UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU PELO MÉTODO GEOMÉTRICO

LEANDRO GUIMARÃES FERREIRA BEZERRA

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU PELO MÉTODO GEOMÉTRICO

LEANDRO GUIMARÃES FERREIRA BEZERRA

Sob a Orientação do Professor

Pedro Carlos Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Seropédica, RJ

Setembro de 2013

UFRRJ / Biblioteca Central / Divisão de Processamentos Técnicos

516

B574r Bezerra, Leandro Guimarães Ferreira, 1986-

T Resolução de equações do segundo grau pelo método geométrico / Leandro Guimarães Ferreira Bezerra. – 2013.

48 f.: il.

Orientador: Pedro Carlos Pereira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2013.

Bibliografia: f. 48.

1. Geometria – Teses. 2. Equações – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Pereira, Pedro Carlos. II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LEANDRO GUIMARÃES FERREIRA BEZERRA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/09/2013

Pedro Carlos Pereira

Pedro Carlos Pereira

Doutor em Educação Matemática – UFRRJ

(Orientador)

Orlando dos Santos Pereira

Orlando dos Santos Pereira

Doutor em Matemática – UFRRJ

Gabriela S Barbosa

Gabriela dos Santos Barbosa

Doutora em Educação Matemática – FEBF/UERJ

Dedico este trabalho a minha família, em especial à minha esposa Lana e ao meu filho Gabriel que estão sempre comigo para todos os momentos e são motivos de inspiração para a vida.

AGRADECIMENTOS

À minha família que mostram sempre compreensíveis aos momentos que atravesso prestando apoio e dando amor durante o período extra que o curso exigiu.

Aos amigos que participaram juntos deste curso com sábados sempre agradáveis. Em destaque os companheiros Jorge e Victor que lideram o grupo mantendo-o unido e forte. E ao Magno com inúmeras caronas.

Aos professores que nos lecionaram neste curso com muita competência passando o que de melhor podiam.

Ao orientador Professor Dr. Pedro Carlos Pereira que muito me ajudou no desenvolvimento deste trabalho e pelas mensagens humanizadas da matemática que passava em suas aulas.

RESUMO

BEZERRA, Leandro Guimarães Ferreira. R**esolução de Equações do Segundo Grau pelo Método Geométrico, 2013** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2013.

Este trabalho tem como objetivo discutir a utilização da resolução das equações do segundo grau utilizando o método geométrico. Para isso, foi feita uma pesquisa de como isto é assimilado por alunos que desconheciam tal método e por professores regentes no ensino fundamental da rede pública do Rio de Janeiro, para tentar evidenciar se este método é mais satisfatório que o método algébrico desenvolvido no Brasil como fórmula Bhaskara.

Palavras-chave: método geométrico, equação do segundo grau.

ABSTRACT

BEZERRA, Leandro Guimarães Ferreira. **Solving Quadratic Equations by Geometric Method**. Dissertation (Professional Master in Mathematics). Mathematics Institute, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2013.

This paper aims to discuss the use of the resolution of quadratic equations using the geometric method. For this, research was done on how this is assimilated by students who were unaware of such a method and school teachers in the public elementary schools of Rio de Janeiro, to try to show this method is more satisfactory than the algebraic method developed in Brazil as Bhaskara's formula.

Keywords: geometric method, quadratic equation.

ÍNDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 - MOTIVAÇÃO

Muitos assuntos assombram o alunado em sua vida acadêmica. Os que sempre estão no topo são os que pertencem ao campo de estudo da Matemática. A lida com os assuntos mais abstratos como o uso de incógnitas (desconhecidos) e variáveis, ou seja, quando aparecem letras no meio dos números causam desconforto, cria barreiras e certa aversão no estudo de Matemática. Para tornar o processo de aprendizado mais atraente e facilitador deste processo diversas estratégias pedagógicas têm sido elaboradas para este fim. Estudaremos aqui um caso específico que é a resolução de equações do 2º grau com uma abordagem geométrica, sendo uma alternativa para o sucesso dos alunos perante este assunto, haja vista que o ensino deste assunto no Brasil é dominado pela fórmula de Bhaskara.

Qual a contribuição desse assunto para sua formação?

Com a disponibilidade de recursos que surgem para sanar dificuldades do processo de ensino aprendizagem é preciso ter o cuidado de ter diferentes olhares para que possa ter cada vez mais abordagens a determinado assunto. É preciso explorar ao máximo os desdobramentos e argumentações dos assuntos que são ensinados nas escolas. Incluir os fatos históricos nas aulas, não somente as datas que os fatos aconteceram, mas sim, pelo que ocorreu na época dos fatos, qual o contexto que estava inserido. Informar qual a sociedade que promoveu a descoberta, o que pode ter influenciado, saber e discutir os aspectos culturais e filosóficos determinantes e influenciadores ao estudo de determinados assuntos.

Promover a reflexão de determinados assuntos no planejamento de uma aula é fundamental para aumentar o sucesso do aprendizado. Atualmente, esta relação de ensino aprendizado tem sido fundamentada nas “imposições” do que é apresentada no material didático que são escolhidos para serem utilizados em nossas escolas e para cumprir com o que já está apresentado nestes materiais não é feito outro tipo de abordagem.

Assim para a minha vida profissional, por exemplo, é necessário que atitudes de repensar o ensino de assuntos como o ensino da resolução de equações de segundo grau possam ser frequentes e o mais importante de planejar é o replanejamento dos diferentes assuntos que embasam o estudo de matemática já que atuo na educação básica.

Qual a contribuição desse assunto para a formação do aluno?

O aluno que hoje tem cada vez mais acesso a diferentes tipos de tecnologias, que se superam a cada dia que passa e tende a esperar que a escola também se atualize, se modernize. Afinal a tecnologia não está apenas nos aparelhos que se compram para casa como um computador, notando que os celulares estão cada vez mais poderosos e são companhia de um dia inteiro onde quer que se vá.

Com esta carga de inovação que é presente no cotidiano destas pessoas é possível pensar que qualquer assunto também possa sofrer alterações, mas no caso da matemática, podem-se oferecer diferentes abordagens, fazer com que os assuntos, as matérias não fiquem engessadas, não sendo necessário seguir a risca determinada fórmula. Há desdobramentos algébricos e geométricos para resolver os mais diferentes problemas apresentados no campo da matemática.

Além disso, fazer com que observando as variações de abordagens que se apresentam devido ao conjunto lógico que a matemática obedece é possível mostrar que as deduções observadas e conhecimentos já estabelecidos possam fazer com que ele seja “autor” de seu conhecimento e não um mero agregador de informações passadas a ele.

Qual a contribuição desse assunto para a escola?

Não é preciso inventar nada para que tenhamos diferentes alternativas de ensino em nossas escolas, é preciso que sejam feitos estudos dos assuntos em diferentes estratégias de ensino dos assuntos a serem apresentados para o conhecimento dos alunos, seja na área da geografia, letras, ciências, matemática ou qualquer outra. A Matemática possui este aspecto de ser formada por estruturas lógicas, o que permite que diferentes caminhos levem a um mesmo resultado. Os registros da história da matemática mostram que o conhecimento deste assunto surgiu da necessidade de atender a necessidades que surgiam na época, tais como a medição de terrenos, a repartição de produção e a medição das quantidades envolvidas nos casos como medidas de áreas. O desenvolvimento da álgebra surgiu para atender a geometria que gerava os problemas práticos no cotidiano das sociedades e devemos utilizar nas escolas a união destes nem tão diferentes métodos matemáticos.

2 - ASPECTOS HISTÓRICOS

As ideias que surgem para determinar soluções que envolvem matemática são respostas que são esperadas para sanar uma necessidade de uma sociedade, ou parte dela. Atualmente podemos notar, por exemplo, o uso de equações para desenvolver melhorias nas mais diferentes áreas: na aviação, na indústria bélica, na medicina. A teoria das probabilidades que são necessárias para desenvolver cálculos de operadoras de seguro, otimização do acompanhamento de produção industrial, controle de tráfego. Enfim, as ideias matemáticas surgem na necessidade de resultados esperados na solução do cotidiano da humanidade. Com isso, temos que tratar os estudos matemáticos analisando também o período em que ele foi desenvolvido, para que se possa entender os motivos destes estudos. E assim por diante teremos a cada tentativa de aplicação de uma teoria o desenvolvimento da mesma, um novo pensador (pesquisador) para uma mesma teoria pode dar resultado diferente, enxergar algo novo não notado anteriormente.

A importância de ter o referencial histórico que permeou os pensadores no desenvolver de seus trabalhos fica evidentemente necessário para o entendimento de suas teorias. Para o estudo da resolução das equações quadráticas vamos ver alguns métodos de resolução desenvolvidos na antiguidade por alguns povos que tiveram consideráveis e importantes produções matemáticas conforme apresenta (BOYER, 1974).

2.1 - MESOPOTÂMIA

A população que vivia na região do Oriente Médio, entre os vales dos rios Tigre e Eufrates, atualmente a região pertencente ao Iraque, deixaram por herança uma grande quantidade de tabletes de barro cozido com escrita cuneiforme, tipo de inscrição que foi mais resistente que a deixada pelos egípcios através dos papiros, que foram preservadas em absoluta menor quantidade. Dentre estes, destacam-se tabletes com inscrições que envolvem matemática. Pelos materiais que eram possíveis para as inscrições no barro, estes tiveram certa influência na forma de representar os números. Os numerais já eram escritos num sistema posicional de base decimal, que é usado com muita eficiência ate os dias de hoje, junto a uma base sexagesimal. Para representar de 1 a 59, números decimais, para números superiores usavam as potências de 60. Deste modo, usando a notação atual, o número 12 15 48 = $12x60^2 + 15x60 + 48 = 44148$. Porém, por uma análise contextual da situação descrita nos problemas analisados nos registros históricos há como fazer a diferenciação de situações em que um mesmo numeral representa um número diferente, pois devido a ligeira separação dos números para indicar uma nova classe de números na potenciação da base 60 verificou-se que não eram apenas números “naturais” e também frações na base 60, ou seja, 12 15 48 pode representar $12x60^2 + 15x60 + 48$ ou $12x60 + 15 + 48x60^{-1}$ ou ainda $12 + 15x60^{-1} + 48x60^{-2}$. Portanto só o estudo da situação pode situar a representatividade do número, este povo desenvolveu avançado conhecimento no que diz a representação posicional numérica e as representações de frações.

Nos registros mesopotâmicos há um algoritmo de resolução de equações do segundo grau. Feito este que foi atribuídos a matemáticos posteriores como o grego Arquitas (428 – 365 a.C.) ou Heron de Alexandria (aproximadamente 100 d.C.), só que é mais famoso como algoritmo de Newton (1643 – 1727). Importante resultado é um método de resolução de equações do segundo grau, com três termos, habilidade que não foi bem desenvolvida pelos egípcios. Devido a não manipulação dos números negativos as equações quadráticas da forma $x^2 + bx + c = 0$ não eram solucionadas, pois equações desta forma possuem raízes negativas, observando o fato que b e c são maiores que 0. Assim, os registros mostram resoluções para equações de grau 2 das formas

i) $x^2 + bx = c$
ii) $x^2 = bx + c$
iii) $x^2 + c = bx$, com $b,c > 0$ nos três casos.

As equações do primeiro tipo eram resolvidas com a seguinte fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$. As do segundo tipo por $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$. Para as do terceiro tipo eram determinado seguindo um algoritmo descrito numa tabela cuneiforme de Yale que pede a solução de um sistema que envolve a soma e o produto entre dois números que são equivalentes a equação do terceiro tipo. Portanto, apresentou-se o seguinte, seja $\boldsymbol{xy = a}$ e $\boldsymbol{x + y = b}$. Com isso, determinar $\boldsymbol{(x - y)^2 = b^2 - 4a}$. Então calcule $\frac{x+y}{2}$ e $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Após isso, calcular $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$ e $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - xy$. Daí, as raízes serão dadas por $\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)$ e $\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Um grande trunfo conseguido com essas resoluções de equações do segundo grau foi o fato de dominarem uma técnica substituição algébrica trocando *ax* por *y.* Ou seja,

i) $ax^2 + bx = c \Rightarrow (ax)^2 + b(ax) = ac \Rightarrow y^2 + by = ac$

ii) $ax^2 = bx + c \Rightarrow (ax)^2 = b(ax) + ac \Rightarrow y^2 = by + ac$

iii) $ax^2 + c = bx \Rightarrow (ax)^2 + ac = b(ax) \Rightarrow y^2 + ac = by$.

Desenvolveram um método algébrico eficaz para determinar raízes das equações quadráticas que eram conhecidas por eles, considerando que os valores negativos eram desconsiderados por eles.

2.2 - CHINA

A China também desempenha papel importante na matemática, seja no campo da curiosidade com os hoje conhecidos quadrados mágicos, na resolução de sistemas lineares com a utilização de operações elementares que figuram no livro Os nove capítulos, seu sistema decimal, o ábaco e a lida com os números negativos mesmo que não os reconhecessem como resultado de uma operação, dentre outros fatores.

Para o trato das equações do segundo grau destaca-se o trabalho de Chu Shi-chieh no que apresenta no livro Ssu-yüan yü-chien de 1303 que trabalha equações de grau até quatorze. Método chamado de fan-fa determina por meio de substituições algébricas a partir de um valor aproximado de uma raiz positiva da equação. Apresentou a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$. Percebendo que $x = 19$ era um valor aproximado da raiz que estaria entre 19 e 20 aplicou a substituição algébrica proposta pelo método fan-fa fazendo $x = y + 19$. Com a substituição obteve a equação $y^2 + 290y - 143 = 0$ com raiz aproximada $y = \frac{143}{291}$. Então a raiz seria $19\,\frac{143}{291}$. Valor que substituindo na equação utilizando uma calculadora se distancia de 0 por aproximadamente 0,25 fazendo com que fique muito evidenciado a ótima aproximação decimal fornecida pelo autor da resolução. O método chinês desenvolvido foi capaz de minimizar o erro de cálculo da raiz da equação do segundo grau por meio de substituição algébrica que garante uma equação equivalente a primeira fazendo com que seu valor fique mais próximo do real.

2.3 - ÍNDIA E ORIENTE MÉDIO

Al-Khowarizmi foi um importante matemático que foi responsável pela tradução do hindu para o árabe do sistema de numeração hindu e mesmo dando crédito aos autores ele ficou conhecido como criador deste sistema e com a sonoridade de seu nome batizou algo muito familiar a Matemática, os algarismos. Outro nome muito pertinente à matemática é referência a sua grande obra intitulada *Al-jabr wál muqabalah*, assim ficando álgebra. Um importante método de solução das raízes de equações de grau 2 é o proposto por ele ao resolver a equação $x^2 + 10x = 39$. Para isso, ele desenhou um quadrado de área x^2 e consequentemente lado x.

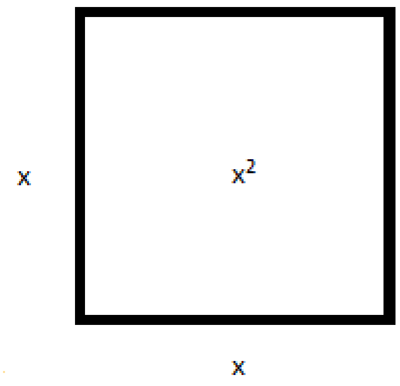


Figura 1 Quadrado de área x²

Sobre os lados do quadrado completou 4 retângulos que possuíam 2,5 como medida de sua segunda dimensão totalizando assim 10x de área total.

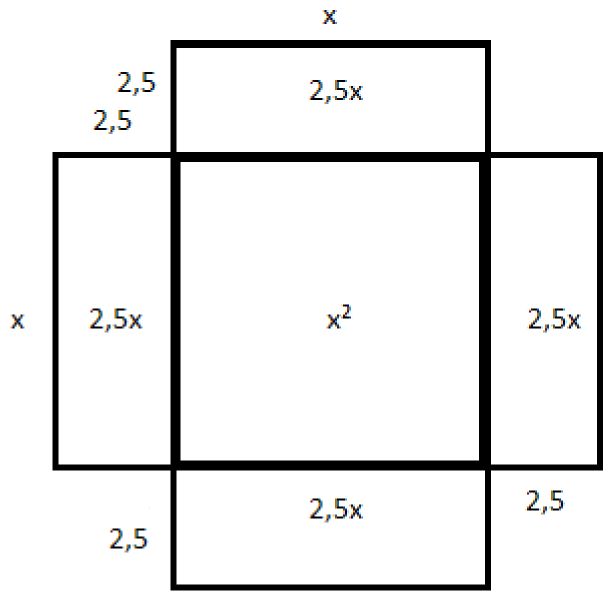


Figura 2 Figura de área $x^2 + 10x$

Para completar um quadrado acrescentou 4 quadrados de lado 2,5, totalizando uma área de $x^2 + 10x + 25$ ficando equivalente a um quadrado de área 64. Assim igualando as medidas dos quadrados equivalentes obteve $x + 5 = 8$ e então $x = 3$.

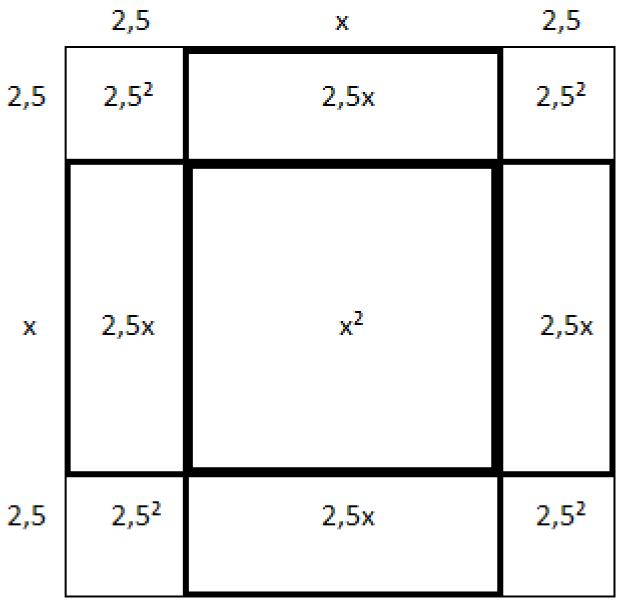


Figura 3 Quadrado de área $x^2 + 10x + 25$

Este método também pode ser desenvolvido dividindo a área retangular representada pelo monômio de primeiro grau em dois retângulos de mesma área e desenvolvendo um pensamento análogo ao anterior.

3 - PCN

Os PCN defendem o uso da história da matemática no ensino devido ao caráter avaliativo de como determinados estudos podem ter sido desenvolvidos considerando o povo que o desenvolveu. Povo este que está inserido em uma gama de acontecimentos, política, segurança, manutenção da sociedade, comércio, desafios cotidianos que precisam desenvolver minimamente ideias e teorias para sanar qualquer dificuldade que o assole e desenvolver melhorias para servir a população ou a apenas alguns privilegiados, sendo assim é preciso saber o que, quando e onde vivia um estudioso para poder pensar sobre as razões de poder fazer um trabalho, desenvolver uma teoria. O aspecto humano e social acaba sendo preponderante na análise de todo assunto, não há desenvolvimento sem interação, a reclusão dificulta o desenvolver de novas ideias. O debate, a cooperação, a contradição faz com que a reflexão exista promovendo a melhoria e o surgimento de ideias.

A interdisciplinaridade que deve estar presente no desenvolvimento do processo ensino aprendizado no quarto ciclo do ensino fundamental acaba perdendo força quando o ensino de álgebra acaba levando a teorias mais abstratas com argumentos mais mecânicos que distanciam os pensamentos de situações cotidianas, pois apesar de podermos ter situações aritméticas que podem envolver um ou mais valor desconhecido não se encontra claramente no cotidiano x, y ou o z por aí. Portanto o processo cognitivo do aluno tem que ser desenvolvido com o norteamento crítico dos assuntos abordados. É preciso que ele descubra o x, y ou o z escondido nas situações que os possa utilizar, além disso, há também a necessidade de que no ensino-aprendizado diferentes pontos de vista possam discutidos, um caso que merece atenção é a aproximação, sempre que possível, do campo algébrico e do campo geométrico. Esta aproximação pode elucidar situações a fim de desenvolver pensamentos abstratos e garantir maior poder de argumentação por parte de quem tem o olhar voltado a diferentes abordagens para um mesmo assunto.

Os objetivos da matemática para o quarto ciclo do ensino fundamental definido nos PCN (BRASIL, 1998), podemos destacar os que envolvem o campo algébrico e o geométrico conforme apresentado abaixo:

“Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades- , identificando as equações, inequações e sistemas;
- resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

• Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;
- obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).”

Para o estudo que é proposto nesta dissertação utilizamos as três competências acima, que são o pensamento algébrico e geométrica, e a métrica. Desenvolver uma equação do segundo grau no campo algébrico e geométrico utilizando medidas de áreas.

E consoante as atitude propostas nos PCN podemos destacar:

- Predisposição para usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos.
- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Interesse em comparar diferentes métodos e processos na resolução de um problema, analisando semelhanças e diferenças entre eles e justificando-os.
- Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise.
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- Interesse em dispor de critérios e registros pessoais para emitir um juízo de valor sobre o próprio desempenho, comparando-o com o dos professores, de modo que se aprimore.

Analisando estas atitudes esperadas para o quarto ciclo do ensino fundamental podemos perceber a preocupação na interação algébrica-geométrica, pois propõe que sejam desenvolvidos processos de comparação e de escolha de diferentes métodos e pensamentos de resolução de um problema. Para que esta comparação e escolha tenha sucesso por parte do aluno é preciso que ele tenha um conhecimento que proporcione a ele perceber a equivalência entre processos a serem trabalhados, o que pode o ajudar ou não no seu desenvolvimento crítico de um problema.

Para sanar problemas de medição de áreas foram desenvolvidas as equações do segundo grau, devido ao seu aspecto bidimensional (altura e largura ou comprimento e largura). Sendo assim, diferentes povos ao longo da história desenvolveram técnicas para resolver situações que eram solucionadas por meio de equações do segundo grau. A descoberta deste valor desconhecido que determinava a medida do lado de uma área a ser construída era fundamental para que fosse possível demarcar territórios, fazer construções, resolver problemas que serviam à sociedade e ao governo. E estas situações estavam presentes no contexto social, político, cultural e religioso.

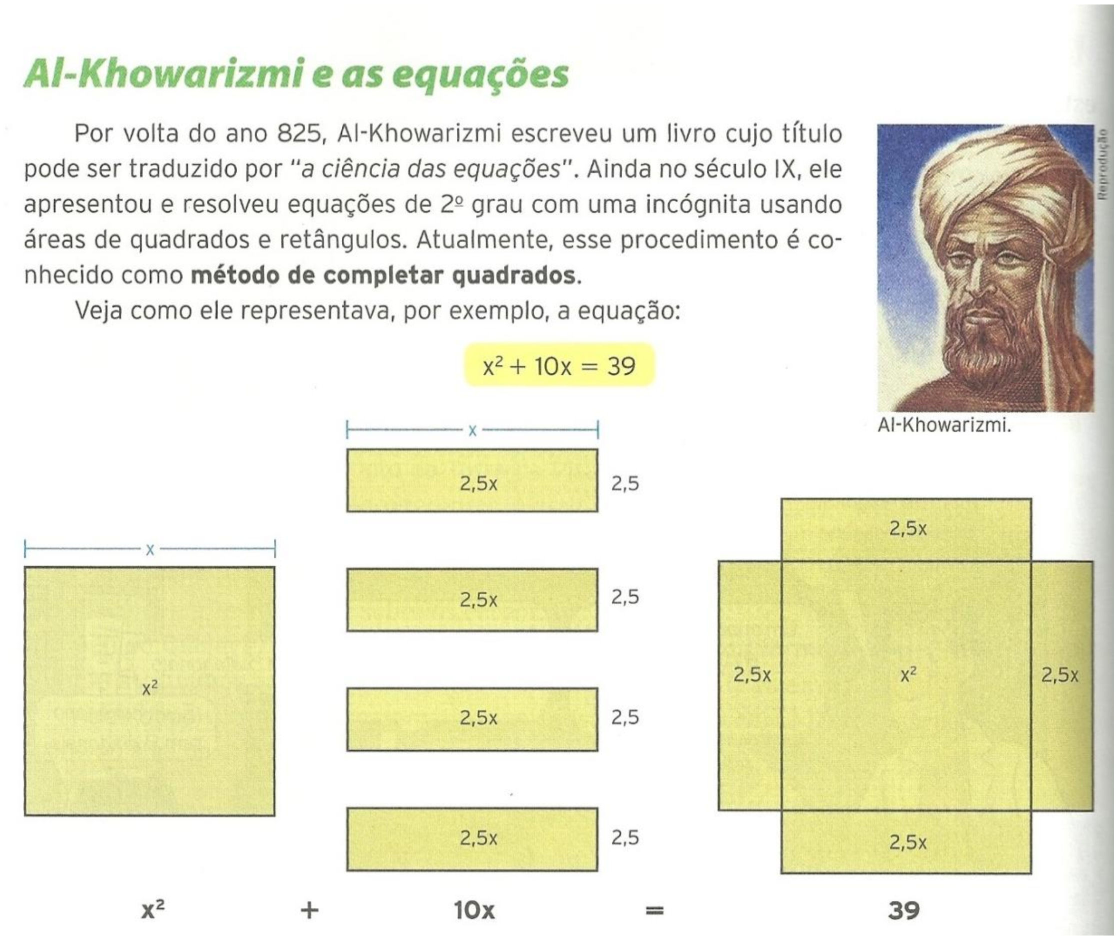
4 - ANÁLISE DE OBRAS

Analisando as coleções de livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental, neste caso os do 9° ano, que foram disponibilizadas para escolha das escolas para usar no triênio 2014-2015-2016 pelo Plano Nacional Livro Didático 2014, interessa saber o que pode ser apresentado nas escolhas das escolas do ensino público para saber se há nos livros didáticos orientações para a resolução de equações do segundo grau de diferentes modos e principalmente pelo modo geométrico, fazendo a junção da visão geométrica com o cálculo algébrico.

Os livros foram disponibilizados às escolas para apreciação, avaliação e escolha. Deste modo será investigada a abordagem da proposta de resolução de equações do segundo grau com uma abordagem geométrica. E os livros avaliados foram:

- Matemática: teoria e contexto (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012)
- Matemática: Bianchini (BIANCHINI, 2011)
- Projeto Teláris: Matemática (DANTE, 2012)
- Projeto Velear: Matemática (BIGODE, 2012)
- Descobrindo e aplicando a Matemática (MACHADO; MAZZIEIRO, 2012)
- Projeto Araribá: Matemática (LEONARDO et al., 2010)
- Vontade de saber Matemática (SOUZA; PATARO, 2012)
- Matemática: Ideias e desafios (MORI; ONAGA, 2012)
- Matemática: Imenes & Lellis (IMENES; LELLIS, 2012)
- Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012)

O livro Matemática: Ideias e desafios (MORI & ONAGA, 2013) as soluções que são abordadas para as equações do segundo grau priorizam o trato algébrico no desenvolvimento do cálculo das raízes das equações. Surgem orientações geométricas apenas para ilustrar a solução e não como a solução por si só. Na página 66, as autoras apresentam um breve histórico sobre a solução dada por Al-Khowarizmi para equação do segundo grau com uma incógnita, mais especificamente à equação $x^2 + 10x = 39$, representando o que atualmente é o “método de completar quadrados”. Para isso, desenharam um quadrado de área x^2 e quatro retângulos de área 2,5x. Mas ao final da ilustração ao invés de abordar a solução, foi dada ênfase aos coeficientes “a, b e c” que aparecem na equação $x^2 + 10x - 39 = 0$. Conforme figura abaixo:



Al-Khowarizmi e as equações

Por volta do ano 825, Al-Khowarizmi escreveu um livro cujo título pode ser traduzido por *"a ciência das equações"*. Ainda no século IX, ele apresentou e resolveu equações de 2º grau com uma incógnita usando áreas de quadrados e retângulos. Atualmente, esse procedimento é conhecido como **método de completar quadrados**.

Veja como ele representava, por exemplo, a equação:

$$x^2 + 10x = 39$$

Figura 4 Matemática:Ideias e desafios, página 66

Já na página 76, na seção “Resolvendo equações por completamento de quadrados” é apresentada a equação $x^2 - 6x - 16 = 0$. Com a justificativa de transformar os elementos do primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito foram indicados três pontos, conforme disposto no livro: "

- *Isolamos o termo independente x no 2° membro.*
- *x^2 é um dos quadrados perfeitos.*
- *O coeficiente de x é 6, que é igual a 2.3.*

Então o outro termo que é quadrado perfeito é 3^2. Acrescentamos 3^2 aos dois membros da equação. Veja uma representação geométrica desse procedimento:"

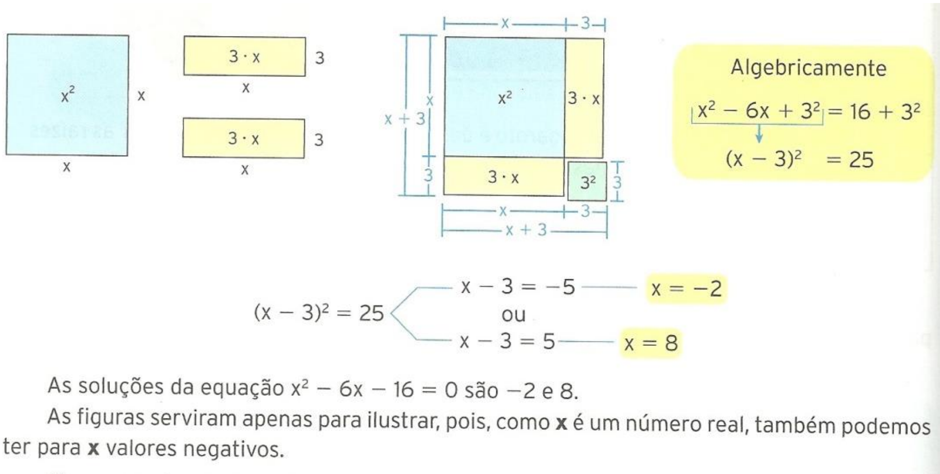
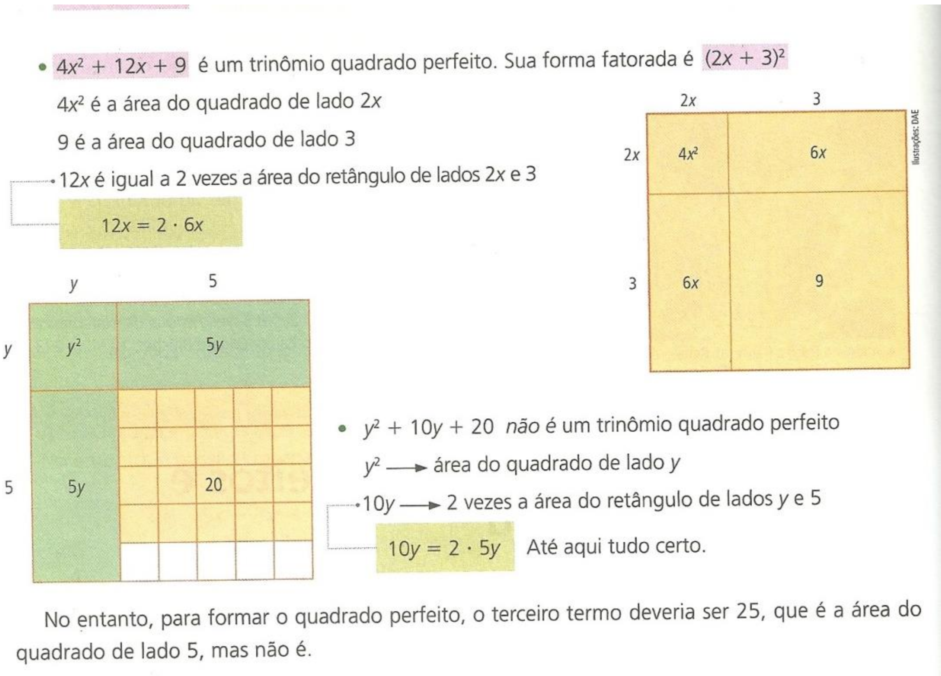


Figura 5 Matemática: Ideias e desafios, página 76

Deste modo, as autoras fizeram uma resolução geométrica em partes, pois não respeitaram a igualdade com a transformação em quadrado perfeito do 1° membro, ou seja, a equação inicial ficou $(x – 3)^2 = 25$ e as representações geométricas foram todas somente para a efetiva transformação em trinômio quadrado perfeito desprezando a igualdade com o 2° membro da equação. Em seguida vem a afirmação presente após as raízes - 2 e 8 serem apresentadas, que é : "*As figuras serviram apenas para ilustrar, pois, como x é um número real, também podemos ter para x valores negativos."*. De fato, não há medida de área com valor negativo, porém o objetivo inicial das autoras foi de calcular as raízes, e assim foi feito, a raiz positiva da equação foi calculada geometricamente e a raiz negativa que apareceu, no caso x = - 2, surge pelo fato de que a raiz quadrada de 25 é igual a 5 ou a – 5 e raiz quadrada não é um fato geométrico e sim algébrico. Portanto, não fica apenas como ilustração e não foi defendido o fato de que a álgebra e a geometria se completaram nesta resolução. Os exercícios propostos na seção não priorizam ou mencionam a geometria e sim o método algébrico de completar quadrados.

A página 77 apresenta a seção "*Fórmula de Bhaskara de equações de 2° grau*" que faz uma demonstração do método generalizado de Bhaskara utilizando geometria, mas as autoras na contramão dessa união álgebra-geometria dizem: "*Acompanhe um procedimento para determinar a fórmula de Bhaskara, no qual utilizamos o método de completamento de quadrados.* ***As áreas de quadrados e retângulos aparecem apenas como esquema****.".* Ora, se servem de apoio e justificam os procedimentos algébricos não são apenas apoio, passam a ser a complementação da abordagem e logo também é solução.

O livro *Praticando Matemática, 9* (**ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012**) trata da resolução de equação do segundo grau de modo geométrico na seção "Trinômios quadrados perfeitos e equações do 2° grau". Os autores associam o polinômio do primeiro termo que geralmente tem as incógnitas de grau 2 e de grau 1 a um trinômio quadrado perfeito representando este polinômio geometricamente com um quadrado para saber qual valor deve ser considerado para completar o trinômio quadrado perfeito. Nos exemplos explicativos é desenhado o quadrado até completar suas partes, mas após a construção da figura com o trinômio quadrado perfeito é desprezada a igualdade com o segundo membro e termina a resolução apenas algebricamente.



- $4x^2 + 12x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito. Sua forma fatorada é $(2x + 3)^2$

$4x^2$ é a área do quadrado de lado $2x$

9 é a área do quadrado de lado 3

$12x$ é igual a 2 vezes a área do retângulo de lados $2x$ e 3

$12x = 2 \cdot 6x$

- $y^2 + 10y + 20$ *não é* um trinômio quadrado perfeito

$y^2 \longrightarrow$ área do quadrado de lado y

$10y \longrightarrow$ 2 vezes a área do retângulo de lados y e 5

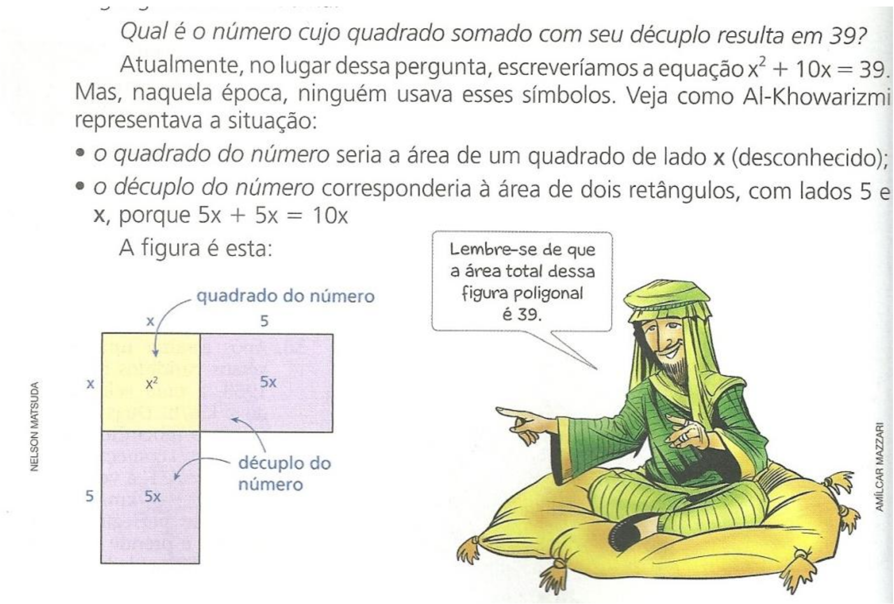
$10y = 2 \cdot 5y$ Até aqui tudo certo.

No entanto, para formar o quadrado perfeito, o terceiro termo deveria ser 25, que é a área do quadrado de lado 5, mas não é.

Figura 6 Praticando matemática, página 50

No livro *Matemática: Imenes & Lellis, 9° ano* (Imenes & Lellis, 2012) os autores no capítulo que se dedica à resolução de equação do segundo grau, inicialmente é apresentada a fórmula de Bhaskara, apresentado como *" ... notável matemático que viveu na Índia, por volta do século XII."*, para o cálculo das raízes das equações do segundo grau. Posteriormente, os autores apresentam fatos históricos da resolução das equações do segundo grau na seção *"De onde veio a fórmula de Bhaskara?"*. Fatos estes que são registros babilônicos de 1700 a.C. que já apresentavam resoluções de equação do segundo grau e no século IX o matemático Al-Khowarizmi apresentava exemplos de resoluções utilizando palavras e figuras. Como as resoluções de Al-Khowarizmi apresentavam apenas uma solução para equação de grau 2 e este não abordava a segunda solução que por vezes era negativa. Bhaskara batizou a resolução por ter sido este o primeiro a ter o crédito de que há dois números que elevados à segunda potência resultam em um quadrado perfeito.

O exemplo apresentado pelos autores da resolução de Al-Khowarizmi foi: “Qual é o número cujo quadrado somado com seu décuplo resulta em 39?”. Conforme foi apresentado, construiu-se um “quadrado incompleto” formado pelo quadrado x², e por dois retângulos 5x para assim completar um quadrado perfeito. Daí concluiu-se que a medida do lado é igual a 3. Observando que não foi levada em conta a medida do lado igual a -13. De fato, ao se trabalhar com palavras e ilustrações as medidas negativas não eram importantes neste cenário que vivia em problemas cotidianos da vida prática. Portanto, a mensuração era priorizada nessas situações.



Qual é o número cujo quadrado somado com seu décuplo resulta em 39?

Atualmente, no lugar dessa pergunta, escreveríamos a equação $x^2 + 10x = 39$. Mas, naquela época, ninguém usava esses símbolos. Veja como Al-Khowarizmi representava a situação:

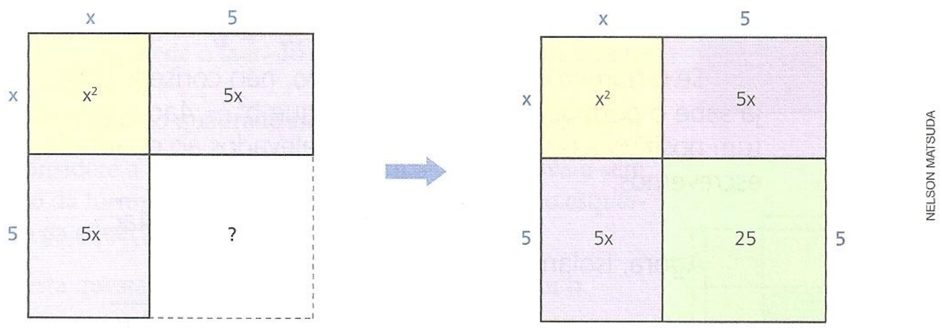
- *o quadrado do número* seria a área de um quadrado de lado **x** (desconhecido);
- *o décuplo do número* corresponderia à área de dois retângulos, com lados 5 e **x**, porque $5x + 5x = 10x$

A figura é esta:

Figura 7 Matemática: Imenes & Lellis, página 132

Nesse ponto, ele se perguntava: o que devo acrescentar à figura para que ela se torne um quadrado?

Observando bem, notamos que, acrescentando um quadrado de lado 5 (e área 25), a figura se torna um quadrado. A área da figura toda passa a ser 39 (área da figura inicial) mais 25 (área acrescentada), o que dá 64. Veja:



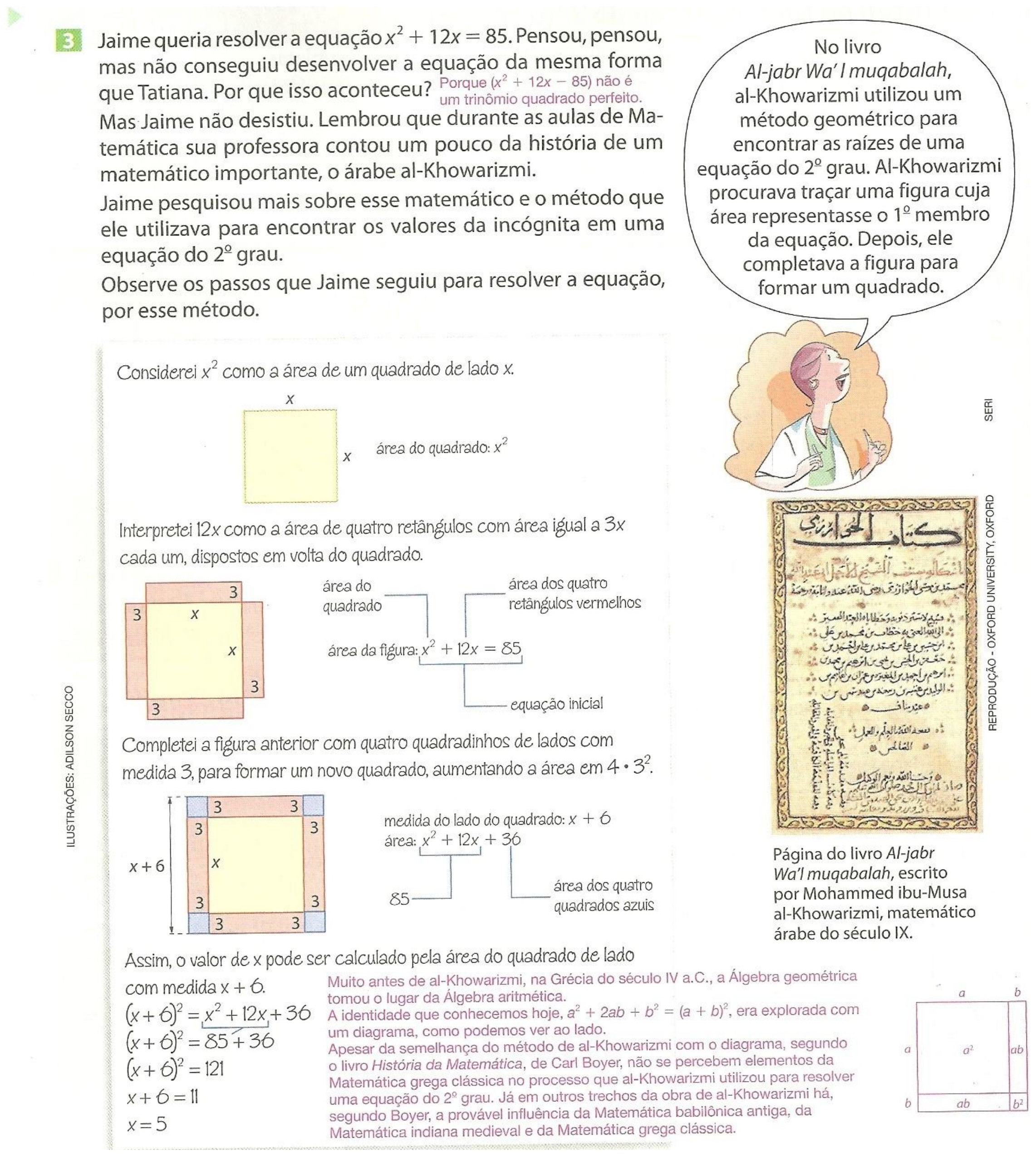
Agora, com o quadrado completado, vem a triunfante conclusão. Acompanhe:

- A figura toda tem área igual a 64 e é um quadrado, cujo lado é 8. Vemos ainda que o lado desse quadrado é também $x + 5$.
- Conclusão: $x + 5$ vale 8 e, portanto, **x** vale 3. O número, cujo quadrado somado com seu décuplo dá 39, é 3.

Figura 8 Matemática: Imenes & Lellis, página 133

Ao término destes exemplos, os autores promovem a situação que mostra a demonstração da fórmula de Bhaskara e não faz menor menção a qualquer forma geométrica, mesmo afirmando que na época da abordagem as situações eram resolvidas oralmente e com figuras.

Na obra Projeto Araribá: Matemática, 9° ano (Leonardo et al., 2010) apresenta na seção “Resolução de uma equação do 2° grau completa” no item “Vamos fazer” nos dois primeiros exemplos motiva a pensar na solução de equação do segundo grau com trinômios do quadrado perfeito e fatoração dos polinômios que figuram no primeiro membro da equação do segundo grau. No terceiro exemplo é resolvida uma equação do segundo grau pelo método descrito por Al-Khowarizmi. A equação $x^2 + 12x = 85$ foi tratada geometricamente pela representação do quadrado de área x^2 e quatro retângulos de área 3x e para completar o quadrado foi adicionado quatro quadrados de área igual 9, totalizando uma área igual a 36. Para finalizar, foi tratado o primeiro membro fatorado $(x + 6)^2$ igualado a 121, mas esta passagem não mais é acompanhada de representações geométricas, uma vez que 121 pode ser representado por um quadrado de área 121, ou seja, de lado 11. Assim, teria dois quadrados de mesma área, um de lado x + 6 e outro de lado 11.



3 Jaime queria resolver a equação $x^2 + 12x = 85$. Pensou, pensou, mas não conseguiu desenvolver a equação da mesma forma que Tatiana. Por que isso aconteceu? Porque $(x^2 + 12x - 85)$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Mas Jaime não desistiu. Lembrou que durante as aulas de Matemática sua professora contou um pouco da história de um matemático importante, o árabe al-Khowarizmi.

Jaime pesquisou mais sobre esse matemático e o método que ele utilizava para encontrar os valores da incógnita em uma equação do 2º grau.

Observe os passos que Jaime seguiu para resolver a equação, por esse método.

No livro *Al-jabr Wa' l muqabalah*, al-Khowarizmi utilizou um método geométrico para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau. Al-Khowarizmi procurava traçar uma figura cuja área representasse o 1º membro da equação. Depois, ele completava a figura para formar um quadrado.

Considerei x^2 como a área de um quadrado de lado x.

área do quadrado: x^2

Interpretei $12x$ como a área de quatro retângulos com área igual a $3x$ cada um, dispostos em volta do quadrado.

área da figura: $\underbrace{x^2 + 12x = 85}_{\text{equação inicial}}$ (área do quadrado; área dos quatro retângulos vermelhos)

Completei a figura anterior com quatro quadradinhos de lados com medida 3, para formar um novo quadrado, aumentando a área em $4 \cdot 3^2$.

medida do lado do quadrado: $x + 6$

área: $\underbrace{x^2 + 12x}_{85} + 36$ (área dos quatro quadrados azuis)

Assim, o valor de x pode ser calculado pela área do quadrado de lado com medida x + 6.

$$(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$$
$$(x+6)^2 = 85 + 36$$
$$(x+6)^2 = 121$$
$$x + 6 = 11$$
$$x = 5$$

Muito antes de al-Khowarizmi, na Grécia do século IV a.C., a Álgebra geométrica tomou o lugar da Álgebra aritmética.
A identidade que conhecemos hoje, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, era explorada com um diagrama, como podemos ver ao lado.
Apesar da semelhança do método de al-Khowarizmi com o diagrama, segundo o livro *História da Matemática*, de Carl Boyer, não se percebem elementos da Matemática grega clássica no processo que al-Khowarizmi utilizou para resolver uma equação do 2º grau. Já em outros trechos da obra de al-Khowarizmi há, segundo Boyer, a provável influência da Matemática babilônica antiga, da Matemática indiana medieval e da Matemática grega clássica.

Página do livro *Al-jabr Wa'l muqabalah*, escrito por Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, matemático árabe do século IX.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO · SERI · REPRODUÇÃO - OXFORD UNIVERSITY, OXFORD

Figura 9 Projeto Araribá: Matemática, página 56

Para que possa fazer o aluno refletir sobre as resoluções geométricas o último exemplo mostra a resolução da equação $x^2 + 14x = 32$ usando um quadrado de lado x e dois retângulos de área 7x e completando com um quadrado de lado 7. Foi feita abordagem as resoluções algébricas com apenas dois exemplos, mas pelos exercícios abordados na seção essa abordagem foi desenvolvida apenas para motivar a transformação dos polinômios em trinômios quadrados perfeitos.

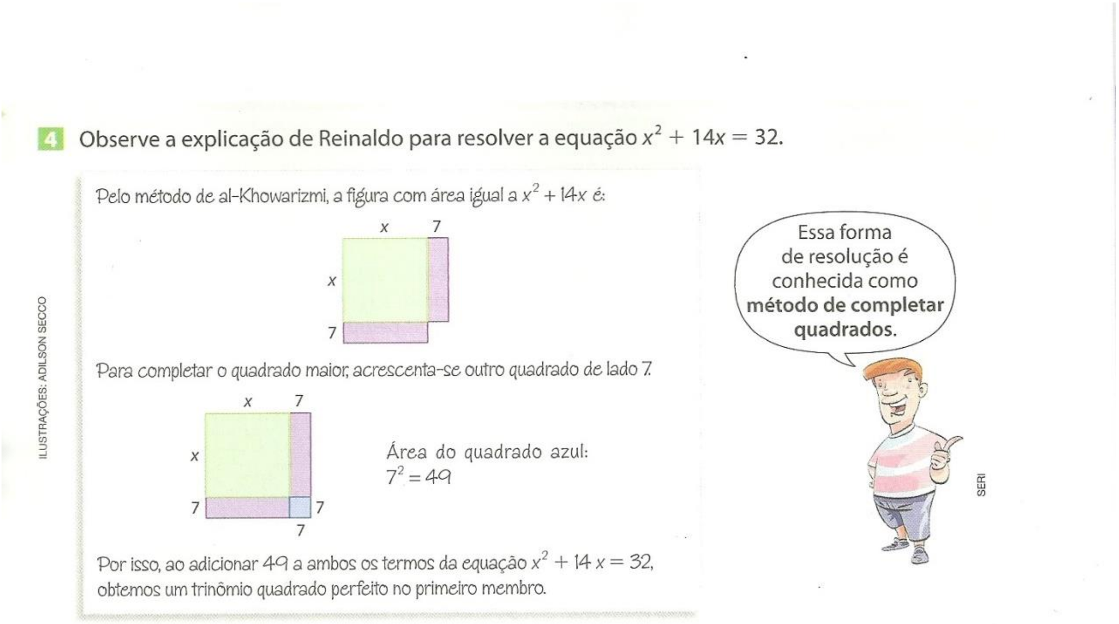
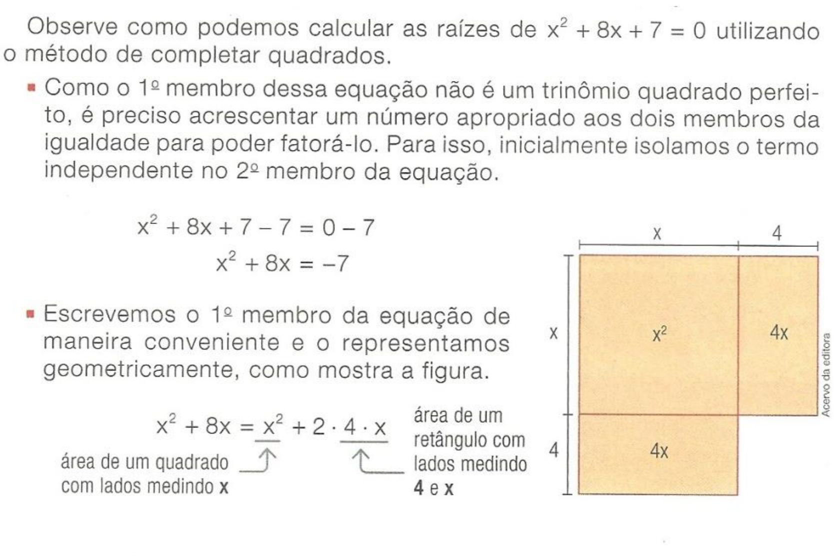


Figura 10 Projeto Araribá: Matemática, página 57

Para o livro Vontade de saber matemática, 9 (Souza & Pataro, 2012) a abordagem geométrica para a solução da equação do segundo grau é feita utilizando o método de “completar quadrados” é feita a transformação do primeiro membro da equação do segundo grau em um trinômio do quadrado perfeito fazendo a representação com um “quadrado incompleto” para a equação $x^2 + 8x + 7 = 0$, mas antes foi dado a implicação $x^2 + 8x = - 7$ e assim somando 16 em ambos os termos da equação construiu-se o quadrado perfeito $(x + 4)^2 = 9$. E também estes autores encerram o desenvolvimento geométrico quando foi completo o quadrado perfeito, sem aproveitar a igualdade da fatoração do primeiro membro com o segundo membro que é 9, um quadrado perfeito. Portanto, a igualdade de dois quadrados figurou somente no campo algébrico.



Observe como podemos calcular as raízes de $x^2 + 8x + 7 = 0$ utilizando o método de completar quadrados.

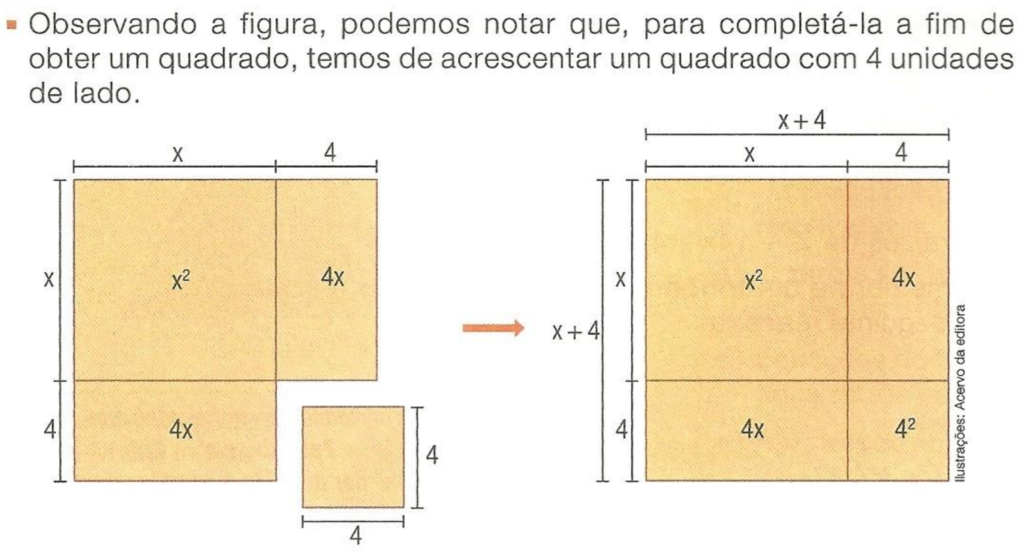
- Como o 1º membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isolamos o termo independente no 2º membro da equação.

$$x^2 + 8x + 7 - 7 = 0 - 7$$
$$x^2 + 8x = -7$$

- Escrevemos o 1º membro da equação de maneira conveniente e o representamos geometricamente, como mostra a figura.

$$x^2 + 8x = \underbrace{x^2}_{\text{área de um quadrado com lados medindo } x} + \underbrace{2 \cdot 4 \cdot x}_{\text{área de um retângulo com lados medindo } 4 \text{ e } x}$$

Figura 11 Vontade de saber matemática, página 35



- Observando a figura, podemos notar que, para completá-la a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado com 4 unidades de lado.

Figura 12 Vontade de saber matemática, página 36

Agora o método algébrico é preponderante no término da resolução.

Dessa maneira, para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos 4^2 aos dois membros:

$$\underbrace{x^2 + 8x + 4^2}^{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -7 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

- Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e resolvemos a equação:

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

$x + 4 = +\sqrt{9}$	$x + 4 = -\sqrt{9}$
$x + 4 = 3$	$x + 4 = -3$
$x + 4 - 4 = 3 - 4$	$x + 4 - 4 = -3 - 4$
$x = -1$	$x = -7$

Portanto, as raízes da equação são -1 e -7.

Figura 13 Vontade de saber matemática, página 36

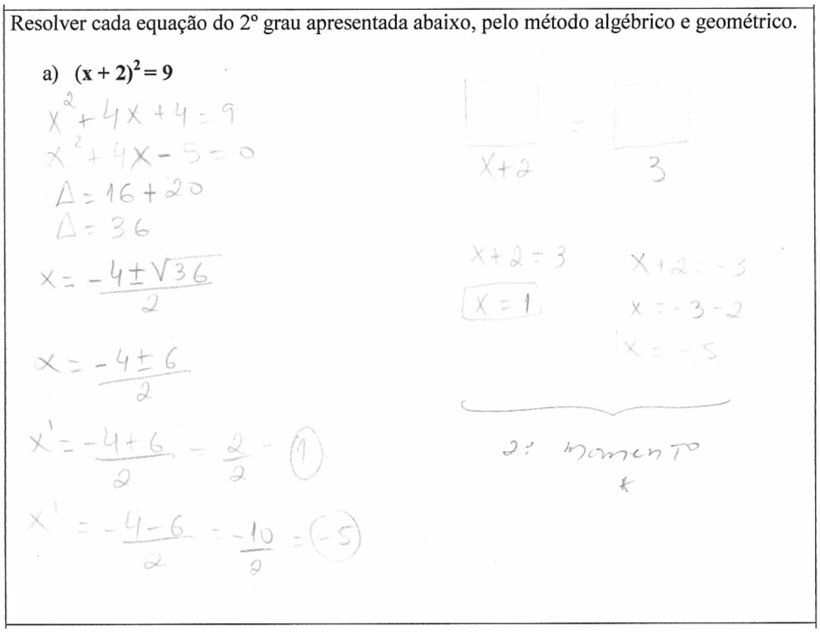
Finalizando a seção, os autores justificam a “Fórmula resolutiva”, que no Brasil é tratada por fórmula de Bhaskara, de modo geométrico.

5 - APLICAÇÃO

As atividades foram aplicadas em uma escola pública municipal do Rio de Janeiro, no bairro de Santa Cruz. Participaram do processo 2 professores regentes e 3 alunos do 9° ano do ensino fundamental.

A aplicação das atividades com os se deu em dois momentos. O primeiro momento foi livre, onde cada professor resolveu as questões. As soluções desenvolvidas e apresentadas para as equações foram unicamente de modo algébrico, ou seja, usaram as relações de Girard com a soma e produto das raízes e a solução associada ao indiano Bhaskara. Disseram eles não lembrar a solução geométrica. Após conversarmos com os professores sobre a solução geométrica e como ela é encontrada utilizando os conceitos que eles lecionam no 8° ano do ensino fundamental, isto é, representar com quadrados a área que representa o polinômio da equação a fim de formar um trinômio quadrado perfeito e igualar ao quadrado formado pela área do valor que figura no segundo membro da equação foi possível que eles desenvolvessem a solução geométrica.

Nas figuras abaixo, apresentamos a solução de cada professor nos dois momentos em que desenvolveram a atividade proposta e os comentários dados por eles ao fim da atividade, designamos as alcunhas P1 e P2 para distinguir os professores participantes.



Resolver cada equação do 2º grau apresentada abaixo, pelo método algébrico e geométrico.

a) $(x + 2)^2 = 9$

$x^2 + 4x + 4 = 9$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 16 + 20$

$\Delta = 36$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$

$x' = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x'' = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

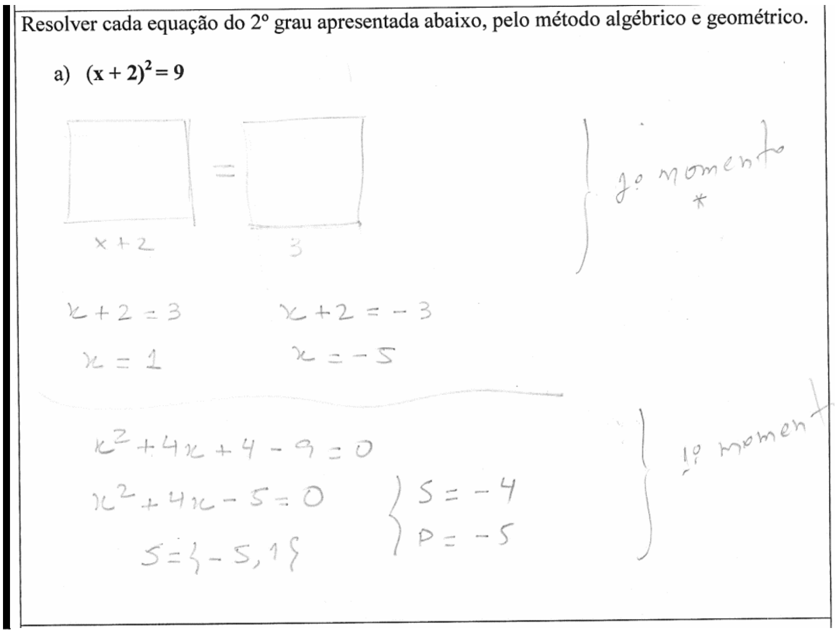
$x+2$ 3

$x + 2 = 3$ $\boxed{x = 1}$

$x + 2 = -3$ $x = -3 - 2$ $x = -5$

2º momento *

Figura 14 Atividade P1



Resolver cada equação do 2º grau apresentada abaixo, pelo método algébrico e geométrico.

a) $(x + 2)^2 = 9$

$x + 2$ 3

2º momento *

$x + 2 = 3$ $x = 1$

$x + 2 = -3$ $x = -5$

$x^2 + 4x + 4 - 9 = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$S = \{-5, 1\}$

$S = -4$

$P = -5$

1º momento

Figura 15 Atividade P2

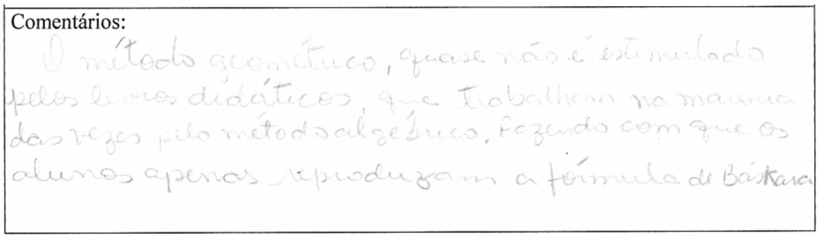

Comentários: O método geométrico, quase não é estimulado pelos livros didáticos, que trabalham na maioria das vezes pelo método algébrico, fazendo com que os alunos apenas reproduzam a fórmula de Báskara

Figura 16 Comentário P1

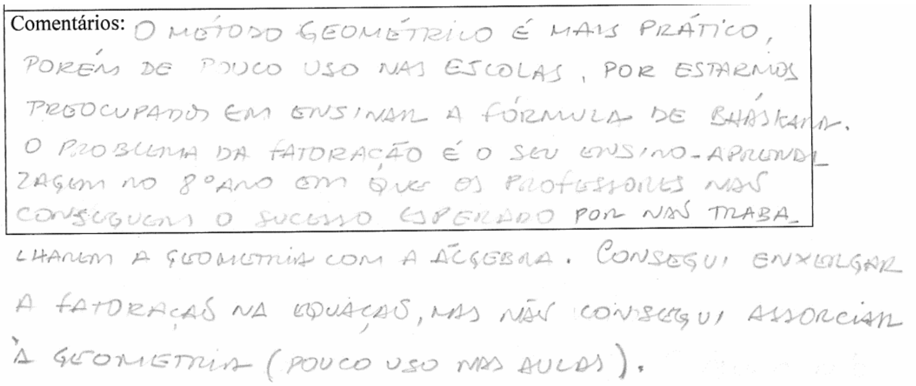

Comentários: O MÉTODO GEOMÉTRICO É MAIS PRÁTICO, PORÉM DE POUCO USO NAS ESCOLAS, POR ESTARMOS PREOCUPADOS EM ENSINAR A FÓRMULA DE BHÁSKARA. O PROBLEMA DA FATORAÇÃO É O SEU ENSINO-APRENDIZAGEM NO 8° ANO EM QUE OS PROFESSORES NÃO CONSEGUEM O SUCESSO ESPERADO POR NÃO TRABALHAREM A GEOMETRIA COM A ÁLGEBRA. CONSEGUI ENXERGAR A FATORAÇÃO NA EQUAÇÃO, MAS NÃO CONSEGUI ASSOCIAR À GEOMETRIA (POUCO USO NAS AULAS).

Figura 17 Comentário P2

Pelos comentários que fizeram iniciamos uma discussão sobre as anotações que fizeram ao término de suas resoluções. Os dois professores falaram que há muitas vantagens na utilização do método geométrico para a resolução das equações do segundo grau. Eles lembraram dos conteúdos que é aplicado no 8° ano do currículo de ensino público do Rio de Janeiro, que é o conteúdo referente aos produtos notáveis e suas representações geométricas nos polinômios de segundo grau. Como no 9° ano este conteúdo já foi apresentado aos alunos há uma grande aproximação do aprendizado pela relação com o conhecimento já pertinente ao aluno, bastando ao professor aprofundar este conhecimento e fazer uma investigação com o desenvolvimento do método geométrico para realizar o cálculo das raízes de uma equação do segundo grau. Basta que os professores tenham este conhecimento como mais uma ferramenta a seu favor para passar o conhecimento de uma melhor forma possível, podendo o aluno ter a possibilidade de usar diferentes artifícios e ter uma maior reflexão sobre o que estão aprendendo.

Nas argumentações apresentadas pelos professores disseram que não há uma aproximação no ensino da matemática nos campos algébricos e geométricos. Encontra-se com muita clareza nos materiais pedagógicos esta distinção de álgebra e geometria. Tanto que um dos professores diz ter percebido uma relação geométrica com a fatoração da equação e não conseguiu a representar.

Para finalizar nossa conversa, perguntei sobre as perspectivas de uso do método geométrico em sala de aula e ambos disseram que na próxima oportunidade apresentarão primeiramente o método geométrico na resolução de equações de segundo grau. Um dos professores afirmou que lecionando no 9° ano na aula subsequente a atividade irá levar o método a conhecimento dos alunos, pois na visão deles o método algébrico configura como um método que faz com que o aluno fique refém e dependente de mais fórmulas. A construção dos quadrados que representam o polinômio envolvido na equação levam os alunos a construir seu conhecimento.

A partir de agora faremos a apresentação das soluções dos alunos. A aplicação das atividades foi no período matinal, das 9 horas as 12 horas. Inicialmente perguntei se eles sabiam resolver equações do segundo grau. Todos afirmaram que sim. Ao questionar sobre se haviam sido apresentados a resolução geométrica disseram que nunca foi trabalhada em sala de aula tal tipo de abordagem.

Com essas indagações começaram a resolver uma equação do segundo grau, na forma algébrica e o processo se deu do seguinte modo eles iam dizendo o que tinha que ser feito e eu reproduzia no quadro branco:

- $x^2 + 6x + 4 = 20$
- $x^2 + 6x + 4 - 20 = 0$
- $x^2 + 6x - 16 = 0$
- Aplicaram a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e encontraram os valores das duas raízes da equação, x = 2 e x = - 8.

Após esta etapa foram feitas as seguintes perguntas:

- 1) Responda as questões a seguir:
  a) Qual a raiz quadrada de 4? E de 16? E de 100?
  b) Você sabe representá-las geometricamente?
  c) Como?
- 2) A partir do exercício anterior, é possível representar geometricamente a raiz quadrada de x^2?

Retomando a equação $x^2 + 6x + 4 = 20$ indagamos se era possível representar geometricamente o primeiro membro da igualdade. Os alunos responderam que não. Então apresentamos uma figura geométrica para representar esta situação:

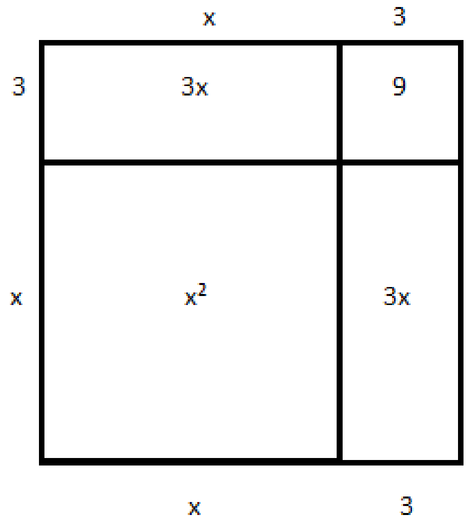


Figura 18 Quadrado de área $x^2 + 6x + 9$

Ao questionar se esta representação era equivalente ao polinômio presente no primeiro membro da equação apresentada a eles disseram que não, pois na figura aparece o número 9 e na equação aparece o número 4. Perguntei como resolver essa situação e responderam que era só somar 5 e estava solucionado, mas tive que lembrar que estamos trabalhando com uma equação, uma igualdade, e tem que somar o valor 5 aos dois membros da equação. Feito isto perguntei se poderíamos representar geometricamente o segundo membro da equação que resultou em 25, disseram que seria um quadrado de lado 5. E fazendo a igualdade desenhei o seguinte:

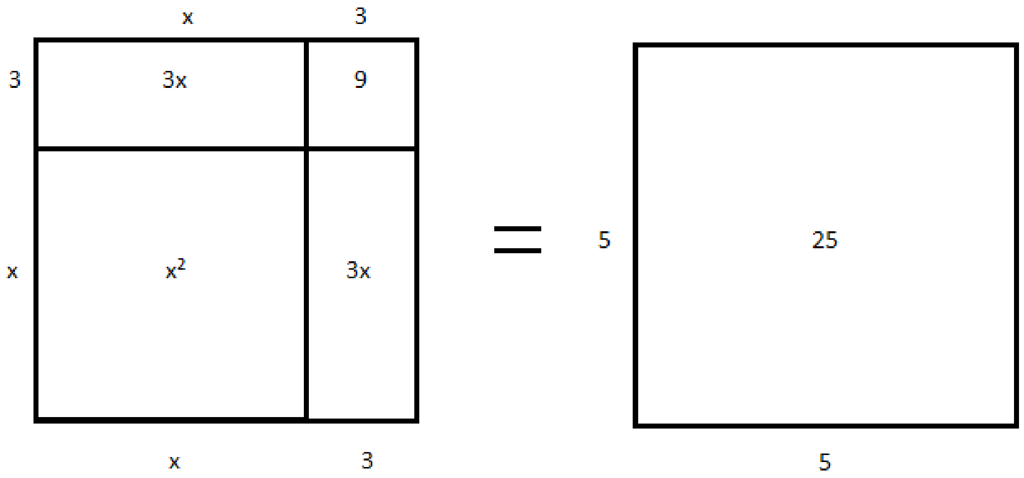


Figura 19 Igualdade $(x + 3)^2 = 5^2$

Em face disto, eles procederam afirmando que então as medidas dos lados dos quadrados seriam iguais, ou seja, $x + 3 = 5$. Assim, afirmaram que $x = 2$. Para finalizar a questão lembrei que a equação trabalhada é do segundo grau e pode ter duas raízes iguais ou duas raízes diferentes, como tivemos que $(x + 3)^2 = 25$ então $x + 3 = 5$ ou $x + 3 = - 5$. A raiz negativa também não era levada em conta nas suas primeiras resoluções históricas, pois o que eram observadas eram situações práticas de medição de terrenos em especial, portanto obtendo um resultado satisfatório que atendia a necessidade daquela sociedade era suficientemente válido. Mas com a evolução da álgebra e o desenvolvimento das ideias com números negativos garantem as duas soluções, como nesse caso, uma raiz positiva $x = 2$ e outra negativa $x = - 8$.

Depois de termos essa discussão, pedi aos alunos que resolvessem a equação $(x + 1)^2 = 4$. A princípio surgiram dúvidas de resolução para o método algébrico, pois a equação estava fatorada. Foi preciso dar uma lembrada com eles sobre o quadrado da soma de dois números. Assim, conseguiram determinar o trinômio quadrado perfeito ficando com a equação $x^2 + 2x + 1 = 4$. Terminando do seguinte modo:

- $x^2 + 2x - 3 = 0$
- Aplicaram a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e encontraram os valores das duas raízes da equação, x = 1 e x = - 3.

Então perguntei se esta equação poderia ser resolvida geometricamente. Disseram que sim e tentaram fazer associação a figura do quadrado, mas tive que intervir para ajudar a montar os quadrados, fizemos dois quadrados de igual área para representar a equação. O primeiro de área $(x+1)^2$ e lado (x + 1) e o segundo quadrado de área 4 e lado 2. Conforme figura abaixo:

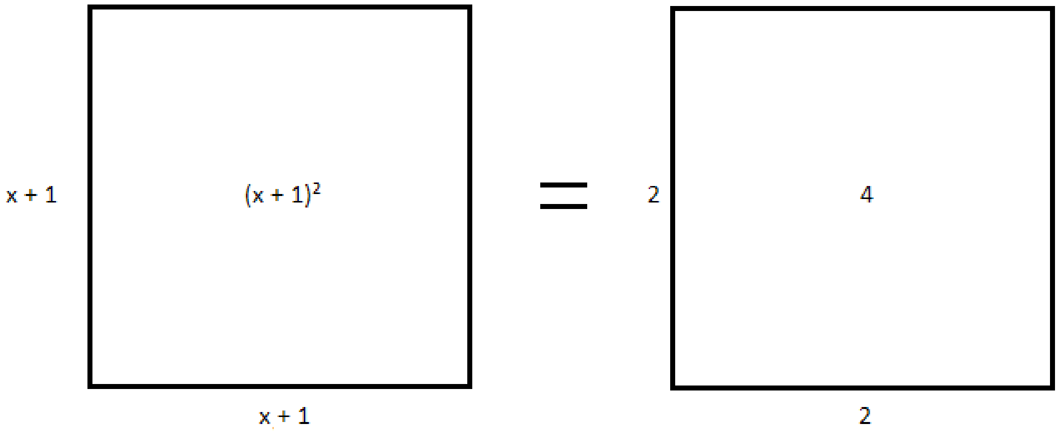


Figura 20 Igualdade $(x + 1)^2 = 2^2$

Após a representação geométrica conseguiram determinar a partir desta igualdade as duas raízes com as duas possibilidades da igualdade: x + 1 = 2 e x + 1 = - 2, então x = 1 ou x = - 3. Lembrei mais uma vez que a igualdade com o segundo membro negativo era impossível no período em que foram estudadas nos primórdios dos estudos das equações do segundo grau.

Para esta segunda etapa o processo geométrico para encontrar a solução da equação do segundo grau foi mais compreensível. Em seguida entreguei a cada aluno a folha de atividades e pedi que resolvessem de maneira independente. Procurei nesta etapa ser o mais imparcial possível, deixando que cada um procurasse resolver as atividades de sua maneira.

Surgiram poucas dúvidas no desenvolver da atividade, pois deixei os alunos desenvolverem de modo autônomo e individual. Apresentaram mais dificuldades no modo algébrico com o desenvolver do produto notável, no caso $(x + 2)^2$, e em guardar a fórmula de Bhaskara para que usassem para encontrar a solução desejada. Com a lembrança das fórmulas encontraram as raízes da equação. Em seguida com a mesma equação, mas desta vez desenvolvendo o método geométrico conseguiram resolver de modo bem simples e rápido que o anterior fazendo as representações de quadrados com cada membro da equação representando a área de um quadrado e em seguida tendo a medida do lado de cada quadrado e completando a igualdade, e a princípio como antigamente dois alunos consideraram apenas a raiz positiva do valor da área do quadrado. Informei-os sobre a raiz negativa que também era necessária para a solução da equação, mesmo que não seja possível fazer sua representação geométrica.

Pedi que resolvessem a segunda equação da atividade, que era $x^2 + 4x = 5$. Primeiramente calculando as raízes da equação pelo método algébrico que foi utilizando a fórmula Bhaskara. Logo de início perceberam se tratar de uma equação equivalente à primeira. Este primeiro método foi resolvido sem maiores complicações pelo fato das equações serem equivalentes. Com isso, passaram a resolver a equação de modo geométrico. Formaram um quadrado em que figurava um quadrado de área x^2 e dois retângulos de área $2x$ cada um. Para que fechasse o quadrado inteiro para preencher no primeiro membro da equação completaram com um quadrado de área igual a 4. Dessa maneira construíram um quadrado de lado x + 2 que ficou equivalente ao quadrado de área igual a 9. E ficou semelhante ao caso anterior.

Logo, terminaram as atividades propostas e conversando com os alunos inicialmente perguntei o que acharam da resolução das equações do segundo grau de modo geométrico que até então era desconhecido pelos três e afirmaram que consegue–se construir o desenvolver da equação sem fazer muitas contas. E na comparação com o método algébrico fica destacada a diferença pois o método algébrico eles são obrigados a guardar fórmulas e que esta é um das maiores dificuldades da utilização da fórmula de Bhaskara. A lida com a imagem que remete a representações de produtos notáveis que já foram vistas anteriormente (figura na grade do 8° ano do ensino fundamental da rede pública do Rio de Janeiro) faz com que seja mais fácil de guardar.

Para finalizar nossa conversa questionei que se eles tivessem a oportunidade de estar com um professor que irá ministrar o conteúdo de equação do segundo grau para uma turma em sala de aula eles indicariam o modo algébrico ou o geométrico a ser desenvolvido nesta aula e enfaticamente responderam que o método geométrico é o que indicariam para um melhor aprendizado do conteúdo pelos alunos que estarão no processo de aprendizagem.

Podemos concluir que este processo é viável para ser desenvolvido em sala de aula. Para tanto faz-se necessário que o professor tenha conhecimento sobre esse método e que não seja somente uma curiosidade e forma de apresentação do conteúdo como foi apresentado em alguns livros didáticos que nortearão o ensino nos anos seguintes a este.

6 - CONCLUSÃO

O processo ensino-aprendizagem a ser desenvolvido por docentes e discentes quase que diariamente é um dos assuntos mais fundamentais ao ser planejado na elaboração de um plano de aula. Ensinar e aprender são duas ações que se completam, são dependentes uma da outra. O que ensina deve pensar em todas as possibilidades possíveis de abordagem de um assunto para passar ao que está para aprender, porém com todo planejamento e diferentes abordagens não atendem por completo ao que aprende, pois este reage as ações de ensino com a reflexão em busca de outras abordagens, de outros pensamentos, de outra práticas. Portanto, ensinar não é uma ação que envolve apenas o que tenta passar um conhecimento e sim todos os que estão envolvidos nesse processo e hoje em dia nas nossas escolas esse grupo que é contemplado com este fundamental processo didático é um grande grupo que pode apresentar muitas dúvidas, questionamentos e novos direcionamentos remetendo as abordagens as suas vivências e as suas bagagens intelectuais, cada um tem uma necessidade diferente, há uma pluralidade de ideias.

Diferentes recursos são pensados para tentar desenvolver o processo ensino-aprendizado nas diferentes áreas do saber. Recursos tecnológicos têm ganhado mais destaque nos últimos tempos. Neste trabalho, pensamos, em especial, com o aspecto histórico e diferentes maneiras de construir a resolução do cálculo de raízes de equações do segundo grau. A história da matemática que foi apresentada despertou interesse nos alunos que participaram da aplicação do trabalho, porque no processo que desenvolvemos lidamos com razões que fizeram os desenvolvedores de tal conhecimento a pensar nas soluções. Em geral, os problemas eram práticos, fazendo parte da rotina de um povo e assim dependia de certa necessidade de solução levando a necessidade de pensar sobre. Com isso, o aspecto humano histórico é tão importante quanto os resultados para um assunto abordado. Inicialmente eram manuais que desenvolveram para resolver numericamente determinadas situações, não tinha pelo menos registradas, situações generalizadas, mas mesmo assim não perdia seu valor e importância. Situações como presentes na tentativa de cálculo da área de regiões do círculo com diferentes valores de *pi* e mesmo com valores diferentes do usual atendiam aos que estavam envolvidos no cálculo e os que dependiam desse resultado.

Os livros de matemática do 9° ano do ensino fundamental disponibilizados para o próximo triênio foram analisados no que é pertinente à abordagem geométricas às equações quadráticas. Dos dez livros abordados, apenas cinco mostraram representações geométricas nos seus capítulos que apresentaram o assunto. Não há em nenhum destes a consolidação de que o método geométrico é suficiente para a resolução das equações quadráticas. Em geral, defendem a resolução geométrica como ilustração para representar o processo algébrico que é apresentado como solução, principalmente utilizando a fórmula de Bhaskara. Não defendem as diferentes maneiras que podem garantir o resultado ao público alvo. Fica um processo mecanizado destinado a reproduzir um único método sem dar alternativas para a pluralidade de abordagens por parte do alunado e também não estimula os professores que utilizam esses materiais.

Ao apresentar uma diferente abordagem na resolução das raízes das equações quadráticas, que foi o método desenvolvido por Al-Khowarizmi, descrevemos este como método geométrico de resolução de equações do segundo grau, notamos que houve melhor compreensão por parte dos envolvidos na atividade. Os professores participantes inicialmente não conseguiram chegar a resolução usando apenas o que já conheciam, e após uma explanação sobre o assunto disseram que já haviam sido apresentados a este método que não é presente em suas práticas e disseram também não utilizar em sala de aula. Um dos fatores que destacaram como influência para esse desuso é a falta de abordagem presente nos materiais pedagógicos que priorizam o processo algébrico no ensino de matemática e a pouca oportunidade de participarem de cursos de aprimoramentos e também da falta de tempo para participar destes cursos, pois a profissão de docente exige muito trabalho para que chegar a um razoável salário que atenda ao nível de escolaridade da categoria. Simpatizaram e mostraram-se dispostos a utilizar o método geométrico em suas próximas aulas com este tema. Os alunos presentes na atividade afirmaram ter mais facilidade no aprendizado do método geométrico comparando ao algébrico. O que pode ser atribuído ao uso de fórmulas cruas que não os permitem visualizar nada além de contas no processo algébrico. Porém a visualização geométrica foi um processo que os remeteu a uma matemática mais presente, mais prática. Observamos que as dificuldades algébricas apresentadas por eles foi um fator que dificultou o andamento individualizado de cada um na resolução da atividade que foi solucionado com intervenções no seu desenvolver bastando mais prática e familiaridade com o método até então desconhecido. Ver as representações geométricas do que faziam fez com que remetessem a conhecimentos que já possuíam, ou seja, falta o desenvolvimento destes assuntos aliado à diferentes abordagens possíveis no processo de ensino e de aprendizado.

O método geométrico pode se consolidar como uma importante alternativa para o seu desenvolver em sala de aula para garantir um maior sucesso na aprendizagem no cálculo de raízes de equações do segundo grau.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática, 9° ano.** 3ª ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: Bianchini, 9° ano.** 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Projeto Velear: Matemática, 9° ano**. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2012.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/EDUSP, 1974.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais:** Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática: teoria e contexto, 9° ano.** 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática, 9° ano**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática: Imenis & Lellis, 9° ano.** 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

LEONARDO, Fabio Martins de, et al. **Projeto Araribá: Matemática, 9° ano**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

MAZZIEIRO, Alceu dos Santos; MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Descobrindo e aplicando a matemática, 9° ano.** Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios, 9° ano.** 17ª ed. SãoPaulo: Saraiva, 2012.

SOUZA, Joamir; Pataro, Patrícia Moreno. **Vontade de saber matemática, 9° ano.** 2ª ed. São Paulo: FTD, 2012.