

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ivana Resende da Costa Côrtes

*Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*

Rio de Janeiro

2014

Ivana Resende da Costa Côrtes

*Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

**Orientador: Gladson Octaviano Antunes**

**Doutor em Matemática - UFRJ**

Rio de Janeiro

2014

Côrtes, Ivana

Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática / Ivana Côrtes -  
2014

67.p

1. Matemática 2. Geometria. I. Título.

CDU 536.21

Ivana Resende da Costa Côrtes

*Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 07 de Janeiro de 2014

**BANCA EXAMINADORA**

---

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

---

Luiz Pedro San Gil Jutuca

Doutor em Matemática - UFRJ

---

Helvécio Rubens Crippa

Doutor em Matemática - UFRJ

*Ao meu esposo Adriano, pelo seu amor, companheirismo e apoio incondicional. Aos meus pais, Yves e Ana que, mesmo com dificuldades, sempre investiram na minha educação.*

## Resumo

Neste trabalho propomos uma forma diferente de se trabalhar alguns conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo no ensino médio regular. Reforçando a ideia atual da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios repetitivos e sem nenhum sentido lógico para o aluno. Neste sentido, a Geometria Fractal permite explorar diversos conceitos matemáticos de uma forma mais dinâmica e criativa, através da construção de modelos e tabelas com os resultados das iterações, chegando a uma dedução geral do que está ocorrendo. Esse Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO foi desenvolvido de acordo com atividades realizadas com alunos da Escola SESC de Ensino Médio, durante a realização do Projeto de Iniciação Científica da instituição, que tem por objetivo discutir e produzir saberes a partir de um trabalho de pesquisa no qual orientadores de todas as áreas conduzem grupos de alunos no processo de investigação. Em 2013, o projeto foi realizado com um grupo de três alunos, sendo 2 do segundo e 1 do primeiro ano do ensino médio no período de Maio a Outubro, com culminância na semana de 28 de outubro a 01 de novembro de 2013 na semana da Escola aberta, onde a instituição apresenta os trabalhos realizados pelos seus alunos no decorrer do ano para toda a comunidade escolar e instituições convidadas.

Palavras-chaves: **Geometria Fractal, Fractal, Inovação.**

## Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar por sua infinita bondade.

Aos meus pais, Yves e Ana, que, mesmo não presentes fisicamente, tenho certeza estavam o tempo todo ao meu lado me auxiliando, dentro de suas possibilidades.

Ao meu esposo, Adriano, que sempre me apoiou incondicionalmente, não me deixando nunca desistir, mesmo nos momentos mais difíceis.

A Mary, minha irmã, por sua torcida e incentivo sempre.

A toda minha família, por estar sempre ao meu lado, apoiando minhas decisões, mesmo quando elas me afastavam dos nossos momentos juntos.

Ao meu orientador Gladson, pelo apoio e paciência.

Aos professores da Unirio, principalmente Silas Fantini, Ronaldo Busse, Leonardo Silves, Gladson Antunes, Fabio Simas, e José Cal Neto, pelas excelentes aulas, incansáveis sábados e "delicioso" verão.

A Manoela, minha amiga de turma e companheira de estudo e incentivo.

A Escola SESC de Ensino Médio, por me proporcionar a realização do Projeto de Iniciação Científica, permitindo a consecução deste trabalho.

Aos meus queridos alunos, Lourdes Raquel L. T. Cavalcanti (AL), Júlio Cesar N. Sobrinho (TO) e Felipe G. Mundin (PR), que acreditaram no Projeto e o abraçaram, em troca de alguns marshmallows.

E por último, mas não menos importante, aos meus colegas de turma, que se pode elencar como incomparavelmente a melhor, não apenas pelos seus conhecimentos técnicos, mas pelo carisma demonstrado em nosso convívio.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Teoria</b>	<b>10</b>
2.1	Percepção do Infinito . . . . .	10
2.2	Progressão Geométrica (PG) . . . . .	12
2.2.1	Soma dos $n$ primeiros termos de uma PG . . . . .	13
2.2.2	Soma dos $n$ primeiros termos de uma PG infinita . . . . .	14
2.3	Logaritmo . . . . .	15
2.3.1	Propriedades Operatórias dos logaritmos . . . . .	15
2.4	Noções Topológicas . . . . .	15
2.4.1	Conjuntos Abertos . . . . .	16
2.4.2	Conjuntos Fechados . . . . .	16
2.4.3	Pontos de Acumulação . . . . .	17
2.4.4	Topologia no Plano e no Espaço . . . . .	17
2.5	Cardinalidade - Conjunto enumerável e não-enumerável . . . . .	18
2.5.1	Conjuntos Finitos . . . . .	18
2.5.2	Conjuntos Infinitos . . . . .	18
2.5.3	Um importante exemplo de um conjunto não-enumerável . . . . .	18
<b>3</b>	<b>O Surgimento dos Fractais e sua aplicação nas ciências e tecnologias</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Fractais Clássicos</b>	<b>26</b>

4.1	Ilha de Von Koch . . . . .	26
4.1.1	Como varia a quantidade e o comprimento dos lados da ilha de Von Koch? . . . . .	27
4.1.2	Como varia o Perímetro (comprimento da fronteira) da ilha de Von Koch em função das iterações? . . . . .	29
4.1.3	Será que a Área da ilha de Von Koch também é infinita? . . . . .	29
4.2	Triângulo de Sierpinski . . . . .	31
4.2.1	Como se comporta a Área e perímetro do triângulo do Sierpinski? . . . . .	32
4.3	Conjunto de Cantor . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Características de um Fractal</b>	<b>38</b>
5.1	Autossimilaridade e Complexidade Infinita . . . . .	38
5.2	Dimensão . . . . .	39
5.2.1	Dimensão Topológica . . . . .	40
5.2.2	Dimensão Fractal . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Atividades Didáticas</b>	<b>53</b>
6.1	Fractais como metodologia de ensino . . . . .	53
6.2	Atividades realizadas com alunos da Escola SESC . . . . .	54
6.2.1	Construção do Triângulo de Sierpinski . . . . .	55
6.2.2	Construção da Curva de Koch e da Ilha de Koch . . . . .	57
6.2.3	Construção da Pirâmide Fractal . . . . .	59
6.2.4	Fractais no Xaos . . . . .	60
6.2.5	Conclusão das Atividades . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>



# 1 Introdução

No início de Dezembro de 2013, foi divulgado mais um ranking da avaliação internacional do PISA (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes) e ficamos na 58<sup>o</sup> posição, em matemática, entre as 65 nações que participam da avaliação, obtendo um total de 391 pontos. Apresentamos uma "tímida" evolução, pois em 2009 conseguimos 386 pontos. Esta prova é realizada por estudantes de 15 anos de idade matriculados na rede pública ou privada de ensino a partir do 7<sup>o</sup> ano do ensino fundamental.

(Fonte: [g1.globo.com/educacao/noticia/2013/12/para-ministro-resultado-do-brasil-em-ranking-de-educacao-e-grande-vitoria.html](http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/12/para-ministro-resultado-do-brasil-em-ranking-de-educacao-e-grande-vitoria.html) em 23.12.2013 às 15:23)

Este resultado, vem ao encontro com a nossa opinião, de que no Brasil, principalmente na educação básica, em sua maioria os alunos apresentam grandes dificuldades em matemática, muito em consequência do desinteresse pelo ensino da disciplina e a não associação do que aprende em sala de aula com a aplicação no cotidiano. Sabemos que hoje, a grande maioria dos livros didáticos e dos professores tentam trabalhar com alguma contextualização, mas ainda não é suficiente para gerar um grande interesse nos alunos, não somente pelo estudo da matemática, mas pelo conhecimento de forma geral, onde os mesmos tenham que se tornar responsáveis pelo próprio saber.

A motivação deste trabalho surgiu com a intenção de propor aulas onde o aluno possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, tentando tornar o conteúdo trabalhado em sala de aula favorável a aprendizagem significativa do aluno e não apenas uma mera repetição de aplicações de fórmulas, onde na grande maioria dos casos, o estudante não consegue apreender nada do que foi visto, apenas estuda para obter um rendimento quantitativo suficiente para ser aprovado no final do ano letivo.

Conseguimos visualizar essa intenção na geometria fractal, pois a mesma possui um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo. Para isso, não precisa-

mos de muita tecnologia e nem de um esforço sobrenatural basta, por exemplo adequarmos os trabalhos aqui citados aos conteúdos curriculares, inserindo este tema em nossas aulas e com isso cativando o aluno no aprendizado significativo destes conceitos.

No capítulo 1, serão apresentados os principais conceitos teóricos que deverão ser trabalhados em sala de aula, para que o professor consiga desenvolver com o aluno as atividades propostas neste trabalho.

No capítulo 2, faremos um breve resumo sobre o surgimento e as aplicações nas ciências e tecnologias da geometria fractal, descobriremos que existem diversas áreas que utilizam esta geometria para a solução de seus problemas, tentando com isso despertar não só no aluno, mas também no nosso colega professor, o interesse em aplicar esses conhecimentos na sua sala de aula, tornando as mesmas mais dinâmicas e atraentes.

No capítulo 3, analisaremos o comportamento de três fractais clássicos, são eles: a **ilha de Von Koch** que tem perímetro infinito e área finita, embora esse fato possa parecer contrário a nossa intuição geométrica, mas é característica de muitas formas importantes na Natureza, como por exemplo o sistema vascular das veias e artérias no corpo humano, que ocupa uma pequena fração do nosso corpo e tem volume relativamente pequeno, mas tem um enorme comprimento, de ponta a ponta. As veias, artérias e capilares do corpo humano atingem cerca de 65 mil quilômetros. O **triângulo de Sierpinski** que possui perímetro infinito e área tendendo a zero embora esse fato também possa parecer contrário a nossa intuição geométrica e o **conjunto de Cantor**, que apresenta a surpreendente característica de ter tantos pontos quanto a reta real, porém possui comprimento zero, desafiando com isso definitivamente nossa intuição.

No capítulo 4, analisaremos as principais características dos fractais, são elas: **autossimilaridade**, que se baseia no fato de um fractal apresentar cópias de si mesmo em seu interior em diferentes escalas, **complexidade infinita**, refere-se ao fato de que quanto maior for o número de iterações, mais detalhes podemos perceber, e assim nunca obteremos uma “imagem final” do fractal e **dimensão não inteira**, que relaciona-se com o grau de irregularidade de um fractal (conjunto) e assim como o seu “tamanho” no espaço.

No capítulo 5, faremos uma descrição das atividades propostas e realizadas com alunos da Escola SESC de Ensino Médio, durante a realização do Projeto de Iniciação Ci-

---

entífica da instituição, que tem por objetivo discutir e produzir saberes a partir de um trabalho de pesquisa no qual orientadores de todas as áreas conduzem grupos de alunos no processo de investigação.

No capítulo 6, faremos algumas conclusões e ponderações a respeito da realização deste trabalho e deixaremos uma proposta para ser realizada futuramente.

## 2 Teoria

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos teóricos necessários para compreensão do trabalho. Sendo que as três primeiras seções, podem ser trabalhadas no Ensino Médio para a compreensão da Ilha de Von Koch e do Triângulo de Sierpinski, já as demais necessitam de um maior aprofundamento para melhor entendimento à respeito do Conjunto de Cantor.

### 2.1 Percepção do Infinito

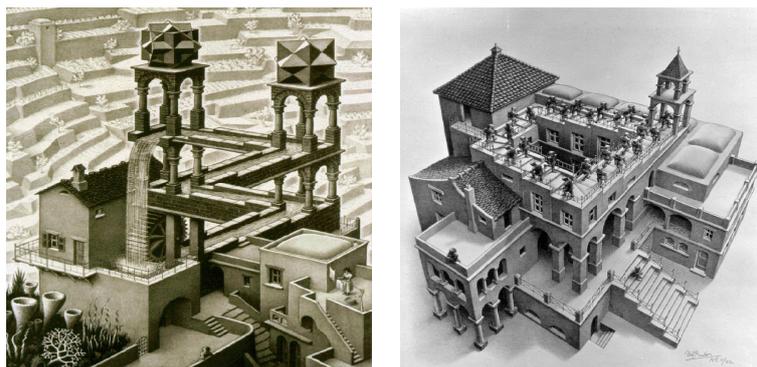
Desde a antiguidade que a matemática e a arte estão intrinsecamente relacionadas e M.C. Escher trabalhava muito bem essa relação na representação do espaço.

Podemos dividir o trabalho realizado por Escher sobre o infinito em três tipos: *Ciclos sem fim, preenchimento de superfícies e limites*. [1]

Por um ciclo entende-se que voltamos sempre ao ponto de partida, fica implícito neste conceito a noção de infinito, pois um ciclo representa um processo que não termina.

As obras de Escher que melhor ilustram os *ciclos sem fim* são as gravuras: *Queda de água* (1961) 2.1(a), onde a água sobe ou desce sempre e sem perder a força e *subindo e descendo* (1960) 2.1(b), alguns cavaleiros estão sempre subindo enquanto outros sempre descendo. Ao percorrermos estas figuras, sentimos, a necessidade de não parar nunca, de continuar indefinidamente.

Por preenchimento de superfície entende-se que ocorreu um conflito entre duas e três dimensões, que pelo seu caráter sistemático sugere um processo ilimitado, a representação do infinito surge na divisão regular do plano. As gravuras que melhor representam os *preenchimentos de superfícies* são: *mãos desenhando-se* (1948) 2.2(a), parte de cada mão esta representada a três dimensões e o resto faz parte de um desenho numa folha de papel, que, por sua vez, se encontra representado a três dimensões com a ajuda de uma dobra nos cantos e *répteis* (1943) 2.2(b), os répteis entram numa folha de caderno e através de rotações

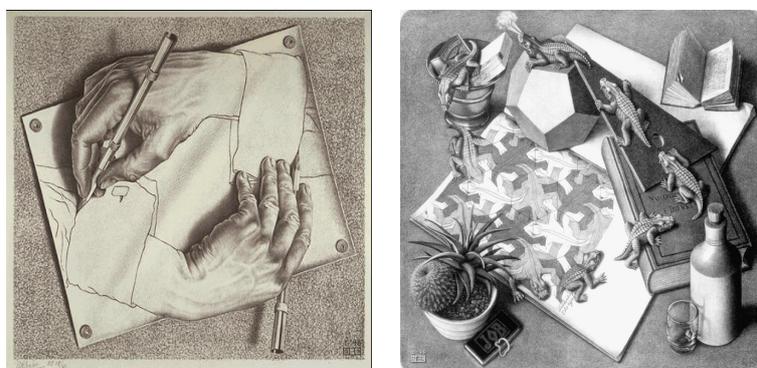


(a) Queda de água

(b) Subindo e Descendo

Figura 2.1: Ciclos sem fim. (Fonte: [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com) )

e translações, a preenchem completamente, voltando a sair e a recomeçar novamente.

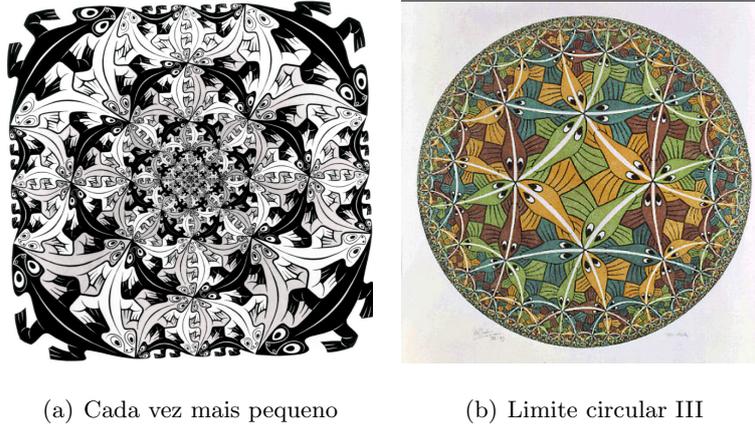


(a) Mãos desenhando-se

(b) Répteis

Figura 2.2: Preenchimento de superfícies. (Fonte: [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com) )

Na fase relativa aos limites, Escher passa a considerar não apenas as translações isométricas mas também as semelhanças, sucessivamente cada vez menores, para preencher o plano até o limite permitido pela sua visão. Como exemplos da fase dos *limites*, temos as figuras: *cada vez mais pequeno* (1956) 2.3(a), onde as figuras que constituem esta gravura tem sua área reduzida pela metade constantemente e radialmente das margens para o centro, onde o limite do infinitamente grande e do infinitamente pequeno é obtido num único ponto e *limite circular III* (1959) 2.3(b), nesta figura existem séries de peixes que se movem na mesma direção e possuem a mesma cor e rodam uns após os outros, cabeça com cauda, ao longo de um percurso circular de fronteira a fronteira. A redução da figura ocorre do centro para as margens, criando a ideia de uma fronteira inatingível.



(a) Cada vez mais pequeno

(b) Limite circular III

Figura 2.3: Limites. (Fonte: [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com))

## 2.2 Progressão Geométrica (PG)

Progressão Geométrica (PG) [2] é a sequência em que cada termo, a partir do 2º termo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real, chamada de razão da PG, indicada por  $q$ .

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da PG conhecendo apenas o 1º termo ( $a_1$ ) e a razão ( $q$ ).

Seja  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$  uma PG. De acordo com a definição da PG, podemos escrever:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

A expressão  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  é conhecida como *termo geral da PG*, e nos permite conhecer qualquer termo da PG em função do 1º termo ( $a_1$ ) e da razão ( $q$ ).

### 2.2.1 Soma dos $n$ primeiros termos de uma PG

Seja  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$  uma PG. Queremos encontrar uma expressão para a soma de seus  $n$  primeiros termos, a saber:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n. \quad (2.1)$$

Multiplicando por  $q$  ( $q \neq 0$ ) os dois membros da igualdade acima e lembrando a forma dos elementos de uma PG, temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ q \cdot S_n &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \\ q \cdot S_n &= a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n \cdot q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fazendo a diferença entre (2.2) - (2.1), temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n - S_n &= (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ q \cdot S_n - S_n &= a_n \cdot q - a_1 \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_n \cdot q - a_1, \quad \text{como } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1 \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_1 \cdot q^n - a_1, \quad \text{com } q \neq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}. \quad (2.3)$$

Observe que, se  $q = 1$ , a fórmula (2.3) não pode ser aplicada. Nesse caso, todos os termos da PG são iguais e, para calcular a soma de seus  $n$  primeiros termos, basta fazer:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1 \\ S_n &= n \cdot a_1. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Soma dos $n$ primeiros termos de uma PG infinita

Seja  $(a_n)$  uma sequência dada pelo termo geral:  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ , para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Vamos atribuir valores para  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) para caracterizar essa sequência:

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0,1 \\ n = 2 &\rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0,01 \\ n = 3 &\rightarrow a_3 = \frac{1}{10^3} = 0,001 \\ n = 4 &\rightarrow a_4 = \frac{1}{10^4} = 0,0001 \\ &\vdots \\ n = 10 &\rightarrow a_{10} = \frac{1}{10^{10}} = 0,0000000001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Trata-se da PG  $(0,1; 0,01; 0,001; \dots)$  de razão  $q = \frac{1}{10}$ . É fácil perceber que, à medida que o valor do expoente  $n$  aumenta, o valor do termo  $a_n$  fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ , quando  $n$  tende ao infinito, vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

De modo geral, pode-se mostrar que, se  $q \in \mathbb{R}$ , com  $|q| < 1$ , isto é,  $-1 < q < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

Vamos calcular a soma dos infinitos termos de uma PG, cuja razão  $q$  é tal que  $-1 < q < 1$ . Para isso, precisamos analisar o que ocorre com a soma de seus  $n$  primeiros termos quando  $n$  tende ao infinito. Isto é, quando  $n$  se torna arbitrariamente "grande". Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \right), \quad -1 < q < 1$$

Levando em conta as considerações anteriores, temos que: ([3], cap. 8, p. 174-175)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Assim, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

## 2.3 Logaritmo

A seguir daremos a definição de logaritmo e suas propriedades básicas.

**Definição 2.3.1** [2] *Sendo  $a$  e  $b$  números reais e positivos com  $a \neq 1$  chama-se logaritmo de  $b$  na base  $a$  o expoente  $x$  ao qual se deve elevar a base  $a$  de modo que  $a^x$  seja igual a  $b$ , ou seja,*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b. \quad (2.4)$$

**Observação 2.1** *Com  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$  indicados na equação (2.4), garantimos a existência e a unicidade de  $\log_a b$ .*

### 2.3.1 Propriedades Operatórias dos logaritmos

Com  $0 < a \neq 1$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ , então

- 1)  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ;
- 2)  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$ ;
- 3)  $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a b$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ;
- 4)  $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ , com  $0 < a \neq 1$ ,  $0 < b \neq 1$  e  $c > 0$ .

## 2.4 Noções Topológicas

Conforme foi dito no início deste capítulo o conteúdo apresentado nessa seção tem como objetivo apresentar algumas noções topológicas (ramo da Matemática que trata das questões de limite e continuidade), que precisaremos delas para entender com maior profundidade o Conjunto de Cantor.

### 2.4.1 Conjuntos Abertos

Diz-se que o ponto  $a$  é *interior* ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando existe um número  $\varepsilon > 0$  tal que o intervalo aberto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \subset X$ . O conjunto dos pontos interiores a  $X$  chama-se *interior* do conjunto  $X$  e representa-se por  $\text{int}X$ . Quando  $a \in \text{int}X$  diz-se que o conjunto  $X$  é uma *vizinhança* do ponto  $a$ .

**Definição 2.4.1** *Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  chama-se aberto quando  $A = \text{int}A$ , ou seja,  $\text{int}A \subset A$  (sempre verdade) e  $\text{int}A \supset A$  (Todo ponto de  $A$  é ponto interior ao conjunto  $A$ )*

**Teorema 2.4.2** [4]

- a) *Se  $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos abertos então a interseção  $A_1 \cup A_2$  é um conjunto aberto*
- b) *Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é um conjunto aberto.*

### 2.4.2 Conjuntos Fechados

Diz-se que o ponto  $a$  é *aderente* ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando  $a$  é limite de *alguma* sequência de pontos  $x_n \in X$ . Evidentemente, todo ponto  $a \in X$  é *aderente* a  $X$ , basta tomar  $x_n = a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Chama-se *fecho* de um conjunto  $X$  ao conjunto  $\overline{X}$  formado por todos os pontos aderentes a  $X$ . Tem-se  $X \subset \overline{X}$ . Se  $X \subset Y$  então  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ . Um conjunto  $X$  diz-se *fechado* quando  $X = \overline{X}$ , isto é, quando todo ponto aderente a  $X$  pertence a  $X$ .

**Teorema 2.4.3** [4] *Um ponto  $a$  é aderente ao conjunto  $X$  se e somente se, toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$ .*

**Teorema 2.4.4** [4] *Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}$  é fechado se e somente se, seu complementar  $A = \mathbb{R} - F$  é aberto.*

**Teorema 2.4.5** [4]

a) Se  $F_1$  e  $F_2$  são fechados então  $F_1 \cup F_2$  é fechado.

b) Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  é um conjunto fechado.

### 2.4.3 Pontos de Acumulação

Diz-se que  $a \in \mathbb{R}$  é *ponto de acumulação* do conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$  diferente do próprio  $a$ , isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  tem-se  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ .

**Teorema 2.4.6** [4] *Dados  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $a$  é um ponto de acumulação de  $X$ ;
2.  $a$  é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in X - \{a\}$ ;
3. Todo intervalo aberto de centro  $a$  contém uma infinidade de ponto de  $X$ .

### 2.4.4 Topologia no Plano e no Espaço

Gostaríamos de salientar que as definições de conjunto aberto e conjunto fechado conforme definidos anteriormente para a reta real estendem-se diretamente para o plano ( $\mathbb{R}^2$ ) e para espaço ( $\mathbb{R}^3$ ), para isso apenas precisamos definir nesses casos o que entendemos por *ponto interior*. Para isso, denotemos por  $d(x, y)$  a distância entre os pontos  $x = (x_1, x_2)$  (ou  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ) e  $y = (y_1, y_2)$  (ou  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ) no plano (no espaço). Seja  $a \in \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) e  $\varepsilon > 0$ , definimos a bola aberta de raio  $\varepsilon$  centrada em  $a$  como  $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ , para  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Agora seja  $X \subset \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) e  $a \in X$ , dizemos que  $a$  é um ponto interior a  $X$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subset X$ . Diremos da mesma forma como fizemos para a reta real, que um conjunto  $A$  é aberto, se todo ponto de  $A$  é um ponto interior a  $A$ , isto é,  $A = \text{int}A$ .

## 2.5 Cardinalidade - Conjunto enumerável e não-enumerável

Conforme foi dito no início deste capítulo o conteúdo apresentado nessa seção tem como objetivo apresentar a noção de cardinalidade, que consiste para o nosso propósito, do número de elementos de um conjunto, sendo necessário apenas distinguir dois tipos: conjuntos finitos e infinitos (enumeráveis e não-enumeráveis), para entender com maior profundidade o Conjunto de Cantor.

### 2.5.1 Conjuntos Finitos

Considere o subconjunto  $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  dos  $n$  primeiros naturais. Um conjunto  $X$  diz-se finito quando é vazio ou então existem  $n \in \mathbb{N}$  uma bijeção  $f : I_n \rightarrow X$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso, denotaremos a cardinalidade de  $X$  por  $\#X = n$ .

Sejam  $X, Y$  conjuntos tal que  $\#X = m$  e  $\#Y = n$  e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. A condição em  $m$  e  $n$  para que  $f$  seja *injetiva* é  $m \leq n \Rightarrow \#X \leq \#Y$ . A condição em  $m$  e  $n$  para que  $f$  seja *sobrejetiva* é  $m \geq n \Rightarrow \#X \geq \#Y$ . A condição em  $m$  e  $n$  para que  $f$  seja *bijetiva* é  $m \leq n$  e  $m \geq n$  então  $m = n \Rightarrow \#X = \#Y$ .

### 2.5.2 Conjuntos Infinitos

Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito, isto é, todo conjunto que não existe bijeção  $f : I_n \rightarrow X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.5.1 (Conjuntos Enumeráveis)** *Um conjunto  $X$  é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Neste caso,  $f$  chama-se uma enumeração dos elementos de  $X$ . Escrevendo  $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$ , tem-se então  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ .*

### 2.5.3 Um importante exemplo de um conjunto não-enumerável

Mostraremos que o conjunto das sequencias infinitas de 0 e 1, denotado por  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é um conjunto não-enumerável. Faremos isso usando o argumento da diagonal de Cantor. Com efeito, concluiremos que não existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  bijeção.

Se tal  $\varphi$  existisse,  $\varphi$  daria uma enumeração das sequências, ou seja,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots), \\ \varphi(2) &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots), \\ \varphi(3) &= (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots), \\ &\vdots \\ \varphi(m) &= (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}, \dots), \\ &\vdots\end{aligned}$$

onde  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  para  $i, j \in \mathbb{N}$ . Tomemos agora a sequência  $s = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , construída da seguinte forma

$$\begin{aligned}s_i &= 1 - a_{ii}, \quad \text{para } i \in \mathbb{N} \\ s &= (s_1, s_2, s_3, s_4, \dots) = (1 - a_{11}, 1 - a_{22}, 1 - a_{33}, \dots)\end{aligned}$$

Afirmamos que  $s \neq \varphi(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e portanto  $s$  não está na lista enumerada das sequências. De fato, o  $i$ -ésimo termo de  $s$  é sempre diferente do  $i$ -ésimo termo de  $\varphi(i)$  qualquer que seja  $i \in \mathbb{N}$ , pois  $s_i = 1 - a_{ii} \neq a_{ii} = (\varphi(i))_i$ . Logo, um conjunto não-enumerável.

### 3 O Surgimento dos Fractais e sua aplicação nas ciências e tecnologias

A geometria Euclidiana é a geometria que normalmente aprendemos nas escolas. Seus polígonos e poliedros regulares fazem parte da história da Matemática, pois serviram de base para a compreensão da Natureza, através da ciência. As criações humanas servem-se majoritariamente das formas geométricas euclidianas para as suas construções, como por exemplo, edifícios, objetos industriais e do cotidiano.

Por tradição conta-se que há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo, se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde então tentava provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas as formas geométricas simples. Em alguns casos, continua a fazer sentido sua utilização, como por exemplo, o uso da esfera como aproximação do modelo da forma da Terra, da elipse como modelo das órbitas celestes e da parábola como trajetória dos projéteis. [5]

Euclides, concentrou-se sobretudo nas formas, deixando de lado, um elemento importantíssimo neste tipo de análise, a dimensão. Existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria. A maior parte das formas apresentadas pela Natureza, não são regulares e nem suaves, pelo contrário, são extremamente complexas, recortadas e irregulares. É o caso da grande parte das árvores e plantas, das rochas e das nuvens.

Como disse Mandelbrot [6]:

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpago viaja em linha reta”.

Na segunda metade do século XIX e na primeira metade do século XX, alguns matemáticos, criaram alguns objetos que ficaram conhecidos como “monstros matemáticos”, como por exemplo: a curva de Peano, o triângulo de Sierpinski, a curva de Von Koch, o

conjunto de Julia, o conjunto de Cantor, entre outros.

O matemático Benoit Mandelbrot, que possuía uma visão geométrica aguçada, não via com bons olhos a crescente algebrização da Matemática, praticada por Bourbaki na França, na primeira metade do século XX, um dos motivos que o fez mudar para o Estados Unidos, em 1948, para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM [7].

Mandelbrot trabalhou em várias pesquisas e uma delas começou pela indagação: "Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?" A resposta encontrada por Mandelbrot, foi:

A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em um documento dos dois países vizinhos, a fronteira de Espanha e Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidade de escalas diferentes. ([7], p.12).

Com isso, ele quis dizer que para medir o tamanho de um litoral ou limite territorial, é preciso, antes de tudo, definir a escala. Matematicamente falando a escala para medir com exatidão uma extensão territorial deveria tender a zero, o que seria inviável, pois faria a extensão tender para infinito. [8]

Os engenheiros da IBM tentavam solucionar um problema na transmissão de dados de um computador para outro, via linha telefônica, pois ocorria um "ruído" que interferia nessa transmissão. Esse problema foi estudado por Mandelbrot, que ao invés de tentar eliminar o ruído, fez o caminho inverso, pois os considerou inevitáveis. Percebeu que os erros vinham em blocos, que se ampliados, revelavam outros blocos menores em sua estrutura intercalada pelos dados da transmissão. Desta forma, tratou os erros, de maneira semelhante ao conjunto de Cantor. Programando os computadores para trabalhar assim, conseguiu fazer com que os receptores conseguissem diferenciar as informações transmitidas dos ruídos indesejáveis. Mesmo não eliminando a chegada dos erros, tornou a comunicação muito mais viável. [8]

Embora os “monstros matemáticos” existissem há muito tempo, ainda ninguém lhes tinha atribuído um nome. Foi então que em 1978, Benoit Mandelbrot, ao preparar a sua primeira obra sobre os ditos “monstros”, sentiu necessidade de lhes atribuir um nome, ficando então conhecido como “o pai dos fractais”.

A geometria fractal permite a representação de certos elementos naturais que possuem características irregulares. Com a geometria fractal torna-se possível a criação de modelos mais próximos da realidade. A geometria fractal fornece algoritmos para construção de formas idênticas as naturais e também ferramentas para o estudo das mesmas. Essa geometria vem se consolidando nos últimos anos com o desenvolvimento da tecnologia computacional e com auxílio de novas teorias nas áreas da física, biologia, astronomia e matemática. [9]



(a) Foto aérea da Costa da Noruega      (b) Carvalho da África      (c) Relâmpago

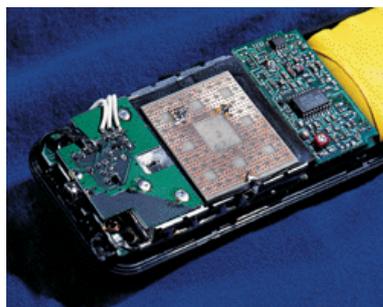
Figura 3.1: Fractais na natureza. (Fonte: Internet)

A definição mais simples é que Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão), apresentando **autossimilaridade, dimensão fractal e complexidade infinita**, como pode ser visto na seção (5).

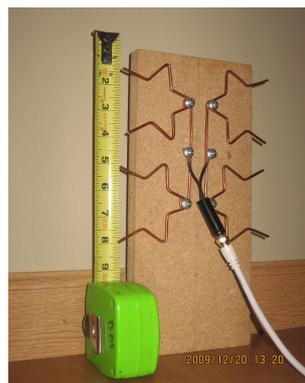
Citaremos, a seguir, alguns exemplos da aplicação dos estudos de fractais na área das ciências e tecnologias. [10] [6] [11] [9]

No desenvolvimento de tecnologias podemos citar a utilização de antenas fractais utilizadas na telefonia celular, na transmissão *wireless*, na TV digital (HDTV), entre outras, conforme figuras (3.2(a) e 3.2(b)).

Na agricultura, a análise de solos, nebulosidade da área, movimentos dos rios e estrutura de vários cristais podem ser modelados por fractais.



(a) Antena de celular



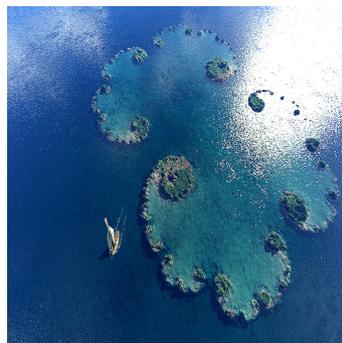
(b) Antena caseira

Figura 3.2: Telefone celular e antena caseira (Fonte: Internet)

Na computação gráfica, utilizada na criações de cenários naturais, como rios, conjuntos montanhosos e plantas, conforme figuras (3.3(a) e 3.3(b)). Na geração de efeitos especiais, como explosões e lavas de vulcões . Podemos dizer que a geometria fractal revolucionou a computação gráfica e o advento do recurso computacional possibilitou o aprofundamento nos estudos dos fractais.



(a) Grand Canyon



(b) Julia Island

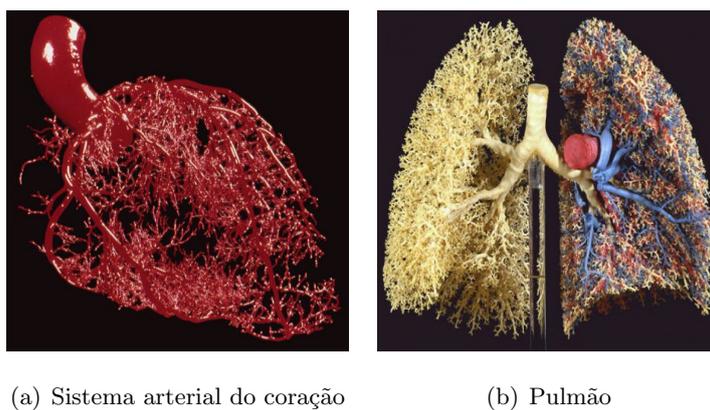
Figura 3.3: Imagens geradas por Computação Gráfica (Fonte: [en.wikipedia.org/wiki](http://en.wikipedia.org/wiki))

Na economia, no estudo da variação de preços das ações nas bolsas de valores. Na astronomia, previsão de trajetórias futuras dos planetas. Na mineralogia, medição da densidade dos minerais, evolução dos terrenos, descontinuidade das rochas. Na geografia, medição do comprimento da costa continental. Na indústria, detecção automática de falhas têxteis.

Nas ciências médicas e biológicas, encontramos diversos exemplos que podem ser

modelados através da geometria fractal. Como exemplo, as ramificações pulmonares, veias e artérias seguem padrões de ramificações, que são bem representados por fractais, conforme as figuras (3.4(a) e 3.4(b)). Um ritmo cardíaco, apesar de aparentemente constante, tem variações aleatórias, porém, identificam-se padrões fractais nessas variações em diferentes escalas.

Na biologia, encontramos diversos exemplos de estrutura fractal: plantas e micro-organismos apresentam estruturas fractais.

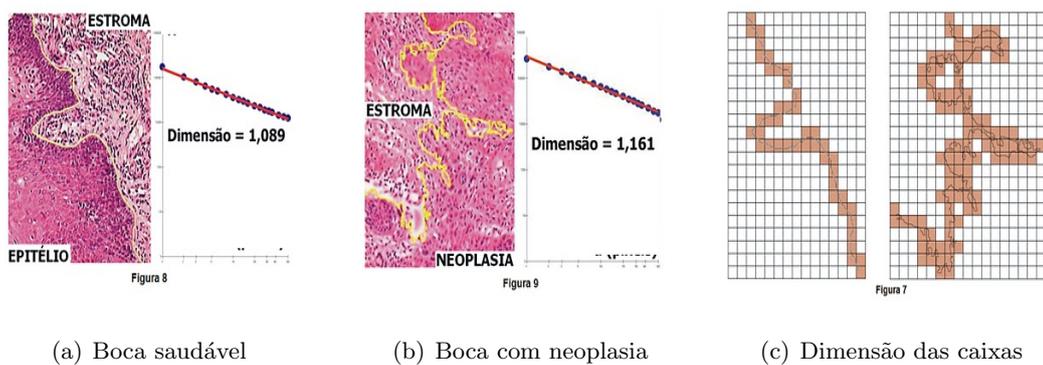


(a) Sistema arterial do coração

(b) Pulmão

Figura 3.4: Fractais no corpo humano. (Fonte: Internet)

A análise de imagens no diagnóstico precoce de câncer pode ser feita através de modelagem utilizando-se os fractais, conforme figuras (3.5(a), 3.5(b) e 3.5(c)).



(a) Boca saudável

(b) Boca com neoplasia

(c) Dimensão das caixas

Figura 3.5: Diagnóstico de câncer bucal usando dimensão fractal (Fonte: [parquedaciencia.blogspot.com.br/2011\\_09\\_01\\_archive.html](http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011_09_01_archive.html))

Os fractais são vistos, algumas vezes, como uma forma de arte, pois apresentam um forte apelo visual, graças à beleza de suas formas. Mesmos os que são criados pela

matemática, como é o Conjunto de Mandelbrot (figura 3.6) despertam grande fascínio.

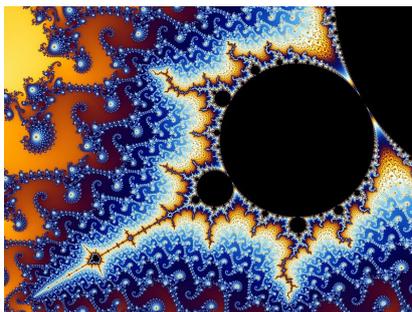


Figura 3.6: Conjunto de Mandelbrot. (Fonte: Internet)

## 4 Fractais Clássicos

Neste capítulo, analisaremos o comportamento de três fractais clássicos, são eles: a **ilha de Von Koch** que tem perímetro infinito e área finita, embora esse fato possa parecer contrário a nossa intuição geométrica, mas é característica de muitas formas importantes na Natureza, como por exemplo o sistema vascular das veias e artérias no corpo humano, que ocupa uma pequena fração do nosso corpo e tem volume relativamente pequeno, mas tem um enorme comprimento, de ponta a ponta. As veias, artérias e capilares de um único corpo humano atingem cerca de 65 mil quilômetros. O **triângulo de Sierpinski** que possui perímetro infinito e área tendendo a zero embora esse fato também possa parecer contrário a nossa intuição geométrica e o **conjunto de Cantor**, que apresenta a surpreendente característica de ter tantos pontos quanto a reta real, porém possui comprimento zero, desafiando com isso definitivamente nossa intuição.

### 4.1 Ilha de Von Koch

O matemático sueco Helge Von Koch em 1904 foi o criador da curva de Von Koch que mais tarde originou a "Ilha de Von Koch" ou "Floco de neve de Koch". Ambas baseiam-se no mesmo processo de construção (um processo recursivo), porém a diferença é que a curva tem como figura inicial um segmento de reta e a ilha, um triângulo equilátero composto por três desses segmentos de reta.[13]

Iniciamos o processo com um triângulo equilátero. Na primeira iteração da construção, dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada um dos segmentos do meio, um novo triângulo equilátero, sem a base, tal como podemos observar na figura 4.1. Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção (conhecida como "Estrela de Davi") com 12 lados. Repetimos o mesmo processo para cada um dos 12 segmentos obtidos na figura anterior. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos, no limite deste processo recursivo, a curva de Koch .

Ao vermos a representação geométrica deste fractal podemos perceber facilmente que temos uma figura regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez menores. Supondo que cada lado do triângulo inicial mede uma unidade. Os lados de cada nova figura são três vezes menores que os da figura inicial.

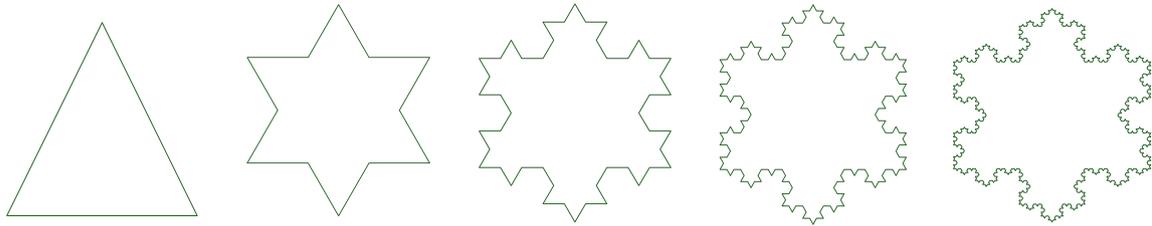


Figura 4.1: Iterações na ilha de Von Koch até a 4<sup>o</sup> iteração

#### 4.1.1 Como varia a quantidade e o comprimento dos lados da ilha de Von Koch?

Com base na figura 4.1, observemos que para cada nova transformação que se faz, a quantidade de lados anterior é multiplicada por 4 e o comprimento dos lados de cada nova figura são 3 vezes menores que os da figura anterior.

Analisemos este fato através da tabela 4.1, considerando o comprimento do lado do triângulo inicial igual a 1 unidade.

O número de lados de cada figura em função do número de iterações é dado por uma PG, onde o  $L_0 = 3$  e a razão  $q = 4$ , que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral, conforme dado abaixo.

$$L_n = \begin{cases} L_0 = 3 \text{ e } L_1 = 12 \\ L_n = 4 \cdot L_{n-1}, n > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad L_n = 3 \cdot 4^n.$$

É evidente que esta sucessão é monótona crescente e que, à medida que o número de iterações aproxima-se do infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , a sucessão  $L_n \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim L_n = +\infty.$$

Figura	Número de lados (L)	Comprimento dos lados (M)
Fig. Inicial	$3 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 4^0$	$M_0 = 1 = 3^0$
1º iteração	$3 \cdot 4 = 12 = 3 \cdot 4^1$	$M_1 = \frac{1}{3} \cdot M_0 = 3^{-1}$
2º iteração	$12 \cdot 4 = 48 = 3 \cdot 4^2$	$M_2 = \frac{1}{3} \cdot M_1 = 3^{-2}$
3º iteração	$48 \cdot 4 = 192 = 3 \cdot 4^3$	$M_3 = \frac{1}{3} \cdot M_2 = 3^{-3}$
4º iteração	$192 \cdot 4 = 768 = 3 \cdot 4^4$	$M_4 = \frac{1}{3} \cdot M_3 = 3^{-4}$
⋮	⋮	⋮
n iteração	$3 \cdot 4^n$	$3^{-n}$

Tabela 4.1: Quantidade e Comprimento dos lados da Ilha de Von Koch.

Isto significa que a curva vai ter um número infinito de lados.

O comprimento dos lados de cada figura em função do número de iterações, é dado também por uma PG, onde  $M_0 = 1$  e razão  $q = \frac{1}{3}$  ( $|q| < 1$ ), que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral

$$M_n = \begin{cases} M_0 = 1 \text{ e } M_1 = \frac{1}{3} \\ M_n = \frac{1}{3} \cdot M_{n-1}, n > 1 \text{ ou } M_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}. \end{cases}$$

É evidente que esta sucessão é monótona decrescente e limitada por zero e, à medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ , a sucessão  $M_n \rightarrow 0$ . Isto é,

$$\lim M_n = 0.$$

Mostrando que o comprimento de cada lado da curva tende para zero.

### 4.1.2 Como varia o Perímetro (comprimento da fronteira) da ilha de Von Koch em função das iterações?

Seja  $P_n = M_n \cdot L_n = (3 \cdot 4^n) \cdot 3^{-n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$  a sucessão dos perímetros definida à custa das duas sucessões anteriores.

Observa-se que  $P_n$  é uma PG de razão  $\frac{4}{3}$  (maior que 1) e  $P_0 = 3$  (1º termo, exatamente, o perímetro do triângulo inicial) e  $P_1 = 4$  (ambos positivos). Assim,  $P_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Isto significa que o perímetro da ilha de Von Koch é infinito.

### 4.1.3 Será que a Área da ilha de Von Koch também é infinita?

Consideremos, para facilitar os cálculos, que a área da curva de Koch tem uma área inicial  $A$ , então  $A_0 = A$

Começemos por estimar a área da curva de Koch traçando um hexágono envolvendo a "Estrela de Davi" (iteração 1), ao continuarmos a construção, constatamos que a figura da 2º iteração ainda está contida no hexágono, conforme figura (4.2). Note que é fácil perceber que isso vai acontecer em todas as iterações.

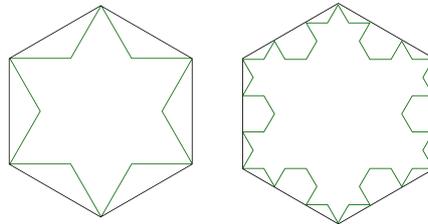


Figura 4.2: Ilha envolvida por um hexágono na 1º e 2º iterações

Podemos então concluir que a área da ilha de Von Koch é inferior à área do hexágono, que é igual ao dobro da área do triângulo inicial, conforme figura (4.3), portanto,  $2A$ . [5]

Com isso, podemos perceber que a área da região delimitada pela ilha de Koch estará compreendida entre  $A$  e  $2A$ .

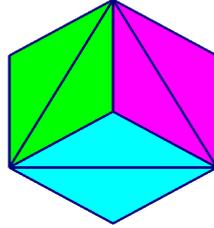


Figura 4.3: Área do hexágono em função de um triângulo equilátero

Sabemos que a área do polígono, em cada iteração, obtém-se adicionando a área do polígono da iteração anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é  $\frac{1}{3}$  do anterior, multiplicada tantas vezes quantas forem o número de lados do polígono anterior.

Observe que se iniciarmos com um triângulo equilátero de lado  $l$  e área  $A$ . Se considerarmos um triângulo equilátero de lado  $l' = \frac{l}{3}$  então sua área  $A'$  será:

$$A' = \frac{l'^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \frac{l^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{9} A.$$

Fazendo um estudo sistemático:

Na figura inicial, temos o número de lados igual a  $L_0 = 3 \cdot 4^0$  e área igual a  $A_0 = A$ .

Na 1ª iteração,

$$L_1 = 3 \cdot 4^1$$

$$A_1 = A_0 + L_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot A = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot A$$

Na 2ª iteração,

$$L_2 = 3 \cdot 4^2$$

$$A_2 = A_1 + L_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot A\right) = A_1 + L_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_2 = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot A + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_2 = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A$$

Na 3ª iteração, temos:

$$L_3 = 3 \cdot 4^3$$

$$A_3 = A_2 + L_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A$$

$$A_3 = A + \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_3 = A + \frac{A}{3} \cdot \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$$

Portanto, na  $n$ -ésima iteração, a área da ilha de Von Koch tem a seguinte expressão:

$$A_n = A + \frac{A}{3} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = A + \frac{A}{3} S_n,$$

onde  $S_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma PG, cujo  $a_1 = 1$  e  $q = \frac{4}{9}$ .

Conforme capítulo 2 seção 2.2.2, sabemos que para uma PG de razão  $|q| < 1$ , a sequência de números reais é convergente e seu limite é:

$$\lim S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Portanto, a área da ilha de Von Koch, denotada por  $A_{Koch}$ , será dada:

$$A_{Koch} = \lim A_n = \lim \left( A + \frac{A}{3} \cdot S_n \right) = A + \frac{A}{3} \cdot \frac{9}{5} = A + \frac{3A}{5}$$

$$A_{Koch} = \frac{8}{5} \cdot A = 1,6 \cdot A.$$

Assim, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $A_{Koch} \rightarrow 1,6 \cdot A$

Notamos que, embora o perímetro seja infinito (ilimitado superiormente), a área tem um limite finito e bem definido igual a 1,6 vezes a área inicial.

## 4.2 Triângulo de Sierpinski

Partimos de um triângulo equilátero (figura inicial) depois removemos o triângulo equilátero definido pelos pontos médios dos lados e assim sucessivamente. O triângulo de

Sierpinski é obtido como limite desse processo recursivo que está descrito, geometricamente, na figura (4.4)

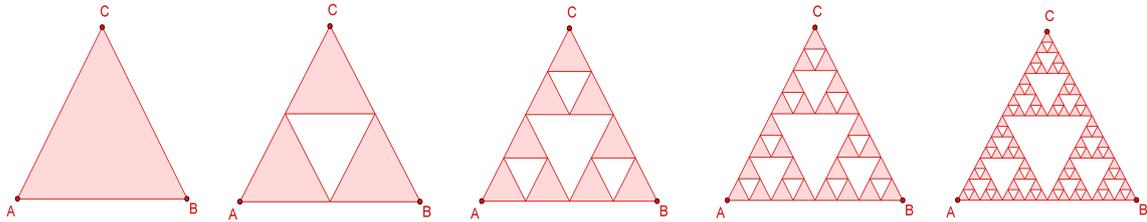


Figura 4.4: Iterações no triângulo de Sierpinski até a 4<sup>o</sup> iteração

Na 1<sup>o</sup> iteração da construção, determinamos os pontos médios de cada um dos lados do triângulo, unimos esses pontos médios (2 a 2) por segmentos e consideramos os quatro segmentos resultantes, retirando o triângulo central. Obtivemos, portanto, a 2<sup>o</sup> figura do processo de construção. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos o triângulo de Sierpinski no limite deste processo recursivo.

Observando a figura (4.4), podemos verificar, que a cada iteração, que a área do triângulo de Sierpinski, é igual à área do triângulo anterior multiplicada pelo fator  $\frac{3}{4}$  e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado pelo fator  $\frac{3}{2} = \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)$ .

#### 4.2.1 Como se comporta a Área e perímetro do triângulo do Sierpinski?

Analisemos este fato através da tabela (4.2)

Analisando, a área do triângulo, temos uma PG de razão  $\frac{3}{4}$  ( $|q| < 1$ ) e 1<sup>o</sup> termo positivo (pois A é a área da figura inicial). É evidente que esta sucessão é monótona decrescente e, à medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow +\infty$ , a sucessão  $A_n \rightarrow 0$

$$\lim A_n = 0.$$

Isto significa que a área do triângulo de Sierpinski tende para zero.

Outra maneira de verificarmos este fato é analisarmos que a área "esburacada" é

Figura	Área	Perímetro
Fig. Inicial	$A$	$P$
1º iteração	$A_1 = A \cdot \frac{3}{4}$	$P_1 = P \cdot \frac{3}{2}$
2º iteração	$A_2 = A_1 \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$	$P_2 = P_1 \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P$
3º iteração	$A_3 = A_2 \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A$	$P_3 = P_2 \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P$
⋮	⋮	⋮
n iteração	$A_n = A_{n-1} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$	$P_n = P_{n-1} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P$

Tabela 4.2: Área e Perímetro do triângulo de Sierpinski.

dada por:

$$B_n = A - \left[ A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] = A \cdot \left[ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$$

$$B_n = A \cdot \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \dots \right] = A \cdot S_n,$$

onde  $S_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma PG, cujo  $a_1 = \frac{1}{4}$  e  $q = \frac{3}{4}$ .

Sabemos que para uma PG de razão  $|q| < 1$ , a sequência de números reais é convergente e seu limite é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Portanto, a área dos buracos do triângulo, que denotaremos por:

$$B_{Sierpinski} = \lim B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A \cdot 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} A = A.$$

Assim, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $B_{Sierpinski} \rightarrow A$ . Logo, a área do triângulo de Sierpinski tende a zero.

Analisando o perímetro do triângulo de Sierpinski temos uma PG de razão  $q = \frac{3}{2}$  (maior que 1) e 1º termo exatamente o perímetro da figura inicial (positivo).

Assim, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $P_n \rightarrow +\infty$ . Isto significa, que o perímetro do triângulo é infinito.

### 4.3 Conjunto de Cantor

Antes mesmo da fundamentação teórica dos Fractais por Mandelbrot, Cantor, em 1883, publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado de Conjunto de Cantor, que na época foi classificado como um dos "monstros matemáticos".

Segundo [4], o conjunto de Cantor tem as seguintes propriedades:

1. Tem interior vazio (não contém intervalos)
2. É não-enumerável
3. É compacto (limitado e fechado)
4. Não contém pontos isolados (todos os seus pontos são pontos de acumulação)

O conjunto de Cantor é um subconjunto fechado do intervalo  $[0, 1]$ , obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Dividimos esse intervalo em três partes congruentes e retiramos seu terço médio aberto e assim sucessivamente, conforme figura 4.5.

Denotemos o intervalo inicial  $F_0 = [0, 1]$ , temos  $2^0 = 1$  intervalo de comprimento  $\frac{1}{3^0} = 1$ . Façamos agora algumas iterações:

- Em  $F_1$ , retiramos o terço médio aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , onde  $F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , temos  $2^1 = 2$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$  cada;
- Em  $F_2$ , retiramos o terço médio aberto  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$  onde  $F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ , temos  $2^2 = 4$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$  cada;
- Em  $F_3$ , retiramos o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos, temos  $2^3 = 8$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$  cada;

Repete-se o processo indefinidamente.

- Em  $F_n$ , temos  $2^n$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  cada.

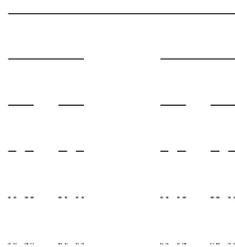


Figura 4.5: Conjunto de Cantor (Fonte: Internet)

O Conjunto de Cantor, denotado por  $K$ , é o conjunto formado por todos os pontos não retirados. Começamos mostrando que tem comprimento zero, ou mais tecnicamente, medida de Lebesgue zero. Com efeito, na  $n$ -ésima iteração da construção, temos  $2^n$  intervalos disjuntos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  cada, portanto o comprimento de  $F_n$  é  $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Quando  $n \rightarrow \infty$ , comprimento de  $F_n \rightarrow 0$ .

Como consequência do fato acima, podemos concluir que  $K$  tem interior vazio, conforme definição na seção (2.4.1). Suponhamos, por absurdo, que o interior de  $K$  seja não-vazio. Portanto,  $\exists a \in K$  e  $\varepsilon > 0$  tal que  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset K$ , com isso teríamos que comprimento de  $K$  seria limitado inferiormente por  $2\varepsilon > 0$ , contrariando o que mostramos anteriormente.

Concluimos até agora que  $K$  possui comprimento zero e tem interior vazio, portanto num primeiro momento, somos tentados a concluir antecipada e erroneamente que os únicos pontos que permanecem no Conjunto de Cantor formam um conjunto enumerável, isto é, os extremos de cada intervalo fechado não retirado. Porém, a seguir veremos que  $K$  é não-enumerável, conforme definição na seção (2.5).

Para isso iremos recorrer ao sistema de representação numérica na base 3 (ternária) e ao elegantíssimo argumento da diagonal de Cantor.

Dado  $x \in [0, 1]$ , representar  $x$  na base 3 significa escrever  $x = 0, x_1x_2x_3 \dots$ , onde cada um dos dígitos  $x_n$  é igual a 0, 1 ou 2 de tal modo que  $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots$ .

Gostaríamos de observar imediatamente que os extremos terão uma representação

ternária finita, por se tratarem de racionais com denominadores de potência de 3. Veremos como exemplo os intervalos abertos que foram retirados até a 2<sup>o</sup> iteração.

Na 1<sup>o</sup> iteração, ao retirarmos o intervalo aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , cuja representação na base 3 é  $\frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = 0,1$  e  $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,2$  ficam excluídos os números cuja representação na base 3 tem  $x_1 = 1$ , com exceção única de  $\frac{1}{3} = 0,1$  que permanece.

Na 2<sup>o</sup> iteração, ao retirarmos os intervalos abertos  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ , cuja representação na base 3 é

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= \frac{1}{3^2} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3^2} = 0,01 \\ \frac{2}{9} &= \frac{2}{3^2} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} = 0,02 \\ \frac{7}{9} &= \frac{7}{3^2} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{3^2} = 2 \cdot \frac{3}{3^2} + 1 \cdot \frac{1}{3^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3^2} = 0,21 \\ \frac{8}{9} &= \frac{8}{3^2} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{3^2} = 2 \cdot \frac{3}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} = 0,22\end{aligned}$$

ficam excluídos os números da forma  $0,01x_3x_4 \dots$  ou da forma  $0,21x_3x_4 \dots$ , com exceção dos extremos  $\frac{1}{9} = 0,01$  e  $\frac{7}{9} = 0,21$  que permanecem.

De um modo geral, podemos afirmar que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo  $[0, 1]$  cuja representação  $x = 0, x_1x_2x_3 \dots x_n \dots$  na base 3 só contem os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que possuem um único algarismo 1 como algarismo significativo final, como  $x = 0,20221$ , por exemplo.

Observamos ainda que

$$\begin{aligned}0,2222 \dots &= 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \dots \\ &= 2 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Logo, podemos sempre substituir o algarismo final 1 pela sequencia  $0,2222 \dots$ . Temos então que  $x = 0,20221 = 0,20220222 \dots$  com esta convenção, pode-se afirmar, sem

exceção, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo  $[0, 1]$  cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2.

Daí resulta facilmente que o conjunto de Cantor é não-enumerável, conforme definição na seção 2.5.3)

Se indicarmos com  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$  os intervalos abertos omitidos, veremos que  $F = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c$ , isto é,  $I_n$  é aberto, portanto seu complementar é fechado, conforme definição nas seções (2.4.1) e (2.4.2). Logo,  $F$  é fechado. Como  $K \subset [0, 1]$  então  $K = [0, 1] \cap F$ , isto é, interseção de fechado é fechado. Logo,  $K$  é limitado e fechado, ou seja, o conjunto de Cantor é compacto.

Os pontos extremos dos intervalos omitidos nas diversas iterações da construção do conjunto  $K$ , pertencem a ele. Chamaremos de  $E$ , o conjunto enumerável formado por esses pontos isolados. Com efeito, seja  $c \in K$ , extremidade de algum intervalo, digamos  $(c, b)$ , omitido de  $[0, 1]$  para formar  $K$ . Quando  $(c, b)$  for retirado, restou um certo intervalo  $[a, c]$ . Nas próximas iterações da construção de  $K$ , restarão sempre os terços finais do intervalo, do tipo  $[a_n, c]$ , com  $a_n \in E$ . O comprimento  $c - a_n$  tende a zero, logo  $a_n \rightarrow c$  e assim  $c$  não é ponto isolado de  $E$ , conforme definição na seção (2.4.3).

Vamos supor agora que  $c \in K$  não seja extremo de intervalo retirado de  $[0, 1]$  durante a construção de  $K$ . Provemos que  $c$  não é isolado em  $K$ . Com efeito, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c$  pertence ao interior do intervalo  $[x_n, y_n]$  que restou depois da  $n$ -ésima iteração da construção de  $K$ . Temos  $x_n < c < y_n$ , com  $x_n, y_n \in K$  e  $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ .

Logo,  $c = \lim x_n = \lim y_n$  é ponto de acumulação de  $K$ . Concluímos que  $K$  não possui pontos isolados.

## 5 Características de um Fractal

Os fractais podem ser obtidos por processos indutivos/recursivos genuinamente geométricos, como expomos no capítulo anterior, ou por processos indutivos/recursivos analíticos, como por exemplo, o conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia ou de modo geral conjuntos obtidos utilizando fórmulas de recorrência obtidas pela iteração de funções (sistemas dinâmicos discretos), proposta para um trabalho futuro. Todos esses exemplos tem as seguintes características em comum: **autossimilaridade**, **complexidade infinita** e **dimensão fractal**, detalharemos abaixo cada uma delas.

Há ainda a noção de fractais estatísticos, cuja noção de autossimilaridade não é determinística, estes podem ser encontradas no estudo de ciências físicas (ramificação de um relâmpago ao cair, movimento browniano, ...), ciências biológicas (a forma de uma árvore se ramificar, eletrocardiograma, ...), finanças (preço de ações em função do tempo), etc.

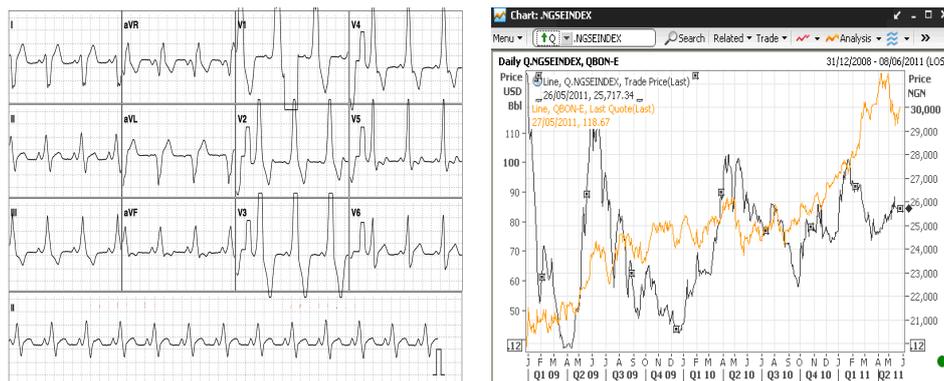
### 5.1 Autossimilaridade e Complexidade Infinita

A autossimilaridade baseia-se no fato de um fractal apresentar cópias, exatas ou aproximadas (estatística), de si mesmo em seu interior em diferentes escalas.

A exata só existe em figuras geradas por processos matemáticos, onde o todo é formado por réplicas em diferentes escalas, resultado do fato de cada iteração seguir a mesma regra de construção, como por exemplo, o triângulo de Sierpinski (4.4) e a ilha de Von Koch (4.1).

Já a estatística aproxima-se dos objetos naturais, pois os mesmos não possuem autossimilaridade exata e não conseguimos visualizar muitas escalas de ampliação, como por exemplo, podemos descrever uma árvore como sendo um tronco principal e ramos que partem dele, ao olharmos ramos menores, vemos que são como cópias do anterior, observe a figura 3.1(b). Outros exemplos desta ideia, temos as figuras 3.1(a), 3.1(c), 5.1(a) e 5.1(b).

O conceito de complexidade infinita refere-se ao fato de que na prática nunca con-



(a) Eletrocardiograma

(b) Preço de uma ação em função do tempo

Figura 5.1: Outros exemplos de fractais nas ciências. (Fonte: Internet)

seguimos proceder ao infinito num processo iterativo (recursão), desta forma, quanto maior for o número de iterações, mais detalhes podemos perceber, porém sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores, e assim nunca obteremos uma “imagem final” do fractal.

Já a noção de dimensão não inteira relaciona-se com o grau de irregularidade de um fractal (conjunto) e bem como com o seu “tamanho” no espaço, como será visto na próxima seção.

## 5.2 Dimensão

Até o século XIX, a noção de dimensão (devida a Euclides) consistia no número de parâmetros independentes (coordenadas) necessários para a descrição única dos pontos de um objeto, essa definição conseguia satisfazer as necessidades matemáticas produzidas até esta época. Na geometria Euclidiana existem figuras que tem dimensão zero, é o caso dos pontos; tem dimensão um, é o caso das linhas; tem dimensão dois, é o caso das áreas (pois para realizar o cálculo da área temos que multiplicar dois números – comprimento e largura); tem dimensão três, é o caso dos volumes (pois para realizar o cálculo do volume temos que multiplicar três números – comprimento, largura e altura) e por indução, pode-se ampliar até  $n$  dimensões.

Durante várias gerações, o comprimento, a altura e a largura determinaram o conceito de dimensão cujo valor é um número inteiro positivo. A definição matemática de

dimensão mudou ao longo dos tempos, à medida que surgiam obstáculos, como por exemplo, o aparecimento das curvas que preenchem o quadrado. A seguir faremos um breve resumo da dimensão Topológica e um estudo mais aprofundado de dimensão fractal. [13]

### 5.2.1 Dimensão Topológica

Com o surgimento da Topologia, essa noção de dimensão passou a ser questionada, uma vez que entendia-se que a dimensão deveria ser um *invariante topológico*, ou seja, quando dois objetos são devidamente transformados, através de um *homeomorfismo* (uma aplicação contínua, biunívoca, cuja inversa é contínua), as suas dimensões topológicas são preservadas. Além disso, quando um conjunto, como uma curva ou uma superfície, está imerso num conjunto maior, nesse caso o espaço tridimensional, a noção de dimensão também diz respeito a forma que este conjunto tem de ocupar o espaço.

Porém como veremos a noção de dimensão topológica, não foi suficiente para caracterizar as irregularidades de certos conjuntos que surgiram, por exemplo, o conjunto de Cantor, a curva de Von Koch, etc.

Para definirmos dimensão topológica, também conhecida como *dimensão de cobertura de Lebesgue*, precisamos definir o conceito de cobertura e refinamento de uma cobertura. As definições abaixo são inspiradas em [14].

**Definição 5.2.1** *Cobertura aberta de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma coleção  $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$  de bolas abertas de raio positivo tais que a sua união cobre  $X$ , isto é,  $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ .*

**Definição 5.2.2** *Uma cobertura aberta  $\mathcal{B} = \{B_j \mid j \in J\}$  é um **refinamento** da cobertura  $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$  se para cada  $B_j$  existir  $A_i$  tal que  $B_j \subset A_i$ .*

Além disso precisamos definir também a noção de *ordem* de uma cobertura. Com efeito, dizemos que uma cobertura aberta  $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$  tem ordem  $m + 1$  se  $m$  é o maior inteiro tal que  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$ , ou seja, é o número máximo de bolas na cobertura que têm interseções não-vazias. No caso, em que a interseção de todos os pares de conjuntos da cobertura é vazia, dizemos que a ordem é 1. Segue portanto, que se uma cobertura tem ordem  $m + 1$  então quaisquer  $m + 1$  conjuntos da cobertura tem interseção vazia.

**Definição 5.2.3 (Dimensão Topológica)** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $\dim_{top}(X) \leq d \leq n$  quando qualquer cobertura aberta admita um refinamento de ordem no máximo  $d + 1$ . Portanto,  $\dim_{top}(X) = d$  desde que  $\dim_{top}(X) \leq d$ , mas não  $\dim_{top}(X) \leq d - 1$ . Ou seja, esta condição significa que toda cobertura aberta de  $X$  admite um refinamento de ordem  $d + 1$ .*

Resumidamente, podemos dizer que a dimensão topológica é definida como o número mínimo de interseções necessárias para que pequenas bolas abertas cubram completamente o objeto considerado. Vejamos alguns exemplos da dimensão topológica de objetos geométricos clássicos:

1. Um conjunto de pontos isolados pode ser coberto com bolas de raio suficientemente pequeno de modo que não haja nenhuma interseção entre elas, isto é, sua ordem é  $d + 1 = 1$ . Logo, sua dimensão topológica é zero, isto é,  $d = 0$ , conforme figura (5.2).

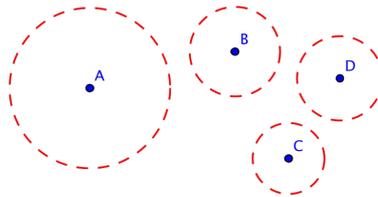


Figura 5.2: Dimensão Topológica de um conjunto de pontos

2. Uma curva pode ser coberta com bolas de raios suficientemente pequenos tal que não hajam três bolas com interseção não vazia, mas apenas pares de bolas com interseção não vazia. Logo, sua ordem é  $d + 1 = 2$  e sua dimensão topológica é  $d = 1$ , conforme figura (5.3).
3. Uma superfície no espaço pode ser coberta com bolas de raios suficientemente pequeno de tal modo que não hajam quatro bolas com interseção não vazia, mas apenas três bolas com interseção não vazia. Logo, sua ordem é  $d + 1 = 3$  e sua dimensão topológica é  $d = 2$ , conforme figura (5.4).

Como o conjunto de Cantor tem interior vazio, segue que ele é totalmente desconexo, donde podemos concluir que sua dimensão topológica é 0 (zero).

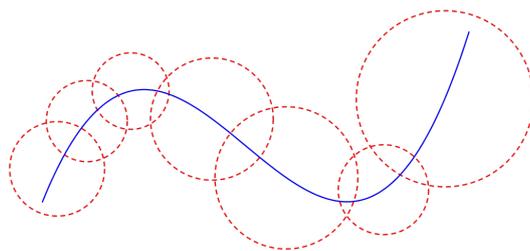


Figura 5.3: Dimensão Topológica de uma curva

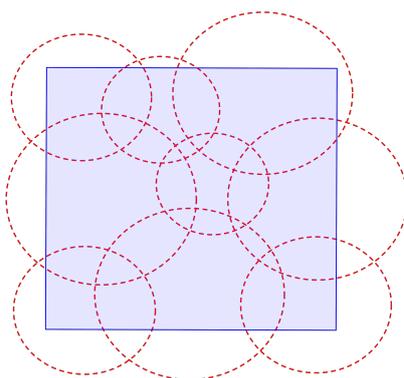


Figura 5.4: Dimensão Topológica de uma superfície

Vemos assim que a dimensão topológica é incapaz de discernir entre um conjunto finito de pontos na reta real e o conjunto de Cantor, visto que ambos tem dimensão topológica 0 (zero), porém do ponto de vista da cardinalidade dos conjuntos, sabemos que o conjunto de Cantor, sendo não-enumerável, está bem mais *próximo* (aqui próximo está sendo empregado num sentido amplo não matemático) da reta real, que tem dimensão topológica 1 (um), do que um conjunto finito de pontos.

Do mesmo modo, é possível mostrar que a dimensão topológica da curva de Von Koch é igual a 1 (um), que é a mesma dimensão topológica de um círculo. Porém, como já vimos a curva de Von Koch tem perímetro infinito, enquanto que o círculo tem perímetro limitado, isto é,  $2\pi r$ . Quer dizer, novamente a dimensão topológica foi incapaz de perceber as irregularidades que caracterizam os conjuntos fractais.

Introduziremos agora outras noções de dimensão, conhecidas como dimensão fractal, que são capazes de captar, e até certo modo, quantificar as irregularidades desses conjuntos.

### 5.2.2 Dimensão Fractal

Como descrevemos acima, a noção de dimensão topológica não foi capaz de informar o quanto um conjunto fractal pode se comportar como um objeto de dimensão maior. Mandelbrot foi o primeiro a perceber isso quando definiu fractal como sendo um conjunto de pontos para o qual a dimensão fractal excede estritamente a dimensão topológica. ([6], p.15)

Segundo Falconer [15]:

Fundamental para a maioria das definições de dimensão (fractal) é a ideia de ‘medida na escala  $\delta$ ’. Para cada  $\delta$ , medimos um conjunto de modo que irregularidades de tamanho menor que  $\delta$  são ignoradas, e vemos como essa medida se comporta quando  $\delta \rightarrow 0$ . (Tradução própria)

Essa ideia já estava presente numa das primeiras publicações de Mandelbrot [16] de 1967 intitulada *‘How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension’*, em que ele discute o problema da medição do comprimento da costa de um país. Mandelbrot percebe o fato de que se usarmos medidas de escalas cada vez menores para medirmos a costa de um país, mais detalhes somos capazes de capturar, e portanto sempre obtemos um comprimento maior. Podemos ver essa ideia nas figuras (5.5(a), 5.5(b) e 5.5(c))

Partiremos dessa ideia para definir, inspirados em Falconer [15], a ‘primeira’ noção de dimensão fractal: a **dimensão da contagem das caixas** (*Box-counting dimension*, por uma questão de simplificação doravante usaremos apenas o termo **dimensão das caixas**. Usamos o numeral ordinal ‘primeira’, pois a definição de dimensão fractal não é única. A ‘segunda’ dimensão fractal e mais utilizada por suas propriedades teóricas é a dimensão de Hausdorff, que introduziremos adiante.

Porém, veremos a seguir que a dimensão das caixas é mais prática e mais facilmente computável, principalmente na estimativa da dimensão fractal de objetos do mundo real, como uma couve-flor, o pulmão humano, etc. Daí, sua importância.

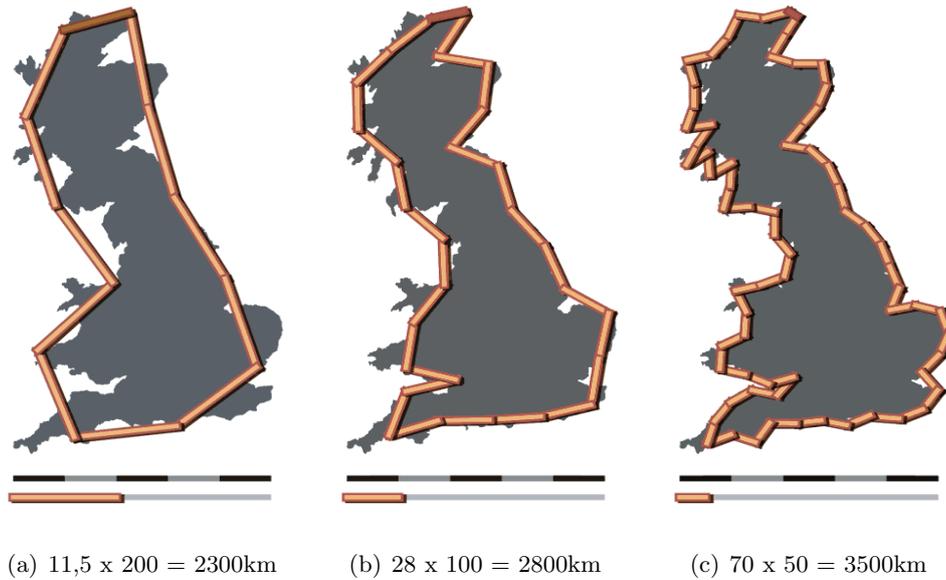


Figura 5.5: Exemplo de quanto menor a escala, maior o comprimento. (Fonte: [en.wikipedia.org/wiki/Fractal\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension))

### Dimensão da contagem das caixas (*Box-counting dimension*)

Como motivação inicial consideremos os seguintes objetos regulares: o segmento unitário, o quadrado unitário e o cubo unitário.

#### 1. Segmento unitário (dimensão topológica $d = 1$ )

Dado um segmento unitário, vamos dividi-lo em  $N = n$  partes iguais, portanto o comprimento de cada subintervalo é  $\delta = \frac{1}{n}$ . Além disso, precisamos dos  $N = n$  intervalos para cobrir o segmento, ou seja, vale a relação  $N = \delta^{-d}$ , com  $d = 1$

#### 2. Quadrado unitário (dimensão topológica $d = 2$ )

Dado um quadrado unitário, vamos dividi-lo em  $N = n^2$  partes iguais com o comprimento de cada lado dos quadrados menores sendo  $\delta = \frac{1}{n}$ . Além disso, precisamos dos  $N$  quadradinhos para cobrir o quadrado unitário, do mesmo modo vale a relação  $N = \delta^{-d}$ , com  $d = 2$

#### 3. Cubo unitário (dimensão topológica $d = 3$ )

E por último para um cubo unitário, vamos dividi-lo em  $N = n^3$  partes iguais com o comprimento de cada lado dos cubos menores sendo  $\delta = \frac{1}{n}$ . Além disso, precisamos dos

$N$  cubinhos para cobrir o cubo unitário, do mesmo modo vale a relação  $N = \delta^{-d}$ , com  $d = 3$

Verificamos, com a análise dos objetos acima, que independente da dimensão  $d$ , quaisquer que sejam as partições uniformes, temos que a relação entre a quantidade de peças necessárias para cobrir o objeto ( $N$ ) e o tamanho dos lados da partição ( $\delta$ ) é dada por

$$\begin{aligned} N &= \delta^{-d} \\ \log N &= \log \delta^{-d} \\ \log N &= (-d) \cdot \log \delta. \end{aligned}$$

Assim, podemos expressar  $d$ , como:

$$d = \frac{\log N}{-\log \delta}.$$

Usaremos a relação acima como base para motivar a definição da dimensão das caixas. Com efeito, dado um conjunto qualquer  $F \subset \mathbb{R}^n$ , consideremos uma partição uniforme de  $\mathbb{R}^n$  em caixas de lado  $\delta$ , e denotemos por  $N_\delta(F)$  o número de caixas que intersectam o conjunto  $F$ . Definimos a dimensão das caixas como

**Definição 5.2.4 (Dimensão das caixas)** *Se  $F \subset \mathbb{R}^n$ , então a dimensão das caixas é o número real dado por*

$$\dim_{\text{box}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log 1/\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

*caso o limite acima exista.*

Ainda segundo Falconer [15]:

Essa versão da definição é amplamente usada empiricamente. Para achar a dimensão das caixas de um conjunto no plano  $F$  nós desenhamos uma malha de quadrados ou caixas de lado  $\delta$  e contamos o número  $N_\delta(F)$  que intersecta o conjunto para vários  $\delta$  pequenos (donde o nome 'contagem das caixas'). A dimensão é a taxa logarítmica com que  $N_\delta(F)$  aumenta quando  $\delta \rightarrow 0$ , e pode ser estimado pela inclinação do gráfico de  $\log N_\delta(F)$  versus  $-\log \delta$ . (Tradução própria)

Vejamos um exemplo que ilustra a definição e o parágrafo acima. Consideremos o círculo unitário centrado em  $(0, 0)$  no plano. As figuras (5.6(a), 5.6(b), 5.6(c) e 5.6(d)) mostram partições cada vez menores e as interseções da malha com o círculo unitário para os valores  $\delta = 0,5$ ,  $\delta = 0,2$ ,  $\delta = 0,1$  e  $\delta = 0,05$ , respectivamente. Na tabela (5.1) ilustramos os respectivos valores de  $\delta$  e  $N_\delta$ , usando simetria do círculo. Finalmente no gráfico (5.7), temos a reta que melhor aproxima os valores da tabela (5.1), cuja a equação é  $y = 1,09x + 1,66$ . Já garante com aproximação de uma casa decimal que a dimensão é  $d = 1$ .

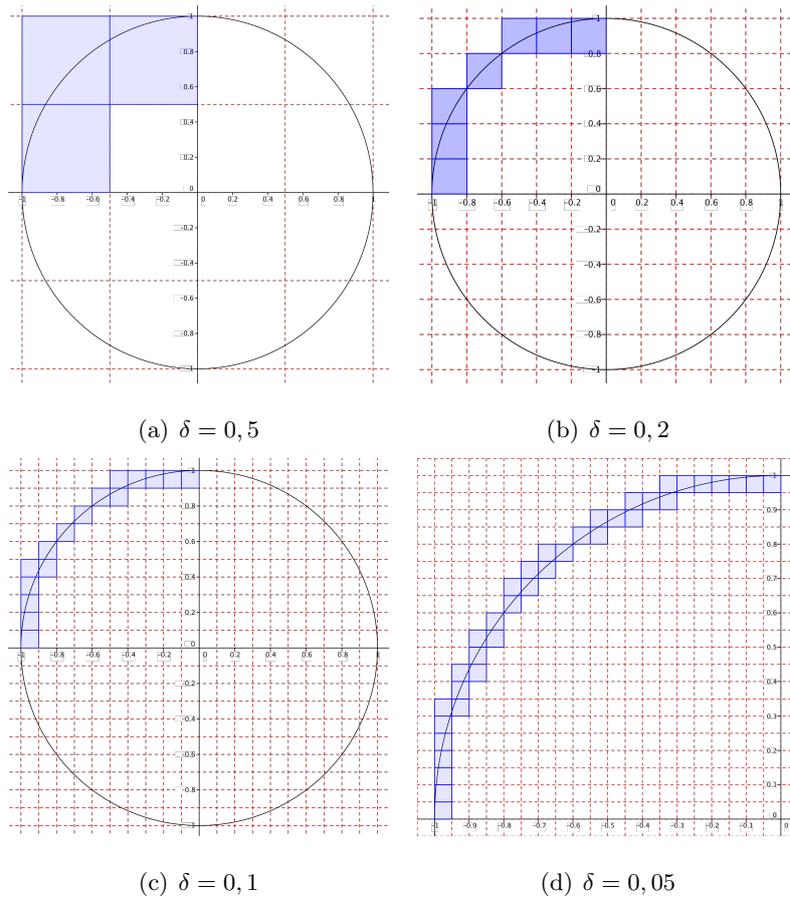


Figura 5.6: Partições cada vez menores e as interseções da malha com o círculo unitário

Ainda sobre a definição, Falconer [15] comenta:

Essa definição dá uma interpretação para o sentido da dimensão das caixas. O número de caixas da malha de lado  $\delta$  que intersecta o conjunto é uma indicação de como espelhado ou irregular é o conjunto quando examinado na escala  $\delta$ . A dimensão reflete quão rapidamente as irregularidades se desenvolvem quando  $\delta \rightarrow$

$\delta$	$N_\delta$	$-\log \delta$	$\log N_\delta$
0,5	$4 \cdot 3 = 12$	0,69	2,48
0,2	$4 \cdot 7 = 28$	1,61	3,33
0,1	$4 \cdot 16 = 64$	2,3	4,16
0,05	$4 \cdot 37 = 148$	3	5

Tabela 5.1: Estimativa da dimensão das caixas do círculo unitário

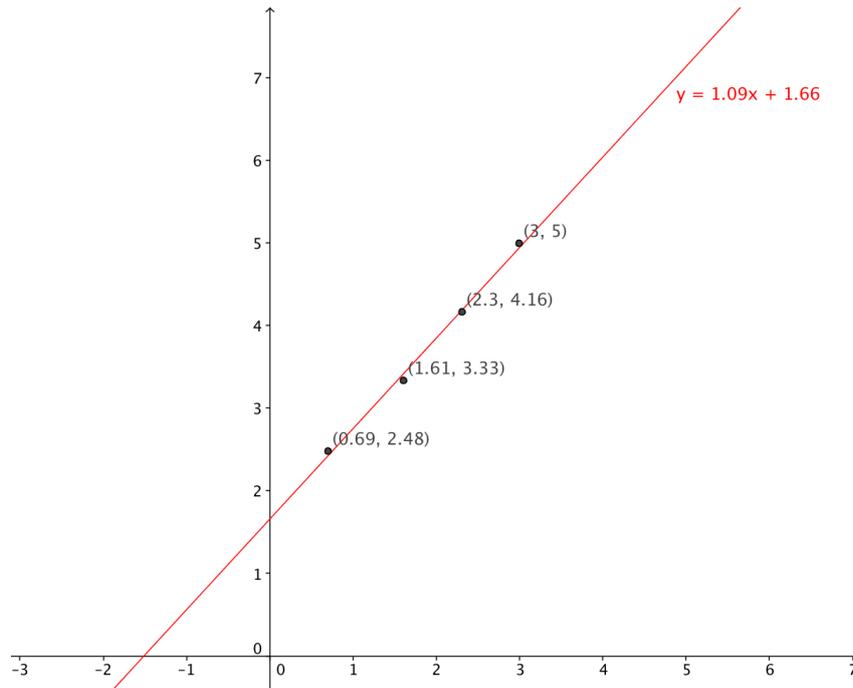
0. (Tradução própria)

Podemos visualizar esse comentário na figura (5.8)

Vejamos agora como calcular a dimensão das caixas do conjunto de Cantor ([15], cap. 3). Denotando por  $C$  o conjunto de Cantor, mostraremos que  $\dim_{box}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Com efeito, na  $k$ -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, a malha uniforme natural para considerarmos é aquela com comprimento  $\delta = 3^{-k}$ , e nesse caso temos  $N_\delta(C) = 2^k$ , portanto  $N_\delta(C) \leq 2^k$  se  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , logo

$$\begin{aligned} \dim_{box}(C) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k-1} \right) \left( \frac{\log 2}{\log 3} \right) = \frac{\log 2}{\log 3}. \end{aligned}$$

Para concluir o resultado precisamos mostrar agora que  $\dim_{box}(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ . Observemos que se tomarmos uma malha uniforme de comprimento  $\delta$  com  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ , então cada intervalo de comprimento  $\delta$  intersecta no máximo um intervalo da  $k$ -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, visto que esses últimos intervalos tem comprimento  $3^{-k}$ . Como existem  $2^k$  intervalos com esse comprimento, então necessariamente temos que

Figura 5.7:  $(-\log \delta) \times (\log N_\delta)$ 

$N_\delta(C) \geq 2^k$ , donde segue que

$$\begin{aligned} \dim_{\text{box}}(C) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right) \left( \frac{\log 2}{\log 3} \right) = \frac{\log 2}{\log 3}. \end{aligned}$$

Provamos assim que  $\dim_{\text{box}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309$ . Porém a dimensão das caixas apresenta propriedades indesejáveis em alguns casos. Vejamos o que talvez seja o exemplo mais simples.

Consideremos o conjunto  $F$  dos números racionais no intervalo  $[0, 1]$ , isto é,  $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Tomemos uma divisão (malha) uniforme do intervalo  $[0, 1]$  em  $N$  subintervalos, nesse caso de comprimento  $\delta = 1/N$ . Como  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$ , todo subintervalo da malha intersecta  $F$ , e portanto  $N_\delta(F) = N$ , donde segue que

$$\dim_{\text{box}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N}{-\log(1/N)} = 1.$$

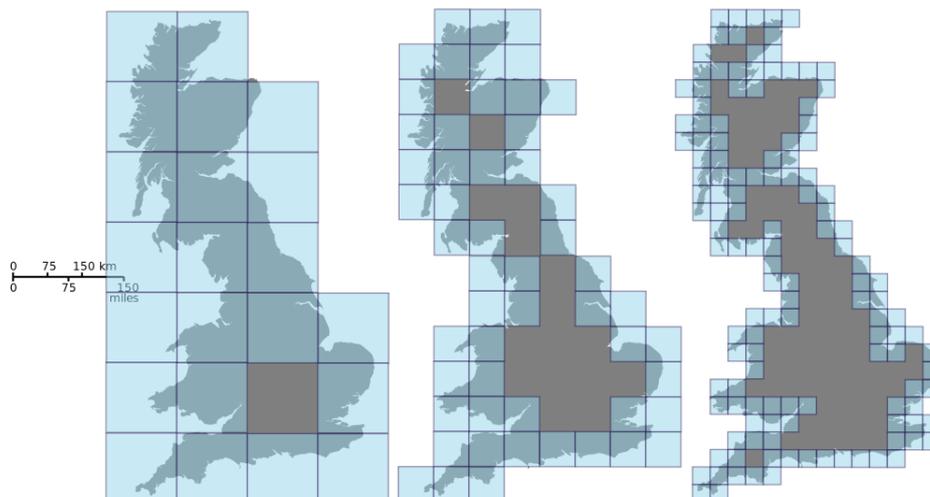


Figura 5.8: Ideia da dimensão das caixas aplicada ao cálculo da costa da Grã-Bretanha. (Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Box-counting\\_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/Box-counting_dimension))

Concluimos assim que a dimensão das caixas do conjunto  $F$  dos números racionais no intervalo  $[0, 1]$  é 1, ou seja, sendo um conjunto enumerável a dimensão das caixas de  $F$  excede a do conjunto de Cantor, que calculamos ser aproximadamente 0,6309, porém sendo um conjunto não-enumerável e num certo sentido mais complexo que  $F$ .

Mais geralmente, a propriedade que está por trás do que expomos acima, e cuja prova encontra-se em [15] é que, para qualquer conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ , vale  $\dim_{box}(F) = \dim_{box}(\overline{F})$ , onde  $\overline{F}$  é o fecho do conjunto  $F$ . Usaremos essa limitação, segundo Falconer ([15], cap. 3) como motivo para introduzir uma outra noção de dimensão fractal, a dimensão de Hausdorff.

### Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff, também conhecida como *dimensão de Hausdorff-Besicovitch*, é matematicamente mais *requintada*, e portanto em nossa exposição nos restringiremos a dar as definições e as propriedades básicas relacionadas. Todas as provas aqui omitidas podem ser encontradas em Falconer [15]. Começamos com uma citação deste ([15], Cap.2):

A dimensão de Hausdorff tem a vantagem de estar definida para qualquer conjunto, e é matematicamente conveniente, pois é baseada em medida, que é relativamente

fácil de manipular. A maior desvantagem é que em muitos casos é difícil de calculá-la ou estimá-la por métodos computacionais. (Tradução própria)

Portanto nosso primeiro passo é definir a medida referida na citação acima. Essa medida é conhecida por *medida de Hausdorff*. Porém, antes precisamos de umas definições preliminares:

**Definição 5.2.5 (Diâmetro de um conjunto)** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  não-vazio. O diâmetro de  $U$  é definido por  $|U| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}$ , ou seja, é a maior distância entre quaisquer par de pontos em  $U$ .*

**Definição 5.2.6 ( $\delta$ -cobertura)** *Se  $\{U_i\}$  é uma coleção enumerável (ou finita) de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobre  $F$ , isto é,  $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$  com  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ , dizemos que  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ .*

Consideremos  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $s \geq 0$ . Para cada  $\delta > 0$  definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

O que a definição acima propõe é que olhemos para todas as coberturas de  $F$  com diâmetro no máximo  $\delta$  e procuremos minimizar a soma das  $s$ -ésima potências dos diâmetros. Observe que novamente se faz presente a ideia da ‘medida na escala  $\delta$ ’, ou seja, quanto menor tomamos  $\delta$  mais detalhes (irregularidades) de  $F$  a cobertura tem que capturar, e portanto  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  aumenta quando reduzimos  $\delta$ , isto é, quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Desse modo, a *medida de Hausdorff  $s$ -dimensional* é definida por

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

O limite acima existe para qualquer  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , desde que permitamos o valor limite ser  $\infty$ , o que usualmente acontece quando variamos  $s \geq 0$  para  $s$  pequenos. Uma propriedade fundamental da medida de Hausdorff para o estudo dos fractais é a *propriedade de escala*. Mais precisamente,

**Teorema 5.2.7 (Propriedade de escala)** *Seja  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação satisfazendo  $\|S(x) - S(y)\| = \lambda\|x - y\|$ , onde  $\lambda > 0$  é dito o fator de escala. Se  $F \subset \mathbb{R}^n$ , então*

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Estamos agora em posição de definir a dimensão de Hausdorff,

**Definição 5.2.8 (Dimensão de Hausdorff)** *A dimensão de Hausdorff é o número real não-negativo definido por*

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Observermos que se  $s = \dim_H(F)$ , então podemos ter  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ ,  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  ou  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Ilustraremos o conceito acima com um exemplo simples, porém instrutivo: a dimensão de Hausdorff do conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ . Lembremos que  $\mathbb{Q}$  é enumerável, isto é, pode ser escrito como  $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots\}$ .

Dado  $\delta > 0$ , consideremos a  $\delta$ -cobertura  $U_i = (r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)$ , onde  $\varepsilon_i = \frac{\delta}{2^{i+1}} > 0$ . Claramente temos que  $|U_i| = 2\varepsilon_i = \frac{\delta}{2^i}$ , além disso

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^s}{(2^s)^i} = \frac{\delta^s/2^s}{1 - \frac{1}{2^s}} = \frac{\delta^s}{2^s - 1},$$

desde que a razão da P.G.,  $r = \frac{1}{2^s}$ , satisfaça  $\frac{1}{2^s} < 1$ , o que é verdade para  $s > 0$ . Donde concluímos que para todo  $s > 0$ , temos que

$$0 \leq \mathcal{H}_\delta^s(\mathbb{Q}) \leq \frac{\delta^s}{2^s - 1},$$

e pelo lema do confronto [ELON], que

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{Q}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\mathbb{Q}) = 0.$$

Segue da definição de dimensão de Hausdorff  $\dim_H(\mathbb{Q}) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(\mathbb{Q}) = 0\}$  que  $\dim_H(\mathbb{Q}) = 0$ . Portanto a dimensão de Hausdorff dos números racionais é 0 (zero).

Apenas para contrastarmos com a dimensão das caixas, recordemos que  $\dim_B(\mathbb{Q}) = 1$ , conforme mostramos no item anterior.

Para finalizar argumentaremos, usando a propriedade de escala, como calcular a dimensão de Hausdorff para o conjunto de Cantor, e como generalizar essa ideia para os demais fractais que possuem auto-similaridade bem definida.

Seja  $C$  o conjunto de Cantor, este pode ser decomposto na parte esquerda  $C_E = C \cap [0, \frac{1}{3}]$  e na parte direita  $C_D = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Por construção tanto  $C_E$  e  $C_D$  são similares a  $C$  por um fator de escala igual a  $\frac{1}{3}$ , e além disso  $C = C_E \cup C_D$  é uma união disjunta, portanto para todo  $s$  temos

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_E) + \mathcal{H}^s(C_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C),$$

pois  $\mathcal{H}^s$  é uma medida que satisfaz a propriedade de escala. Se assumirmos que para  $s = \dim_H(C)$  temos que  $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$ , o que é verdade para o conjunto de Cantor  $\mathcal{H}^s(C) = 1$  ([15], Cap.II), então podemos dividir a relação acima por  $\mathcal{H}^s(C)$ , e obter

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s,$$

donde segue que  $\dim_H(C) = s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Lembremos que nesse caso temos  $\dim_B(C) = \dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309$ .

Usando o raciocínio acima é possível calcularmos a dimensão de Hausdorff da curva de Von Koch  $K$  e do triângulo de Sierpinski  $S$ . Com efeito, na curva de Von Koch  $K$ , cada um dos 4 lados são similares a  $K$  por um fator de escala igual a  $\frac{1}{3}$ , portanto temos que  $\dim_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619$ . Do mesmo modo, no triângulo de Sierpinski  $S$ , cada um dos 3 triângulos menores são similares a  $S$  por um fator de escala igual a  $\frac{1}{2}$ , portanto temos que  $\dim_H(S) = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5849$ .

Essa forma de calcular a dimensão para conjuntos auto-similares bem definidos, aparece na literatura com o nome de *dimensão de similaridade*, e como vimos é uma consequência da propriedade de escala da medida de Hausdorff.

Estamos indicando como curiosidade e conhecimento, o sítio [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension), pois nele é apresentado uma lista de fractais colocados em ordem crescente de acordo com a dimensão Hausdorff.

## 6 Atividades Didáticas

### 6.1 Fractais como metodologia de ensino

A geometria fractal possui um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo. Basta, utilizarmos os recursos disponíveis pela escola e adequarmos aos conteúdos curriculares, para inserirmos este tema em nossas aulas e cativarmos o aluno no aprendizado de conceitos. [17]

A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos. Propor uma aula com situações novas, onde o educando possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, torna o acontecimento em sala de aula favorável a aprendizagem. Esta abordagem possibilitará ao educando a visualização do conteúdo trabalhado, não ficando apenas na formalidade que é própria da disciplina de matemática. Além do campo extenso de aplicações dos fractais é necessário que o professor perceba a potencialidade que existe nesta área da geometria, podendo assim trabalhar conceitos de simetria, relacionando arte com matemática [13].

## 6.2 Atividades realizadas com alunos da Escola SESC

A Escola SESC de Ensino Médio, conforme figura (6.1), localizada na Barra da Tijuca, é uma escola-residência, inteiramente gratuita, que atende a alunos de todo o país, com idades entre 13 e 18 anos. Inaugurada em 2008, hoje possui aproximadamente 500 estudantes nas três séries do Ensino Médio, que moram nas vilas residenciais, junto com professores e gestores. [18]

O projeto pedagógico da Escola se baseia na formação da cidadania e na articulação da área acadêmica e da educação profissional. O regime de horário integral possibilita a oferta de atividades educativas em sala de aula e extraclasse em diversos espaços externos e internos do Campus, tais como: teatro, laboratórios, oficinas, salas de artes, música, dança, biblioteca e complexo esportivo. Além da grade curricular tradicional, os alunos contam cursos de qualificação profissional e participam de três viagens, de caráter pedagógico, a São Paulo, às cidades históricas de Minas Gerais e ao Pantanal. Os estudantes ainda concorrem por uma seleção interna a um intercâmbio nos Estados Unidos. [18]

Cada turma possui no máximo 15 estudantes. Cerca de 54% dos estudantes vêm de famílias com renda entre 1 e 3 salários mínimos. Ao ingressarem na escola, todos os alunos recebem gratuitamente o material pedagógico, incluindo um laptop, e têm à disposição aulas paralelas de recuperação, que os auxiliam em possíveis defasagens educacionais. Na edição do Enem de 2012, a Escola SESC obteve a 38<sup>o</sup> colocação no ranking nacional. No estado, ocupou a 9<sup>o</sup> posição e a 8<sup>o</sup> na cidade do Rio de Janeiro. Os resultados expressam a dimensão do trabalho desenvolvido ao longo desses seis anos, que registra um alcance de 95% de aprovação nas universidades públicas e particulares com bolsa integral, em todo o país. [18]

As atividades descritas abaixo foram realizadas durante o Programa de Iniciação Científica da Escola SESC de Ensino Médio – PIC, que tem por objetivo discutir e produzir saberes a partir de um trabalho de pesquisa no qual orientadores de todas as áreas conduzem grupos de alunos no processo de investigação. No ano de 2013, meu projeto foi realizado com um grupo de três alunos, sendo dois do segundo e um do primeiro ano do ensino médio no período de Maio a Outubro, com culminância na semana de 28 de outubro a 01 de novembro de 2013 na semana da Escola aberta, onde a instituição apresenta os trabalhos realizados pelos



(a) Vista aérea da ESEM

(b) Biblioteca da ESEM

Figura 6.1: Escola SESC de Ensino Médio

seus alunos no decorrer do ano para toda a comunidade escolar e instituições convidadas.

### 6.2.1 Construção do Triângulo de Sierpinski

Esta atividade ilustra um dos princípios fundamentais dos fractais, a repetição de um mesmo padrão em diferentes escalas, e como essa forma complexa pode ser gerada por simples repetições.

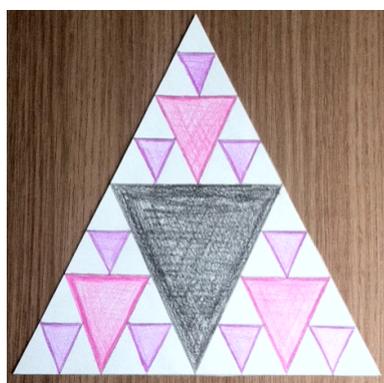
- Atividade adaptada de [19]
- Material necessário: Papel A4, lápis, lápis de cor, régua, compasso e tesoura
- As competências trabalhadas nesta atividade foram:
  - Semelhança de figuras;
  - Progressão Geométrica;
  - Comprimento, Perímetro e Área do Triângulo de Sierpinski;
  - Conceito de Limite;
  - Limite de uma PG.
- Tempo Estimado - 6 aulas de 50 minutos
  - 2 aulas de 50 minutos para a teoria de Progressão Geométrica e Soma da PG (finita e infinita);

2 aulas de 50 minutos para construção de cada triângulo e montagem do tapete;

2 aulas de 50 minutos para análise e conclusões à respeito do comportamento do perímetro e da área do triângulo de Sierpinski.

- Análise

A atividade consistia em desenhar usando régua e compasso, um triângulo equilátero e marcar em cada lado seu ponto médio, ligando-os, com isso formando quatro novos triângulos. Nos 3 triângulos virados para cima, repetir o procedimento do ponto médio e assim sucessivamente, colorindo todos os triângulos invertidos. Após terem realizado a tarefa, montamos um triângulo maior, usando os desenhos feitos por eles.



(a) Triângulo individual



(b) Tapete de Sierpinski

Figura 6.2: Construção do Triângulo de Sierpinski até a 3<sup>o</sup> iteração pelos alunos da ESEM

Observando a figura (6.2(a)), começamos a analisar o comportamento da área e do perímetro do triângulo de Sierpinski, verificamos que a cada iteração, a área é igual à área do triângulo inicial multiplicada pelo fator  $\frac{3}{4}$  e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $\frac{3}{2} \left( 3 \cdot \frac{1}{2} \right)$ .

Para uma melhor compreensão, montamos com os alunos uma tabela semelhante a descrita na tabela (4.2) e fizemos uma análise detalhada como descrita no capítulo (4), seção (4.2.1).

Concluimos que a **área do triângulo de Sierpinski tende para zero** e o **perímetro do triângulo é infinito**.

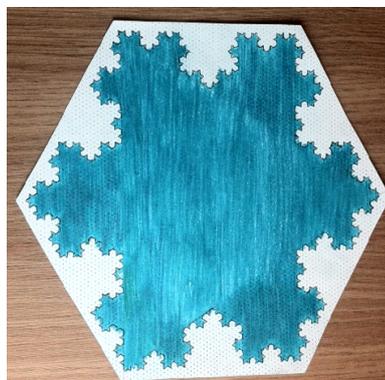
### 6.2.2 Construção da Curva de Koch e da Ilha de Koch

Esta atividade ilustra um dos princípios fundamentais dos fractais, a repetição de um mesmo padrão em diferentes escalas, e como essa forma complexa pode ser gerada por simples repetições. É possível associar esse fractal a linhas costeiras dos continentes, vendo aplicação direta da geometria fractal com a natureza, por exemplo.

- Atividade adaptada de [20]
- Material necessário: lápis, régua, tesoura e canetinha ou lápis de cor para colorir (opcional) e papel isométrico A3 que pode ser obtido no sítio [www.worksheetworks.com/miscellanea/graph-paper/isometric-dots.html](http://www.worksheetworks.com/miscellanea/graph-paper/isometric-dots.html)
- As competências trabalhadas nesta atividade foram:
  - Semelhança de figuras;
  - Progressão Geométrica;
  - Comprimento, Perímetro e Área do Triângulo de Sierpinski;
  - Conceito de Limite;
  - Limite de uma PG.
- Tempo Estimado - 4 aulas de 50 minutos
  - 2 aulas de 50 minutos para construção de cada curva e montagem da ilha;
  - 2 aulas de 50 minutos para análise e conclusões à respeito do comportamento dos lados, do perímetro e da área da ilha de Von Koch.
- Análise

A atividade consistia em desenhar no papel isométrico usando régua, um segmento de reta de medida múltipla de 3 para facilitar o desenvolvimento da atividade, usamos 27 cm, dividimos esse segmento em 3 partes iguais, apagamos o segmento médio e fizemos um triângulo equilátero (sem a base), usando como medida um desses segmentos, com isso formando quatro novos segmentos. Nos 4 novos segmentos, repetimos o procedimento descrito acima e assim sucessivamente. Feito isso, temos a curva de Von Koch.

Unindo três desses desenhos, temos a Ilha de Von Koch. Os alunos optaram por colorir o desenho, para termos também um objeto de arte. Cortamos a ilha em formato hexagonal, pois usaremos para auxiliar nos cálculos da área.



(a) Ilha de Koch individual



(b) Pintura da Ilha

Figura 6.3: Construção do Ilha de Von Koch até a 5<sup>o</sup> iteração

Observando a figura (6.3(a)), começamos a analisar que para cada nova transformação que se fazia, cada iteração dava origem a 4 lados e o comprimento dos lados de cada nova figura são três vezes menores que o da figura anterior. Para uma melhor compreensão, montamos com os alunos uma tabela semelhante a descrita na tabela (4.1) e fizemos uma análise detalhada como descrita no capítulo (4), seção (4.1.1).

Concluimos que a **curva de Koch vai ter um número infinito de lados**.

Além disso, podemos verificar que o comprimento dos lados de cada figura em função do número de iterações, é dado por uma PG, onde  $M_0 = 1$  e razão  $q = \frac{1}{3}$  ( $|q| < 1$ ), que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral  $M_n = \frac{1}{3} \cdot M_{n-1}, n > 1$  ou  $M_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$ .

Concluimos que o **comprimento de cada lado da curva tende para zero**.

Continuando observando a figura (6.3(a)), começamos a analisar que para calcular o perímetro necessitávamos das duas sucessões anteriores, ou seja,  $P_n = M_n \cdot L_n$  e fizemos uma análise detalhada como descrita no capítulo (4), seção (4.1.2).

Concluimos que o **perímetro da ilha de Von Koch é infinito**.

Para analisarmos o comportamento da área da Ilha de Von Koch, fizemos como descrito

no capítulo 4, seção 4.1.3.

Concluimos que a **área da ilha de Von Koch é 1,6 da área inicial**.

Notamos que, embora o perímetro seja ilimitado (superiormente), a área tem um limite finito e bem definido igual a 1,6 vezes a área inicial.

### 6.2.3 Construção da Pirâmide Fractal

Iniciamos a tarefa com a construção manual de 4 triângulos de Sierpinski, que compõem suas faces e observação espacial, dando origem ao tetraedro fractal.

- Atividade adaptada de [21]
- Material necessário: Palitos de dente e mini-marshmallows coloridos
- As competências trabalhadas nesta atividade foram:
  - Semelhança de figuras;
  - Geometria espacial;
  - Construção de figuras em 3D.
- Tempo Estimado - 2 aulas de 50 minutos
  - 2 aulas de 50 minutos para construção de quatro tetraedros fractais;
- Análise

A atividade consistia em montar um tetraedro fractal, conforme figura (6.2.3), cada aluno montou um conjunto de quatro blocos, formando um pequeno tetraedro, feito isso os juntamos, dando origem a figura maior. Nesta atividade não realizamos nenhum estudo sistemático devido a falta de tempo, pois tivemos que preparar a apresentação do Projeto de Iniciação Científica, que teve sua culminância na Semana da Escola Aberta, realizada no dia 30 de Outubro de 2013, ficamos apenas com a parte espacial, onde os alunos puderam construir e observar o tetraedro em 3D e com a beleza artística da figura.

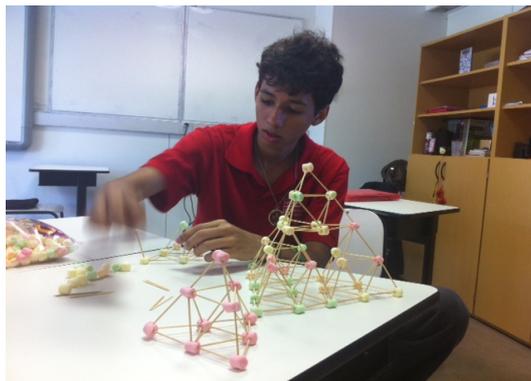


Figura 6.4: Construção do tetraedro fractal

### 6.2.4 Fractais no Xaos

Hoje em dia alguns programas para gerar fractais são tão rápidos, que nos permitem "navegar" pelas imagens em movimento enquanto elas são produzidas. É como um mergulho pelos detalhes infinitos onde o usuário escolhe com o mouse o caminho que quer fazer enquanto a imagem é infinitamente ampliada e os novos detalhes aparecem e se transformam continuamente. Com esse intuito, realizamos com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio algumas atividades animadas e interativas de fractais no software "Xaos" versão 3.5, que colocaremos neste trabalho.

Antes de mostramos essas atividades, faremos aqui um pequeno tutorial do software "Xaos" versão 3.5

1. Pode ser obtido gratuitamente em português no sítio: [sourceforge.net/projects/xaosomething](http://sourceforge.net/projects/xaosomething);
2. A interface é simples e eficiente;
3. Oferece movimento de navegação, você pode aumentar ou diminuir um fractal;
4. Inclui 24 fórmulas de fractais conhecidos, além de diversas variações possíveis em efeitos e aparência, mas você também pode usá-lo para gerar seus próprios fractais, conforme figura (6.5);
5. Oferece efeitos como um gerador de Starfield , pode gravar, tem trilha de movimento, modo de pseudo 3D , e até mesmo um display de texto;

6. Pode controlar o zoom com o mouse, tanto para ampliar como para diminuir, conforme figura (6.2.4);
7. Há um arquivo de ajuda que oferece tutoriais animados explicando o que são fractais , como o programa funciona , e suas muitas opções de configuração. Estes incluem menus para a escolha de fractais , definindo seus cálculos matemáticos , aplicação de filtros e controlar o movimento do programa;
8. No entanto, a maneira mais simples para se familiarizar com Xaos, é clicar em uma parte do fractal e começar a dar zoom;

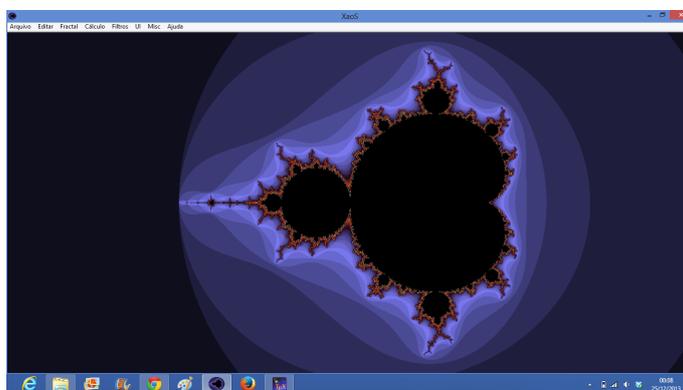


Figura 6.5: Tela inicial do Xaos 3.5

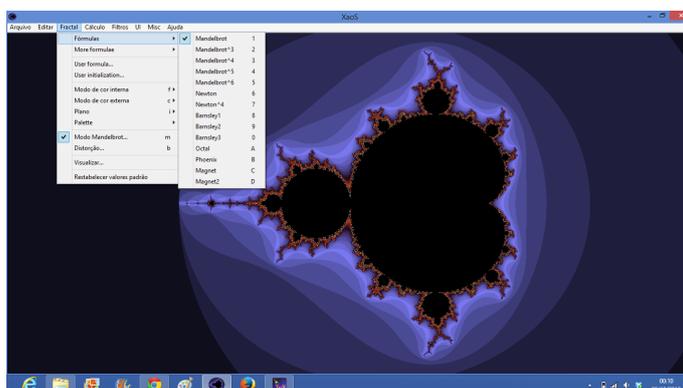


Figura 6.6: Tela com alguns exemplos de fractais do Xaos 3.5

Os alunos puderam interagir no Xaos, criando os mesmos fractais que já haviam criado em sala de forma manual. O que os deixou encantados com a beleza, o colorido, o

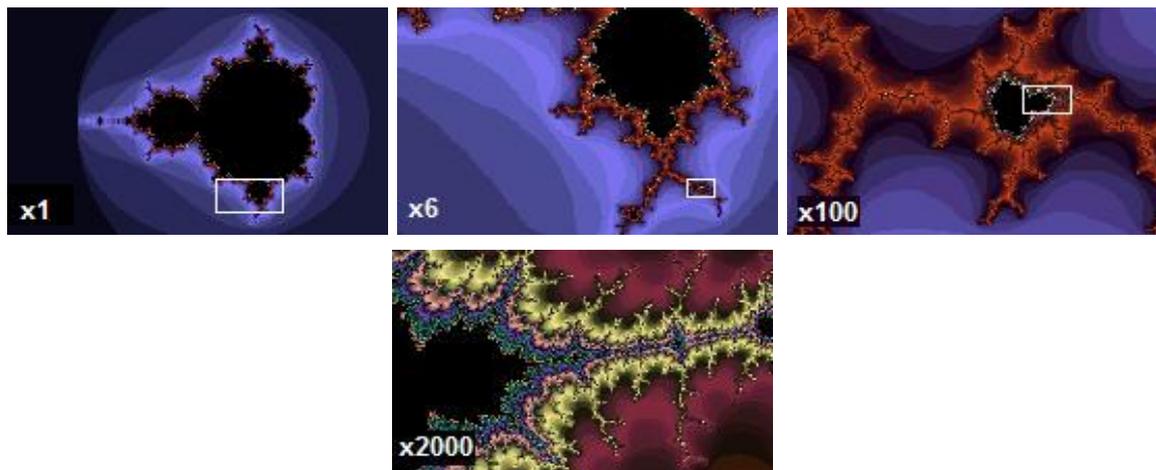


Figura 6.7: Zoom do Conjunto de Mandelbrot no Xaos (Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>)

movimento e a possível manipulação com um número elevado de iterações. Conforme as figuras (6.8 e 6.9)

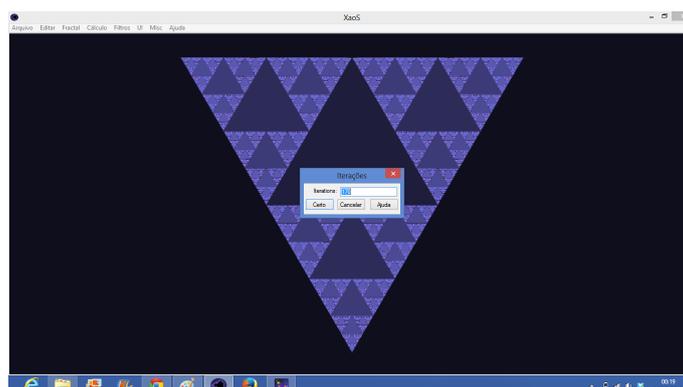


Figura 6.8: Tela com o triângulo de Sierpinski com 170 iterações do Xaos 3.5

Os Fractais no Xaos são incríveis, surpreendentes, bonitos e garantem uma gigantesca diversão. Conforme a figura (6.10)

Novidade: Agora tem uma versão gratuita do Xaos para Iphone e Ipad

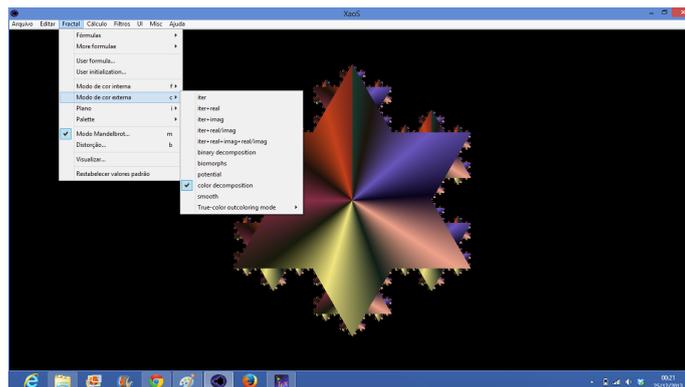


Figura 6.9: Tela com a Ilha de Koch colorida do Xaos 3.5

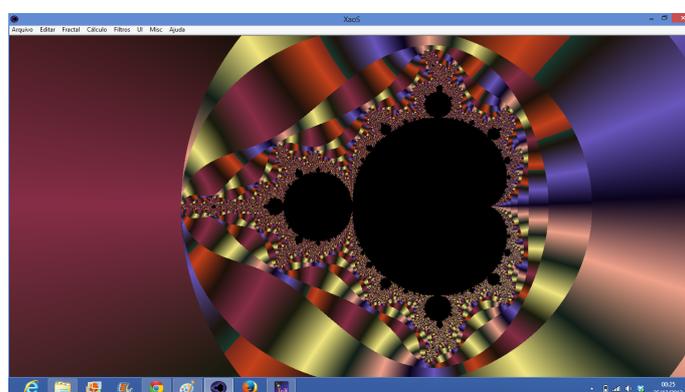


Figura 6.10: Tela com o conjunto de Mandelbrot do Xaos 3.5

### 6.2.5 Conclusão das Atividades

Reforçando a ideia da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios com papel e lápis, a Geometria Fractal permite explorar conceitos matemáticos de uma forma mais dinâmica e criativa, através da construção de modelos e tabelas com os resultados das iterações, chegando a uma dedução geral do que esta ocorrendo. Este tipo de construção induz o esforço intelectual nos alunos, pois as figuras não podem ser totalmente desenhadas, estimulando o pensamento abstrato, além de lhes despertar o interesse para a beleza e complexidade destas formas fractais, inserindo-se no conceito de ensino que se pretende hoje: a conexão dos fundamentos teóricos com conhecimentos empíricos. [5]

As atividades foram aplicadas a um grupo de três alunos da Escola SESC de

Ensino Médio, como Projeto de Iniciação Científica, que ao início do ano letivo optaram por fazer parte desta pesquisa, tendo como característica comum o interesse por temas ligados à Matemática. Isto, de certa forma, facilitou as aplicações propostas. O grupo já possuía um conceito prévio da Geometria Euclidiana e introduzimos aulas teóricas com conceitos intuitivos de limites, progressões e leis de formação, então durante a realização das atividades propostas, o grupo foi conduzido a chegar ao conceito mais simples de fractal e as suas características básicas.

Com o estudo sistemático, por exemplo, da "Ilha de Koch" que, apresenta perímetro infinito e área finita, a curiosidade dos alunos foi surgindo naturalmente. Com isso percebemos que, através da construção e estudo do comportamento deste fractal, pode ser uma boa forma de consolidar conhecimentos já adquiridos envolvendo fórmulas algébricas, áreas e perímetros, assim como o cálculo do número de segmentos. Além disso, através das atividades realizadas, os alunos não só conheceram imagens fractais como também puderam reforçar os conceitos apresentados: de iterações e de autossimilaridade. Além é claro de como já citado acima, os conceitos de Progressão Geométrica e de Limite.

A cada semana, o grupo estava mais entrosado e coeso com a aplicação e realização das atividades, sempre demonstrando interesse de aprender o que estava sendo mostrado pelo professor e ir além em suas pesquisas e indagações, tornando o trabalho gratificante. Conseguimos através, da construção dos fractais (manual ou eletronicamente) cativar o interesse dos alunos para a aplicação também dos conceitos teóricos e não apenas da prática. Com a finalização do prazo das pesquisas e desenvolvimento, os alunos preparam a apresentação do trabalho para ser divulgado na semana da Escola Aberta, onde realizaram a apresentação do que haviam aprendido durante as semanas de realização do projeto. O grupo foi elogiado pelos colegas e coordenação da escola pelo desenvolvimento do projeto.

Ressaltamos, que o grupo de alunos, apesar de pequeno, produziu resultados bastante proveitosos. Esperamos que este fato sirva de estímulo aos professores para que repitam a gratificante experiência.

## 7 Conclusão

A partir da realização deste trabalho podemos perceber o quanto é importante que os conceitos teóricos sejam aplicados em resoluções de problemas concretos, onde o aluno possa relacionar o que aprendeu com o cotidiano (mesmo que esse não esteja muito próximo de sua realidade), mas ele consiga compreender que existe uma certa aplicação. É claro que não conseguimos isso em todo o conteúdo curricular de matemática, mas devemos tentar, sempre que possível fazer esse elo. Não estamos "pregando" neste trabalho a exagerada contextualização, mas dizendo que ela é muito importante num processo de aprendizagem significativa.

Para nós o mais relevante do trabalho foi conseguir aplicar aos alunos do ensino médio, o que estava estudando para a elaboração do trabalho de conclusão de curso de mestrado, uma experiência muito gratificante, poder ver o interesse dos alunos, em não apenas estudar na véspera da realização de uma avaliação para obter uma nota quantitativa aceitável e sim estarem pesquisando e estudando para uma aplicação num projeto de Iniciação Científica, onde podem ir além da sala de aula.

É claro que nem todos os tópicos presentes neste trabalho podem ser aplicados ao Ensino Médio, pois aproveitamos para ir um pouco mais adiante em algumas questões como o conjunto de Cantor e as dimensões de Hausdorff, porém grande parte pode ser aproveitada pelos meus colegas professores, tornando suas atividades mais dinâmicas e atraentes.

Também não conseguimos abordar no trabalho tudo o que gostaríamos, logo continuaremos estudando para ampliar nossos conhecimentos em fractais, como por exemplo, Conjunto de Mandelbrot, Conjunto de Julia entre outros que despertam o nosso interesse.

## Referências Bibliográficas

- [1] FREITAS, C. O infinito. Technical report, Popularização da matemática - Núcleo de estágio da EB 2,3, Rio Grande do Sul, 2008.
- [2] IEZZI, G.; ET. AL. *Matemática: ciências e aplicações*: volume 1 - ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [3] LIMA, E. L.; ET. AL. *A matemática do ensino médio*: volume 1 - coleção professor de matemática. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [4] LIMA, E. L. *Análise real*: volume 1 - coleção matemática universitária. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [5] ET. AL., A. B. Natureza: Caos ou ordem? Technical report, Universidade de Coimbra, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Departamento de Matemática, 2004-2005.
- [6] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
- [7] BARBOSA, R. M. *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [8] DE CARVALHO, H. C. *Geometria fractal - perspectivas e possibilidades no ensino de matemática*. 2005. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Pará (NPADC), Pará, 2005.
- [9] DE OLIVEIRA, D. A geometria fractal no ensino fundamental e médio. Technical report, Faculdade de Filosofia, Ciências e letras de Presidente Venceslau (FAFIPREVE, São Paulo, 2008.
- [10] JORDÃO, C. M. F. S. *Conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário*. 2007. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

- [11] RABAY, Y. S. F. *Estudos e aplicações da geometria fractal*. 2013. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [12] DE OLIVEIRA, E. E. C.; ET. AL. Antenas de microfita utilizando a curva de fractal de minkowski. *Universidade Federal do Rio Grande do Norte*, Natal.
- [13] NUNES, R. S. R. *Geometria fractal e aplicações*. 2006. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.
- [14] MUNKRES, J. *Topology*. 2nd. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [15] FALCONER, K. *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. Wiley, 2004.
- [16] MANDELBROT, B. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, Washington, v. 156, n. 3775, p. 636–638, 1967.
- [17] BEMFICA, A.; ALVES, C. *Fractais: Progressão e série geométrica – uma metodologia de ensino*. 2010.2. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade Cenecista de Osório (FACOS), Rio Grande do Sul, 2010.2.
- [18] Escola sesc de ensino médio. <http://escolasesc.edt.com.br>. 02.12.2013.
- [19] Fractivities - sierpinski triangle. <http://fractalfoundation.org/resources/fractivities/sierpinski-triangle>. 10.04.2013.
- [20] Fractivities - koch curve. <http://fractalfoundation.org/resources/fractivities/koch-curve>. 10.04.2013.
- [21] Fractivities - fractal tetrahedrons. <http://fractalfoundation.org/resources/fractivities/fractal-tetrahedrons>. 10.04.2013.