



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**  
**EM REDE NACIONAL**

**JOSÉ KILMER TAVARES SILVA**

**UM ESTUDO COMPLEMENTAR DOS POLIEDROS VOLTADO PARA**  
**PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO BÁSICO**

**FORTALEZA - CEARÁ**

**2014**

JOSÉ KILMER TAVARES SILVA

UM ESTUDO COMPLEMENTAR DOS POLIEDROS VOLTADO PARA  
PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Ceará – UECE, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. João Marques Pereira

FORTALEZA - CEARÁ

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**  
**Universidade Estadual do Ceará**  
**Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho**  
**Bibliotecário Responsável – Francisco Welton Silva Rios – CRB-3/919**

S586e      Silva, José Kilmer Tavares  
Um estudo complementar dos poliedros voltado para professores e alunos do ensino básico / José Kilmer Tavares Silva . -- 2014.  
CD-ROM. 69 f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm)”.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.  
Área de Concentração: Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. João Marques Pereira.

1. Poliedro. 2. Matemática – estudo e ensino. 3. Teorema de Euler. 4. Poliedros de Platão. I. Título.

CDD: 516.156

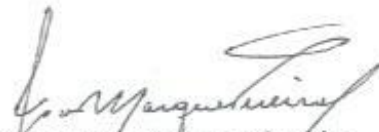
**JOSÉ KILMER TAVARES SILVA**

**UM ESTUDO COMPLEMENTAR DOS POLIEDROS VOLTADO PARA PROFESSORES E  
ALUNOS DO ENSINO BÁSICO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração Matemática.

Aprovada em: 24/02/2014.

**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. João Marques Pereira  
Orientador e Presidente da Banca Examinadora  
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT



Prof. Dr. João Herminio da Silva  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda  
Universidade Estadual do Ceará – UECE/PROFMAT

## **AGRADECIMENTOS**

Ao concluir esse trabalho me vem lembranças de uma caminhada árdua, na qual sem apoio de várias pessoas eu não teria chegado ao êxito. Aqui ressalto o meu reconhecimento a todas elas, que de certa forma, seja direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste sonho. Agradeço primeiramente a Deus, foi pela fé que ele me ensinou a ter que eu consegui chegar ao fim desta caminhada. A todos de minha família faço um agradecimento muito especial, principalmente quando me refiro aos meus pais, Ernandes e Elisa, e aos meus irmãos Bruno e André e ao meu primo Carlos. A minha esposa Helaine Fernandes dou todo o crédito desta conquista. Foi ela a minha maior incentivadora, sem os seus conselhos e os seus confortos eu jamais teria conseguido. Aos meus amigos, principalmente aqueles que torceram por essa conquista e estiveram sempre junto comigo nesses anos de caminhada. A minha diretora, da Escola de Ensino Fundamental e Médio polivalente Gov. Aduato Bezerra, Maria Tereza Alencar Ribeiro. O seu apoio foi fundamental nessa minha conquista. Aos meus colegas de turma, Van Eudes, Moésio e Erisvandro. A nossa coordenadora do polo Orlandina Jacó. É importante eu ressaltar que tive uma ajuda fundamental durante todo meu curso. Um colega (que hoje o considero como amigo) em especial me auxiliou muito, foi um professor particular para mim, e é com todo prazer que agradeço a Leandro Barbosa. Aos meus professores, em especial o meu orientador e Prof. Dr. João Marques Pereira, o coordenador e Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery e o Prof. Dr. João Montenegro de Miranda. É de maneira muito sincera que agradeço a todas as pessoas que contribuíram para essa minha formação.

O sucesso nesse curso não poderia ter sido alcançado sem a ajuda de minha amada esposa Helaine Fernandes. Foi ela que me acompanhou durante os dois anos difíceis deste mestrado, estando comigo sempre, seja nos momentos bons e principalmente nos momentos ruins. O seu companheirismo, a sua compreensão, o seu amor para comigo e o seu poder de me convencer de que eu era capaz foram fundamentais para essa minha caminhada. Pedras encontrei no caminho, mas ela com sua sabedoria me ensinou a guardar todas elas para no final construir o nosso castelo. A ela dedico, com todo amor, a concretização deste meu sonho.

## Lista de Figuras

Figura 1: Sólidos associados aos elementos primordiais	17
Figura 2: Modelos neolíticos dos sólidos platônicos	17
Figura 3: Polígono Convexo	19
Figura 4: Polígono não Convexo	19
Figura 5: Poliedro	20
Figura 6: Poliedro	20
Figura 7: Não é poliedro	20
Figura 8: Não é poliedro	20
Figura 9: Poliedro Convexo	20
Figura 10: Poliedro não Convexo	20
Figura 11: Poliedro Euleriano (convexo)	20
Figura 12: Poliedro Euleriano (não convexo)	20
Figura 13: Planificação dos Poliedros	21
Figura 14: Planificação de um Poliedro	22
Figura 15: Projeção de um cubo num plano $\theta$	24
Figura 16: Projeção de um cubo num plano	24
Figura 17: Projeção de um cubo num plano	25
Figura 18: Dodecaedro de 20 vértices	27
Figura 19: Dodecaedro de 12 vértices com núcleo	27
Figura 20: Dodecaedro de 12 vértices sem núcleo	27
Figura 21: Icosaedro estrelado	27
Figura 22: Poliedros regulares convexos	27
Figura 23: Platão	28
Figura 24: Recortes dos poliedros de Platão	30
Figura 25: Tetraedro	31
Figura 26: Hexaedro	32
Figura 27: Octaedro	32
Figura 28: Dodecaedro	33

Figura 29: Decomposição dodecaedro regular	34
Figura 30: Diagonal no pentágono	34
Figura 31: Triângulo	34
Figura 32: Justaposição dos sólidos opostos	35
Figura 33: Icosaedro	37
Figura 34: Icosaedro regular	38
Figura 35: Tetraedro extraído do icosaedro regular	38
Figura 36: Secção do hexágono	38
Figura 37: Secção hexagonal	38
Figura 38: Intersecção do hexágono com o pentágono	39
Figura 39: Tetraedro regular inscrito numa esfera	41
Figura 40: Hexaedro regular inscrito numa esfera	41
Figura 41: Octaedro regular inscrito numa esfera	42
Figura 42: Dodecaedro regular inscrito numa esfera	42
Figura 43: Icosaedro regular inscrito numa esfera	43
Figura 44: Poliedros Semirregulares Individuais Equiangulares	45
Figura 45: Poliedros Semirregulares Individuais Equifaciais	48
Figura 46: Modelo de alvéolo de mel	52
Figura 47: Água-marinha (forma bruta e lapidada)	52
Figura 48: Topázio (forma bruta e lapidada)	52
Figura 49: Quartzo (forma bruta e lapidada)	52
Figura 50: Modelo astronômico de Kepler	53
Figura 51: protista com forma de um icosaedro	54
Figura 52: Células poliédricas e justapostas	54
Figura 53: Vírus poliédricos	54
Figura 54: Geometria molecular octaédrica	55
Figura 55: Geometria molecular tetraédrica/piramidal	55
Figura 56: Modelo de molécula de fulereno	55



Figura 57: Bola de futebol	55
Figura 58: Pirâmides do Egito	56
Figura 59: Museu do Louvre	56
Figura 60: Geodésica de São Paulo	56
Figura 61: Poliedro habitável	56
Figura62: Casa poliedro	56

### **Lista de Tabelas**

Tabela 1: Poliedros de Platão	30
Tabela 2: Elementos importantes no estudo dos poliedros	57

“As raízes do estudo são amargas, mas seus frutos são doces.” Aristóteles.

## RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é oferecer aos alunos e professores do ensino básico um texto específico e mais rigoroso sobre o estudo dos poliedros suprimindo uma lacuna existente nos livros de ensino básico em relação à conceitualização, as demonstrações dos principais teoremas e apresentação dos sólidos geométricos, sendo este o principal enfoque. Inicialmente apresenta-se um pequeno histórico sobre o surgimento dos poliedros. Em seguida uma definição para poliedros, trazendo uma abordagem especial aos poliedros convexos. Demonstra-se o teorema de Euler e a relação para encontrar a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo; o teorema de Euler foi mostrado de duas formas. Na abordagem aos poliedros regulares são citados os nove existentes, com foco nos poliedros regulares de Platão. Como decorrência do teorema de Euler foi mostrada o porquê da existência de somente cinco poliedros de Platão, analisados quanto ao número de faces. Abordou-se o cálculo de área e volume dos poliedros regulares de Platão, e foi verificado, qual dentre estes poliedros possui maior volume, ao impor que estejam inscritos em uma esfera unitária. Ainda no que se refere aos tipos de poliedros são citados os semiregulares. Algumas aplicações interdisciplinares foram feitas. Conforme a análise feita em alguns livros didáticos verifica-se a pouca ênfase dada ao assunto quando se trata de literatura de ensino básico. Por fim o software *Poly Pro* foi apresentado como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem. Espera-se com esse estudo permear as pesquisas dos futuros usuários docentes e permitir aos discentes uma bagagem melhor estruturada.

**Palavras-chave:** Poliedro. Matemática. Teorema de Euler. Poliedros de Platão.

## ABSTRACT

The main objective of this paper is to provide students and teachers of primary school of a specific and more rigorous text on the study of polyhedron removing a gap in the basic education's books about the conceptualization, statements of the main theorems and presentation of geometric solids, being this my main focus. Initially have been presented a brief history of the development of polyhedron. Therefore a definition for polyhedron, bring a special approach to convex polyhedron. Euler's theorem was demonstrated and compared to find the angles of the faces of a convex polyhedron; Euler's theorem has been demonstrated in two ways. In the approach of regular polyhedron are cited nine existing, focusing on regular polyhedron of Plato. As a consequence of Euler's theorem why the existence of only five polyhedron Plato analyzed regarding the number of faces was shown. It approaches the calculation of area and volume of regular polyhedron of Plato, and was checked which of these polyhedron has greater volume, which stipulates that are enrolled in a unit sphere. Still with regard to the types of the polyhedron are mentioned the semi-regular forms. Some interdisciplinary applications have been made. As the analysis in textbooks we found the little attention given to the subject when it comes to basic education literature. Finally the *Poly Pro* software was presented like a easier tool in the teaching and learning process. It is hoped that this study permeate the research of future users teachers and permit to the students a better structured background.

**Keywords:** Polyhedron. Mathematics. Euler's theorem. Plato polyhedra.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>07</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>09</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>11</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>12</b>
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>2. OBJETIVOS.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 Objetivo Geral.....</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Objetivos Específicos.....</b>	<b>16</b>
<b>3. O SURGIMENTO DOS POLIEDROS.....</b>	<b>17</b>
<b>4. DEFINIÇÕES E TEOREMAS.....</b>	<b>19</b>
<b>4.1 Definição de poliedro.....</b>	<b>19</b>
<b>4.2 Poliedros convexos e o Teorema de Euler.....</b>	<b>20</b>
<b>4.3 Poliedros de Platão.....</b>	<b>28</b>
<b>4.4 Área e volume dos cinco poliedros regulares de Platão em função da aresta s.....</b>	<b>31</b>
<b>4.5 Curiosidade sobre os volumes dos poliedros regulares.....</b>	<b>40</b>
<b>4.6 Poliedros semiregulares.....</b>	<b>44</b>
<b>5. OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE POLIEDROS.....</b>	<b>51</b>
<b>5.1 A presença de formas poliédricas na natureza, astronomia, biologia, química e arquitetura.....</b>	<b>51</b>
<b>5.2 A pouca ênfase dada aos poliedros nos livros de Ensino Médio.....</b>	<b>57</b>
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>58</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO.....</b>	<b>62</b>

## 1- INTRODUÇÃO

É notória a superficialidade com que os livros didáticos usados no ensino médio apresentam alguns dos tópicos da geometria espacial. Em particular o tratamento dado aos poliedros deixa muito a desejar. É objeto deste trabalho disponibilizar um texto que complemente o conteúdo teórico sobre os poliedros apresentados nos livros adotados em nossas escolas.

Sabemos que o estudo da geometria espacial é importante para a compreensão das formas geométricas encontradas no nosso dia-a-dia: cubo, paralelepípedo, pirâmides, cilindros, esferas, cones, etc... As dificuldades encontradas ao estudarmos os poliedros são igualmente vivenciadas por professores e alunos. Não dispomos de material didático satisfatório para tal estudo. Constatamos, através de nossa vivência em sala de aula, que tal panorama age negativamente sobre o processo de ensino-aprendizagem, pois não havendo informação suficiente a aprendizagem não irá acontecer de maneira satisfatória.

Este trabalho foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica. Vários autores foram consultados. Apresentamos uma síntese dos principais conceitos, definições e teoremas que, a nosso ver são indispensáveis ao estudo dos poliedros.

O texto é apresentado de forma simples e nem por isso menos rigoroso. Sua leitura é acessível a todos que tenham interesse em ampliar seu conhecimento sobre os poliedros.

Este trabalho consta essencialmente de três partes. A primeira parte contém um pouco da história dos poliedros. São citados alguns dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento teórico e descoberta dos vários tipos de poliedros.

Na segunda parte foi dada a definição de poliedros, enfatizando os poliedros convexos, os poliedros regulares e semiregulares. Citamos os diversos tipos de poliedros semiregulares. Apresentamos o teorema de Euler para os poliedros convexos e a existência de somente cinco poliedros de Platão quanto ao número de faces. É mostrado como calcular a área e o volume dos cinco poliedros regulares de Platão e qual destes tem maior volume quando circunscritos por uma esfera de raio unitário.

Na terceira e última parte apresentamos exemplos da existência de formas poliédricas fora da área matemática. Foram observadas aparições de formas poliédricas não só na natureza, mas também na astronomia, biologia, química e arquitetura. Também foi citada uma pequena pesquisa entre os principais livros que abordam poliedros e são usados no ensino médio. Foi

constatado que a grande maioria deles apresenta poliedros de maneira superficial, fato este que contribui negativamente no processo ensino-aprendizagem.

No anexo 4 apresenta-se o software *Poly Pro*. Este pode ser utilizado para uma visualização e compreensão mais clara dos poliedros.

## **2- OBJETIVOS**

### **2.1- Objetivo Geral**

Disponibilizar um texto sobre poliedros, que além de divulgar as propriedades destes sólidos, complemente o conteúdo, sobre poliedros, dos livros usados no ensino médio. Compreender as questões teóricas e didáticas sobre o ensino do conceito e das demonstrações dos principais teoremas sobre poliedros

### **2.2- Objetivos Específicos**

Apresentar um pouco da história dos poliedros;

Conceituar e classificar os diversos tipos de poliedros demonstrando seus principais teoremas;

Estudar os poliedros de Platão calculando suas áreas e volumes;

Apresentar aplicabilidades práticas dos poliedros em outras áreas.



### 3- O SURGIMENTO DOS POLIEDROS

Não sabemos ao certo em que período da história a humanidade começou a estudar as formas poliédricas. Há evidência de que egípcios, chineses, babilônicos e hindus tinham conhecimentos sobre pirâmides e outras formas geométricas. No Papiro de Rhind, no Papiro de Moscovo, por exemplo, são notórios vários problemas relacionados com pirâmides.

Na Grécia antiga, Euclides (365 a. C.- 300 a. C.) estuda a geometria levando em conta suas deduções, deduções essas que já vinham sendo usadas por seus antecessores, como Tales de Mileto (640 – 546 a. C.), Pitágoras (580-500 a. C.) e Eudoxio (408 – 355 a. C.). Os geômetras dessa época já tinham conhecimento acerca dos cinco poliedros regulares.

Platão (427 a. C. - 347 a. C.), filósofo e matemático da Grécia Antiga apresentou cinco poliedros regulares – tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro – os quais ficaram conhecidos como sólidos de Platão. Platão faz uma associação desses sólidos com os quatro “elementos” primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais – Ar, Água, Fogo e Terra (figura 1). O quinto sólido foi associado ao universo.

Figura 1: Sólidos associados aos elementos primordiais



Alguns pesquisadores não creditam essa descoberta a Platão, pois eles acreditam que o estudo do tetraedro, do hexaedro e do dodecaedro se deve aos pitagóricos, e o octaedro e o icosaedro deve-se a Teeteto. Mas foi Platão o primeiro a demonstrar a existência de apenas cinco poliedros regulares. No museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido, existem peças associadas aos cinco sólidos de Platão (figura 2). Dizem-se peças esculpidas pelos povos neolíticos que viveram na Escócia. O interessante é que essas peças foram esculpidas 1000 anos antes de Platão tratar sobre elas.

Figura 2: Modelos Neolíticos dos Sólidos Platônicos



Os poliedros são figuras geométricas espaciais formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces e suas definições variam de acordo com a estrutura adotada. Para que seja chamado de Poliedro de Platão é necessário que atendam a três condições: todas as faces têm o mesmo número de arestas, todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número de arestas e precisa que o poliedro seja euleriano, ou seja, atenda a fórmula  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces.

Teeteto (c.417 – c 369 a. C.), um dos matemáticos que ensinou na Academia de Platão fez um estudo teórico sobre os poliedros regulares, os quais têm todas as faces congruentes e de cada vértice saem o mesmo número de aresta.

A relação acima ( $V - A + F = 2$ ) descoberta por Euler é válida para todo Poliedro convexo.

Vale salientar que outros filósofos como: Euclides, Kepler, Poinot, Arquimedes e Cauchy em períodos diferentes deram importantes contribuições para o estudo dos poliedros.

- Euclides (365 – c. 300 a. C.) faz um estudo sistemático desses sólidos e coloca a sua construção inscrita numa dada superfície esférica e com isso demonstra que nenhuma outra figura, além das citadas acima cumprem as condições básicas para que se tenha um Poliedro Platônico.

- Arquimedes (287 – 212 a. C.) considera a condição das faces serem polígonos regulares, mas não de serem congruentes, com isso tem-se uma considerável ampliação do número de sólidos. Alguns destes sólidos serão mostrados no capítulo 5.

- Kepler (1711 – 1630) demonstrou que existe apenas um número finito de sólidos arquimedianos, atribuindo-lhes nomes e ilustrações. Observou que cada um deles pode se obtido por meio de uma sucessão de cortes ou truncaturas. Ele também estudou os Poliedros Estrelados.

- Poinot (1777 – 1859) também estudou os poliedros estrelados. Não se tem certeza de que Poinot conhecia os estudos de Kepler e por isso esses quatro poliedros são conhecidos como poliedros de Kepler-Poinot. Tendo como base os conceitos anteriores de polígonos regulares, seus estudos afirmam que há pelo menos nove poliedros regulares.

- Cauchy em 1813 comprovou que realmente só existiam nove poliedros regulares, sendo cinco convexos e quatro estrelados.

## 4- DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Antes de definirmos poliedros, definiremos polígono.

DEFINIÇÃO 1: Chama-se polígono a região de um plano delimitada por um número finito de segmentos de reta, que atendem as seguintes condições:

- i) cada uma das extremidades de qualquer um dos segmentos é também extremidade de outro segmento;
- ii) dois segmentos consecutivos quaisquer nunca são colineares;
- iii) dois segmentos não consecutivos quaisquer nunca se interceptam.

Um polígono é chamado de convexo se, além de atender as condições acima, atenda também a condição: “iv) fixado qualquer um dos lados, os demais lados ficarão todos em um dos semiplanos determinados pela reta suporte deste lado”. Caso contrário, o polígono é chamado de não convexo.

Figura 3: Polígono Convexo

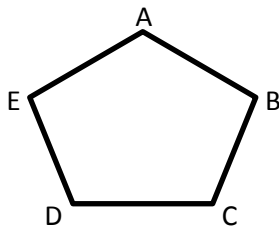
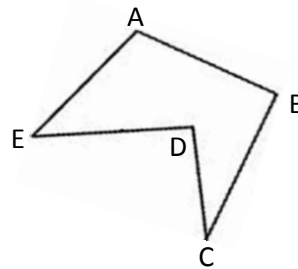


Figura 4: Polígono não convexo



### 4.1- Definição de Poliedro

Poliedro – Palavra de origem grega – poly (muitas) e edro (face), portanto logo seria uma definição bastante fácil de compreender considerando somente a etimologia do termo.

Temos a definição:

DEFINIÇÃO 2: Chama-se poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que atende as seguintes condições:

- i) qualquer lado de um polígono é lado de exatamente dois polígonos;
- ii) dois polígonos que possuem um lado em comum jamais são coplanares;
- iii) o encontro de dois polígonos pode ser um ponto, um segmento de reta ou vazio.

Os lados dos polígono que compõe o poliedro são chamados de arestas; o encontro de arestas é chamado de vértices; os polígonos que formam o poliedro são chamados de faces.

Exemplos de sólidos que são poliedros e de sólidos que não são poliedros.

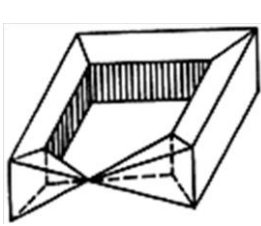


Fig. 5: Poliedro

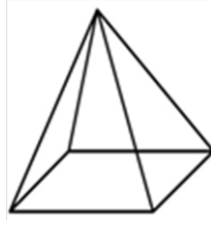


Fig. 6: Poliedro

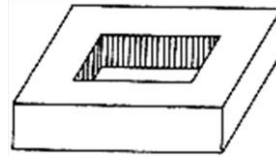


Fig. 7: Não é poliedro

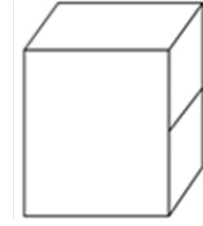


Fig. 8: Não é poliedro

#### 4.2- Poliedros convexos e o Teorema de Euler

Sabemos que um plano divide o espaço em dois semiespaços. Chamaremos de poliedros convexos àqueles, que fixada uma face, as demais faces estarão num mesmo semiespaço. Caso contrário os poliedros são não convexos.

Fig. 9: Poliedro convexo

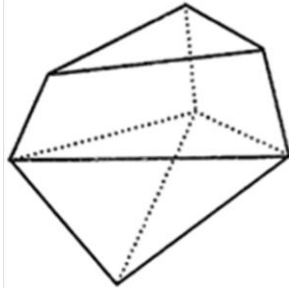
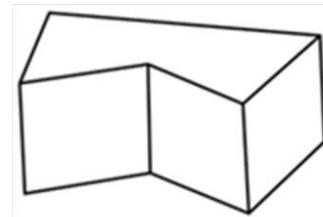


Fig. 10: Poliedro não convexo



Daremos uma atenção especial ao estudo dos poliedros Convexos. Demonstraremos um dos principais teoremas sobre poliedros: “O Teorema de Euler”. Este teorema relaciona o número de vértices ( $V$ ), número de arestas ( $A$ ) e o número de faces ( $F$ ), de um poliedro convexo. Os poliedros que atendem a esse teorema são chamados de eulerianos. Sabemos que todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo euleriano é convexo. O teorema de Euler pode ser assim enunciado:

TEOREMA 1: Em todo poliedro convexo temos a relação:  $V + F = A + 2$

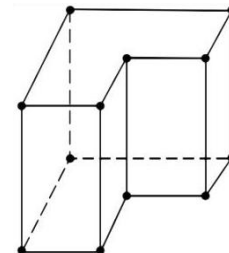
Fig. 11: Poliedro Euleriano (convexo)



$$\begin{cases} V = 7 \\ F = 7 \\ A = 12 \end{cases}$$

$$V + F = A + 2$$

Fig. 12: Poliedro Euleriano (não-convexo)



$$\begin{cases} V = 12 \\ F = 8 \\ A = 18 \end{cases}$$

$$V + F = A + 2$$

Os poliedros acima satisfazem o teorema de Euler embora o poliedro da figura 12 não seja convexo.

Para demonstrar o Teorema de Euler precisaremos entender o que é uma planificação.

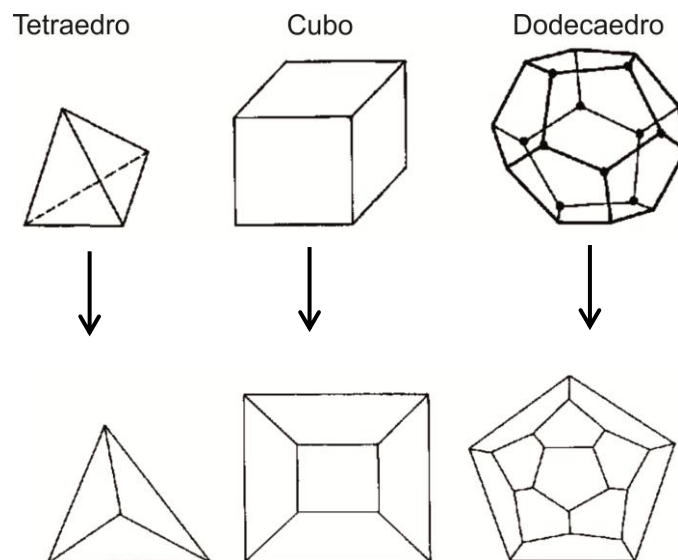
A ideia usada para planificar um poliedro convexo, ou seja, representar o poliedro em uma superfície plana inicia-se com a retirada de uma de suas faces. Após essa retirada conserva-se o número de vértices e o número de arestas, porém o número de faces é diminuído de uma unidade. As arestas da face retirada (ou lados do polígono retirado) serão chamadas de arestas livres.

Imaginemos que as arestas podem tomar qualquer direção, sendo aumentadas ou diminuídas, sem perder sua forma de seguimento de reta. Admitiremos ainda que seus vértices não se desligam de suas arestas.

A planificação poderá ser obtida esticando o poliedro a partir de suas arestas livres, colocando-as num mesmo plano de tal modo que as demais arestas e os vértices do poliedro fiquem no interior do polígono formado pelas arestas livres.

Segue exemplos de planificação de três poliedros:

Figura 13: Planificação dos poliedros.

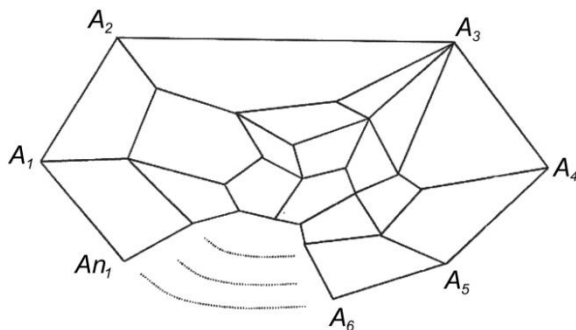


Apresentaremos duas demonstrações do teorema de Euler. A primeira é essencialmente à apresentada por Azevedo (1999) e a segunda por Lima (1991)

### DEMONSTRAÇÃO 1:

Dado um poliedro chamaremos suas faces de  $P_1, P_2, \dots, P_F$ ; e de  $n_1, n_2, \dots, n_F$ , respectivamente, o número de arestas de  $P_1, P_2, \dots, P_F$ . Ao planificar o poliedro retirando a face  $P_1$ , os vértices desta face  $A_1, A_2, \dots, A_{n_1}$ , são os vértices do polígono  $P_1$ . Observe que agora os vértices da face  $P_1$  são visto como vértices de um polígono que contem em seu interior as outras faces. Usaremos a planificação vista na figura 14.

Figura 14: Planificação de um poliedro



Como cada aresta é aresta de exatamente duas faces, temos:  $n_1 + n_2 + \dots + n_f = 2A$

Com a planificação adotada, teremos  $(F - 1)$  polígonos interiores à "face  $P_1$ ". A soma  $S_i$  dos ângulos internos de cada face  $P_i$ ,  $i > 1$ , é dada por  $S_i = (n_i - 2) \cdot 180^\circ$ .

Calcularemos a soma  $S$  de todos os ângulos de todas as faces, interiores à "face  $P_1$ ".

Faremos essa soma de duas formas:

Primeira forma:

$$Sn_2 = (n_2 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$Sn_3 = (n_3 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$Sn_F = (n_F - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = Sn_2 + Sn_3 + \dots + Sn_F$$

$$S = 180^\circ [(n_2 - 2) + (n_3 - 2) + \dots + (n_F - 2)]$$

$$S = 180^\circ [(n_2 + n_3 + \dots + n_F) - \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{(F-1) \text{ vezes}}]$$

$(F - 1) \text{ vezes}$

$$S = 180^\circ [(n_2 + n_3 + \dots + n_F) - 2(F - 1)] \quad (I)$$

Segunda forma:

Como a soma dos ângulos de cada vértice interno à “face  $P_1$ ”, é sempre  $360^\circ$  e a quantidade destes vértices é  $V - (\text{número de arestas de } P_1) = V - n_1$ , então:

$$S = \underbrace{180^\circ (n_1 - 2)}_{\text{Soma dos ângulos internos do polígono } P_1} + \underbrace{360^\circ (V - n_1)}_{\text{Soma dos ângulos dos vértices que após a planificação estejam contidos na face } P_1} \quad (\text{II})$$

Soma dos  
ângulos internos  
do polígono  $P_1$

Soma dos ângulos  
dos vértices que  
após a planificação  
estejam contidos na  
face  $P_1$

Igualando (I) e (II), temos:

$$180^\circ [(n_2 + n_3 + \dots + n_F) - 2(F - 1)] = 180^\circ(n_1 - 2) + 360^\circ(V - n_1)$$

$$(n_2 + n_3 + \dots + n_F) - 2F + 2 = n_1 - 2 + 2V - 2n_1$$

$$(n_2 + n_3 + \dots + n_F) - 2F + 2 = -n_1 - 2 + 2V$$

$$\underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f - 2F + 2}_{2A - 2F} = 2V - 2$$

$$2A - 2F = 2V - 4$$

$$A - F = V - 2$$

$$V + F = A + 2$$

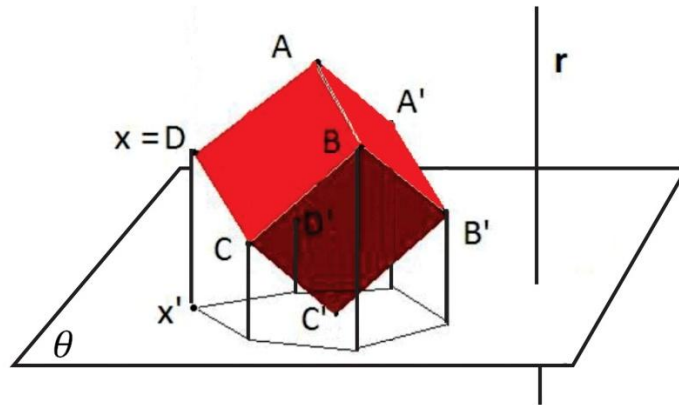
## DEMONSTRAÇÃO 2:

Ilustraremos algumas etapas da demonstração considerando que o poliedro  $P$  seja um cubo. O método utilizado será através da projeção de um poliedro convexo em uma região plana. Para fazermos essa projeção adotaremos algumas técnicas, as quais serão citadas ao longo da demonstração.

Considere um poliedro convexo  $P$ , um plano  $\theta$  e uma reta  $r$  perpendicular ao plano  $\theta$  não paralela a nenhuma das faces de  $P$ , de modo que o poliedro esteja posicionado em um dos semiespaços determinados por  $\theta$ . Chamaremos  $\theta$  de plano horizontal e de semiespaço superior o semiespaço que contem  $P$ .

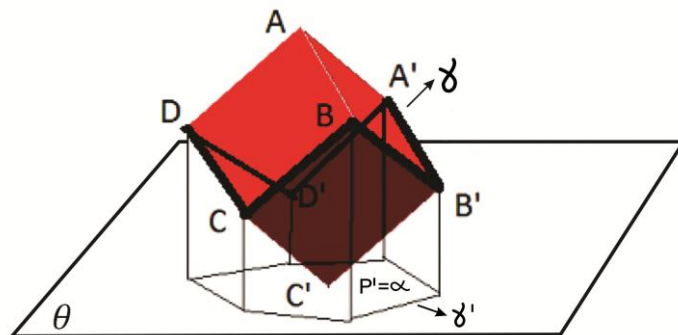
Imaginaremos agora um feixe de luz, paralelo a  $r$  e passando por  $P$ . Cada ponto  $X$  da semiespaço superior será projetado no plano  $\theta$ . Chamaremos de  $X' \in \theta$  a projeção (sombra) de  $X$ . Como  $r$  não é paralela a nenhuma face de  $P$ , a interseção de qualquer reta paralela a  $r$  com  $P$ , será vazio, um ponto ou dois pontos. Então cada ponto da projeção  $P'$  de  $P$  é sombra (projeção) de um ou dois pontos de  $P$ .

Figura 15: Projeção de um cubo no plano  $\theta$



A figura acima ilustra a projeção de um cubo em  $\theta$ . Ela sugere que a sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é um polígono convexo  $\alpha$ , cujo contorno  $\gamma'$  é a sombra da poligonal fechada  $\gamma$ . A poligonal  $\gamma$  é formada por arestas de  $P$  e a interseção de uma reta paralela a  $r$  com  $P$  é um ponto se e só se este ponto está em  $\gamma$ . A poligonal  $\gamma$  é chamada de contorno aparente de  $P$ .

Figura 16: Projeção de um cubo no plano



Dado os dois pontos de  $P$  que tenham mesma sombra, o mais distante de  $\theta$  é chamado de ponto iluminado e o mais próximo de ponto sombrio. Por exemplo, na figura 16 estamos imaginando o cubo pendurado pelo vértice  $A$ , modo que  $A$  e  $C'$  estejam na mesma vertical. Neste caso  $A$  é ponto iluminado e  $C'$  ponto sombrio. Veja que  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são faces opostas. Nesta figura temos:

$\gamma$  é o contorno aparente de  $P$ .

$\gamma'$  é a sombra de  $\gamma$ .

$P' = \alpha$  é o polígono formado pela projeção dos pontos de  $P$ .

$ABCD$ ,  $A'A'B'B$  e  $A'A'D'D$  são as faces iluminadas.

$CDD'C'$ ,  $C'C'B'B$  e  $A'B'C'D$  são as faces sombrias.

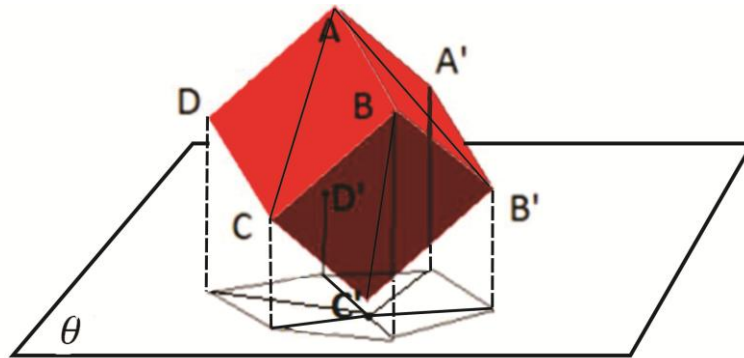


Assim o poliedro  $P$  passa a ser formado por três partes: Pontos iluminados, pontos sombrios e contorno aparente.

Se  $P_1$  são os pontos iluminados de  $P$  união com o contorno aparente  $\gamma$ , teremos que cada ponto da projeção  $P'$  de  $P$  é a projeção de um único ponto de  $P_1$ , isto é, existe uma correspondência biunívoca entre  $P_1$  e  $P'$ . O polígono  $P'$  é decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces iluminadas. Analogamente, se  $P_2$  são os pontos sombrios união com o contorno aparente existe uma correspondência biunívoca entre  $P_2$  e  $P'$ . Sejam  $P_1'$  e  $P_2'$  as projeções de  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente.

Veja que ao traçarmos uma diagonal em uma das faces de  $P$ , teremos  $F + 1$  faces e  $A + 1$  arestas, mas o número  $F - A + V$  não altera. As diagonais de uma face com  $n$  lados, que partem de um vértice, a dividem em  $n-2$  triângulos. Isto significa que podemos considerar, sem perda de generalidade, que as faces de  $P$  são triangulares.

Figura 17: Projeção de um cubo num plano



Como toda face agora possui três arestas e cada aresta pertence a duas faces, tem-se  $3F=2A$ .

Para demonstrar o Teorema, calcularemos de duas maneiras distintas a soma  $S$  dos ângulos internos dos triângulos que compõe  $P$ . A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $\pi$  radianos. Como temos  $F$  triângulos,  $S = \pi \cdot F = \pi (3F - 2F) = \pi (2A - 2F) = 2\pi A - 2\pi F$ . (I)

Sendo  $S_1$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e  $S_2$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios, teremos  $S = S_1 + S_2$ .

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo  $T$  é igual à soma dos ângulos internos de sua projeção  $T'$ , tem-se que  $S_1$  é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo  $P_1'$ , sombra de  $P_1$ . Calcularemos  $S_1$  em função dos vértices  $V_1, V_2$  e  $V_0$ , onde  $V_0$  é o número de vértices do contorno aparente,  $V_2$  é o número de vértices sombrios e  $V_1$  é o número de vértices iluminados.

Temos que  $V = V_0 + V_1 + V_2$ .

A soma dos ângulos que tem como vértices um dado vértice no interior de  $\gamma'$  é  $2\pi$ .

A soma dos ângulos que tem vértices sobre  $\gamma'$  é dada por  $\pi (n - 2) = \pi (V_0 - 2)$ , já que  $V_0 = n$ , número de lados de  $\gamma'$ . Segue que  $S_1 = 2\pi V_1 + \pi (V_0 - 2)$ . Analogamente podemos concluir que  $S_2 = 2\pi V_2 + \pi (V_0 - 2)$ .

Então

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi V_1 + \pi (V_0 - 2) + 2\pi V_2 + \pi (V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi V_0 - 4\pi$$

$$S = 2\pi (V_1 + V_2 + V_0) - 4\pi \quad (\text{como } V_1 + V_2 + V_0 = V)$$

Teremos:

$$S = 2\pi V - 4\pi \quad (\text{II})$$

$$\text{De (I) e (II): } 2\pi A - 2\pi F = 2\pi V - 4\pi \quad \text{ou}$$

$$A - F = V - 2$$

$$V + F = A + 2.$$

Obs: Veja que dados três números naturais  $V$ ,  $A$  e  $F$  satisfazendo a relação de Euler  $V + F = A + 2$  pode não existir um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Por exemplo,  $V=7$ ,  $A=9$  e  $F=4$  não representa um poliedro, pois sabemos que o poliedro que possui quatro faces é somente o tetraedro e este possui  $V=4$ ,  $A=6$  e  $F=4$ .

O teorema que segue estabelece a soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo em função do número de vértices.

**TEOREMA 2:** Soma  $S$ , dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada por

$$S = (V-2) \cdot 360^\circ, \text{ onde } V \text{ é o número de vértices do poliedro.}$$

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que com  $n$  lados é dado por  $S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$ . Seja  $P$  um poliedro convexo com  $F$  faces,  $V$  vértice e  $A$  arestas. Se  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$  são respectivamente os números de lados das faces  $P_1, P_2, \dots, P_F$  e  $S_i$  soma os ângulos da face  $P_i$ , teremos

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_F$$

$$S = (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 180^\circ n_1 - 360^\circ + 180^\circ n_2 - 360^\circ + \dots + 180^\circ n_F - 360^\circ$$

$$S = 180^\circ (n_1 + n_2 + \dots + n_F) - \underbrace{(360^\circ + 360^\circ + \dots + 360^\circ)}_{(F \text{ Vezes})}$$

Como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, temos  $n_1 + n_2 + \dots + n_F = 2A$ , e assim

$$S = 180^\circ \cdot 2A - F \cdot 360^\circ$$

$$S = 360^\circ \cdot A - F \cdot 360^\circ$$

$$S = (A - F) \cdot 360^\circ$$

Como pela relação de Euler,  $V - 2 = A - F$ ,

$$\text{Temos } S = (V - 2) \cdot 360^\circ.$$

DEFINIÇÃO 3: Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes entre si e os ângulos poliédricos são todos congruentes.

Exemplos de poliedros regulares:

Fig. 18: Dodecaedro de 20 vértices



Fig. 19: Dodecaedro de 12 vértices com núcleo



Fig. 20: Dodecaedro de 12 vértices sem núcleo



Fig. 21: Icosaedro Estrelado



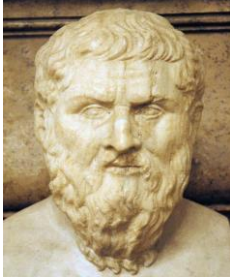
Figura 22: Poliedros regulares convexos



Os poliedros das figuras 18, 19, 20 e 21 são chamados de poliedros estrelados (Kepler-Poinsot) e os da figura 22, de poliedros regulares de Platão. Estes serão estudados no próximo parágrafo.

### 4.3- Poliedros de Platão

Figura 23: Platão



Platão foi um dos principais filósofos da Grécia antiga. Nasceu em Atenas 427 a. C. Morreu aos 80 anos, 347 a. C., em Atenas. Foi discípulo de Sócrates até a morte do mestre, quando então, com outros seguidores de Sócrates, juntou-se a Euclides em Mégara. Alguns poliedros, em homenagem a Platão, recebem seu nome. São os poliedros convexos cujas

faces têm o mesmo número de arestas e de cada vértice partem o mesmo número de arestas.

Pelo menos três deles (tetraedro, hexaedro, dodecaedro) foram estudados pelos pitagóricos e outros dois (octaedro e icosaedro) por Teatetus, um amigo de Platão.

Temos a definição:

DEFINIÇÃO 4: Um poliedro é chamado de Platão se atende as seguintes condições:

- i) Todas as suas faces possuem o mesmo número de arestas;
- ii) Em todos os seus vértices concorrem o mesmo número de arestas;
- iii) Satisfaz a relação de Euler.

É importante lembrar que num poliedro de Platão as faces não precisam ser polígonos regulares. Por exemplo, o paralelepípedo e o tronco de pirâmide de base quadrangular são poliedros de Platão com seis faces.

Uma das perguntas a respeito dos poliedros de Platão é como classificar tais poliedros quanto ao número de faces. A resposta a esta pergunta é dada pelo teorema seguinte.

TEOREMA 3: Quanto ao número de faces, existem exatamente cinco tipos de poliedros de Platão.

Demonstração:

Seja  $P$  um poliedro de Platão com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces. Suponhamos que cada face tenha  $n$  lados e que em todos os vértices concorrem  $p$  arestas.

Como cada aresta do poliedro é aresta de duas de suas faces e cada aresta liga dois de seus vértices temos:

$$F \cdot n = 2A \quad \text{e} \quad V \cdot p = 2A, \quad \text{Então} \quad F = \frac{2A}{n} \quad \text{e} \quad V = \frac{2A}{p}$$

Da relação de Euler  $V + F = A + 2$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{2A}{p} + \frac{2A}{n} &= A + 2 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \\ \frac{1}{A} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dessa conclusão, vemos que não podemos ter, simultaneamente,  $p \geq 4$  e  $n \geq 4$ , pois teríamos  $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ , donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ . Disto segue que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \leq 0$ , o que é uma contradição. Portanto  $p = 3$  ou  $n = 3$ . Analisaremos os dois casos.

Se  $p = 3$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{A} > 0\end{aligned}$$

Sendo  $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} > 0$ , teremos que  $n < 6$ .

Assim sendo, se  $p = 3$ , então  $n = 3, 4$  ou  $5$ .

Se  $n = 3$ , com raciocínio análogo conclui-se que teremos  $p = 3, 4$  ou  $5$ . Como  $n$  representa o número de lados de cada face, temos que as faces dos poliedros de Platão só poderão ser Triângulo, Quadrilátero e Pentágono.

Montando as possibilidades de  $p$  e  $n$ , teremos:

Se  $p = 3$  e  $n = 3$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{A} \rightarrow A = 6 \\ F = \frac{2A}{n} &\rightarrow F = \frac{12}{3} \rightarrow F = 4\end{aligned}$$

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 4 = 6 + 2 \rightarrow V = 4$ , logo teremos o tetraedro.

Se  $p = 3$  e  $n = 4$ , seguindo o argumento anterior, teremos:

$A = 12, F = 6$  e  $V = 8$ , logo teremos o Hexaedro.

Se  $p = 3$  e  $n = 5$ , seguindo o argumento anterior, teremos:

$A = 30, F = 12$  e  $V = 20$ , logo teremos o Dodecaedro.

Se  $p = 4$  e  $n = 3$ , seguindo o argumento anterior, teremos:

$A = 12, F = 8$  e  $V = 6$ , logo teremos o Octaedro.

Se  $p = 5$  e  $n = 3$ , seguindo o argumento anterior, teremos:

$A = 30$ ,  $F = 20$  e  $V = 12$ , logo teremos o Icosaedro

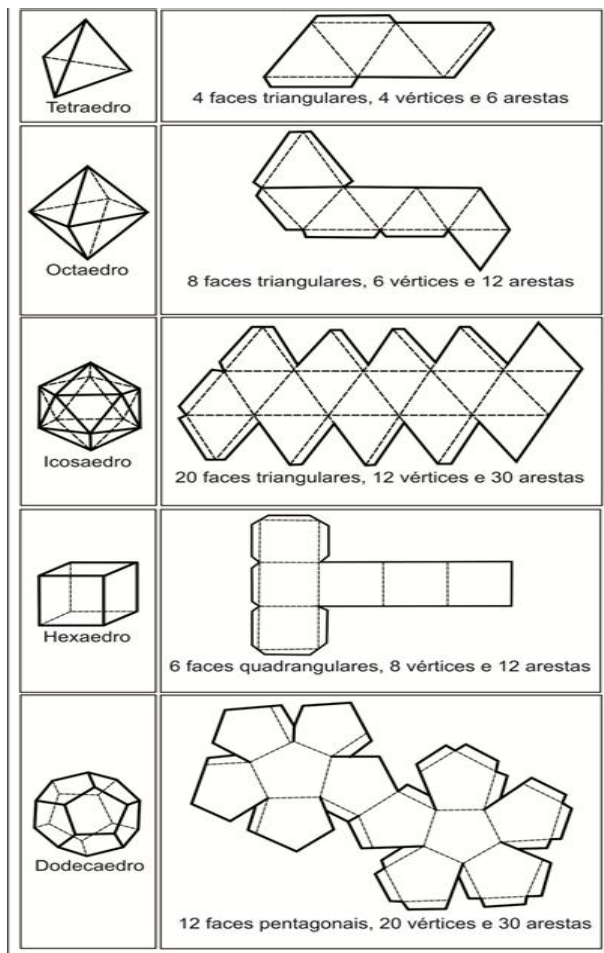
Tabela 1: Poliedros de Platão

<b>p</b>	<b>n</b>	<b>A</b>	<b>V</b>	<b>F</b>	<b>NOME</b>
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

DEFINIÇÃO 5: Um poliedro de Platão é regular se todas suas faces são polígonos regulares.

Veja a seguir os cinco poliedros de Platão e seus respectivos recortes.

Figura 24: Recortes dos poliedros de Platão

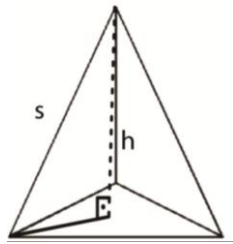


#### 4.4- Área e volume dos cinco poliedros regulares de Platão em função da aresta $s$

No que segue,  $s$  representa a medida da aresta do poliedro regular de Platão,  $V$  seu volume e  $A$  sua área.

##### 4.4.1 – Cálculo da área e do volume do tetraedro regular

Figura 25: Tetraedro



##### Área

Como o tetraedro regular é formado por quatro faces representadas por triângulos equiláteros congruentes, sua área será dada por:

$$A = 4 \cdot A_{\text{Triângulo Equilátero}} = \cancel{4} \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

$$A = s^2\sqrt{3}$$

##### Volume:

Como o volume de uma pirâmide é dado pelo produto da área da base pela altura dividido por três, temos:

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\frac{s^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s\sqrt{6}}{3}}{3}$$

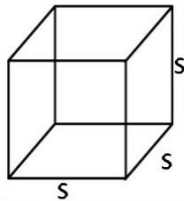
( Para altura de um tetraedro regular, ver anexo 1 )

$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{12}$$

Obs: Para a demonstração da fórmula do volume de uma pirâmide sugiro como referência o livro A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO, volume 2 – SBM.

#### 4.4.2 – Cálculo da área e do volume do hexaedro regular

Figura 26: Hexaedro



##### Área

Como cada uma das seis faces de um hexaedro é um quadrado cuja medida do lado é  $s$ , temos:

$$A = 6 \cdot A_{\text{Quadrado}}$$

$$A = 6s^2$$

##### Volume:

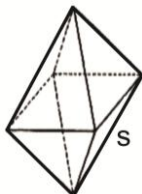
Como o volume de um cubo é dado pelo produto da área da base pela altura, temos:

$$V = A_B \cdot h = s^2 \cdot s$$

$$V = s^3$$

#### 4.4.3 – Cálculo da área e do volume do octaedro regular

Figura 27: Octaedro



##### Área

Como o octaedro regular é formado por oito faces representadas por triângulos equiláteros congruentes, sua área será dada por:



$$A = 8 \cdot A_{\text{Triângulo Equilátero}}$$

$$A = 8 \cdot \left( \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\boxed{A = 2s^2 \sqrt{3}}$$

### Volume

Podemos interpretar o octaedro regular como a junção de duas pirâmides quadrangulares regulares. Assim sendo, seu volume será dado pelo volume da pirâmide multiplicado por dois. Então:

$$V = 2 \cdot V_{\text{Pirâmide Quadrangular}}$$

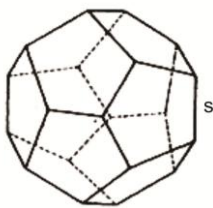
$$V = \frac{2 \cdot s^2 \cdot s \frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{s^3 \sqrt{2}}{3}}$$

( Para volume de uma pirâmide quadrangular regular, ver anexo 2 )

#### 4.4.4 – Cálculo da área e do volume do dodecaedro regular

Figura 28: Dodecaedro



### Área

O dodecaedro regular é formado por doze faces as quais são pentágonos regulares congruentes. Sua área será dada por:

$$A = 12 \cdot A_{\text{Pentágono Regular}} = 12 \cdot \left( \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}} s^2}{4} \right) \text{ ou } \boxed{A = 3 \cdot s^2 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}$$

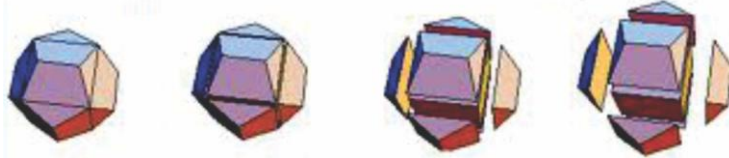
(Para área do pentágono regular, ver anexo 3)

## Volume

Para determinar o volume de um dodecaedro regular, usaremos as técnicas apresentadas em [www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedro](http://www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedro). É feita uma decomposição do poliedro em um cubo e seis sólidos geométricos (figura 29).

Figura 29:

### Retirando um cubo de um dodecaedro regular



O dodecaedro é decomposto em um cubo (parte interna) e seis sólidos geométricos congruentes (partes externas). Seu volume será dado por  $V = V_{\text{cubo}} + 6V_{\text{sólidos}}$ .

A aresta do cubo é a diagonal da face do poliedro, ou seja, diagonal de um pentágono regular. Calcularemos a medida  $c$  da diagonal do pentágono em função da aresta  $s$  do poliedro.

Figura 30: Diagonal no pentágono

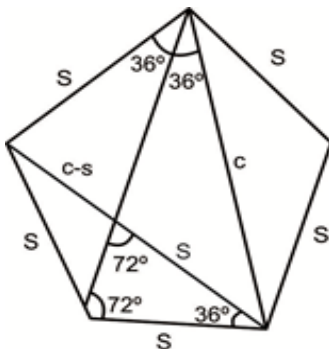
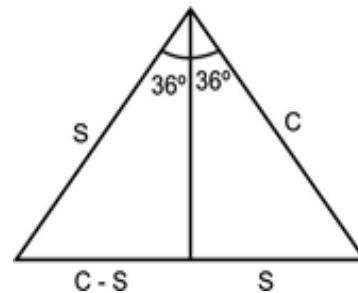


Figura 31: Triângulo



Pelo teorema da bissetriz interna, teremos:

$$\frac{s}{c-s} = \frac{c}{s}$$

$c^2 - sc = s^2$  ou  $c^2 - sc - s^2 = 0$ . O valor de  $c$  será então  $c = \frac{s + s\sqrt{5}}{2} = s \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ .

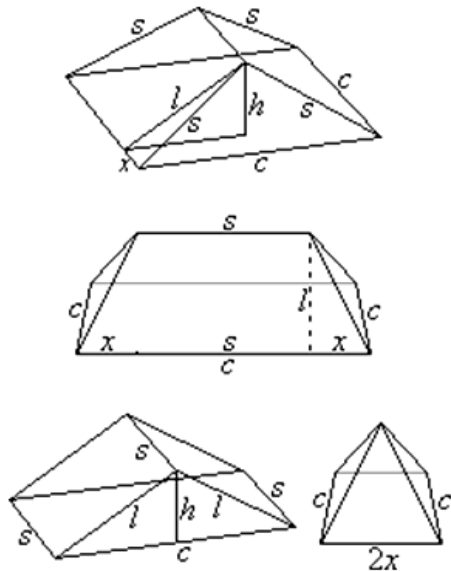
Fazendo  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$  podemos escrever  $c = s\phi$ . O volume do cubo será  $V_{\text{CUBO}} = c^3 = (s\phi)^3$ .

O número  $\phi$  é chamado de número de ouro ou razão áurea.

Vejamos agora como calcular o volume de cada um dos seis sólidos. Note que uma das faces de cada um destes sólidos é uma face do cubo, cuja aresta é  $c$ . Chamaremos esta face de base. Um plano perpendicular a aresta superior (paralela à base e que é a aresta do dodecaedro), intercepta o sólido segundo um triângulo isóscele cuja medida da base é  $c$ . Considere dois planos paralelos, perpendiculares à aresta superior e passando por suas

extremidades. Tais planos dividem o sólido em três partes: a parte central, que é um prisma triangular reto cuja altura é  $s$ ; a junção das outras duas partes forma uma pirâmide cuja base é um retângulo. O volume do sólido será a soma do volume do prisma com o volume da pirâmide. (figura 32).

Figura 32: Justaposição dos sólidos opostos



Usando o Teorema de Pitágoras no primeiro desenho da figura 32 temos:

$$s^2 = \ell^2 + x^2. \text{ Sendo } x = \frac{c-s}{2} \text{ e } \ell^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2, \text{ temos } s^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} + \left(\frac{c-s}{2}\right)^2$$

$$\text{Assim, } h^2 = s^2 - \frac{c^2}{4} - \left(\frac{c-s}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 - 2cs + s^2}{4} = \frac{4s^2 - 2c^2 + 2cs - s^2}{4} \text{ ou}$$

$$h^2 = \frac{3s^2 - 2c^2 + 2cs}{4} = \frac{3s^2 - 2c(c-s)}{4}$$

$$\text{Sendo } c = s\emptyset, \text{ teremos } \frac{c(c-s)}{2} = \frac{s\emptyset(s\emptyset - s)}{2} = \frac{s^2}{2} \text{ e assim}$$

$$h^2 = \frac{3s^2 - 2 \cdot s^2}{4} = \frac{s^2}{4}. \text{ Logo a altura da pirâmide é } h = \frac{s}{2}.$$

$$\bullet V_{\text{PIRÂMIDE}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h_{\text{PIRÂMIDE}}}{3}$$

A base da pirâmide é um retângulo cujas dimensões são  $2x$  e  $c$ . A área da base é  $2xc$ . O

$$\text{volume da pirâmide é então } V_{\text{pirâmide}} = \frac{2xc \cdot h}{3}.$$

$$\bullet V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot h_{\text{PRISMA}} \text{ Como a altura do prisma é } s, \text{ temos:}$$

$$V_{\text{PRISMA}} = \frac{c \cdot h}{2} \cdot s$$

$$V_{PRISMA} = \frac{chS}{2}$$

$$V_{SÓLIDO} = \frac{chS}{2} + \frac{2xch}{3}$$

Como  $c = s\phi$  e  $x = \frac{c-s}{2}$  teremos

$$V_{SÓLIDO} = \frac{s\phi \cdot (s/2) \cdot s}{2} + \frac{\cancel{2} \cdot \left(\frac{c-s}{\cancel{2}}\right) \cdot c \cdot \left(\frac{s}{2}\right)}{3}$$

$$V_{SÓLIDO} = \frac{s\phi}{4} + \frac{c \cdot (c-s) \cdot s}{6} \quad (\text{veja que sendo } c = s\phi \text{ e } \phi^2 - \phi = 1 \text{ tem-se } c(c-s) = s^2)$$

$$V_{SÓLIDO} = \frac{s^3\phi}{4} + \frac{s^2 \cdot s}{6}$$

$$V_{SÓLIDO} = \frac{6s^3\phi + 4s^3}{24}$$

O volume do dodecaedro será

$$V = V_{CUBO} + 6 \cdot V_{SÓLIDO}$$

$$V = (s\phi)^3 + \cancel{6} \cdot \left(\frac{6 \cdot s^3\phi + 4s^3}{\cancel{24}_4}\right)$$

$$V = s^3\phi^3 + \frac{\cancel{6} \cdot s^3\phi + 4s^3}{\cancel{4}_2}$$

$$V = s^3\phi^3 + \frac{3s^3\phi + 2s^3}{2}$$

$$V = \frac{2s^3\phi^3 + 3s^3\phi + 2s^3}{2}, \quad \text{Como } \phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi + 1)\phi = 2\phi + 1$$

$$V = \frac{2 \cdot s^3(2\phi + 1) + 3s^3\phi + 2s^3}{2}$$

$$V = \frac{4s^3\phi + 2s^3 + 3s^3\phi + 2s^3}{2}$$

$$V = \frac{7s^3\phi + 4s^3}{2}$$

$$V = s^3 \cdot \frac{(7\phi + 4)}{2}$$

Escrevendo de outra forma essa fórmula, teremos:

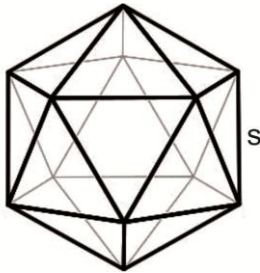
$$\text{Como } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{7\phi + 4}{2} = \frac{7 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 4}{2} = \frac{7 + 7\sqrt{5}}{2} + 4 = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}$$

Logo 
$$V = s^3 \cdot \left( \frac{15+7\sqrt{5}}{4} \right)$$

#### 4.4.5 – Cálculo da área e do volume do icosaedro regular

Figura 33: Icosaedro



##### Área:

Como o icosaedro regular é formado por vinte faces triangulares sua área será

$$A = 20 \cdot A_{\text{Triângulo Equilátero}} = 20 \cdot \left( \frac{s^2\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$A = 5s^2\sqrt{3}$$

onde  $s$  é a medida da aresta do icosaedro.

##### Volume

A demonstração, aqui apresentada, da fórmula para o cálculo do volume do icosaedro regular é essencialmente a mesma apresentada no artigo de Granja e Costa RPM nº 74 (2011).

O icosaedro é constituído por vinte tetraedros congruentes não regulares, onde para cada um deles, uma de suas faces é uma das faces a do icosaedro (um triângulo equilátero de lado  $s$ ) e o vértice oposto a esta face é o centro do icosaedro. A medida de cada uma das arestas laterais destes tetraedros é a metade da medida da maior diagonal do icosaedro e igual ao raio da esfera que lhe é circunscrita; A altura é à distância do centro do icosaedro a cada uma de suas faces.

Figura 34: Icosaedro regular

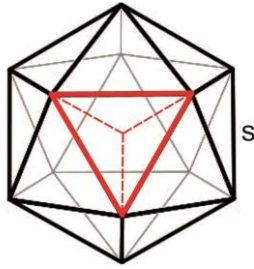
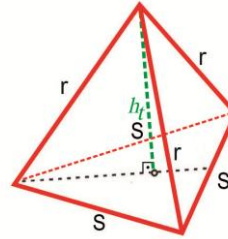


Figura 35: Tetraedro extraído do icosaedro regular



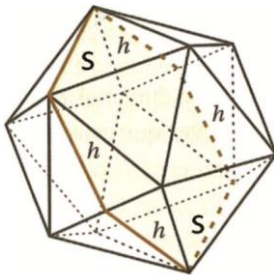
O volume do icosaedro será então,  $V = 20 \cdot V_{\text{tetraedro}}$  \*

- Cálculo do volume do tetraedro

Calcularemos a medida da altura  $h_t$  do tetraedro.

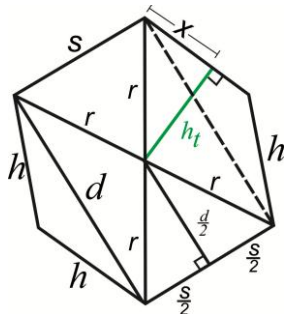
Inicialmente consideremos uma secção plana no icosaedro determinada a partir de um corte que divide o icosaedro ao meio através de dois vértices opostos. Essa secção é um hexágono onde dois de seus lados são arestas do icosaedro com medida igual a  $s$ , e os outros quatro são alturas de algumas das faces do icosaedro, com medida igual a  $h$ . A figura 37 mostra o hexágono.

Figura 36: Secção do hexágono



Visualizando os elementos do icosaedro através do hexágono, temos:

Figura 37 Secção hexagonal



Onde:

$r$  é o raio da esfera circunscrita ao icosaedro

$s$  é a aresta do icosaedro

$h$  é a altura da face do icosaedro

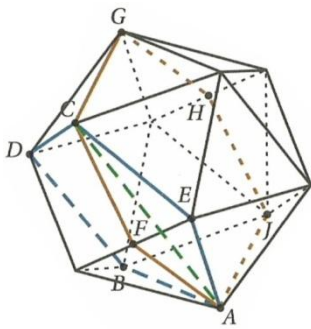
$d$  é uma das diagonais do hexágono que é igual a diagonal do pentágono regular

$h_t$  é a altura do tetraedro ou raio da esfera inscrita ao tetraedro

Consideremos agora outra secção plana no icosaedro, representado na figura 38 por ABDCE. Veja que ABDCE é um pentágono regular, que é a base de uma pirâmide pentagonal regular cujas faces laterais são faces do icosaedro.

A intersecção do pentágono ABDCE com o hexágono AFCGHJ é o segmento AC que é uma diagonal do pentágono, cujo valor já calculado anteriormente (página 34), é  $d = s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Figura 38: Intersecção do hexágono com o pentágono



Usando o teorema de Pitágoras, figura 37, para determinar a medida de  $h_t$ , temos:

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \text{ e como } d = s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \text{ temos } r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left[\frac{(1+\sqrt{5})s}{4}\right]^2 \quad (\text{I})$$

$$r^2 = h_t^2 + x^2 \quad (\text{II})$$

Lembrando que a intersecção do raio da esfera inscrita ( $h_t$ ) com a face do icosaedro (triângulo equilátero) é o baricentro da face, temos que  $x = \frac{2h}{3}$  e  $h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Então por (II) } r^2 = h_t^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = h_t^2 + \left(\frac{s\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Fazendo (I) = (II), temos:

$$h_t^2 + \frac{s^2}{3} = \frac{s^2}{4} + \frac{(1+\sqrt{5}) \cdot s^2}{16}$$

$$h_t^2 = \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{3} + \frac{(6+2\sqrt{5}) \cdot s^2}{16}$$

$$h_t^2 = \frac{12s^2 - 16s^2 + 18s^2 + 6\sqrt{5}s^2}{48}$$

$$h_t^2 = \frac{14s^2 + 6\sqrt{5}s^2}{48}$$

$$h_t^2 = \sqrt{\frac{7s^2 + 3\sqrt{5}s^2}{24}}$$

$$h_t = \frac{s\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}$$

como  $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ , teremos:

$$h_t = \frac{s \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{6}}$$

$$h_t = \frac{s \cdot (3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$$

Então o volume do tetraedro será dado por;

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{\frac{s^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}}}{3} = \frac{s^3(3+\sqrt{5})}{48}$$

Por \*, temos que o volume do icosaedro regular será dado por:

$$V = 20 \cdot V_{\text{TETRAEDRO}}$$

$$V = 20 \cdot \frac{s^3(3+\sqrt{5})}{48}$$

$$V = \frac{5(3+\sqrt{5}) \cdot s^3}{12}$$

#### 4.5- Curiosidade sobre os volumes dos poliedros regulares

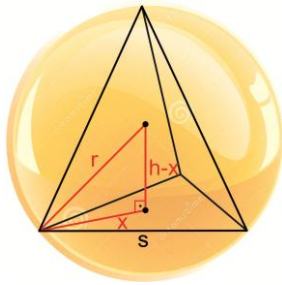
Nesta seção, responderemos a seguinte indagação: Qual dos cinco poliedros regulares de Platão, quando inscritos numa esfera de raio unitário, possui maior volume? A primeira vista pode parecer que o sólido com maior número de faces é o que tem maior volume. Ao final concluiremos que este não é o caso, o de maior volume é o que tem o maior número de vértices ou seja o dodecaedro regular.

Calcularemos o volume de cada um dos cinco poliedros de Platão em função do raio da esfera circunscrita. No que segue  $s$  representa a medida da aresta do poliedro,  $V$  seu volume e  $r$  o raio da esfera circunscrita.



a) Tetraedro regular inscrito numa esfera

Figura 39



Na figura,  $h$  é a medida da altura do tetraedro e  $x$  é a medida de  $\frac{2}{3}$  da altura da face

Sendo  $h = \frac{s\sqrt{6}}{3}$  e  $x = \frac{s\sqrt{3}}{3}$ , temos que:

$$r^2 = (h - r)^2 + x^2$$

$$r^2 = \left(\frac{s\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 + \left(\frac{s\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$s = \frac{2\sqrt{6}}{3} r$$

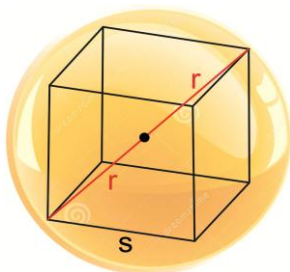
Fazendo  $r = 1$ , temos  $s = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ . Então seu volume será:

$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{12} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

b) Hexaedro regular inscrito numa esfera

Figura 40



Sendo  $2r$  a medida da diagonal do hexaedro, temos que:

$$2r = s\sqrt{3}$$

$$s = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

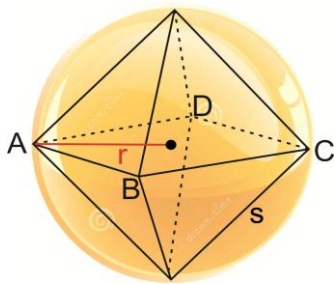
Fazendo  $r = 1$ , temos  $s = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Então seu volume será:

$$V = s^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

c) Octaedro regular inscrito numa esfera

Figura 41



Sendo  $r$  a medida da metade da diagonal do quadrado  $ABCD$ , temos que:

$$r = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

$$s = r\sqrt{2}$$

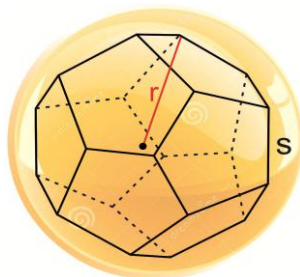
Fazendo  $r = 1$ , temos  $s = \sqrt{2}$ . Então seu volume será:

$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}$$

d) Dodecaedro regular inscrito numa esfera

Figura 42



Para o cálculo do volume do dodecaedro regular, lembremos que este pode ser decomposto em um cubo e seis sólidos geométricos congruentes. Usaremos o cubo obtido nesta decomposição para calcular a medida da aresta  $s$  em função da medida do raio  $r$  da esfera circunscrita.

Sendo a medida da aresta do cubo congruente a medida da diagonal  $d$  do pentágono regular (face do dodecaedro), temos que a medida do raio da esfera será congruente a medida da metade da diagonal do cubo, ou seja:

$$r = \frac{dcubo}{2}$$

$$r = \frac{d\sqrt{3}}{2} \left[ \text{lembrar que } d = s \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \right]$$

$$s = \frac{4r}{(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}$$

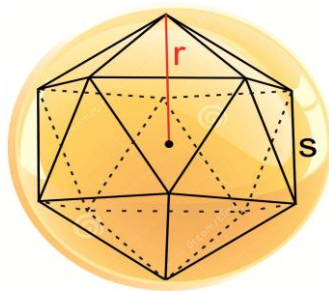
Fazendo  $r = 1$ , temos  $s = \frac{4}{(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}$ . Então seu volume será:

$$V = s^3 \left( \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right) = \left[ \frac{4}{(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}} \right]^3 \left( \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right)$$

$$V = \frac{2\sqrt{3}(5 + \sqrt{5})}{9}$$

e) Icosaedro regular inscrito numa esfera

Figura 43



Pela demonstração do cálculo do volume do icosaedro regular, temos:

$$r^2 = \left( \frac{s}{2} \right)^2 + \left[ \frac{(1 + \sqrt{5})s}{4} \right]^2$$

$$r = \frac{s\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$s = \frac{4r}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Fazendo  $r = 1$ , temos  $s = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ . Então seu volume será:

$$V = \frac{5(3 + \sqrt{5})s^3}{12}$$

$$V = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} \left( \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^3$$

$$V = \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3}$$

Pelos valores obtidos para os volumes dos cinco poliedros regulares de Platão é considerando a desigualdade:

$$\frac{8\sqrt{3}}{27} < \frac{4}{3} < \frac{8\sqrt{3}}{9} < \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3} < \frac{2\sqrt{3}(5+\sqrt{5})}{9}$$

Concluimos que o dodecaedro regular é o poliedro com maior volume. Com essa talvez isto justifique o "por que" de os gregos antigos ao associarem os cinco poliedros com os "elementos" primordiais empedoclianicos de todos os corpos materiais, o dodecaedro regular associava-se ao Cosmos (universo).

#### 4.6 - Poliedros Semiregulares

Falaremos agora sobre os poliedros semiregulares. São poliedros obtidos a partir dos poliedros regulares através de truncamentos.

Daremos a definição e, em seguida, mostraremos as figuras acompanhadas de dados referentes a cada um desses poliedros.

DEFINIÇÃO 5: Um poliedro convexo é semiregular se ele se cumpre uma das seguintes condições:

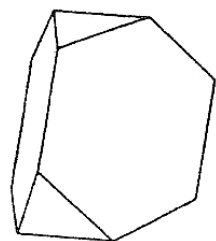
- i) Os ângulos sólidos são todos iguais entre si, mas as faces não são iguais, embora sejam polígonos regulares;
- ii) As faces são todas iguais entre si, mas os ângulos sólidos não são iguais.

Os poliedros que atendem a forma i) são chamados de poliedros semiregulares equiangulares ou poliedros arquimedianos, e os que atendem a forma ii) são chamados poliedros semiregulares equifaciais ou poliedros não-arquimedianos.

Sendo os poliedros semiregulares poliedros convexos, para estes poliedros, é válida a relação de Euler (Teorema 1). Usando esta relação é possível demonstrar que existem apenas treze poliedros semiregulares equiangulares e treze poliedros semiregulares equifaciais. Para detalhes ver (Rangel, 1982).

Listaremos abaixo os poliedros semiregulares equiangulares e os poliedros semiregulares equifaciais.

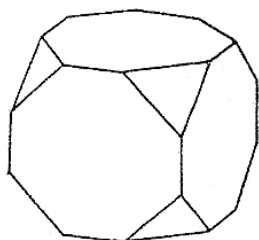
Figura 44: Poliedros Semiregulares Equiangulares



(1)

*Triaexagonal*

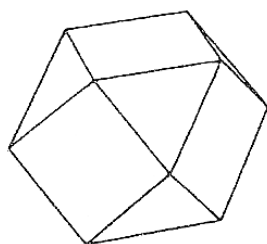
8 faces (4 triângulos e 4 hexágonos). 18 arestas, 12 vértices. 12 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um triângulo e dois hexágonos. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *dodecaedro triangular*



(2)

*Triaotogonal*

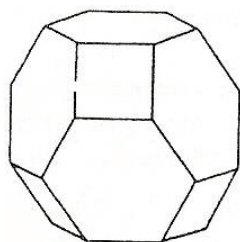
14 faces (8 triângulos e 6 otógonos). 36 arestas. 24 vértices. 120 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um triângulo e dois otógonos. Cada vértice tem três arestas. É o conjunto do *icositetraedro triangular*



(3)

*Triatetragonal*

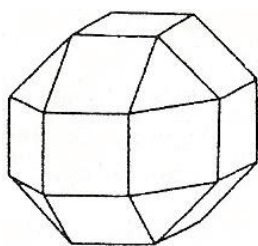
14 faces (8 triângulos e 6 quadrados). 24 arestas. 12 vértices. 30 diagonais. Os ângulos sólidos são tetraédricos, formados por dois triângulos e dois quadrados. Cada vértice tem quatro arestas. É o conjugado do *dodecaedro romboidal*.



(4)

*Tetraexagonal*

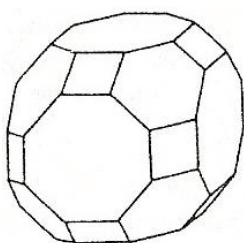
14 faces (6 quadrados e 8 hexágonos). 36 arestas. 24 vértices. 158 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um quadrado e dois hexágonos. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *icositetraedro triangular*



(5)

*Triatetragonal*

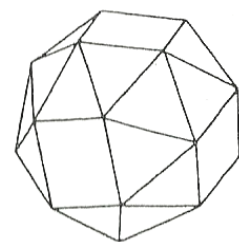
26 faces (8 triângulos e 18 quadrados). 48 arestas. 24 vértices. 192 diagonais. Os ângulos sólidos são tetraédricos, formados por um triângulo e três quadrados. Cada vértice tem quatro arestas. É o conjugado *icositetraedro trapezoidal*.



(6)

*Tetraexagonal*

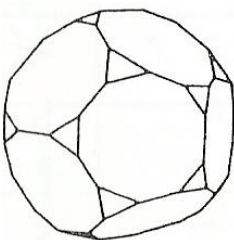
26 faces (12 quadrados, 8 hexágonos e 6 otógonos). 72 arestas. 46 vértices. 840 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um quadrado, um hexágono e um otógono. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *hexacontraedro triangular*.



(7)

*Triatetrogonal*

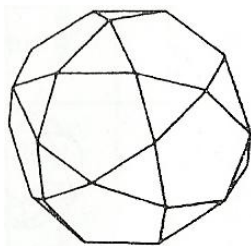
38 faces (32 triângulos e 6 quadrados). 60 arestas. 24 vértices. 204 diagonais. Os ângulos sólidos são pentaédricos, formados por um quadrado e quatro triângulos. Cada vértice tem cinco arestas. É o conjugado do *icositetraedro pentagonal*.



(8)

*Triadecagonal*

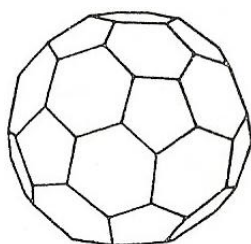
32 faces (20 triângulos e 12 decágonos). 90 arestas. 60 vértices. 1260 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um triângulo e dois decágonos. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *hexacontaedro triangular* (antigo *triakis octahedron*).



(9)

*Triapentagonal*

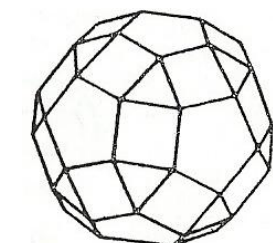
32 faces (20 triângulos e 12 pentágonos). 60 arestas. 30 vértices. 315 diagonais. Os ângulos sólidos são tetraédricos pentágonos. Cada vértice tem quatro arestas. É o conjugado do *triacontaedro romboidal*.



(10)

*Pentaexagonal*

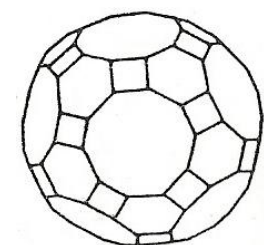
32 faces (12 pentágonos 20 hexágonos). 90 arestas. 60 vértices. 1440 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um pentágono e dois hexágonos. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *hexacontraedro triangular*



(11)

*Triatetrapentagonal*

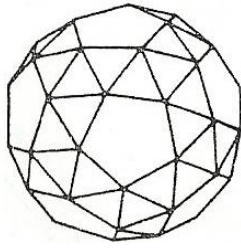
62 faces (20 triângulos, 30 quadrados e 12 pentágonos). 120 arestas. 60 vértices. 1530 diagonais. Os ângulos sólidos são pentaédricos, formados por um triângulo e três quadrados. Cada vértice tem quatro arestas. É o conjugado do *hexacontaedro trapezoidal*.



(12)

*Tetrapentadecagonal*

62 faces (30 quadrados, 20 hexágonos e 12 decágonos). 180 arestas. 120 vértices. 6300 diagonais. Os ângulos sólidos são triédricos, formados por um quadrado, um hexágono e um decágono. Cada vértice tem três arestas. É o conjugado do *ecatomicosaedro triangular* .

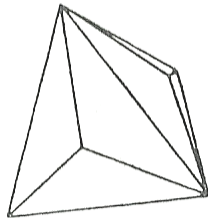


(13)

### *Triapentagonal*

92 faces (80 triângulos e 12 pentágonos). 150 arestas. 60 vértices. 1560 diagonais. Os ângulos sólidos são pentaédricos, formados por quatro triângulos e um pentágono. Cada vértice tem cinco arestas. É o conjugado do *hexacontaedro pentagonal*.

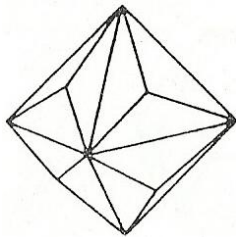
Figura 45: Poliedros Semiregulares Equifaciais.



(1)

### *Dodecaedro triangular*

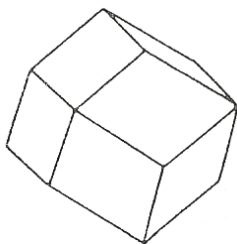
Outros nomes: *tritetraedro* ou *tetratriedro*. 12 faces (triângulos isósceles). 18 arestas. 8 vértices. É um tetraedro regular piramidado. As arestas do tetraedro são os lados maiores das faces do dodecaedro triangular. 10 diagonais. 4 vértices com três arestas. 4 vértices com 6 arestas. É o conjugado do *triaexagonal*



(2)

### *Icositetraedro triangular*

Outros nomes: *octatriedro* ou *trioctaedro*. 24 faces (triângulos isósceles). 36 arestas. 14 vértices. É um octaedro regular piramidado. As arestas do octaedro são os lados maiores das faces do icositetraedro triangular. 55 diagonais. 8 vértices com três arestas. 6 vértices com 8 arestas.



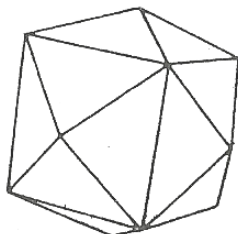
(3)

### *Dodecaedro romboidal*

12 faces (losangos). 24 arestas. 14 vértices. Tanto pode ser considerado um cubo piramidado, como um octaedro regular piramidado. Considerando-o como cubo piramidado, as arestas do cubo são as diagonais menores dos losangos, e considerando-o como octaedro piramidado, as arestas do octaedro são as diagonais maiores dos



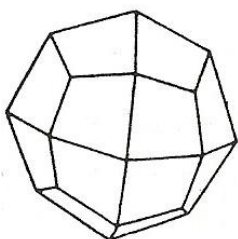
losangos. 31 diagonais. 8 vértices com 3 arestas. 6 vértices com 4 arestas.



(4)

*Icositetraedro triangular*

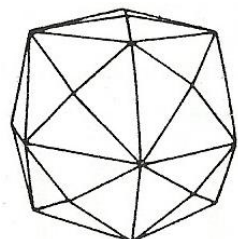
Também chamado *Tetraexaedro*. 24 faces (triângulos isósceles). 36 arestas. 14 vértices. É um cubo piramidado. As arestas do cubo são os lados maiores das faces do icosaedro triangular. 55 diagonais. 6 vértices com 4 arestas. 8 vértices com 6 arestas.



(5)

*Icositetraedro trapezoidal*

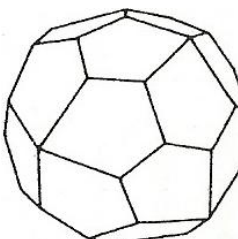
24 faces (trapezoides). 48 arestas. 26 vértices. É um cubo octaedro piramidado. As arestas do cubo octaedro são as diagonais menores das faces do icositetraedro trapezoidal. 229 diagonais. 8 vértices com 3 arestas. 18 vértices com 4 arestas.



(6)

*Hexaoctaedro triangular*

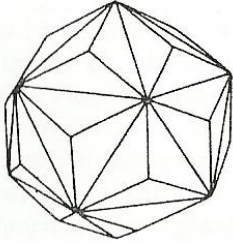
48 faces (triângulos escalenos). 72 arestas. 26 vértices. Lembra um dodecaedro romboidal com os losangos das faces reversos. 12 vértices com 8 arestas.



(7)

*Icositetraedro pentagonal*

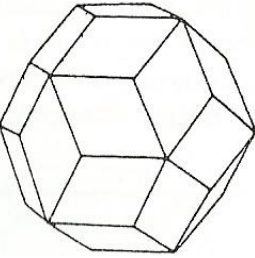
24 faces (pentágonos semirregulares). 60 arestas. 38 vértices. 523 diagonais. 32 vértices com 3 arestas. 6 vértices com 4 arestas.



(8)

*Hexacontaedro triangular*

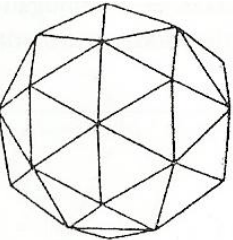
60 faces (triângulos isósceles). 90 arestas. 32 vértices. É um icosaedro regular piramidado. As arestas do icosaedro são os lados maiores das faces do hexacontaedro triangular. 306 diagonais. 20 vértices com 3 arestas. 12 vértices com 10 arestas.



(9)

*Triacontaedroromboidal*

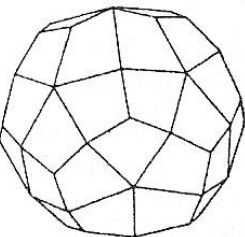
30 faces. (losangos). 60 arestas. 32 vértices. Tanto pode ser considerado dodecaedro regular piramidado, como icosaedro regular piramidado. Considerando-o como dodecaedro piramidado, as arestas do dodecaedro são as diagonais menores dos losangos, e considerando-o como icosaedro, são as diagonais maiores dos losangos. 372 diagonais. 20 vértices com 3 arestas. 12 vértices com 5 arestas.



(10)

*Hexacontaedro triangular*

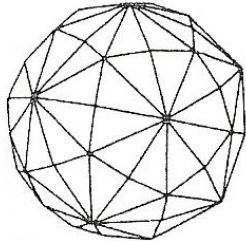
60 faces (triângulos isósceles). 90 arestas. 32 vértices. É um dodecaedro regular piramidado. As arestas do dodecaedro são os lados maiores das faces do hexacontaedro triangular. 406 diagonais. 12 vértices com 5 arestas. 20 vértices com 6 arestas.



(11)

*Hexacontaedro trapezoidal*

60 faces (trapezoides). 120 arestas. 62 vértices. É um dodecaicosaedro piramidado. As arestas do dodecaicosaedro são as diagonais maiores das faces do hexacontraedro trapezoidal. 1615 diagonais. 20 vértices com 3 arestas. 30 vértices com 4 arestas. 12 vértices com 5 arestas.



(12)

*Ecatomicosaedro triangular*

120 faces (triângulos escalenos). 180 arestas. 62 vértices. Lembra um triacontaedro romboidal com os losangos das faces reversos. 1 711 diagonais. 30 vértices com 4 arestas. 20 vértices com 6 arestas. 12 vértices com 10 arestas.



(13)

*Hexacontaedro pentagonal*

60 faces (pentágonos semirregulares). 150 arestas. 92 vértices. 3736 diagonais. 80 vértices com 3 arestas. 12 vértices com 5 arestas.

## 5- OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE POLIEDROS

### 5.1- A presença de formas poliédricas na natureza, astronomia, biologia, química e arquitetura.

É interessante observarmos como as formas poliédricas podem ser encontradas em nosso dia-a-dia. Cito algumas áreas onde essas formas podem ser encontradas.

#### - NATUREZA

Os alvéolos que compõem os favos de mel das abelhas são prismas hexagonais. Mas o porquê das abelhas construírem seus alvéolos em formas de prismas hexagonais, já que existem muitas outras formas tão interessantes quanto esta?

A escolha da base hexagonal é devido a essa forma fornecer a maior área dentre as três: triangular, quadrangular ou hexagonal. Como, quanto maior a área da base, maior será o

volume do prisma, a construção dos alvéolos em forma de prismas hexagonais utilizará a mesma quantidade de cera, mas com a obtenção de um maior volume.

Figura 46: Modelo de alvéolo de mel



Ainda na natureza encontramos algumas rochas que possuem o formato de um poliedro. São exemplos às águas-marinhas, o topázio, o quartzo e outros. Essas rochas são, em geral, utilizadas na fabricação de joias, pois além de belas elas possuem uma grande resistência.

Figura 47: Água-marinha (forma bruta e lapidada)



Figura 48: Topázio (forma bruta e lapidada)



Figura 49: Quartzo (forma bruta e lapidada)



## -ASTRONOMIA

Na a área da Astronomia, Kepler, no fim do século XVI, tentou construir um sistema baseado em sólidos geométricos que encaixassem as "esferas planetárias" a uma distância que permitisse uma escala exata das distâncias planetárias ao Sol.

Acreditou que uma geometria perfeita teria que conter os poliedros regulares conhecidos desde o tempo dos gregos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Ele usou os poliedros regulares numa imaginosa explicação sobre os movimentos dos astros.

Como naquela época só se conheciam seis planetas, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, Kepler se perguntava o porquê desse número. Por que não existiam outros, ou um número menor? Na sua imaginação concluiu que eram seis, pois como suas órbitas eram em volta do Sol (circulares, como no modelo proposto por Copérnico), eles estariam circunscritos em esferas que envolviam os cinco sólidos regulares de Platão.

Para Kepler, a órbita de Saturno, o mais distante dos planetas, estava inscrito num cubo. Neste se inseria outra esfera, contendo a órbita de Júpiter, ao qual se inscrevia um Tetraedro, e sobre este uma esfera com a órbita de Marte. O Dodecaedro se encaixaria perfeitamente entre Marte e a Terra. O Icosaedro entre a Terra e Vênus, e finalmente entre este e Mercúrio o Octaedro.

Ele explica o sistema planetário em sua obra intitulada: "Mysterium Cosmographicum".

Figura 50: Modelo astronômico de Kepler



Posteriormente, com estudo mais aprofundado, Kepler concluiu que o modelo da órbita circular não se adaptava à realidade.

## -BIOLOGIA

Na biologia, muitos micro-organismos possuem a forma de um icosaedro. No reino protista existem organismos que se assemelham a um icosaedro. Alguns vírus são agrupados quanto a sua morfologia e aí surgem os vírus poliédricos. Existem células cujo formato é de um poliedro. As figuras a seguir ilustram essas formas.

Figura 51: protista com forma de um icosaedro



Circogonia icosahedra  
Protistas radiolários

Figura 52: Células poliédricas e justapostas

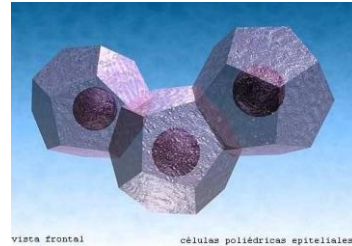
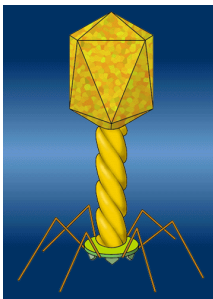


Figura 53: Vírus poliédricos



## -QUÍMICA

Algumas moléculas, em sua geometria, lembram formas poliédricas:

Figura 54:  
Geometria molecular octaédrica  
(hexafluoreto de enxofre – SF<sub>6</sub>)

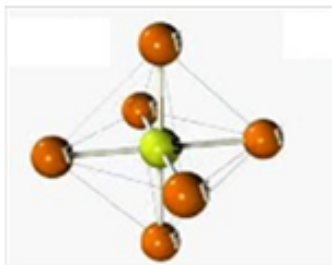


Figura 55:  
Geometria molecular tetraédrica/piramidal  
(metano – CH<sub>4</sub>)



As moléculas que apresentam geometria molecular piramidal e tetraédrica também apresentam semelhanças e diferentes características, ambas possuem o mesmo correspondente geométrico, um poliedro com quatro faces, mas são constituídas por um número diferente de átomos, além disso, a molécula tetraédrica não é, matematicamente falando, um tetraedro, mas lembra de sua estrutura básica.

Outro aspecto que remete aos poliedros na química são os fulerenos, formas alotrópicas do carbono, que pela sua composição é válida a Relação de Euler ( $V + F = A + 2$ ). Amostras obtidas após análises dessas estruturas possibilitou a identificação de fragmentos contendo 60 átomos de carbono, ao qual foi proposta uma estrutura semelhante a uma bola de futebol, apresentando 32 faces, 20 hexagonais e 12 pentagonais. Portanto, uma molécula de fulereno é um poliedro de átomos de carbono nos vértices, formado somente por faces pentagonais e hexagonais.

Figura 56: Modelo de molécula de fulereno

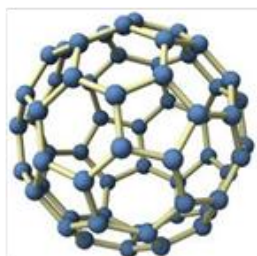


Figura 57: Bola de futebol



## -ARQUITETURA

É comum nos depararmos com construções que nos lembram poliedros, sendo a grande maioria delas na forma de paralelepípedos. Mas não é difícil encontrar outras formas.

As formas arquitetônicas poliédricas são notadas desde a antiguidade, como por exemplo as pirâmides do Egito. Sua construção foi através de empilhamentos de malhas de primas retos (blocos em forma de paralelepípedos) obtendo a forma poliédrica.

Figura 58: Pirâmides do Egito



As formas poliédricas podem dar um padrão de beleza, modernidade e funcionalidade para os espaços nas cidades. Construções como o Museu do Louvre e a Geodésica de São Paulo são exemplos dessa nova arquitetura poliédrica.

Figura 59: Museu do Louvre



Figura 60: Geodésica de São Paulo



Outros exemplos modernos desse tipo de arquitetura são os projetos Poliedro Habitável e Casa Poliedro, dos arquitetos Manuel Villa (colombiano) e Yasuhiro Yamashita (japonês), respectivamente. As duas obras foram construídas com o intuito de valorizar o metro cúbico e não o metro quadrado de terreno pequeno.

Figura 61: Poliedro habitável



Figura 62: Casa poliedro





## 5.2- A pouca ênfase dada aos poliedros nos livros de Ensino Médio

Ao longo dos anos, eu, juntamente com outros professores de matemática, verifiquei a deficiência e escassez do conteúdo teórico sobre poliedros nos livros adotados pelas escolas de ensino básico. Para exemplificar essa deficiência foi analisado sete livros, dentre os quais são bastante utilizados tanto pela rede pública como pela rede privada de ensino.

A tabela a seguir reflete parte desta análise.

Tabela 2: Elementos Importantes no Estudo dos Poliedros

<b>Elementos Importantes</b>	<b>Livro 1</b>	<b>Livro 2</b>	<b>Livro 3</b>	<b>Livro 4</b>	<b>Livro 5</b>	<b>Livro 6</b>	<b>Livro 7</b>
Definição: Poliedros	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO
Definição: Poliedros Convexos	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO	SIM	SIM
Definição: Poliedros não convexos	SIM	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
Demonstração da Relação de Euler	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Soma dos ângulos das faces	SIM	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	SIM	SIM
Demonstração da soma dos ângulos das faces	SIM	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Definição: Poliedros Regulares	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO	SIM	SIM
Definição: Poliedros de Platão	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO	SIM	SIM
Planificação dos poliedros de Platão	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
Demonstração do porque de somente 5 poliedros de Platão	SIM	NÃO	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM
Poliedros semirregulares	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
Área e volume dos poliedros de Platão	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO

Fonte: pesquisa bibliográfica

A tabela acima evidencia a deficiência de alguns livros em relação à apresentação de tópicos importantes sobre os poliedros.

## 6- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho aborda alguns tópicos que não são apresentados nos livros adotados no ensino médio. Isto evidencia a deficiência de tais livros, ao tempo que mostra que é possível fazer um estudo mais detalhado sobre Poliedros. Na verdade o assunto é amplo e merece um tratamento mais completo e rigoroso. Uma visão mais ampla no estudo dos poliedros certamente iria minorar a ojeriza que os estudantes têm da Geometria Espacial.

A principal motivação deste trabalho foi gerar um material mais amplo, mais rigoroso acerca dos poliedros. Foram definidos e classificados os vários tipos de poliedros. Uma atenção especial foi dada aos poliedros convexos. Demonstramos o Teorema de Euler e a existência de apenas cinco tipos de poliedros de Platão. Calculamos a área e o volume destes poliedros.

A principal conclusão é que, não só os tópicos acima, mas todos os conteúdos deste trabalho deveriam e poderiam ser inseridos no currículo do ensino médio de nossas escolas. Com eles a compreensão e a visualização das formas geométricas poderiam ser melhor entendidas.

## REFERÊNCIAS

ANTAR NETO, Aref et al. **Noções de Matemática: geometria plana e espacial**. 2 ed. Fortaleza, 2010. P. 290-299.

JÚNIOR, Cesário Antônio Neves; CORREIA, Ana Magda Alencar. **Habitar: Transitivo e intransitivo**. Florianópolis-SC. P. 4-8.

AZAMBUJA FILHO, Zoroastro. Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos. Teorema de Euler. . **Revista do Professor de Matemática** nº 03. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983. p. 15-17.

AZEVEDO, Manoel. **Geometria Euclidiana Espacial**. Fortaleza. 1999.

BARBOSA, J.C. A Contextualização e a modelagem na educação matemática do ensino médio. Disponível em: <<http://www.uefs.br/nupemm/enem2004b.pdf>>. Acesso em: 20 jun. 2013.

BARBOSA, Magnally Adakuy Gonçalves. **Explorando os poliedros com o uso do Poly pro 1.11**. Olinda: FUNESCO, 2012.

BARISON, Maria Bernardete. **Poliedros regulares em geometria descritiva**. Geométrica, v. 2 n. 19ª, 2007. Disponível em: <[www.mat.uel.br/geométrica](http://www.mat.uel.br/geométrica)>. Acesso em: 14 mar. 2013.

BOAVENTURA, Luana Lima. **História da Matemática**. São Carlos: USP, 2011.

BUCCHI, Paulo. **Matemática e cidadania**. v. 2. São Paulo: Escala Educacional, 2008. p. 252-254.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2011. p. 254-261.

Department of Mathematics, Rutgers University - Hill Center for the Mathematical Sciences. Disponível em: [www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedro](http://www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedro) Acesso: 21 de abr. de 2013.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 6 ed. São Paulo: Atual, 2005.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática uma nova abordagem: progressões**, v. 2. 2 ed. São Paulo: FTD, 2011. p. 219-224.

Astronomia On-line – Núcleo de Astronomia – Centro Ciência Viva do Algarve, disponível em : [http://www.ccvalg.pt/astronomia/historia/johannes\\_kepler.htm](http://www.ccvalg.pt/astronomia/historia/johannes_kepler.htm) Acesso: 21/11/2013.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza C. COSTA, Marianna Perrone M. A fórmula do volume do icosaedro. **Revista do Professor de Matemática nº 74**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. p. 41-45.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações**, 2: ensino médio. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 183.

IMENES, Luiz Márcio P. JAKUBOVIC, José. Poliedros, abelhas, arquitetura e... futebol. **Revista do Professor de Matemática nº 03**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983. p. 1-8.

JUSTINO, Ana Paula Rodrigues. Poliedros de Platão. Campina Grande, 2011.

KILHIAN, Kleber. Uma Demonstração Para a área do Pentágono. Disponível em: <<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/>>. Acesso em: 21 abr. 2013.

LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. p. 68-83.

NERI, Izaias Cordeiro. **Poly vs 1.11: Guia do Usuário**. São Paulo: 2007.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. p. 399-416.

PEREIRA, Hamilton Soares. **Poliedros Platônicos**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: 2011.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Poliedros**, Rio de Janeiro: LTC, 1982.

SARAIVA, José Cloves Verde. O poliedro regular de maior volume. **Revista do Professor de Matemática nº 49**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002, p. 15-21.

SARTORI, Milena Cristina. **História da Matemática: sólidos platônicos, razões e proporções**. São Paulo: 2011.

SÉRGIO, Paulo. **Fatos Matemáticos**. Disponível em: <<http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/>>. Acesso em: 21 abr. 2013.

LOURENÇO, Clean. **Brincando com a matemática**. Disponível em: <<http://cleanlourenco.blogspot.com.br/search?q=poliedros+e+a+natureza>>. Acesso em: 08 nov. 2013

SMOLE, Kátia Cristina Stocco et al. **Matemática: ensino médio**. v.2. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 238-243.

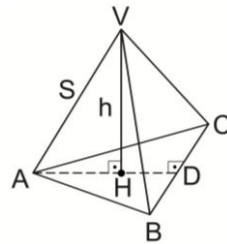
LIMA, Elon L. CARVALHO, Paulo Cezar P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. **A matemática do Ensino Médio**. v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. P. 255-294.

Costa, J. R. V. **Os astrônomos: Johannes Kepler**. Disponível em: <<http://www.zenite.nu/>>  
Acesso em: 21/11/2013.

## **ANEXOS**

## ANEXO 1: ALTURA DE UM TETRAEDRO REGULAR

Seja ABCV um tetraedro regular cuja medida da aresta é  $s$ , H o baricentro do triângulo equilátero (base) ABC e  $h$  a medida da altura VH



Sendo  $\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AD}$ , onde  $\overline{AD}$  é a altura do triângulo equilátero ABC, temos:

$$\overline{AD} = \frac{s\sqrt{3}}{2} \text{ e assim } \overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo AHV, temos:

$$\overline{VA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{VH}^2$$

$$s^2 = \left(\frac{s\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2$$

$$s^2 = \frac{s^2 \cdot 3}{9} + h^2$$

$$h^2 = s^2 - \frac{3s^2}{9}$$

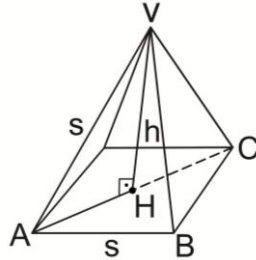
$$h^2 = \frac{9s^2 - 3s^2}{9}$$

$$h^2 = \frac{6s^2}{9}$$

$$h = \frac{s\sqrt{6}}{3}$$

**ANEXO 2: VOLUME DE UMA PIRÂMIDE RETA, DE BASE QUADRANGULAR REGULAR CUJA MEDIDA DE CADA UMA DAS ARESTAS É  $s$ .**

Seja ABCDV uma pirâmide reta quadrangular regular com todas as arestas de medida  $s$ ,  $h$  a medida da altura VH e AC a diagonal da base ABCD.



Sendo  $\overline{AH}$  é metade da diagonal da base (quadrado), temos  $\overline{AH} = \frac{s\sqrt{2}}{2}$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo VHA, temos:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$s^2 = h^2 + \frac{s^2 \cdot 2}{4}$$

$$h^2 = s^2 - \frac{2s^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4s^2 - 2s^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{2s^2}{4}$$

$$h = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Como o volume de uma pirâmide é dado pelo produto da área da base pela altura dividido por três, temos:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

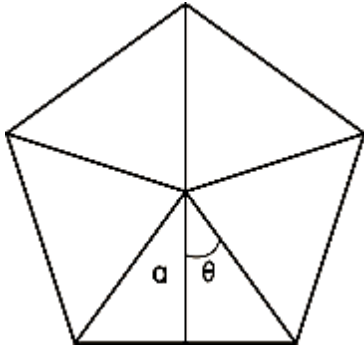
$$V = \frac{s^2 \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{6}$$



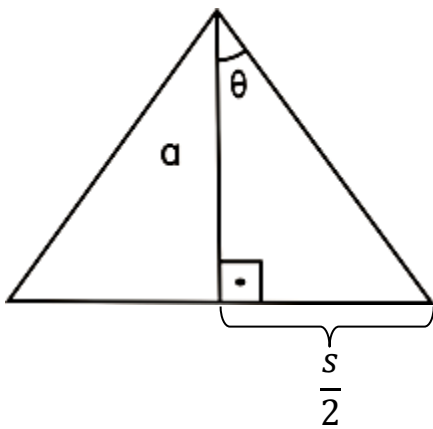
### ANEXO 3: ÁREA DE UM PENTÁGONO REGULAR CUJA ARESTA É $s$ .

Consideremos um pentágono regular cuja medida da aresta é  $s$ . Como o pentágono é formado por cinco triângulos isósceles congruentes, sua área é igual cinco vezes a área de um destes triângulos.



Na figura, o ângulo  $\theta$  é dado por  $360^\circ$  dividido por 10, isto é  $\theta = 36^\circ$ . Então  $\tan(\theta) = \frac{s/2}{\alpha} = \frac{s}{2\alpha}$ , onde  $\alpha$  é a medida da altura do triângulo isósceles. Segue que

$$\alpha = \frac{s}{2 \cdot \tan(36^\circ)}$$



Como a área de um triângulo é dada pelo semiproduto da base pela altura, então:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{s \cdot \frac{s}{2 \cdot \tan(36^\circ)}}{2} = \frac{s^2}{4 \cdot \tan(36^\circ)}$$

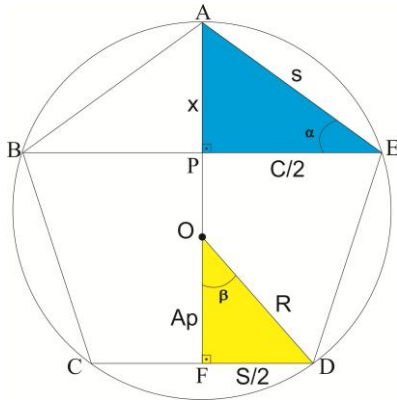
A área do pentágono é então

$$A_p = 5 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \tan(36^\circ)}$$

Como o valor da tg de  $36^\circ$  pode ser escrito na forma  $\frac{5}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$ , podemos então escrever a

fórmula da área do pentágono regular na forma:  $A_p = \frac{s^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$

Obs: Cálculo da  $\text{tg } 36^\circ$ .



Como  $\alpha = \beta = 36^\circ$  e os triângulos APE e OFD são semelhantes, podemos obter as seguintes relações:

$$\text{I) } \frac{s}{R} = \frac{x}{s/2} \quad \text{II) } x^2 = s^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \text{III) } \frac{Ap}{R} = \frac{c/2}{s}$$

Já sabemos que  $c = \frac{s(1+\sqrt{5})}{2}$ , então:

$$\bullet \quad x^2 = s^2 - \frac{s^2(1+\sqrt{5})^2}{16}$$

$$\boxed{x = s \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\bullet \quad \frac{Ap}{R} = \frac{c}{2s}$$

$$\boxed{Ap = \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}}$$

$$\bullet \quad \frac{s}{R} = \frac{s \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{s/2}$$

$$\boxed{s = \frac{R \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}$$

Dado que  $\text{tg} \beta = \text{tg} 36^\circ$ , temos na figura que:

$$\text{tg} \beta = \frac{s/2}{Ap}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{s}{2Ap}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{\frac{R \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}{2 \frac{R(1+\sqrt{5})}{4}}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{50-10\sqrt{5}}}{1-5} \quad (\text{elevando ambos os membros ao quadrado})$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \left(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{60-12\sqrt{5}-20\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{16} \quad (\text{fazendo } \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1)$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{60-12\sqrt{5}-20(\sqrt{5}-1)}{16}$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{80-32\sqrt{5}}{16}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Como é válida a igualdade  $\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$ , a área do pentágono regular foi encontrada usando a  $\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{5}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$ .

#### **ANEXO 4: UTILIZAÇÃO DE UM SOFTWARE PARA ESTUDO DOS POLIEDROS.**

Boa parte das dificuldades encontradas ao estudarmos Geometria Espacial, está em visualizar/identificar as formas geométricas. Algumas ferramentas computacionais, como o Poly Pro, podem facilitar a compreensão e a visualização das formas poliédricas.

Poly Pro é um programa para a investigação de formas poliédricas. É possível exibir as formas poliédricas de várias maneiras, entre elas destacam-se:

- a visualização tridimensional;
- o formato para recorte;
- e a forma planificada.

As imagens tridimensionais podem ser rodadas de forma interativa, ou montadas e desmontadas a partir do formato de recorte. O formato para recorte, permite produzir materiais concretos basta: imprimir; cortar em torno do seu perímetro; dobrar as das arestas; e finalmente, juntar as faces vizinhas.

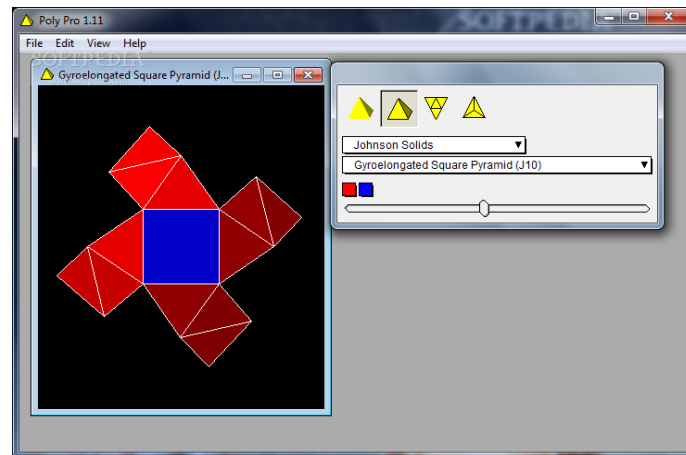
O Poly Pro exporta os modelos tridimensionais usando formatos de arquivo padrão para dados tridimensionais (extensões DXF, STL e modelos 3DMF). Depois de um modelo ser exportado, pode ser importado para outros softwares de modelagem de terceiros. Antes de se cadastrar, o Poly Pro só vai exportar modelos de cubos. Isso permite que você teste a saída com o software de modelagem que você usa.

Poly é um programa Shareware (programas que funcionam por tempo determinado ou apresentam limitações, depois precisam ser comprados). Pode ser encontrado no site <http://www.peda.com/poly/>, ainda não possui versão em português mas mesmo assim é bem simples de usar, seus comandos e menus são bem intuitivos. Com ele é possível estudar os poliedros fazendo algumas operações, tais como, planificar, girar, salvar como gif animado, e imprimir o desenho tanto em 3D quanto planificado. Estão disponíveis versões para Macintosh e Windows (95 ou superior).

Na instalação do programa o usuário poderá escolher o idioma que futuramente poderá ser trocado se assim o desejar. Para este trabalho foi escolhido a versão em espanhol, retirada do tutorial do Professor Izaias Cordeiro Néri (2007), que pode ser utilizado inicialmente como material de orientação para utilização do programa na sala de aula.

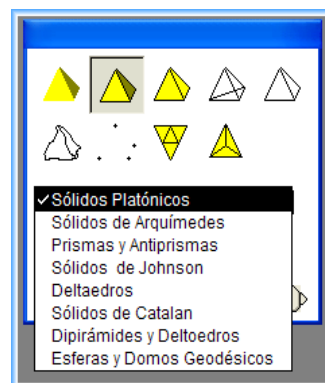
Sua interface é bem intuitiva sendo apresentada em duas janelas, uma apresenta o poliedro e a outra escolhe o poliedro a ser apresentado.

## Interface inicial do Poly



Após a seleção do sólido a ser apresentado, ele será exibido em uma janela de escolha do poliedro em uma das janelas principais da tela inicial do Poly, conforme a figura 51.

## Tela do Poly Pro



Neste programa os Poliedros estão classificados em:

- Sólidos Platônicos;
- Sólidos de Arquimedes;
- Prismas e Anti-Prismas;
- Sólidos de Johnson;
- Deltaedros;
- Sólidos de Catalan;
- Dipirâmides e Deltoedros;
- Esferas e Domos Geométricos.