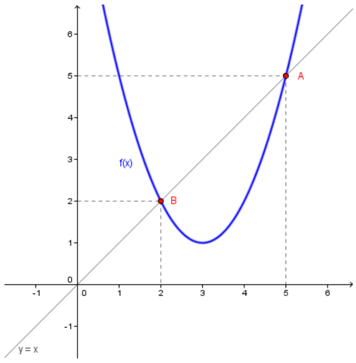
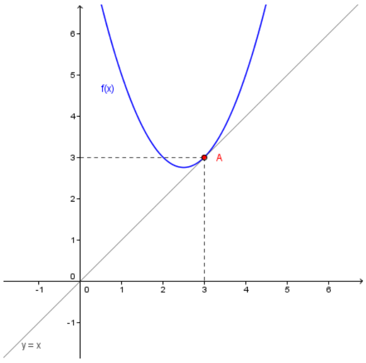
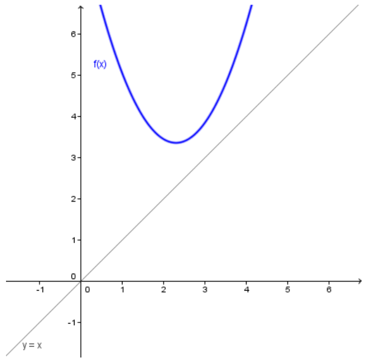
Isso reduz a abordagem dos pontos fixos de uma função quadrática à resolução de equações quadráticas, ou seja, $k$ é raiz da equação quadrática $(3.3.a)$.

O estudo do número de pontos fixos de uma função quadrática vai depender do discriminante da equação $(3.3.a)$, onde

$$\Delta_k = (b-1)^2 - 4ac \qquad (3.3.b)$$

Assim, como nos estudos de zeros de equações quadráticas, podemos afirmar que uma função quadrática pode ter dois, um ou nenhum ponto fixo.

O quadro a seguir ilustra a quantidade de pontos fixos de uma função quadrática em função do sinal do discriminante $(3.3.b)$.

| Caso I: Dois pontos fixos | Caso II: Um único ponto fixo | Caso III: Nenhum ponto fixo |
|---|---|---|
| $\Delta_k > 0$   | $\Delta_k = 0$   | $\Delta_k < 0$   |

## 3.4 Função modular

| | |
|---|---|
| Definição 3.4.1 | Denomina-se *função modular*, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \|x\|$, ou seja, $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$. |

Para enfatizar o tema de ponto fixo juntamente com funções modulares, utilizaremos a questão proposta na prova de Matemática da 2ª fase do Exame de Ingresso da Universidade Estadual de Feira de Santana, aplicada no ano de 2010.

A questão trouxe o seguinte enunciado:

> "Os pontos do gráfico de uma função que têm abscissas iguais às ordenadas são chamados de pontos fixos desse gráfico.
>
> A distância, em u.c., entre os pontos fixos do gráfico da função $f(x) = 1 + |2x - 5|$, é igual a:
>
> a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{2}$" UEFS/2010

Inicialmente, vamos analisar a definição dada de ponto fixo de uma função. O enunciado define que os pontos do gráfico de uma função que têm abscissas iguais às ordenadas são chamados de pontos fixos desse gráfico. Tal definição não está correta, pois ponto fixo é um ponto do domínio da função e não o par ordenado de uma função. Podemos relacionar o ponto fixo ao par ordenando como fizemos na proposição 3.1.1 sobre a interpretação geométrica do ponto fixo.

Resolvendo a questão, suponhamos que exista um ponto fixo $x = k \in \mathbb{R}$ na função dada por $f(x) = 1 + |2x - 5|$. Logo, pela proposição 3.1.1, temos que o ponto $P(k, k)$ pertence ao gráfico de $f$. Assim,

$$f(k) = k \implies 1 + |2k - 5| = k \implies |2k - 5| = k - 1.$$

Como condição de existência, segue que: $|2k - 5| \geq 0 \implies k - 1 \geq 0 \implies k \geq 1.$

Pela definição de módulo, temos:

- $2k - 5 = k - 1 \implies k_2 = 4$
- $2k - 5 = -(k - 1) \implies k_1 = 2$

Assim, a função $f$ possui dois pontos fixos, ou seja, $k_1 = 2$ e $k_2 = 4$.

Analisando geometricamente segue que os pontos fixos $k_1 = 2$ e $k_2 = 4$ estão relacionados com os pares ordenados $P_1(2, 2)$ e $P_2(4, 4)$.

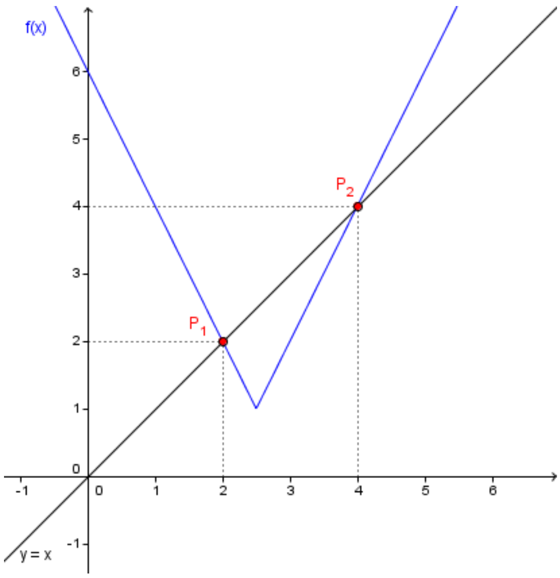



Figura 8 - Ponto fixo de um função modular

Logo, a distância entre os $P_1$ e $P_2$ é $d_{p_1 p_2} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

O enunciado desta questão ficaria adequado da seguinte forma: os pontos do gráfico de uma função que têm abscissas iguais às ordenadas permitem localizar os pontos $x = k$, pertencentes ao domínio, que são denominados pontos fixos da função. Determine a distância entre $P_1(k_1, k_1)$ e $P_2(k_2, k_2)$, em que $k_1$ e $k_2$ são pontos fixos da função $f(x) = 1 + |2x - 5|$.

## 3.5 Paridade de funções

No estudo de características de funções temos também como objeto de análise as funções pares e ímpares. Em especial, no estudo de funções ímpares podemos propor abordagens envolvendo o conceito de ponto fixo.

| | |
|---|---|
| Definição 3.5.1 | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x$ pertencente ao domínio de $f$. |

Como consequência dessa definição ainda o gráfico de $f$ que é simétrico em relação à origem O.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.5.2 | Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar. Se existe ponto fixo $x = k \in D_f$, então seu oposto, $x = -k$, também será ponto fixo. |
| | Demonstração:<br>Suponhamos que $x = k$ é ponto fixo de $f$, pela definição 2.1, temos que $f(k) = k$. Pela hipótese de que a função $f$ é impar, temos que $f(-k) = -f(k)$. Logo, é imediato que $f(-k) = -k$.<br>Assim, $x = -\, k$ é ponto fixo de $f$.<br>■ |

*Exemplo 3.5.3 – Função ímpar.*

Para analisar geometricamente esta proposição, utilizaremos a função ímpar $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$. Verificaremos que o gráfico de $f$ intersecta a reta $y = x$ em dois pontos simétricos em relação à origem. Observemos que os pontos A (-1, -1) e B (1, 1) pela proposição 3.1.1 permitem a localização dos pontos fixos desta função dados por $k_1 = -1$ e $k_2 = 1$.

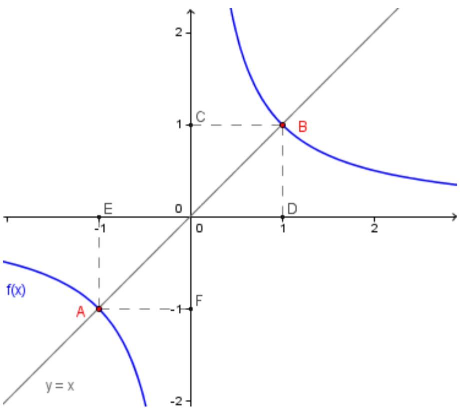



Figura 9 - Exemplo 3.5.3
Pontos fixos opostos da função ímpar

| | |
|---|---|
| Proposição 3.5.4 | Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, então existe pelo menos um ponto fixo trivial da função $f$, $k = 0$. |
| | Demonstração:<br>De fato, como $0 \in D_f$, então,<br>$f(-0) = -f(0)$<br>$f(0) + f(0) = 0$<br>$2f(0) = 0$<br>$f(0) = 0.$<br>Portanto, o ponto $k = 0$ é ponto fixo em $f$.<br>■ |

*Exemplo 3.5.5 – Função ímpar.*

Analisando geometricamente a proposição acima através da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, temos:

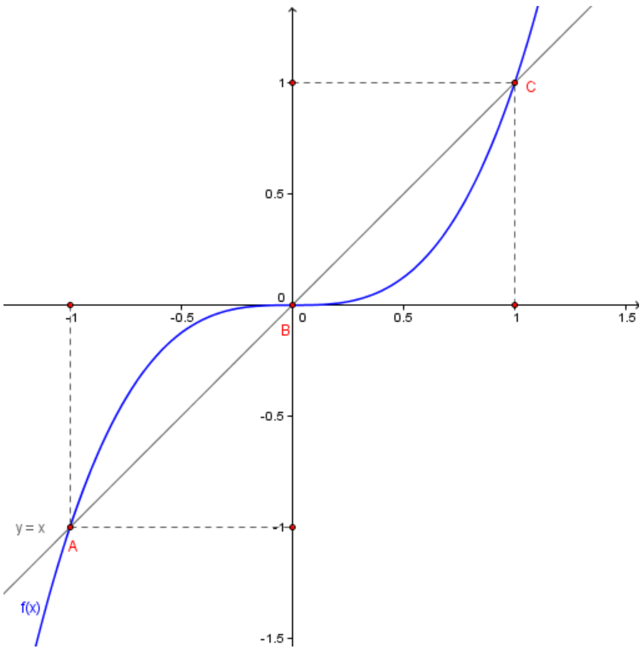



**Figura 10 - Exemplo 3.5.5**
**Ponto fixo de uma função ímpar**

Como a função é ímpar e possui $D_f = \mathbb{R}$, analisando geometricamente, segue que ela intersecta a reta $y = x$ nos pontos $(-1,-1)$, $(0,0)$ e $(1,1)$. Pela proposição 3.1.1, segue que os pontos fixos da função são $k_1 = -1$, $k_2 = 0$ e $k_3 = 1$. O ponto $k = 0$ é ponto fixo de uma função ímpar conforme a proposição 3.5.4.

## 3.6 Composições de funções

Uma importante operação envolvendo funções são as funções compostas.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.6.1 | Sejam $f$ e $g$ funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $f(k) = k = g(k)$, ou seja, as funções $f$ e $g$ possuem o mesmo ponto fixo $x = k \in \mathbb{R}$, então $f\big(g(k)\big) = k = g\big(f(k)\big)$. |
| | Demonstração: Sejam $f$ e $g$ funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(k) = k = g(k)$. Logo, $$f(g(k)) = f(k) = k = g(k) = g(f(k)).$$ ■ |

*Exemplo 3.6.2 – Composição de funções.*

Analisaremos esta proposição a partir da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , definida por $f(x) = 3x - 10$. Esta função, pela proposição 3.2.2, possui um único ponto fixo, isto é, para $x = k = 5$, $y = 5$. Analisando a composta da função $f$ com ela mesma, ou seja, $f\big(f(x)\big) = f(3x - 10) = 9x - 40$, teremos o mesmo ponto fixo, ou seja, para $x = k = 5$ temos $f\big(f(5)\big) = 5$.

O resultado deste exemplo parece à primeira vista óbvio. Porém, fazendo uma análise geométrica da função $f$ com as suas compostas (Figura 10), temos uma característica de *aproximações sucessivas* acerca do ponto fixo $x = k = 5$, o que nos permite supor que o limite de infinitas composições desta função tenderia para a reta $y = 5$, bem como uma rotação em torno do ponto de intersecção da função com a reta $y = x$, dado por $(5, 5)$. Tal abordagem enriquece o desenvolvimento das habilidades relacionadas aos estudos de funções e gráficos.

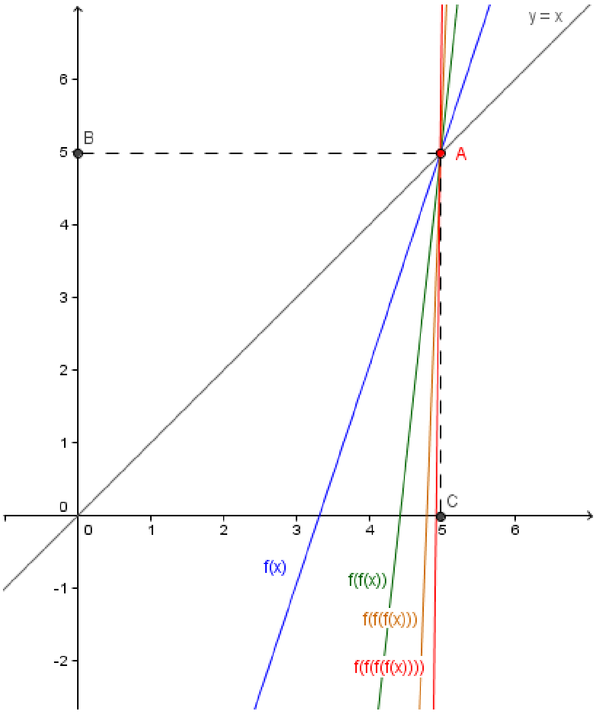



**Figura 11 - Exemplo 3.6.2**
**Composições de funções com o mesmo ponto fixo**

| | |
|---|---|
| Proposição 3.6.3 | Sejam $f$ e $g$ funções afins definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, se existir $x = k \in \mathbb{R}$, tal que $f(k) = k = g(k)$, então, $f\big(g(x)\big) = g(f(x))$. |

Demonstração:

De fato, sejam $f$ e $g$ funções afins definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com $f(k) = k = g(k)$. Logo, pela proposição 3.2.7,

$$f(x) = ax - ak + k \quad \text{e} \quad g(x) = a'x - a'k + k$$

Assim,

$$g\big(f(x)\big) = g(ax - ak + k) = a'(ax - ak + k) - a'k + k$$

$$g\big(f(x)\big) = a'ax - a'ak + a'k - a'k + k$$

$$g\big(f(x)\big) = a'ax - a'ak + k \qquad (3.6.a)$$

Temos ainda, que:

$$f\big(g(x)\big) = f(a'x - a'k + k) = a(a'x - a'k + k) - ak + k$$

$$f\big(g(x)\big) = aa'x - aa'k + ak - ak + k$$

$$f\big(g(x)\big) = a'ax - a'ak + k \qquad (3.6.b)$$

Portanto, pelas equações $(3.6.a)$ e $(3.6.b)$, segue que $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$.

■

*Exemplo 3.6.4 – Composição de funções.*

Sejam $f$ e $g$ funções afins definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -3x + 20$. Como $f(5) = 5 = g(5)$, temos que as funções $f$ e $g$ possuem o mesmo ponto fixo $x = k = 5$. Pela proposição 3.6.3, as funções compostas $f\big(g(x)\big)$ e $g\big(f(x)\big)$ serão iguais. De fato,

$$f\big(g(x)\big) = 2g(x) - 5 = 2(-3x + 20) - 5 = -6x + 35.$$
$$g\big(f(x)\big) = -3f(x) + 20 = -3(2x - 5) + 20 = -6x + 35.$$

O gráfico abaixo (Figura 11) ilustra a interação das funções e suas compostas com o ponto fixo.

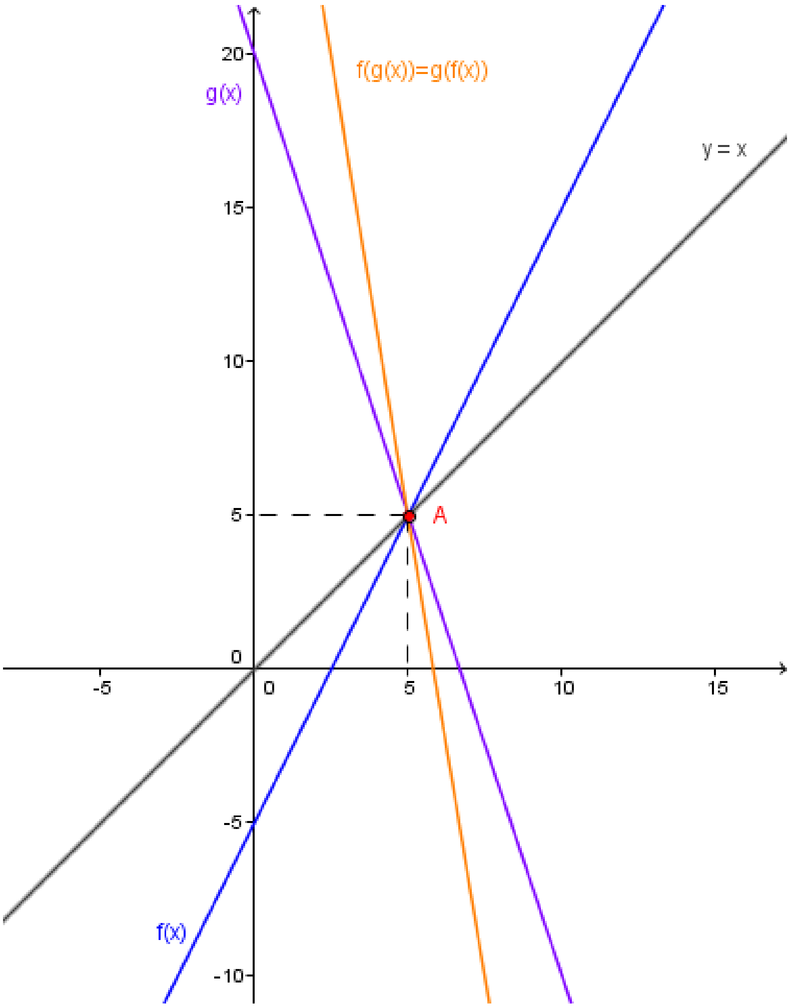



**Figura 12 - Exemplo 3.6.4**
**As funções compostas e o ponto fixo**

| Proposição 3.6.5 | Sejam $f$ e $g$ funções afins definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $f\big(g(x)\big) = g(f(x))$ e $a \neq 1$ e $a' \neq 1$, então existe $x = k \in \mathbb{R}$ tal que, $f(k) = k = g(k)$. |
|---|---|

Demonstração:

De fato, como $a \neq 1$ e $a' \neq 1$, temos pela proposição 3.2.2 que $f$ e $g$ possuem pontos fixo únicos. Suponhamos que tais pontos fixos sejam distintos. Logo, pela definição 2.1 existem m, n $\in \mathbb{R}$, tais que, $f(m) = m$ e $g(n) = n$ e $m \neq n$. Pela proposição 3.2.7, segue que $f(x) = ax - am + m$ e $g(x) = a'x - a'n + n$.

De,

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$$

$$f(a'x - a'n + n) = g(ax - am + m)$$

$$a(a'x - a'n + n) - am + m = a'(ax - am + m) - a'n + n$$

$$aa'x - aa'n + an - am + m = a'ax - a'am + a'm - a'n + n$$

$$(a-1)(a'-1)n = (a-1)(a'-1)m$$

$$n = m$$

Isso reduz a afirmação de que $n \neq m$ ao absurdo.

Portanto, existe $x = k \in \mathbb{R}$ tal que, $f(k) = g(k) = k$, ou seja, as funções $f$ e $g$ possuirão o mesmo ponto fixo.

■

## 3.7 Funções inversas

Abordando o tema de funções inversas, com foco nas propriedades de ponto fixo, colocamos algumas proposições.

| | |
|---|---|
| Proposição 3.7.1 | Sejam X e Y subconjuntos dos números reais, e as funções $f: X \rightarrow Y$ e $f^{-1}: Y \rightarrow X$, onde $f^{-1}$ é a função inversa da função $f$. Segue que, dado qualquer ponto $A(k,k)$, os pontos $P_1(x,y) \in f$ e $P_2(y,x) \in f^{-1}$ são equidistantes do ponto $A$. |
| | Demonstração:<br>Como<br>$$\left(d_{AP_1}\right)^2 = (x-k)^2 + (y-k)^2 = (y-k)^2 + (x-k)^2 = \left(d_{AP_2}\right)^2$$<br>$$d_{AP_1} = d_{AP_2}$$<br>Portanto, os pontos $P_1$ e $P_2$ são equidistantes do ponto $A$.<br>■ |

*Exemplo 3.7.2 – Funções inversas.*

Analisando geometricamente através das funções $f$ e $f^{-1}$, funções definidas de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, dadas por $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, podemos verificar que os gráficos de duas funções inversas são sempre simétricos com relação a quaisquer pontos da reta $y = x$, que estão relacionados de acordo com a proposição 3.1.1 aos pontos fixos de uma função. Daí segue que os gráficos de funções inversas serão sempre simétricos com relação à reta $y = x$.

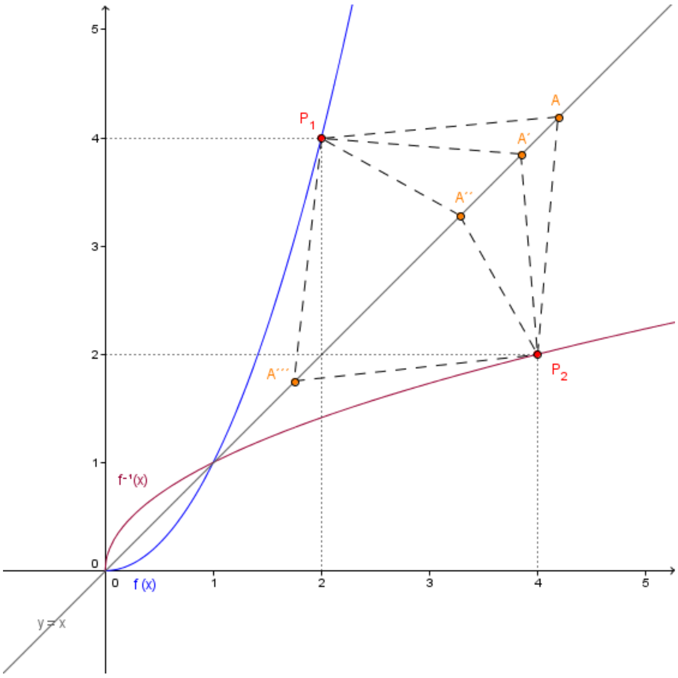



Figura 13 - Exemplo 3.7.2
Pontos equidistantes de pontos fixos

| | |
|---|---|
| Proposição 3.7.3 | Sejam X e Y subconjuntos dos números reais, e as funções $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ e $f^{-1}\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, onde $f^{-1}$ é a função inversa da função $f$. Segue que, $f(k) = k$ se, e somente se, $f^{-1}(k) = k$, ou seja, uma função e sua inversa sempre possuem os mesmos pontos fixos. |
| | Demonstração:<br>De fato, segue da definição de função inversa que o par ordenado $(x, y)$ pertence ao gráfico de $f$ se, e somente se, o par ordenado $(y, x)$ pertence ao gráfico de $f^{-1}$. Portanto, $(k, k)$ pertence ao gráfico de $f$ se, e somente se, $(k, k)$ pertence ao gráfico de $f^{-1}$.<br>■ |

*Exemplo 3.7.4 – Funções inversas.*

Para as funções $f$ e $f^{-1}$, definidas de ℝ₊ em ℝ₊, tais que $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, podemos verificar que os gráficos destas duas funções inversas (Figura13) intersectam a reta $y = x$ nos pontos $O(0, 0)$ e $A(1, 1)$, simultaneamente. Isto ilustra a proposição 3.7.3 de que uma função e sua inversa sempre possuem os mesmos pontos fixos.

Os pontos $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$ são pontos fixos de $f$ e de $f^{-1}$.

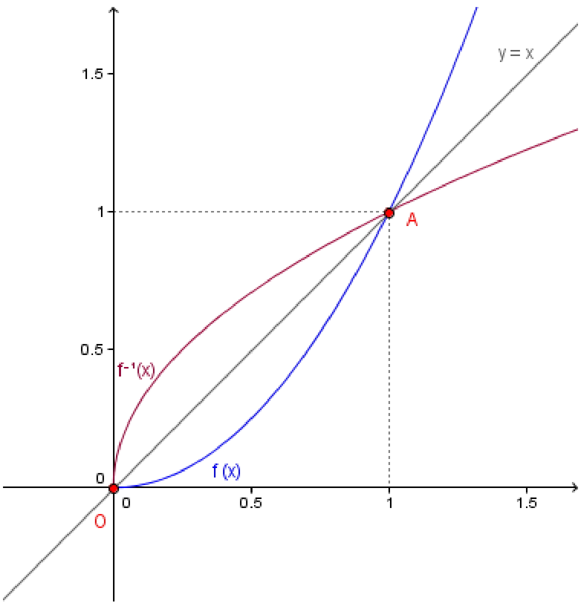



**Figura 14 - Exemplo 3.7.4**
**Pontos fixos de funções inversas**

.

## 3.8 Ponto fixo e o teorema do valor intermediário

Ao desenvolvermos as competências relacionadas ao estudo das funções, nossa primeira preocupação deve ser sua expressão matemática e o seu domínio (condição de existência), afinal, só faz sentido utilizá-la nos pontos em que esteja definida e, portanto, tenha significado. Entretanto, em muitos casos, é importante fazer uma análise dos resultados obtidos nos pontos em que a função está definida e verificar o padrão dos resultados, ou seja, saber como a função se comporta com relação ao conjunto imagem.

Dentro da abordagem de ponto fixo de uma função real, a imagem de um ponto do domínio tem aspecto fundamental, pois ela garante a existência do ponto fixo da função.

*Exemplo 3.8.1 – Função contínua.*

Suponhamos, por exemplo, que o fio de um metal ocupa o intervalo $[0, 60]$ da reta real. A cada posição $x \in [0, 60]$, medida em centímetros, associamos $T(x)$, a temperatura desse fio neste ponto, medida em graus Célsius.

Considerando que o metal é um meio que conduz calor com facilidade, como seria o gráfico de tal função? Segue uma possibilidade.

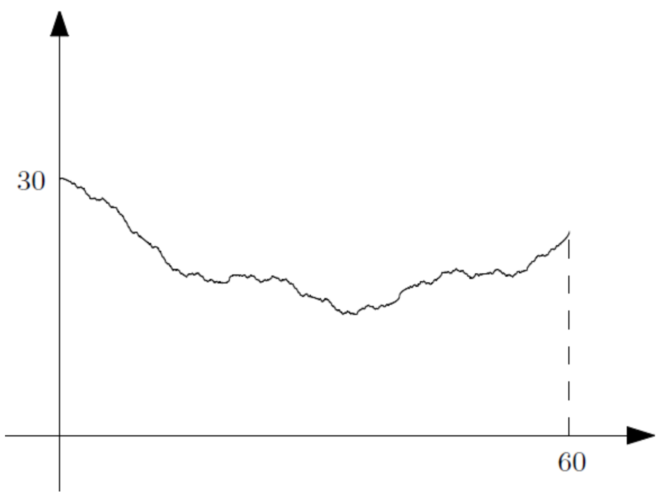



Figura 15 - Exemplo 3.8.1
O gráfico de funções contínuas

O gráfico sugere que uma *pequena* variação na posição corresponderá a uma *pequena* variação na temperatura.

Esta é a ideia básica da **continuidade de uma função**, no caso, a temperatura em termos da posição.

Note que *pequena variação* é um conceito relativo e necessita de noções de limite para estabelecermos a definição em termos absolutos. Como os alunos do Ensino Médio não possuem subsídios para tal abordagem, a definição de função contínua é apresentada de maneira intuitiva.

Como veremos algumas proposições decorrentes do conceito de função contínua, colocamos a seguinte definição:

| | |
|---|---|
| Definição 3.8.2 | Seja $f\colon \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f$ *é uma função contínua* em $c \in \mathrm{D}_f$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que sempre que $\lvert x - c \rvert < \delta$ então $\lvert f(x) - f(c) \rvert < \varepsilon$. |

Para provar que uma determinada função é contínua é necessário verificar a definição em cada ponto de seu domínio. Por outro lado, para mostrar que certa função não é contínua, basta descobrir um ponto de seu domínio no qual a definição de continuidade falhe.

Dada uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, observemos alguns possíveis gráficos:

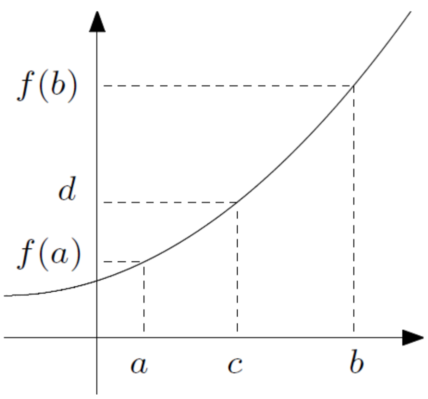


Figura 17 - Exemplo de Função contínua
f(a) < d < f(b)

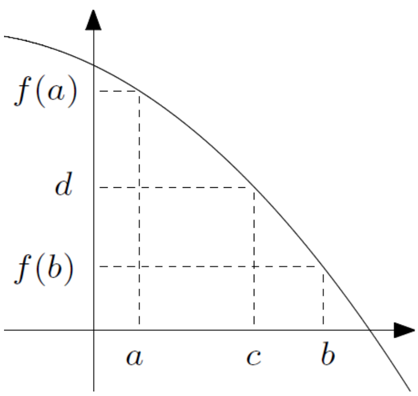


Figura 16 - Exemplo de Função contínua
f(a) > d > f(b)

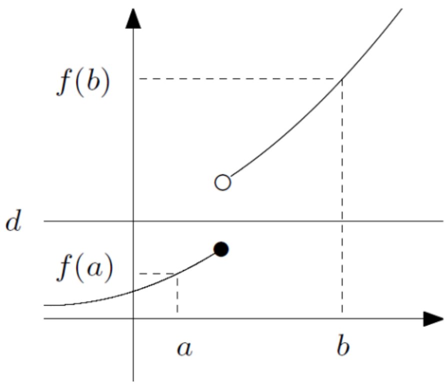


Figura 18 - Função não contínua
Não existe c ∈ [*a*,*b*], tal que *f*(c)=d.

Observando os gráficos anteriores poderíamos colocar a seguinte questão: dada uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, sob quais condições podemos afirmar que, se $d$ é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número $c$, entre $a$ e $b$, tal que $f(c) = d$?

Como ilustram as figuras anteriores, segue que a continuidade é uma condição necessária para a existência de um número $c$, tal que $f(c) = d$. Ou seja, a continuidade é a condição necessária para o gráfico da função, ao passar do nível $f(a)$ para o nível $f(b)$, cruzar todas as retas horizontais entre eles, passando também pela reta $y = d$, pelo menos uma vez. Este fato que nossa intuição aceita tão facilmente, é um resultado matemático muito importante, chamado Teorema do Valor Intermediário ou Teorema de Bolzano, em homenagem ao matemático tcheco Bernhard Bolzano (1781-1848), que o demonstrou analiticamente.

| | |
|---|---|
| Teorema 3.8.3<br>Teorema do valor intermediário[4] | Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $d$ é um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que<br>$$f(c) = d.$$ |

Como aplicação do teorema do valor intermediário apresentaremos um corolário que garante a existência de um ponto fixo de uma função real sobre determinadas condições.

| | |
|---|---|
| Corolário 3.8.4 | Seja $f: [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Então existe um número $k \in [a, b]$ tal que<br>$$f(k) = k.$$ |
| | Demonstração:<br>Consideremos a função $g: [a, b] \to [a, b]$, definida por $g(x) = x - f(x)$ que obviamente é contínua em $[a, b]$. Se $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$ o corolário está demonstrado, pois $f(a) = a$ ou $f(b) = b$. Caso contrário, segue que $g(a) = a - f(a)$, como $a < f(a) < b$, segue que $g(a) < 0$. Por outro lado, $g(b) = b - f(b)$, como $a < f(b) < b$, segue que $g(b) > 0$. Pelo teorema do valor intermediário existe $k \in (a, b)$ tal que $g(k) = 0$, isto é, $k$ é um ponto fixo para a função $f$.<br>■ |

[4] A demonstração deste teorema é um tanto técnica e preferimos omiti-la.

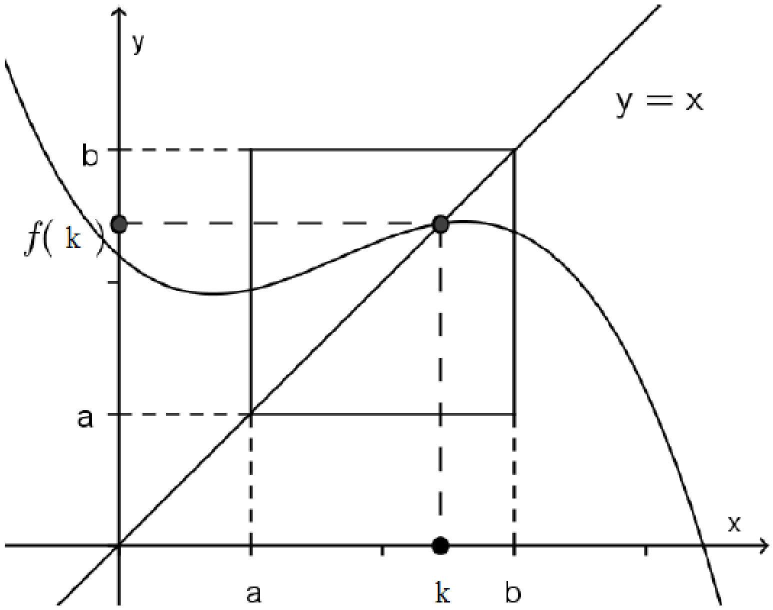



Figura 19 - Corolário 3.8.4
Teorema do Valor Intermediário e ponto fixo de *f*

Intuitivamente podemos observar o seguinte: Seja $f$ uma função contínua de um intervalo fechado $[a, b]$ nele próprio. O gráfico da função $f$ é uma curva contínua que une um ponto do lado esquerdo do quadrado $[a, b]$ x $[a, b]$, a um ponto do lado direito; logo o gráfico de $f$ terá que interceptar a diagonal do quadrado. As coordenadas $(k, f(k))$ de qualquer ponto do gráfico que pertence à diagonal satisfazem a condição $f(k) = k$.

## 3.9 Teorema do ponto fixo de Brouwer

A teoria dos pontos fixos hoje está fortemente ligada também ao ramo da Topologia, ramo da matemática desenvolvida nos finais do século XIX. Um nome importante e que deve ser referenciado é Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matemático e filósofo holandês que generalizou o Corolário 3.8.4.

Consideremos um número natural $n \geq 1$, e denotemos por $B^n$ a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$B^n = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leq 1\},$$

onde $|x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \dots + {x_n}^2}$.

Segue que $B^1 = [-1, 1]$; $B^2$ é o círculo de centro na origem (0,0) e raio 1 do plano; $B^3$ é a esfera de centro na origem (0,0,0) e raio 1 do espaço; e assim por diante.

| | |
|---|---|
| Teorema 3.9.1<br>Teorema do ponto fixo de Brouwer[5] | Toda função contínua $f: B^n \to B^n$ tem pelo menos um ponto fixo. |

*Exemplo 3.9.2 – Papel amassado.*

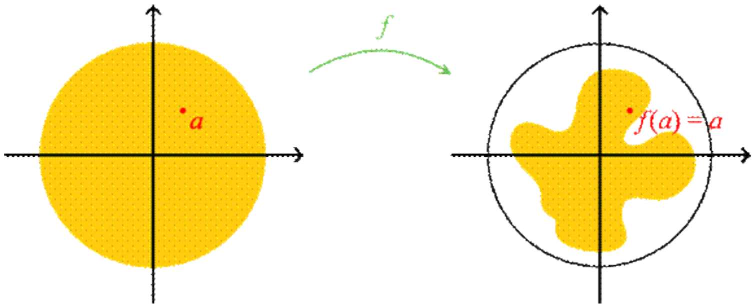



Figura 20 - Exemplo 3.9.2
Teorema de Brouwer no $\mathbb{R}^2$

Consideremos uma função contínua $f: B^2 \to B^2$. Pelo Teorema de Brouwer existe pelo menos um ponto fixo, ou seja, que se encontra fixo depois da aplicação da função $f$.

Ilustraremos o resultado de Brouwer da seguinte forma: consideremos duas folhas idênticas e numeradas; coloquemos uma das folhas de papel amassada aleatoriamente, sem rasgar, acima da outra folha do mesmo padrão conforme a Figura 20. O Teorema de Brouwer garante a existência de pelo menos um ponto na folha amassada que está diretamente acima do ponto correspondente da folha que está abaixo.

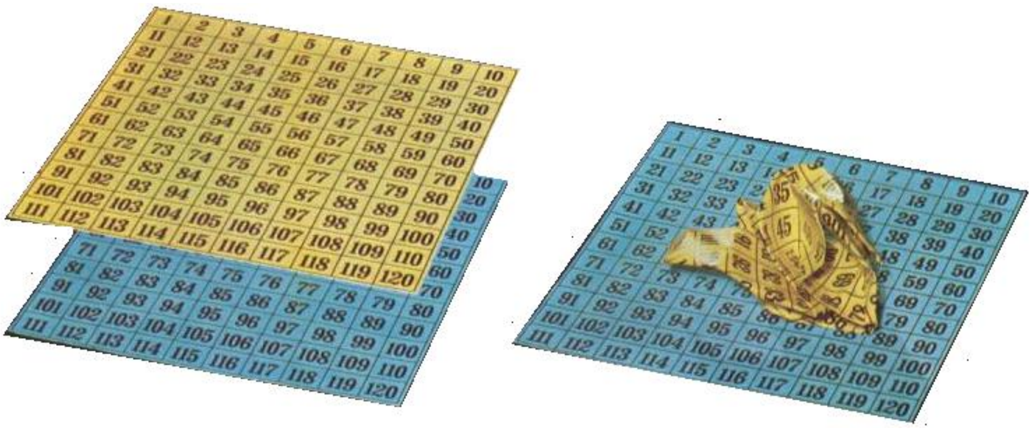


Figura 21 - Exemplo 3.9.2
Teorema de Brouwer no $\mathbb{R}^2$

[5] A demonstração deste teorema é um tanto técnica e preferimos omití-la.

*Exemplo 3.9.3 – Xícara de café.*

Figura 22 - Exemplo 3.9.3
Teorema de Brouwer no $\mathbb{R}^3$

Outro fato decorrente do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que pode ser exemplificado como uma aplicação contínua $f: B^3 \rightarrow B^3$ é que não importa como você misture o café em uma xícara, sempre existe uma partícula de café que retorna ao seu lugar de origem.

Este teorema possibilitou o desenvolvimento não somente da Topologia, mas este e outros teoremas garantem a **existência** de soluções de equações diferenciais, integrais, dentre outras, que podem ser demonstrados utilizando teoremas de ponto fixo. Os teoremas do ponto fixo são usados em outras áreas de conhecimento, como por exemplo, em economia, teoria de jogos e a informática.

As ideias destes exemplos foram adaptadas dos trabalhos de Francis Edward Su [15], de Caissotti [5], de Shashkin [13], e é possível encontrar nestas referências demonstrações do teorema e outras aplicações.

# 4 INTRODUÇÃO À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES PELO MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Apenas um conjunto de equações é proposto aos alunos do Ensino Médio, devido, principalmente, ao nível de complexidade para a obtenção de métodos que possibilitem a resolução dessas equações.

## 4.1 Motivação

*Exemplo 4.1.1 – Efeito Droste.*

Consideremos a figura abaixo:

Figura 23 - Exemplo 4.1.1
Imagem Droste[6] - Adaptado de <www.neatorama.com>

Através da figura 22, podemos verificar uma sequência de imagens recorrentes. À medida que olhamos para uma imagem menor dentro da própria imagem nos aproximamos cada vez mais de um ponto fixo que é constante em todas as imagens.

[6] O termo foi cunhado pelo poeta e colunista Nico Scheepmaker no final da década de 1970.

O mesmo efeito do exemplo 4.1.1 poder ocorrer em várias funções matemáticas.

*Exemplo 4.1.2 – Ponto fixo da raiz quadrada de um número real positivo*

Através de uma calculadora com função raiz quadrada, faça a experiência a seguir. Escreva o maior ou o menor número real positivo que conseguir e extraia a sua raiz quadrada. Repita o processo, extraindo a raiz quadrada do resultado. E mais uma vez, e outra, reiteradamente. Você deve observar que este processo resultará o número 1. O fenômeno observado reflete o fato de que 1 é um ponto fixo da função raiz quadrada.

Em termos matemáticos estamos fazendo o seguinte: dado $a > 0$, consideremos a sequência $(x_n)$ obtida da seguinte maneira: $x_1 = a$ e $x_n = \sqrt{x_{n-1}}$, para $n \geq 2$. Então, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. A sequência foi obtida aplicando reiteradamente a função raiz quadrada ao número $a$.

Note também que nem sempre um ponto fixo atrairá sequências obtidas por processos como este. Basta pensar na função definida por $f(x) = x^2$, na reta real. Novamente 1 é um ponto fixo, mas agora não *atrai* mais os termos da sequência. Se $b_1 > 1$, e colocamos $b_n = (b_{n-1})^2$, para $n \geq 2$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Se escolhermos $0 < b_1 < 1$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

## 4.2 Reescrevendo uma equação

Por vezes estamos interessados em obter as soluções de uma equação

$$f(x) = c, \tag{4.1.a}$$

sendo $f$ uma função contínua, definida num intervalo fechado $[a, b]$ com valores em $\mathbb{R}$.

Se escrevermos $F(x) = f(x) + x - c$, vemos que $F$ é contínua e resolvendo a equação (4.1.*a*) equivale a encontrar um $x \in [a, b]$, tal que,

$$F(x) = x. \tag{4.1.b}$$

Pela definição 2.1., um ponto $x = k$ que verifica (4.1.*b*) é ponto fixo da função $F$.

O método de resolução de equações que apresentaremos está baseado na tentativa de reescrever uma equação $f(x) = c$ como uma equação $F(x) = x$, de tal modo que a função $F$ possa ser reiterada de maneira sucessiva formando uma sequência recorrente e sendo atraída (convergente) para o ponto fixo da função $F$. Assim, determinaremos de maneira aproximada ou por limite a solução da função $f$. Para isso, destacaremos algumas definições e teoremas necessários para o entendimento do método em que estão relacionadas principalmente às sequências de números reais e suas propriedades.

## 4.3 Sequências de números reais

| | |
|---|---|
| Definição 4.3.1 | Uma *sequência* (ou *sucessão*) de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural $n$ associa um número real $x_n = x(n)$, chamado de n-ésimo termo da sequência. |

Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou simplesmente $(x_n)$, a sequência cujo $n$-ésimo termo é $x_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, a sequência dos números pares positivos pode ser expressa por $(2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$, cujo $n$-ésimo termo ou termo geral é $x_n = 2n$ .

**Observação:** Sem perda de generalidade, consideraremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

| | |
|---|---|
| Definição 4.3.2 | Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma *subsequência* de $(x_n)$ é a restrição da função $x$ que define $(x_n)$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots\}$. Denotamos a subsequência por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$. |

Consideremos, por exemplo, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, se restringirmos a função $x$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{3, 6, 9, \dots, 3k, \dots\}$, com $k \in \mathbb{N}$, teremos a subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_1} = (6, 12, 18, \dots, 6k, \dots)$. Observemos ainda que todos os elementos da subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ são elementos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

## 4.4 Limites de sequências de números reais

| | |
|---|---|
| Definição 4.4.1 | Sejam $(x_n)$ uma sequência de números reais e $L$ um número real. Dizemos que $(x_n)$ **converge** para $L$, ou é **convergente**, e escreve-se $\lim_{n \to \infty} x_n = L$, quando para qualquer intervalo aberto $I$ contendo $L$ (por menor que ele seja) é possível encontrar um natural $n_\varepsilon$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_\varepsilon$. |

Esta definição equivale à condição algébrica: para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos $x_n$ com $n > n_\varepsilon$ satisfazem a condição $|x_n - L| < \varepsilon$.

*Exemplo 4.4.2 – Limite de uma sequência.*

Consideremos a sequência $(0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ 0{,}1111;\ \ldots)$ e observemos a fração geratriz $\frac{1}{9}$ da representação decimal $0{,}111\overline{1}$. Podemos supor que o limite desta sequência é $\frac{1}{9}$, ou seja, esta sequência converge para $\frac{1}{9}$.

O termo geral da sequência é $x_n = 0,\underbrace{111\ldots1}_{n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}$. Consideremos esta soma como uma soma de finitos termos de uma progressão geométrica. Logo,

$$x_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \tag{4.4.$a$}$$

Pela definição 4.4.1, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \left|x_n - \frac{1}{9}\right| < \varepsilon, \forall\, n > n_\varepsilon.$$

De fato, dado um número real arbitrário $\varepsilon > 0$ é possível determinar um número natural $n_\varepsilon$ tal que $10^{n_\varepsilon}.\varepsilon > 1$ (Propriedade Arquimediana dos números reais).

Assim, pela equação (4.4.a), temos para qualquer $n > n_\varepsilon$:

$$\left|x_n - \frac{1}{9}\right| = \left|\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) - \frac{1}{9}\right| = \left(\frac{1}{10}\right)^n < \left(\frac{1}{10}\right)^{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Portanto, verificamos que o limite da sequência é $\frac{1}{9}$.

Encontrar o limite para onde uma sequência converge pela definição pode se mostrar muito difícil ao se aplicar no Ensino Médio. Porém, a noção de que frações com numeradores constantes e denominadores muito grandes são frações tendendo a zero, pode auxiliar nesta interpretação. Neste exemplo, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Pela equação 4.4.*a*,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}.$$

| | |
|---|---|
| Definição 4.4.3 | Quando não existir um número real $L$ para o qual a sequência $(x_n)$ convirja, dizemos que a sequência $(x_n)$ **diverge**, ou que é **divergente**. |

| | |
|---|---|
| Proposição 4.4.4 | Se existir um número real $L$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, então ele é único. |
| | Demonstração:<br>Suponhamos por absurdo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L_1$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = L_2$, com $L_1 \neq L_2$. Tome $r = \frac{\lvert L_2 - L_1\rvert}{2} > 0$. Assim, existem inteiros positivos $n_1$ e $n_2$ tais que para todo $n > n_1$, $\lvert x_n - L_1\rvert < r$ e para todo $n > n_2$, $\lvert x_n - L_2\rvert < r$. Tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $\lvert x_n - L_1\rvert < r$ e $\lvert x_n - L_2\rvert < r$, para todo $n > n_0$, o que é equivalente a<br>$L_1 - r < x_n < L_1 + r$ e $L_2 - r < x_n < L_2 + r$<br>Multiplicando-se a primeira desigualdade por -1 e adicionando-a na segunda, obtemos $\lvert L_2 - L_1\rvert < 2r = \lvert L_2 - L_1\rvert$, absurdo.<br>Provamos assim que o limite é único.<br>■ |

| | |
|---|---|
| Proposição 4.4.5 | Seja $(x_n)$ uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e seja $(x_{n_i})$ uma subsequência qualquer, então $\lim_{n_i\to\infty} x_{n_i} = L$. |
| | Demonstração:<br>Seja $r > 0$ um número real, logo existe $n_0$ tal que $x_n \in (L - r, L + r)$ para todo $n > n_0$. Por outro lado existe $i_0$ tal que se $i > i_0$, então $n_i > n_0$. Portanto, se $i > i_0$, segue que $x_{n_i} \in (L - r, L + r)$, que mostra que $\lim_{n_i\to\infty} x_{n_i} = L$.<br>■ |

## 4.5 Sequências recorrentes de números reais

| | |
|---|---|
| Definição 4.5.1 | Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $(x_n)$ é uma **sequência recorrente** ou é uma sequência definida por recorrência se existe uma função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que<br>$$x_{n+1} = F(x_n),\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.5.a)$$<br>e o primeiro termo $x_1$ é dado.<br>Neste caso a equação (4.5.*a*) é chamada de *relação de recorrência*. |

**Observação:** Uma sequência recorrente é uma **iteração sucessiva da função *F*** a partir de $x_1$; $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F\big(F\big((x_1)\big)\big) = F \circ F(x_1) = F^2(x_1)$, ..., $x_{n+1} = F^n(x_1)$.

*Exemplo 4.5.2 – Sequência recorrente.*

Consideremos as principais sequências recorrentes apresentadas no Ensino Médio:

**Sequência aritmética**

Por exemplo, tomemos a sequência (5, 8, 11, 14, ...). Segue que,

$x_1 = 5$;

$x_2 = x_1 + 3 = 8$;

$x_3 = x_2 + 3 = 11$;

$x_4 = x_3 + 3 = 14$;

e assim por diante.

Logo,

$x_{n+1} = x_n + 3$ e $F(x) = x + 3$, com $n \in \mathbb{N}$.

Em termos matemáticos, estamos fazendo o seguinte:

Seja $r \in \mathbb{R}$, dizemos que uma sequência $(x_n)$ é aritmética de razão $r$ se $x_{n+1} = x_n + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso $F(x) = x + r$ e a expressão do termo geral é $x_n = x_1 + (n-1)r$.

Se $r = 0$, a sequência aritmética é constante $x_n = x_1$;

Se $r > 0$, a sequência aritmética diverge para $+\infty$;

Se $r < 0$, a sequência aritmética diverge para $-\infty$.

**Sequência geométrica**

Por exemplo, tomemos a sequência (40, 20, 10, 5, ...). Segue que,

$x_1 = 40$;

$x_2 = x_1 \cdot \frac{1}{2} = 20$;

$x_3 = x_2 \cdot \frac{1}{2} = 10$;

$x_4 = x_3 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

e assim por diante.

Logo,

$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{1}{2}$ e $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x$, com $n \in \mathbb{N}$.

Em termos matemáticos, estamos fazendo o seguinte:

Seja $r \in \mathbb{R}$, dizemos que uma sequência $(x_n)$ é geométrica de razão $q$ se $x_{n+1} = qx_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso $F(x) = qx$ e a expressão do termo geral é $x_n = q^{(n-1)}x_1$.

Se $q = 0$, a sequência geométrica é constante $x_n = 0$;

Se $q = 1$, a sequência geométrica é constante $x_n = x_1$;

Se $|q| < 1$, a sequência geométrica converge;

Se $|q| > 1$, a sequência geométrica diverge;

Se $q = -1$ e $x_1 \neq 0$, a sequência geométrica diverge.

Existem várias sequências que podem ser obtidas de maneira recorrente, em particular, a mais famosa é a sequência de Fibonacci[7], dada por, (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...).

[7] Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250), matemático italiano.

## 4.6 Sequências de Cauchy[8]

Existem vários resultados em diferentes partes da Matemática que garantem que as sequências, desde que satisfeitas algumas condições, sejam convergentes ou divergentes.

A maior dificuldade em mostrar que uma sequência converge, usando técnicas que vimos até agora, é que devemos saber antecipadamente se ela converge ou não. Isto é um problema do tipo "o ovo e a galinha", pois para provar que uma sequência converge, nós devemos saber se esta sequência é convergente e quem é o seu limite. Uma saída deste dilema é fornecida pelas sequências de Cauchy.

| | |
|---|---|
| Definição 4.6.1 | Uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é dita **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $$\lvert x_n - x_m \rvert < \varepsilon, \forall\, m, n > n_\varepsilon.$$ |

*Exemplo 4.6.2 – Sequência de Cauchy*

A sequência $(x_n)$, onde $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ , é de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2} > 1$. Daí, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n > \mathrm{m} > n_\varepsilon$, segue que $\frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, $\lvert x_n - x_m \rvert = \left\lvert \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\rvert < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\, m, n > n_\varepsilon$.

| | |
|---|---|
| Teorema 4.6.3 | Toda sequência de Cauchy é limitada. |
| | Demonstração:<br>Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy. Logo, para $\varepsilon = 1$, existe $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\lvert x_n - x_m \rvert < 1, \forall\, m, n > n_\varepsilon$. Daí segue, que $\left\lvert x_n - x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert < 1, \forall\, n > n_\varepsilon$. Por outro lado, $$\lvert x_n \rvert \leq \left\lvert x_n - x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert + \left\lvert x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert < 1 + \left\lvert x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert, \forall\, n > n_\varepsilon.$$ Fazendo $M = \max\{\lvert x_1 \rvert, \lvert x_2 \rvert, \dots, \left\lvert x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert, 1 + \left\lvert x_{n_\varepsilon + 1} \right\rvert\}$, segue que $\lvert x_n \rvert \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $(x_n)$ é limitada. ■ |

[8] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês.

| Teorema 4.6.4<br>Critério de Cauchy | Uma sequência de números reais $(x_n)$ é convergente se, e somente se, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. |
|---|---|

Demonstração:

(→) Suponhamos que $x_n \to L$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n > N_\varepsilon.$$

Se $m, n > N_\varepsilon$, então

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto mostra que a sequência $(x_n)$ é de Cauchy.

(←) Se $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, m, n > N_1.$$

Pelo Teorema 4.6.3, $(x_n)$ é limitada. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass[9] segue que $(x_n)$ tem uma subsequência $(x_{n_k})$ convergente. Digamos que $x_{n_k} \to L$, quando $n_k \to \infty$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|x_{n_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, x_{n_k} > N_2.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}|x_n - L| &= \left|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - L\right| \\ &\leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - L\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall\, n > N,\end{aligned}$$

onde $N = \max\{N_1, N_2\}$. Portanto, $x_n \to L$, quando $n \to \infty$. Isto conclui a demonstração.

■

As ideias da demonstração desse teorema foram adaptadas do trabalho de Robert G. Bartle e Donald R. Sherbert [14].

[9] Teorema (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente.
Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.
Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), matemático tcheco.

## 4.7 Teorema do ponto fixo de Banach[10]

| | |
|---|---|
| Definição 4.7.1<br>Contração | Seja $F: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $F$ é uma **contração** se existe $\alpha \in [0,1)$ tal que $$\lvert F(x) - F(y)\rvert \leq \alpha \lvert x - y\rvert$$ |

*Exemplo 4.7.2 – Contração*

A função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por, $F(x) = 100 + \frac{x}{10}$, é uma contração.

De fato,

$$|F(x) - F(y)| = \left|\frac{x}{10} - \frac{y}{10}\right| = \frac{1}{10}|x - y|$$

Logo, $\alpha = \frac{1}{10} \in [0,1)$.

Portanto $F$ é uma contração.

| | |
|---|---|
| Proposição 4.7.3<br>Desigualdade fundamental de contrações | Seja $X \subset \mathbb{R}$. Se $F: X \to X$ é uma contração com constante $\alpha$, então para todo $x, y \in X$, $$\lvert x - y\rvert \leq \frac{1}{1-\alpha}(\lvert x - F(x)\rvert + \lvert y - F(y)\rvert) \qquad (4.7.a)$$ |

Demonstração:

Aplicando duas vezes a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - F(x)| + |F(x) - F(y)| + |y - F(y)| \\ &\leq |x - F(x)| + \alpha|x - y| + |y - F(y)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$(1 - \alpha)|x - y| \leq |x - F(x)| + |y - F(y)|.$$

Disto segue a desigualdade $(4.7.a)$.

■

Como estamos trabalhando com base em sequências recorrentes, o corolário abaixo, se satisfeito, garante a convergência de uma sequência recorrente, podendo-nos auxiliar quanto à necessidade de mostrar que uma sequência é convergente.

[10] Stefan Banach (1892-1945), matemático polonês.

| | |
|---|---|
| Corolário 4.7.4 | Se uma sequência $(x_n)$ de números reais e existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que $$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \alpha \lvert x_n - x_{n-1} \rvert, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (4.7.b)$$ então $(x_n)$ é convergente. |

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar a seguinte **afirmação:**

Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \alpha^n \lvert x_2 - x_1 \rvert, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (4.7.c)$$

Vamos provar isto por indução. De fato,

- Se $n = 1$, temos $\lvert x_2 - x_1 \rvert \leq \alpha \lvert x_2 - x_1 \rvert$;
- Suponhamos que para $n = j$, a desigualdade $(4.7.c)$ vale;
- Vamos mostrar que para $n = j + 1$, a desigualdade $(4.7.c)$ também vale. De fato,

$$\begin{aligned} \lvert x_{j+2} - x_{j+1} \rvert &\leq \alpha \lvert x_{j+1} - x_j \rvert \\ &\leq \alpha\left(\alpha^j \lvert x_2 - x_1 \rvert\right) \\ &\leq \alpha^{j+1} \lvert x_2 - x_1 \rvert. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita a desigualdade $(4.7.c)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, então

$$\begin{aligned} \lvert x_n - x_m \rvert &= \lvert (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m) \rvert \\ &\leq \lvert x_n - x_{n-1} \rvert + \lvert x_{n-1} - x_{n-2} \rvert + \cdots + \lvert x_{m-1} - x_m \rvert \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^m) \lvert x_2 - x_1 \rvert \\ &\leq \alpha^n \left(\frac{1 - \alpha^{m-n+1}}{1 - \alpha}\right) \lvert x_2 - x_1 \rvert \\ &\leq \alpha^n \left(\frac{1}{1 - \alpha}\right) \lvert x_2 - x_1 \rvert \end{aligned}$$

Como $\alpha^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $\lvert x_n - x_m \rvert \to 0$, quando $n, m \to \infty$. Logo, a sequência $(x_n)$ é de Cauchy. Portanto, $(x_n)$ é convergente pelo Critério de Cauchy (Teorema 4.6.4).

■

**Teorema 4.7.5**
Teorema do ponto fixo de Banach

Se $X \subset \mathbb{R}$ fechado e $F: X \to \mathbb{R}$ é uma contração com $F(X) \subset X$, então $F$ tem um único ponto fixo $k \in X$, e para qualquer $x_1 \in X$ a sequência $(x_n)$ definida por

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.7.d}$$

converge para $k$.

Demonstração:

Existência: Vamos mostrar que a sequência $(x_n)$ é de Cauchy. De fato, para $n \geq 1$ temos

$$|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})| \leq \alpha |x_n - x_{n-1}|$$

Aplicando sucessivamente a desigualdade acima temos

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^n |x_2 - x_1|, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.7.c}$$

Fazendo $x = x_n$ e $y = x_m$ e usando a desigualdade (4.7.$a$) temos

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{1-\alpha}(|x_n - F(x_n)| + |x_m - F(x_m)|). \tag{4.7.e}$$

Substituindo $(4.7.c)$ em $(4.7.e)$ temos

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \frac{1}{1-\alpha}(\alpha^n |x_2 - x_1| + \alpha^m |x_2 - x_1|) \\ &\leq \frac{\alpha^n + \alpha^m}{1-\alpha}|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

e como $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha^n \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim $|x_n - x_m| \to 0$, quando $n, m \to \infty$. Logo, concluímos que a sequência $(x_n)$ é de Cauchy e, portanto, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = k$. Sendo $X$ fechado, segue que $k \in X$. Tomando o limite em $(4.7.d)$ e usando a continuidade da função $F$, segue que $k = F(k)$, isto é, $k$ é ponto fixo da função $F$.

Unicidade: Suponhamos que exista outro ponto fixo de $F$, digamos $q$. Usando a desigualdade $(4.7.a)$ obtemos

$$|k - q| \leq \frac{1}{1-\alpha}(|k - F(k)| + |q - F(q)|) \tag{4.7.f}$$

Como $k$ e $q$ são pontos fixos, da desigualdade $(4.7.f)$ segue que $|k - q| \leq 0$. Logo, $|k - q| = 0$, o que implica $k = q$. Isto completa a demonstração.

■

O teorema do ponto fixo demonstrado por Banach é mais abrangente, porém esta apresentação parcial do teorema é mais acessível para os alunos do Ensino Médio. As ideias da demonstração do teorema 4.7.5 foram adaptadas do trabalho de R. Palais [11]. Uma demonstração mais abrangente pode ser encontrada no trabalho de M. S. Ferreira [9], caso o leitor busque mais detalhes.

Este teorema que garante a convergência de uma função recorrente e a unicidade do ponto fixo é fundamental para se determinar como podemos reescrever uma equação. Ou seja, não basta apenas reescrever uma equação como fizemos no item 4.2, mas se a função $F$ for uma contração será garantida a resolução da equação.

## 4.8 Resolução de equações pelo método das aproximações sucessivas

Da equação (4.5.*a*), ou seja, $x_{n+1} = F(x_n)$, que define uma sequência recorrente, segue que se a sequência recorrente $(x_n)$ converge para $k$, então a subsequência $(x_{n+1})$ converge para o mesmo limite $k$ e se $F$ é uma função contínua em $k$, então $F(k) = k$, ou seja, o limite de uma sequência recorrente pode ser interpretado como um ponto fixo da função.

Basicamente o que devemos buscar é uma sequência recorrente e convergente. O método se baseia no *método das iterações* ou *método das aproximações sucessivas*, em que queremos encontrar o valor $k$ para onde a sequência recorrente $(x_n)$ converge.

*Exemplo 4.8.1 – Aquiles e a tartaruga.*

Consideremos o problema proposto pelo filósofo grego Zenon de Eléia, 500 a.C., que buscava demonstrar que não existe movimento na natureza.

Para isso Zenon propõe uma corrida entre Aquiles, considerado o homem mais rápido entre os gregos e uma tartaruga. Ao colocar, por exemplo, a tartaruga a 1000 metros a frente de Aquiles no momento da largada, e ao considerar que Aquiles desenvolve uma velocidade de 10 metros por segundo e a tartaruga uma velocidade de 1 metro por segundo, qual seria o tempo necessário para Aquiles alcançar a tartaruga?

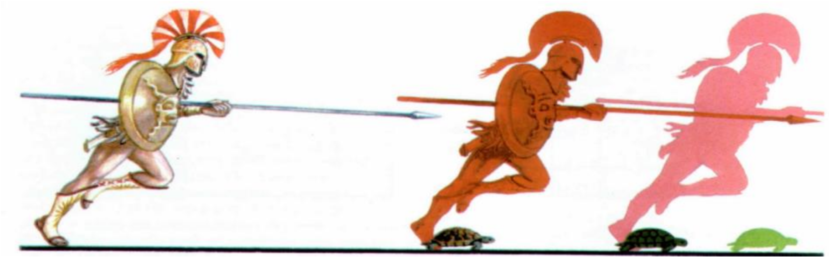


Figura 24 - Exemplo 4.8.1
Aquiles e a tartaruga
adaptado de <http://conceitoaronaldo.blogspot.com/2009/08/os-paradoxos-de-zenao.html>, 2013.

A conclusão dele foi a seguinte: Se Aquiles tivesse tentado alcançar a tartaruga, nunca a alcançaria. De fato, suponhamos que a distância entre Aquiles e a tartaruga é 1000 passos e suponhamos que Aquiles corre 10 passos por segundo, enquanto a tartaruga faz 1 passo por segundo. Depois de 100 segundos, Aquiles percorreu 1000 passos que o distavam da tartaruga, mas neste tempo, a tartaruga, se distanciou 100 passos. Passados 10 segundos, Aquiles percorre estes 100 passos, mas a tartaruga estará na frente 10 passos. Para percorrer estes 10 passos Aquiles precisará de 1 segundo, durante o qual a tartaruga percorre 1 passo mais. Deste modo, segundo o raciocínio de Zenon, a tartaruga sempre estaria à frente e Aquiles nunca a alcançaria. Portanto, não existe movimento.

À conclusão baseada no argumento de que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, Zenon desconsidera qualquer reflexão sobre o que é o tempo. A conclusão de que a tartaruga sempre estará à frente se sustenta sobre o argumento de infinitos deslocamentos simultâneos, de Aquiles e da tartaruga, que representam sempre um décimo em relação ao deslocamento anterior. De forma análoga, o tempo transcorrido para cada deslocamento irá ser de um décimo do tempo do deslocamento anterior. Logo, tem-se que o tempo transcorrido é uma progressão geométrica de razão inferior a "um", o que significa que se somando os infinitos intervalos de tempo desta progressão, haverá um valor limite ao qual o somatório converge. Encontra-se, então, uma incoerência no paradoxo, porque ele define que a tartaruga nunca será alcançada, porém a análise temporal demonstra que isto acontecerá apenas neste intervalo de tempo fixo.

A solução deste paradoxo envolve noções dos conceitos de limite e convergência de sequências numéricas. O paradoxo surge ao supor, intuitivamente, que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma sequência em progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

No Ensino Médio, podemos resolver o problema proposto simplesmente considerando o tempo necessário para Aquiles alcançar a tartaruga por $x$. E o problema pode ser escrito por:

$$D_{Aquiles} = D_{tartaruga} \Longrightarrow\ 10x = 1000 + 1x\ \Longrightarrow 9x = 1000\ \therefore\ \ x = 111{,}11\ ...$$

Portando, o tempo necessário será de 111,11... segundos.

O que propomos neste exemplo é um método de resolução chamado *método das aproximações sucessivas*. Em alguns casos ele pode parecer menos prático, mas será mais eficiente para a obtenção de valores aproximados na resolução de outros problemas.

Consideremos a equação obtida acima $10x = 1000 + 1x$. Ela pode ser reescrita de várias maneiras, porém, iremos reescrevê-la de tal forma que obtenhamos uma função $F$ contínua no intervalo do problema proposto e que seja uma contração. Logo,

$$D_{Aquiles} = D_{tartaruga} \Longrightarrow \; 10x = 1000 + 1x \; \Longrightarrow x = 100 + \frac{x}{10} \Longrightarrow \; x = F(x).$$

Doravante consideremos a equação $x = F(x) = 100 + \frac{x}{10}$. Se desprezarmos o termo $\frac{x}{10}$ da equação, pois é considerado relativamente pequeno se comparado à $x$, obteremos um valor aproximado $x_1 = 100$. Agora, substituindo $x$ por $x_1 = 100$ no lado direito da equação, teremos um valor mais aproximado de $x$ dado por $x_2 = 100 + \frac{100}{10} = 110$. Analogamente, substituindo $x$ por $x_2 = 110$ no lado direito da equação, teremos um valor mais aproximado de $x$ dado por $x_3 = 100 + \frac{110}{10} = 111$. Deste modo obteremos os valores $x_1 = 100$, $x_2 = 110$, $x_3 = 111$, $x_4 = 111{,}1$, e assim por diante. Estes números formam uma sequência recorrente que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10} \tag{4.8.a}$$

Observemos que não achamos o valor exato da solução do problema, mas conseguimos construir uma sequência recorrente e convergente que fornece aproximações sucessivas cada vez mais próximas do valor exato.

Pelo exemplo 4.8.2 segue que, a função $F$, definida por $F(x) = 100 + \frac{x}{10}$, é uma contração. E pelo teorema do ponto fixo de Banach, segue que a sequência $(x_n)$, definida por $x_{n+1} = F(x_n)$ é convergente e converge para um único ponto fixo $k \in [a, b]$ que corresponderá à solução procurada na equação inicial.

Como a sequência $(x_n)$ converge para $k$, então a subsequência $(x_{n+1})$ converge para o mesmo limite $k$ e se $F$ é uma relação de recorrência contínua em $k$, então $F(k) = k$, ou seja, o limite desta sequência recorrente pode ser interpretado como um ponto fixo da relação de recorrência. A sequência converge para o mesmo valor obtido anteriormente, ou seja, na medida em que $n$ aumenta a solução se aproxima $x = 111{,}11\ldots$.

Observemos ainda que o teorema do ponto fixo de Banach garante que a sequência é convergente para um único ponto fixo $k$ independente do valor inicial tomado, pois $F$ é uma contração, pelo exemplo 4.7.2.

Suponhamos que eles tenham corrido por 300 segundos e tomando a primeira aproximação por $x_1 = 200$, e substituindo na equação (4.8.$a$) temos:

$x_2 = 100 + \frac{200}{10} = 120$; $\quad x_3 = 100 + \frac{120}{10} = 112$; $\quad x_4 = 100 + \frac{112}{10} = 111{,}2$;

$x_5 = 100 + \frac{111{,}2}{10} = 111{,}12$; e assim por diante.

Portanto, o tempo necessário será aproximadamente de 111,12 segundos.

*Exemplo 4.8.2 – Valor aproximado de raízes quadradas.*

Um dos mais belos achados sobre a civilização babilônica, em termos matemáticos, consiste uma tábua de argila (YBC7289), de aproximadamente 2500 anos, que se encontra no museu da Universidade de Yale, nos Estados Unidos. Este fragmento contém, na base sexagesimal, uma bela aproximação para o valor de $\sqrt{2}$, convertendo para a base decimal temos: $\sqrt{2} \cong 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.414212963$.

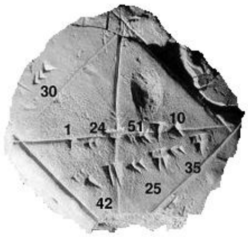



Figura 25 - Exemplo 4.8.2 - Aproximação de $\sqrt{2}$
adaptado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Matemática_babilônica>, 2013.

Tal número também foi objeto de discussões entre os pitagóricos por volta de 2500 anos atrás, por ser um número diferente dos utilizados na época, descoberta atribuída a Hipaso de Metaponto, da escola de Pitágoras, hoje conhecidos como números irracionais.

Consideremos o seguinte problema: qual é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1?

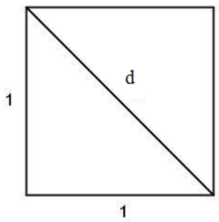



Figura 26 - Exemplo 4.8.2 - Diagonal do quadrado de lado unitário

Pelo teorema de Pitágoras, $d^2 = 1^2 + 1^2$. Portanto, $d = \sqrt{2}$.

Mas qual é a representação decimal correspondente a $\sqrt{2}$?

Por construção segue que $1 < d < 2$, ou seja, $1 < \sqrt{2} < 2$.

Consideremos $x_1 = 1$ uma aproximação de $\sqrt{2}$. Denotemos por $\alpha_1$ o erro desta aproximação. Desta forma, temos $\sqrt{2} = x_1 + \alpha_1 \implies \left(\sqrt{2}\right)^2 = (x_1 + \alpha_1)^2$. Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos: ${\alpha_1}^2 + 2.x_1.\alpha_1 + {x_1}^2 - 2 = 0$. Como $0 < \alpha_1 < 1$ segue que ${\alpha_1}^2 < 1$. Assim, podemos desprezar ${\alpha_1}^2$ da equação, logo, $2.x_1.\alpha_1 \cong 2 - {x_1}^2 \implies \alpha_1 \cong \frac{2-{x_1}^2}{2.x_1} = 0{,}5$.

Como $\sqrt{2} = x_1 + \alpha_1$, consideremos $x_2 = x_1 + \frac{2-{x_1}^2}{2.x_1} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ uma aproximação de $\sqrt{2}$. Denotemos por $\alpha_2$ o erro desta aproximação. Desta forma, temos $\sqrt{2} = x_2 + \alpha_2$. Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos: ${\alpha_2}^2 + 2.x_2.\alpha_2 + {x_2}^2 - 2 = 0$. Como ${\alpha_2}^2 < 1$, podemos desprezar ${\alpha_2}^2$ da equação, logo, $2.x_2.\alpha_2 \cong 2 - {x_2}^2 \implies \alpha_2 \cong \frac{2-{x_2}^2}{2.x_2} = -0{,}083333$ ....

Analogamente, a terceira aproximação pode ser escrita da forma:

$x_3 = x_2 + \alpha_2 \implies x_3 \cong x_2 + \frac{2-{x_2}^2}{2.x_2} \implies x_3 \cong \frac{2+{x_2}^2}{2.x_2} \implies x_3 \cong 1{,}416666$ ....

Repetindo este processo, teremos:

$x_4 = x_3 + \alpha_3 \implies x_4 \cong \frac{2+{x_3}^2}{2.x_3} \implies x_4 \cong 1{,}41421568627451.$

Observe que para $x_4$ encontramos uma boa aproximação para a $\sqrt{2}$.

Assim, por indução matemática encontramos o valor aproximado $x_{n+1}$ para $\sqrt{2}$, esta aproximação tem a seguinte forma:

$$x_{n+1} \cong F(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

De maneira geral, para calcular a $\sqrt{a}$, consideremos $0 < a \in \mathbb{R}$ e suponhamos que tenhamos achado a $n$-ésima aproximação positiva $x_n$ de $\sqrt{a}$, então temos:

$$\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}.$$

Segue que $\sqrt{a}$ é a média geométrica dos números $x_n$ e $\frac{a}{x_n}$. O valor aproximado da média geométrica é a média aritmética dos números $x_n$ e $\frac{a}{x_n}$, isto é,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Neste caso $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por: $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

Observando o fato de que $\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + 2a + \left(\frac{a}{x}\right)^2 > 2a$. Disto segue que

$$\frac{1}{4}\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 > \frac{a}{2}.$$

Desta última desigualdade segue a afirmação. Logo,

$$x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $x_n x_{n-1} > \frac{a}{2}$. Disto segue que,

$$0 < \frac{a}{2x_n x_{n-1}} < 1 \qquad (4.8.b)$$

Assim,

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\left(\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) - \frac{a(x_n - x_{n-1})}{2x_n x_{n-1}}\right)\right|.$$

Pela desigualdade (4.8.$b$) temos:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = \left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2x_n x_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Logo, segue que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|.$$

Daí segue pelo corolário 4.7.4 que a sequência é convergente.

Como as sequências $(x_n)$ e $(x_{n+1})$ convergem para o mesmo limite $L$ e $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, segue que $L > 0$, assim segue que

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$$

Logo,

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$$

$$L = \sqrt{a}$$

Portanto, $\sqrt{a}$ é ponto fixo da relação de recorrência $F$.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos aqui apresentados buscaram auxiliar a criação de referenciais teóricos que possibilitem, de maneira significativa, o desenvolvimento das competências e habilidades relacionadas com a Matemática atual. Permite aos alunos compreender os desafios que serão propostos durante o Ensino Superior, visto que tais conceitos já são muitas vezes tratados como pré-requisitos em algumas disciplinas e vestibulares.

Através de situações contextualizadas de maneira simples podemos ilustrar que conceitos restritos ao Ensino Superior como, por exemplo, o teorema de Bouwer e o teorema de Banach, podem e devem ser abordados no Ensino Médio, desenvolvendo novos horizontes e possibilidades para aplicações de tais conceitos na sociedade atual.

Os exemplos apresentados, principalmente os antigos, buscaram provocar e motivar a busca de novas formas de resolvê-los, mostrando que um mesmo problema tem várias possibilidades de ser resolvido, criando assim uma visão de que mesmo na matemática não existem verdades absolutas, e sim maneiras distintas de se compreender um determinado assunto.

O método de resolução de equações por aproximações sucessivas, conforme foi aqui apresentado, pode desenvolver habilidades e competências relacionadas às formas de resolver equações, diferente das abordadas tradicionalmente. Possibilita ainda uma visão diferenciada para os números irracionais que necessitam constantemente de aproximações para seu entendimento.

A Matemática tem avançado significativamente no último século e um tema relevante neste avanço está relacionado ao conceito de ponto fixo. Tentamos apresentar uma abordagem simples, porém, significativa dos conceitos de ponto fixo com a intensão de possibilitar a inserção de maneira concreta deste tema nos conteúdos escolares propostos aos alunos do Ensino Médio, permitindo assim uma atualização de tais conteúdos.

O conhecimento adquirido pela humanidade deve ser compartilhado entre todos, principalmente com os mais jovens que serão os protagonistas do futuro. Não devemos restringir as noções elementares da Matemática atual à sociedade, e sim encontrar formas simples de levá-las a todos para que novas formas de conhecimento sejam construídas. Esperamos que este trabalho seja uma fonte inspiradora e norteadora de novas abordagens de conceitos relevantes na Matemática e que tais abordagens sejam compartilhadas com os alunos.

# REFERÊNCIAS


[1] ALMEIDA, Ricardo Miguel Moreira de. **Teorema do ponto fixo de Banach:** algumas generalizações e aplicações. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações)-Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10216/9558>. Acesso em: 11 dez. 2013.

[2] ÁVILA, Geraldo S. de Souza. **Análise matemática para a licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Matemática. In: **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, DF, 1998. v. 3.

[4] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. In: **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília, DF, 2006. v. 2.

[5] CAISSOTTI, Maria Teresa. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**. 2012. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores)-Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2012. Disponível em: < http://hdl.handle.net/10451/8942>. Acesso em: 11 dez. 2013.

[6] DANTE, Luis Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Ática, 1994.

[7] ______. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

[8] FENILLE, Marcio Colombo. **Os três B's da teoria topológica de pontos fixos:** Bolzano, Brouwer e Borsuk. [S.l.: s.n., 2011?]. 19 p. Manuscrito. Disponível em: <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxtY2ZlbmlsbGV8Z3g6ZmY4ZTlhNjU5NDMyMmU4>. Acesso em: 11 dez. 2013. Minicurso apresentado na 1. Semana da Matemática do ICE-UNIFEI, Itajubá, 2011.

[9] FERREIRA, Marcos dos Santos. **O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações**. 2008. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Matemática)-Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2008. Disponível em: < http://marcosferreira.weebly.com/uploads/1/2/3/6/12369997/monografia_marcosferreira.pdf >. Acesso em: 11 dez. 2013.

[10] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araujo. Amigo oculto. **Revista do professor de matemática**, Rio de Janeiro, RJ, n. 15, p. 37-39, 1989.

[11] PALAIS, Richard S. A simple proof of the Banach contraction principle. **Journal of fixed point theory and applications**, Texas A&M University - Kingsville, United States of America, v. 2, n. 2, 221-223, 2007. Disponível em: < http://vmm.math.uci.edu/PalaisPapers/BanachContractionPrinciple.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2013.

[12] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo:** Matemática: ensino fundamental ciclo II e ensino médio. In: Coordenação Maria Inês Fini. São Paulo, 2008.

[13] SHASHKIN, Yu. **Puntos fijos**. Moscou: MIR, 1991. (Lecciones populares de matemática).

[14] SHERBERT, Ronald R.; BARTLE, Robert G. **Introduction to real analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2011.

[15] SU, Francis Edward et al. **Teorema do ponto fixo de Brouwer**: curiosidades matemáticas. Disponível em: <http://www.math.hmc.edu/funfacts>. Acesso em: 11 dez. 2013.

[16] VILENKIN, N. Ya. **Metodo de aproximaciones sucesivas**. Moscou: MIR, 1984. (Lecciones populares de matemática).

# APÊNDICE

Os exames de ingresso no Ensino Superior colocam em evidência os conteúdos, competências e habilidades necessárias aos candidatos que desejam ser aprovados. Em vários vestibulares o conteúdo acerca do ponto fixo vem sendo abordado, o que reforça a necessidade de adequação da grade de conteúdos referentes à Matemática.

Observemos algumas questões que mostram a abordagem do tema de ponto fixo.

*Exemplo 1 – Universidade Federal de Juiz de Fora.*

A prova de Matemática da 2ª fase do vestibular para a Universidade Federal de Juiz de Fora, aplicado em 2010, trouxe a seguinte questão:

> Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de uma função $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se $f(x_0) = x_0$.
>
> a) Verifique se a função $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$, possui ponto fixo e, em caso afirmativo, determine seu(s) ponto(s) fixo(s).
>
> b) Seja $g$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da forma $g(x) = ax + b$. Determine a e b para que $g$ admita dois pontos fixos $x_1$ e $x_2$ distintos.

Analisando o item a), temos direto da definição proposta na questão. Se existe(m) ponto(s) fixo(s) ele(s) satisfaz(em) $f(x_0) = x_0$. Então:

$$f(x_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad {x_0}^2 - 4x_0 + 6 = x_0 \quad \Rightarrow \quad {x_0}^2 - 5x_0 + 6 = 0$$

Isso reduz o problema a simples resolução de equações quadráticas. Logo, S = {2, 3}. Portanto, existem dois pontos fixos, para $x_1 = 2$ e para $x_2 = 3$.

Analisando o item b), temos pela hipótese da questão dois pontos fixos distintos $x_1$ e $x_2$, logo:

$$g(x_1) = x_1 \quad \Rightarrow \quad ax_1 + b = x_1 \quad (I)$$

$$g(x_2) = x_2 \quad \Rightarrow \quad ax_2 + b = x_2 \quad (II)$$

Resolvendo o sistema de equações dados por (I) e (II), segue que $a = 1$ e $b = 0$. Portanto, a única função afim que possui dois pontos fixos distintos é a função identidade.

Caso o aluno já tivesse tido, mesmo que superficialmente, um contato com os conceitos acerca de ponto fixo, isso facilitaria a interpretação dos resultados obtidos.

*Exemplo 2 – Unicamp.*

A prova de Matemática da 2ª fase do Vestibular Nacional da Unicamp 2011, na questão 18, trouxe a seguinte questão:

Define-se como ponto fixo de uma função f o número real x tal que f(x) = x. Seja dada a função

$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)} + 1$$

a) Calcule os pontos fixos de f(x).

b) Na região quadriculada abaixo, represente o gráfico da função f(x) e o gráfico de g(x) = x, indicando explicitamente os pontos calculados no item (a).

Analisando o item a), temos inicialmente que a função não esta definida para $x = -\frac{1}{2}$. Segue direto da definição proposta na questão. Se existe(m) ponto(s) fixo(s) ele(s) satisfaz(em) $f(x_0) = x_0$.

Então:

$$f(x_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_0 + \frac{1}{2}} + 1 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + x_0 + \frac{1}{2}}{x_0 + \frac{1}{2}} = x_0 \quad \Rightarrow$$

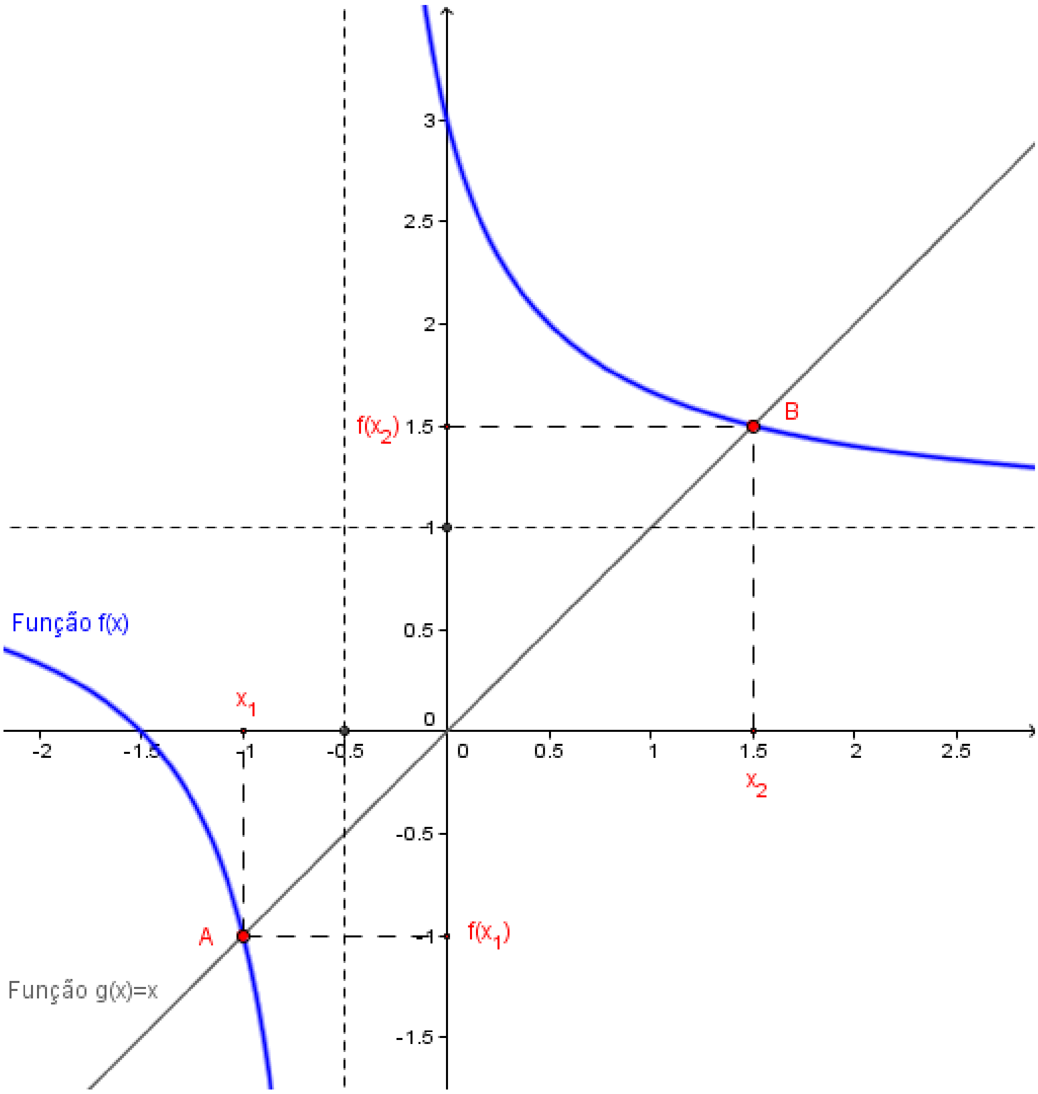
$$\Rightarrow \quad 1 + x_0 + \frac{1}{2} = x_0\left(x_0 + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + 3 = 2{x_0}^2 + x_0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2{x_0}^2 - x_0 - 3 = 0$$

Isso reduz o problema a simples resolução de equações quadráticas. Logo, $S = \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$. Portanto, existem dois pontos fixos, para $x_1 = -1$ e para $x_2 = \frac{3}{2}$.

Analisando o item b), temos:

Figura 27 - Exemplo 2




Através deste exemplo vemos claramente a necessidade de favorecer nossos alunos quanto à importância da interpretação geométrica do ponto fixo de uma função.