Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional de Matemática

Uma abordagem de progressões para o ensino médio

Iramar Batista da Silva

2013

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional de Matemática

Uma abordagem de Progressões para o Ensino Médio

por

Iramar Batista da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Felix Silva Costa

Julho de 2013

São Luís - MA

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional de Matemática

Uma abordagem de Progressões para o Ensino Médio

por

Iramar Batista da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Algebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Felix Silva Costa - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. José Antônio Ferreira Marão - UFMA

Prof. Dr.

À Matheus Castro Batista da Silva

e Maria das Graças, minha Mãe.

Agradecimentos

Primeiramente ao meu Senhor, meu Deus todo poderoso, criador do Céu e da Terra, a quem tudo agradeço.

À minha família, que sempre me deu força e coragem para prosseguir nos meus estudos.

Ao meu filho Matheus, fonte de minha vida, onde busco razão para viver.

À minha esposa pela paciência que teve com minha ausência de casa.

Ao Prof. Dr. Felix Silva Costa, pela paciência e excelente orientação demonstrado durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos que me deram força motivadora para concluir esse trabalho.

Aos professores da UFMA, pela formação e serviços prestados.

Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

As progressões aritméticas e geométricas são conteúdos de fundamental importância no Ensino Médio. Contudo, percebe-se, ao longo da experiência profissional e no contato com os colegas de trabalho, que é tradicional o ensino das Progressões exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas entregues aos alunos, sendo assim empregados em exercícios tradicionais de sala de aula. Na aprendizagem da matemática, os problemas permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas do uso padronizado de fórmulas. Dessa forma o objetivo desse trabalho dentre outros, é desenvolver um material que sirva de material didático sobre progressões aritméticas e geométricas, seja para o professor, seja para o aluno.

Palavras-chave: Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Juros Simples; Juros Compostos.

Abstract

The arithmetical and geometrical progressions contents are of fundamental importance in high school. However, it is noticed along the professional experience and contact with co-workers, which is the traditional teaching progressions exclusively through manipulation of formulas given to students, often without proper statements and also without any applicability, therefore employed in exercises of traditional classroom. In learning mathematics, problems allow students to put themselves facing questions and think for themselves, enabling the exercise of logical reasoning and not just use standardized formulas. Thus the aim of this work among others, is to develop a material that serves as educational materials on arithmetical and geometrical progressions, either to the teacher or to the student.

Keywords: arithmetical and geometrical progressions, simple and compound interest.

Sumário

Introdução

Hoje em dia há inúmeras pessoas que pensam que a Matemática é uma disciplina em que só se trabalha com um grande número de fórmulas sem sentido e com muitos cálculos. Nas escolas o ensino das progressões é repassado ao corpo discente, enquanto que deveria ser construído em parceria com os mesmos, percebemos também que esses conceitos não são abordados a partir de situações do cotidiano dos alunos.

Segundo Ausubel[1], a aprendizagem significativa no processo de ensino aprendizagem necessita fazer algum sentido para o aluno e, nesse processo, a informação deverá interagir e apoiar-se nos conceitos relevantes pré-existentes na estrutura do aluno[15].

> *"O fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isto deve ser averiguado e o ensino deve depender desses dados".*
> *(Ausubel et al., 1983 apud Yamazaki, 2008)*

Diante dessa visão de Ausubel, nosso objetivo é mostrar que podemos ensinar progressões aritméticas e geométricas a partir de situações problemas que são conhecedoras por parte dos alunos e dessa forma facilitar a absorção do assunto trabalhado em sala de aula e consequentemente mostrar que o estudo de progressões pode ser relacionado com o estudo de juros, que está presente no cotidiano do aluno em várias contextos.

Os conceitos, fórmulas e as propriedades são abordados com a apresentação de situações problema[2]. Trabalhando o conteúdo de forma contextualizada em sala de aula. Com isso, desenvolvemos o trabalho da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos como ocorreu o surgimento dos anos bissextos e fazemos um comparativo com uma P.A., seguida

[1] David Paul Ausubel (25/10/1918 a 09/07/2008), foi um grande psicólogo da educação estadunidense.
[2] Situações em que os conceitos tomam significado, ver [18].

da definição, classificação, termo geral, propriedades, soma dos n termos incicais, representações especiais e interpolção aritméticas. Apresentamos também nesse capítulo um resumo do cálculo de uma aplicação a juros simples e os montantes produzidos nesse regime de capitalização, com a devida demonstração da fórmula que define esse montante e mostramos de que forma está relacionado esse montante com uma P.A. e por fim, apresentamos a Espiral de Arquimedes como uma aplicação de P.A. E todas as fórmulas e propriedades abordadas nesse capítulo apresentamos suas demonstrações.

No capítulo 2, apresentamos o estudo de P.G., iniciamos com um breve histórico da lenda do surgimento do jogo de xadrez, de forma a motivar o aluno, seguida de um resumo do estudo das propriedades de potência, necessário para a aprendizagem do aluno e por conseguinte da definição, classificação, termo geral, propriedades, soma dos n termos incicais, soma dos infinitos termos, representações especiais, interpolação geométrica e produto dos n termos de uma P.G., e todas as fórmulas e propriedades abordadas nesse capítulo também apresentamos as suas devidas demonstrações. Apresentamos também nesse capítulo um breve histórico de juros e de como se processa o regime de capitalização a juros compostos, seguida da demonstração da fórmula que nos permite calcular o montante de uma aplicação nesse regime e mostramos como está relacionado esse montante com uma progressão geométrica. E por fim, apresentamos a espiral logarítmica, fonte de estudo de Bernoulli e Modelo Malthusiano que aborda o crescimento populacional, como aplicações do estudo de P.G.

Capítulo 1

Progressão Aritmética

1.1 O ano Bissexto

Nosso calendário depende dos movimentos que nosso planeta realiza ao redor do seu regente, o Sol, o tempo terráqueo a ser registrado leva-nos a um impasse quando se trata de dividi-lo em dias e de forma permanente.

Todos os calendários sempre tiveram esse obstáculo e, para vencê-los, foi preciso realizar correções periódicas.

Vários deles foram abandonados definitivamente, como o calendário Ino de Tiahuanaco (La Puerta Del Sol), ou substituídos por outros, após esbarrarem nos erros dos métodos aplicados. Mesmo os que surgiram nos tempos modernos, como o atual que nos rege, o Gregoriano, possui uma margem de diferença com o mecanismo real celeste que não percebemos com o uso das folhinhas durante anos e anos.

Apesar de tudo, sempre permanece uma fração de tempo que não se encaixa com o verdadeiro, isto é, há sempre uma defasagem entre ambos, entre o método e o tempo astronômico real, o que ocasiona em longo prazo uma diferença capaz de alterar completamente qualquer método criado para controlá-lo.

Recorre-se, assim, a correções.

É o caso especial do nosso calendário atual que, apesar de corrigido a cada quatro anos de 365 dias, precisa recorrer a cada 100 anos a uma nova afinação com a finalidade de se aproximar do tempo astronômico.

O giro perene do planeta Terra ao redor do Sol se completa em frações infinitesimais, independentemente dos seus outros movimentos.

Podemos catalogar esses tempos de acordo com os sistemas empregados para controlá-los e compará-los ao do real.

Cálculos apurados por instrumentos nos permitem saber que a Terra tem um giro anual astronômico e absoluto de: 365,242198 dias, ou a soma total de 8.765,812752 horas modernas.

Esses numerais não permitem uma divisão inteira, que de fato seria impossível.

Corrige-se, na verdade, com um acréscimo de quatro em quatro anos, em um dia, no mês de Fevereiro no calendário Gregoriano, de forma que, diferentemente dos anteriores com seus 28 dias, passe a ter esse mês, nesse ano, mais um dia, ou seja: o dia 29.

Cada ano comum tem 365 dias.

A soma dos três anos nos entrega 1.095 dias.

Cada ano bissexto tem 366 dias.

Os três anos normais mais o ano bissexto atingem um total de 1.461 dias.

Por que bissexto? Simples, 365 tem no final dois números, o 6 e o 5.

Esse ano com final de 65 não é bissexto. Somente será bissexto quando seus dois números terminem com dois 6 no final. O final 66 equivale a ter dois números 6 seguidos e por isso 366 será um ano bissexto.

O dia 29 de Fevereiro aparece assim de quatro em quatro anos para corrigir o desvio, mas não completamente como podemos acreditar[9].

Sabemos que o mês de fevereiro do ano 2000 teve 29 dias, portanto sendo esse ano bissexto e suponhamos que, a partir do ano 2000, estivéssemos interessados a contar os anos bissextos, então poderíamos escrever:

$$2000 \quad 2004 \quad 2008 \quad 2012 \quad ....$$

E, dessa forma, percebemos que todos os anos bissextos, a partir do ano 2000, formam uma sequência numérica. Observamos também, que os elementos dessa sequência são acrescidos em 4 unidades a partir do primeiro termo que no caso em questão seria o ano 2000. Podemos visualizar a relação entre esses elementos de outra maneira, por exemplo, denotando por:

$$a_1 = 2000 \quad a_2 = 2004 \quad a_3 = 2008 \quad e \quad a_4 = 2012$$

onde a_1 corresponde ao primmeiro termo, a_2 é o segundo termo e daí por diante. Temos que a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor é sempre constante e igual a 4, ou seja, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 4$. As sequências numéricas que possuem tal característica são chamadas progressões aritméticas[14].

1.2 Progressão aritmética

Definimos uma progressão aritmética, notação P.A., como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, somando o número anterior por uma quantidade fixa r, conhecida como a razão da P.A.. Podemos representar uma progressão aritmética da seguinte forma:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

com $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\ \in \mathbb{N}$ e a_i representa i-ésimo termo.

Podemos verificar, que a diferença entre dois termos consecutivos é constante, considerando sempre a ordem do termo maior pelo termo menor, por exemplo:

$i)$ $(1, 5, 9, 13, 17...)$ onde $a_1 = 1$ e $r = 4$

$ii)$ $(-3, -6, -9, -12, -15, ...)$ onde $a_1 = -3$ e $r = -3$

$iii)$ $(5, 5, 5, 5, 5, 5, ...)$ onde $a_1 = 5$ e $r = 0$

$iv)$ $(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, ...)$ $onde$ $a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{2}{3}$

$v)$ $(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, ...)$ onde $a_1 = 1$ e $r = -\frac{1}{3}$

1.2.1 Classificação

De acordo com o sinal da razão, as progressões aritméticas classificam-se em:

Crescentes: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre somente quando a razão for maior que zero, ou seja, r > 0.

Exemplos: i e iv

Constantes: Quando cada termo for igual ao anterior. Isto ocorre somente quando a razão for igual a zero, ou seja, r = 0.
Exemplo: iii
Decrescentes: Quando cada termo for menor que o anterior. Isto ocorre somente quando a razão for negativa, ou seja, r < 0.
Exemplos: ii e v

1.2.2 Termo geral

O termo geral de uma progressão aritimética é dada pela seguinte expressão:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Vejamos a seguir a demonstração.
Demonstração: Utilizando a definição de P.A., dados a_1, e a razão r, encontramos os demais termos do seguinte modo:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$................$$
$$................$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando-se essas (n - 1) equações, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + \underbrace{(r + r + ... + r)}_{n-1\,vezes}$$

Cancelando-se os termos $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$, obtemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

■

Dessa forma, de posse do primeiro termo da sequência a_1 e da razão r, podemos encontrar qualquer outro termo. Porém, há situações em que conhecemos apenas dois termos de uma P.A. e para determiná-la, recorremos ao termo geral. Quando fazemos isso, nos deparamos diante de um sistema com duas equações e com incógnitas (o primeiro termo a_1 e a razão r) a ser resolvido. Uma alternativa é escrever a expressão do termo geral da forma:

$$a_n = a_k + (n-k)r \qquad \text{com} \qquad n, k \in \mathbb{N}$$

onde a razão r é encontrada apenas substituindo os dois termos da P.A. na fórmula.

Vejamos a seguir a demonstração dessa última expressão:

Demonstração: Sendo a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{1.1}$$

$$a_k = a_1 + (k-1)r \tag{1.2}$$

Sendo $(n \;\; e \;\; k) \in \mathbb{N}$ e, subtraindo-se (1.2) de (1.1), obtemos:

$$a_n - a_k = (n-1)r - (k-1)r$$
$$a_n = a_k + (n-1-k+1)r$$
$$a_n = a_k + (n-k)r$$

■

Essa fórmula nos possibilita obtermos a razão de uma P.A. a partir de dois termos dados, ou determinar um termo qualquer, a partir de outro termo e a razão. Em outras palavras, podemos avançar ou retroceder numa PA a partir de um termo qualquer, para determinarmos outro termo da sequência.

Vejamos como se processa tal raciocínio:

Seja a P.A. (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $\cdots$, a_{n-1}, a_n) ,para avançarmos um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão e assim sucessivamente. Dessa forma, por exemplo: $a_{10} = a_5 + 5r$, pois, ao passar de a_5 para a_{10}, avançamos 5 termos; $a_{12} = a_4 + 8r$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_4 para a_{12}; $a_3 = a_{12} - 9r$, pois retrocedemos 9 termos ao passar de a_{12} para a_3[4].

Portanto, de um modo geral temos, $a_n = a_k + (n-k)r$, pois, ao passar de a_k para a_n, avançamos ou retrocedemos $(n-k)$ termos. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 1.1 *Determine a P.A. em que o sexto termo é 7 e o décimo termo é quinze.*

Solução: Utilizando-se a expressão $a_n = a_k + (n-k)r$, expressaremos o décimo termo em função do sexto termo.

$$a_{10} = a_6 + (10-6)\ .\ r$$

$$15 = 7 + 4\ .\ r$$

$$8 = 4r$$

$$r = 2$$

Portanto, obtemos a seguinte P.A.: $-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

Exemplo 1.2 *Sendo $a_7 = 21$ e $a_9 = 27$, temos de uma P.A., calcule o valor da razão.*

Solução: Utilizando-se a expressão $a_n = a_k + (n-k)r$, expressaremos o nono termo em função do sétimo termo.

$$a_9 = a_7 + (9-7)r$$

$$27 = 21 + 2r$$

$$2r = 6$$

$$r = 3$$

Diante desses exemplos dados, podemos perceber a importância e a facilidade que a expressão $a_n = a_k + (n-k)r$ nos possibilita para calcularmos a razão de uma P.A., dados dois termos quaisquer, ou determinarmos qualquer outro termo a partir de um termo qualquer dado e conhecendo-se a razão.

1.2.3 Propriedades

As progressões aritméticas apresentam comportamentos que facilitam o seu entendimento e consequentemente possibilitam compreender as suas características.

Em uma P.A. qualquer, de n termos e razão r, podemos observar as seguintes propriedades:

a) Qualquer termo de uma P.A., a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad com \quad k \geq 2$$

Para demonstrar essa propriedade partimos da definição de P.A..

Demonstração: Seja a P.A.: $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{n-1}, a_n) \quad k \geq 2$

Temos:

$$r = a_k - a_{k-1} \tag{1.3}$$

$$r = a_{k+1} - a_k \tag{1.4}$$

Igualando (1.3) com (1.4), temos:

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$$

$$a_k + a_k = a_{k+1} + a_{k-1}$$

$$2a_k = a_{k+1} + a_{k-1}$$

$$a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$$

■

Portanto, qualquer termo de uma P.A., a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo anterior e o termo posterior.

Exemplo 1.3 *Seja a P.A.* $(3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28)$, *verifique a propriedade acima.*

Solução: De acordo com a propriedade dada devemos ter:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + a_3}{2} = 8 \\ a_3 &= \frac{a_2 + a_4}{2} = 13 \\ a_4 &= \frac{a_3 + a_5}{2} = 18 \\ a_5 &= \frac{a_4 + a_6}{2} = 23 \end{aligned}$$

E portanto, se verifica a propriedade.

b) A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, isto é:

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

Demonstração: Seja a P.A.: $(\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_p}_{temos\,p\,termos}, \;..., \;\underbrace{a_q, ..., a_{n-1}, a_n}_{temos\,p\,termos})$, percebemos que a partir do primeiro termo até o termo a_p existem p termos e a partir do termo a_q até o termo a_n também existem p termos. Por isso esses termos são denominados de equidistantes dos extremos. Temos que provar que a soma desses termos $(a_p + a_q)$ é igual à soma dos dois extremos $(a_1 + a_n)$.

De fato,

$$a_p = a_1 + (p-1)r \tag{1.5}$$

$$a_n = a_q + (p-1)r \tag{1.6}$$

Subtraindo (1.6) de (1.5) temos:

$$\begin{aligned} a_p - a_n &= a_1 + (p-1)r - (a_q + (p-1)r) \\ a_p - a_n &= a_1 + pr - r - a_q - pr + r \\ a_p - a_n &= a_1 - a_q \\ a_p + a_q &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.4 *Seja a P.A.* (3, 8, 13, 18, 23 *e* 28), *verifique a propriedade dada acima.*

Solução: De acordo com a propriedade temos os seguinte pares de termos equidistantes: 8 e 23; 13 e 18. E portanto, temos:

$$a_2 + a_5 = a_1 + a_n = 31 \qquad a_3 + a_4 = a_1 + a_n = 31$$

E dessa forma se verifica a propriedade.

c) Se ocorrer que uma P.A. tenha número de termos ímpar, existirá um termo central que será a média aritmética dos extremos desta P.A., isto é:

$$a_c = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Vejamos a demonstração dessa propriedade para o caso geral.

Demonstração: Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_c \cdots, a_{n-1}, a_n)$ com $n > 2$ e ímpar e sendo a_c o termo central dessa P.A., temos $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ termos antes e depois do termo central, por n deixar resto 1 quando divisível por 2, o que implica a existência de um termo central.

Temos que provar que a_c é a média aritmética dos extremos, ou seja: $a_c = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

De fato:

$$a_c = a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right) . r \tag{1.7}$$

$$a_n = a_c + \left(\frac{n-1}{2}\right) . r \tag{1.8}$$

Subtraindo (1.8) de (1.7) temos:

$$a_c - a_n = a_1 - a_c$$

$$a_c + a_c = a_1 + a_n$$

$$2a_c = a_1 + a_n$$

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

■

Exemplo 1.5 *Seja a P.A.* (3, 8, 13, 18, 23, 28, 33)*, verifique a propriedade dada acima.*

Solução: Temos aí uma P.A. com número de termos ímpar, ou seja, $n = 7$. E de acordo com a propriedade dada existe um termo central de ordem $\frac{n+1}{2}$, no caso do exemplo dado o $\left(\frac{7+1}{2}\right) = 4^\circ$ *termo*, que será igual a $\left(\frac{a_1+a_7}{2}\right)$. E dessa forma, temos:

$$a_4 = \frac{a_1 + a_7}{2} \qquad \Rightarrow a_4 = 18$$

Portanto, se verifica a propriedade.

1.2.4 Soma dos termos de uma P.A.

Carl Friedrich Gauss(1977−1855), quando criança, se divertia com cálculos matemáticos; uma anedota referente a seus começos na escola é característica. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de 1 *a* 100, com instruções para que cada um colocasse sua lousa sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua lousa sobre a mesa dizendo. “Aí está!”Qunado o instrutor finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única com resposta correta, 5050, sem nenhum outro cálculo. O menino de dez anos, evidentemente, calculara mentalmente a soma da progressão aritmética(1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100), presumivelmente pela fórmula $\frac{m(m+1)}{2}$. Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick, que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Gottingen, onde se matriculou em outubro de1795[2].

Figura 1.1: Carl Friedrich Gauss[16]

Vejamos como menino Gauss respondeu a essa pergunta:

Colocou os números naturais de 1 a 100 na ordem crescente e, em seguida, repetindo-os na ordem decrescente em uma segunda fila:

1	2	3	4	......	97	98	99	100
100	99	98	97	......	4	3	2	1

Somando-os dois a dois, obteve uma lista com termos constantes iguais a 101, ou seja:

$$\underbrace{101 \quad 101 \quad 101 \quad 101 \ldots 101 \quad 101 \quad 101 \quad 101}_{\textit{100 termos}}$$

Depois, somou todos os elementos dessa nova lista, obtendo a soma dos 100 primeiros números naturais duas vezes. Esse valor corresponde a (100×101), que dividido por dois, nos fornece a soma dos números naturais de 1 a 100, ou seja,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

A forma como apresentou essa solução está relacionado com a fórmula de obtenção da expressão que soma os n primeiros termos de uma P.A.. Na verdade, a demonstração é baseada na mesma metodologia aplicada por Gauss. Diante disso, vamos deduzir a expressão geral que calcula essa soma dos n primeiros termos de uma P.A.. De fato, utilizando o mesmo principio do problema anterior, temos que a soma dos n termos de uma progressão aritmética é igual ao produto do número de termos pela média aritmética do primeiro com o n-ésimo termo:

$$S_n = n \ . \ \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

Essa fórmula se sustenta na propriedade que corresponde a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Desta forma temos n parcelas de somas iguais a $(a_1 + a_n)$, como a soma total representa o dobro da soma dos n termos, dividirmos por 2 para de fato obtermos a soma dos n temos da P.A.. E conforme foi enunciado, temos que a soma dos n termos de uma progressão aritmética é igual ao produto do número de termos pela média aritmética do primeiro com o n-ésimo termo.

No entanto, vejamos outra forma de demonstrarmos essa fórmula:

Demonstração: Consideremos a soma S, de todos os termos de uma P.A. finita.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_{n-1} + a_n \tag{1.9}$$

Vamos escrever a mesma soma, de trás para frente.

$$S = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1 \tag{1.10}$$

Somando (1.9) com (1.10), temos:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1) \tag{1.11}$$

De acordo com a propriedade acima, vimos que todas essas parcelas de somas são todas iguais, pois são termos equidistantes dos extremos, com isso podemos reescrever a expressão (1.11) por:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n\ parcelas\ de\ somas}$$

$$2S = n\ .\ (a_1 + a_n)$$

$$S = n\ .\ \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

■

Portanto, chegamos à fórmula que nos fornece a soma dos termos de uma progressão aritmética finita.

Se por outro lado, não dispusermos de a_n, desde que tenhamos a razão r, podemos fazer uso desta fórmula abaixo, que foi obtida substituindo a_n por seu respectivo valor $a_1 + (n-1).r$:

$$S_n = n\ .\ \left(\frac{2a_1 + (n-1)\ .\ r}{2}\right)$$

Porém, se ao invés de somarmos todos os elementos da P.A., quiséssemos somar apenas algumas partes dos termos de uma P.A, como proceder diante desta questão?

Neste caso, podemos expressar a fórmula da soma dos termos da seguinte forma:

$$S_{p,q} = (q - p + 1)\ .\ \left(\frac{a_p + a_q}{2}\right)$$

Note que declaramos como p e q a posição do primeiro e do último termo do intervalo respectivamente, declarando assim a_p como o primeiro termo do intervalo e a_q como o último. Note também que o número de termos do intervalo considerado é igual à diferença entre as posições do último e do primeiro termo considerado, mais um.

A seguir, apresentamos um exemplo para um melhor entendimento dessa última fórmula.

Exemplo 1.6 *Calcule a soma dos termos da progressão aritmética* (2, 5, 8, 11, ...) *desde o* 25° *até o* 41° *termo, inclusive.*

Solução: Como conhecemos o primeiro termo e razão da P.A., determinaremos o 25° e o 41° termo utilizando a fórmula do termo geral.

$$\begin{array}{ll} a_{25} = a_1 + 24.r & \qquad a_{41} = a_1 + 40.r \\ a_{25} = 2 + 24.3 & \qquad a_{41} = 2 + 40.3 \\ a_{25} = 74 & \qquad a_{41} = 122 \end{array}$$

Agora, utilizando a fórmula $S_{p,q} = (q - p + 1)\ .\ \left(\dfrac{a_p + a_q}{2}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} S_{25,41} &= (41 - 25 + 1)\ .\ \left(\frac{a_{25} + a_{41}}{2}\right) \\ S_{25,41} &= 17\ .\ \left(\frac{74 + 122}{2}\right) \\ S_{25,41} &= 17\ .\ 98 \\ S_{25,41} &= 1666 \end{aligned}$$

Vejamos agora um exemplo que envolve a soma dos termos de uma P.A. que leva os nossos alunos ao mesmo erro, erro este que será apresentado a seguir:

Exemplo 1.7 *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = n^2 + 2n$. O valor do* 13° *termo desta P.A. é:*

Uma solução: A primeira vista o aluno pensa que se substituir n por 13 terá o valor pedido, no entanto não terá encontrado a resposta, cometendo assim o erro.

Então, vejamos o que fazer:

Substituir primeiramente o n por 1 e assim obtermos o primeiro termo.

$$a_1 = S_1 = 12 + 2 \;.\; 1$$
$$a_1 = 3$$

Em seguida substituiremos n por 2 encontrando dessa forma a soma dos dois primeiros termos.

$$S_2 = 22 + 2.2$$
$$S_2 = 8$$

Como $S_2 = a_1 + a_2$ e os valores de a_1 e S_2 nessa equação teremos:

$$8 = 3 + a_2$$
$$a_2 = 5$$

E, portanto teremos encontrado o segundo termo da P.A.. Desta forma temos que a razão dessa P.A. é $r = 5 - 3 = 2$. Sendo assim, aplicando a fórmula do termo geral obteremos o 13° termo da P.A..

$$a_{13} = a_1 + (n-1).r$$
$$a_{13} = 3 + (13-1).2$$
$$a_{13} = 3 + 24$$
$$a_{13} = 27$$

Portanto o décimo terceiro termo da P.A. é 27.

1.2.5 Representações especiais de uma P.A.

Para facilitar a resolução de muitos problemas de progressão aritmética, utilizamos algumas notações para representarmos uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, mesmo de posse da fórmula do termo geral ou da fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita, pois com essas representações temos nossos cálculos simplificados.

Mostramos as duas soluções e deixamos a cargo do aluno fazer a sua escolha.

Vejamos tais representações práticas:

a) P.A. com 3 termos: $(\underbrace{x-r}_{a_1}, \underbrace{x}_{a_2}, \underbrace{x+r}_{a_3})$

Exemplo 1.8 *Em um triângulo retângulo, de perímetro 36 cm, os lados estão em progressão aritmética. Determine a razão da progressão aritmética e a medida dos lados do triângulo.*

Uma solução: Seja (a_1, a_2 *e* a_3) uma P.A. e sendo os mesmos, os lados do triângulo retângulo, temos que a_3 está representando a hipotenusa desse triângulo, pois é o maior termo da sequência na ordem dada, considerando essa P.A. como sendo crescente ($r > 0$), o caso decrescente ($r < 0$) fica a cargo do aluno verificar essa preposição.

Utilizando a fórmula do termo geral para expressar a_2 e a_3 em função do primeiro termo temos:

$$a_2 = a_1 + r \tag{1.12}$$

$$a_3 = a_1 + 2r \tag{1.13}$$

Lembrando que o perímetro é a soma dos lados de um polígono, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36 \tag{1.14}$$

Substituindo (1.12) e (1.13) em (1.14), têm-se:

$$a_1 + r = 12 \tag{1.15}$$

De (1.15) e (1.12), concluímos que $a_2 = a_1 + r = 12$, portanto encontramos o segundo termo da sequência. Nossa P.A. passa a ter a seguinte configuração:

$$(a_1,\ 12,\ a_1 + 2r)$$

De (1.15) temos que $a_1 = 12 - r$.

Desta forma a sequência ganha outra cara:

$$(12 - r,\ 12,\ 12 + r)$$

Sendo o triângulo retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar o valor de r:

$$(12 - r)^2 + 122 = (12 + r)^2$$
$$144 - 24r + r^2 + 144 = 144 + 24r + r^2$$
$$48r = 144 \qquad \Rightarrow \qquad r = 3$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo são: 9 cm, 12 cm e 15 cm.

Outra solução: Lembrando que o perímetro é a soma dos lados de um polígono, temos que a soma dos lados do triângulo é 36 cm; se os lados estão em P.A., genericamente podemos representá-los por:

$$x - r,\ x,\ x + r$$

Então:

$$x - r + x + x + r = 36$$
$$3x = 36 \qquad \Rightarrow \qquad x = 12cm$$

Substituindo o valor encontrado, a P.A. será:

$$12 - r,\quad 12,\ 12\ + r$$

Sendo o triângulo retângulo, sabemos que a hipotenusa é o maior lado. Como o triângulo é retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar o valor de r:

$$(12+r)^2 = 122 + (12-r)^2$$
$$144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2$$
$$48r = 144 \Rightarrow r = 3$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo são: 9 cm, 12 cm e 15 cm.

b) P.A. com 4 termos: $(\underbrace{x-3y}_{a_1},\ \underbrace{x-y}_{a_2},\ \underbrace{x+y}_{a_3},\underbrace{x+3y}_{a_4}\ \ com$ r=2y) onde $r\ =\ 2y$.

Agora, o aluno já percebendo a importância das notações depois do primeiro caso apresentado, resolveremos o caso para 4 termos com a referida representação dada. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1.9 *Num quadrilátero, os ângulos internos estão em P.A. e o maior deles mede* $150°$*. Quais são as medidas dos outros ângulos internos?*

Solução: Utilizaremos a notação especial para uma P.A. de quatro elementos.

$$x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y \quad onde \quad r = 2y$$

O exemplo informa que o maior, dentre os 4 ângulos do quadrilátero, mede $150°$.

Dessa forma temos que $x + 3y = 150°$. A soma dosângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a $360°$. Portanto:

$$x-3y+x-y+x+y+x+3y = 360° \quad \Rightarrow \quad 4x = 360° \quad \Rightarrow \quad x = 90°$$

Substituindo o valor de x em $x + 3y = 150°$ com o propósito de encontrar y chegamos a:

$$90° + 3y = 150° \quad \Rightarrow \quad 3y = 60° \quad \Rightarrow \quad y = 20°$$

Portanto, os 4 ângulos do quadrilátero que forma a P.A. são: P.A. $= (30°, 70°, 110°, 150°)$

c) P.A. com 5 termos: $(\underbrace{x-2r}_{a_1},\ \underbrace{x-r}_{a_2},\ \underbrace{x}_{a_3},\ \underbrace{x+r}_{a_4},\ \underbrace{x+2r}_{a_5})$

Deixaremos o exemplo a seguir a cargo do nosso aluno com o propósito de despertar nele, habilidades de raciocínio lógico depois dos dois casos apresentados anteriormente.

Exemplo 1.10 *Obtenha uma P.A. decrescente com 5 termos cuja soma é - 10 e a soma dos quadrados é 60.*

Vale ressaltar que as notações apresentadas acima não se restringem somente para as P.A.'s de 3 ou 4 ou 5 termos, mas também quando houver problemas que trazem consigo situações envolvendo(3 ou 4 ou 5) termos consecutivos de uma P.A. qualquer, sendo dadas características desses termos e dessa forma poderemos recorrer a essas representações especiais.

1.2.6 Interpolação aritmética

Outro dispositivo prático que nos ajuda na resolução de muitos problemas matemáticos envolvendo progressão aritmética é a fórmula que nos permite calcular a razão de uma P.A. dada o primeiro termo, o último termo e o número de termos que se queira intercalar entre os esses termos dados.

Mostraremos a seguir a fórmula e a sua devida demonstração com aplicação de alguns exemplos práticos.

Em toda sequência finita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_{n-1},\ a_n)$, os termos a_1 e a_n são denominados extremos e os demais são chamados meios. Assim, na P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17) os extremos são 2 e 17 enquanto os meios são 5, 8, 11 e 14.

Vejamos como inserir **k** meios aritméticos entre os extremos de uma P.A., que indicaremos por $\mathbf{a} = a_1$ e $\mathbf{b} = a_n$. Para tantos, teremos uma P.A. com $(k + 2)$ termos, ou seja, os **k** meios mais os extremos a_1 e a_n.

Portanto, para se determinar os meios dessa P.A. é necessário calcularmos a razão, que pode ser feito da seguinte maneira:

Substituindo $a_1 = a$, $a_n = b$ e $n = k + 2$ na fórmula do termo geral de uma P.A.

tem-se:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1).r \\
b &= a + (k+2-1).r \\
b - a &= (k+1).r \\
r &= \frac{b-a}{k+1} \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

E dessa forma temos a expressão que nos permite calcular a razão de uma P.A., inserindo k meios entre os extremos.Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.11 *Numa estrada existem dois telefones públicos instalados no acostamento: um no km 3 e outro no km 88. Entre eles serão colocados mais 16 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Determine em quais marcos quilométricos deverão ficar esses novos telefones.*

Solução: Primeiramente busquemos determinar a que distância ficarão dois telefones consecutivos, entre os que se encontram nos marcos 3 e 88 km. Essa distância está sendo representada pela razão da progressão aritmética de extremos 3 e 88. Para tanto utilizaremos a expressão $r = \frac{b-a}{k+1}$ para fazê-lo. Lembrando que queremos instalar 16 meios (telefones) aritméticos entre 3 e 88.

Este problema pode ser representado do seguinte modo:

$$3,\ \underbrace{\_\_\_,\ \_\_\_,\ \_\_\_,\ \cdots,\ \_\_\_}_{16\ \text{meios aritméticos}},\ 88$$

Utilizando (1.16), temos:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{b-a}{k+1} \\
r &= \frac{88-3}{16+1} \\
r &= \frac{85}{17} \\
r &= 5
\end{aligned}$$

Portanto, os telefones deverão ser instalados 5 km um do outro, ou seja, o próximo aparelho será instalado no marco 8 km, o seguinte, no marco 13 km e assim sucessivamente.

1.3 Juros Simples

Todos os dias as pessoas se deparam com operações financeiras relacionadas ao pagamento ou recebimento de Juros, e muitas dessas pessoas não se preocupam em saber o que essa quantia adicional (Juros) representa.

É indiscutível a importância da matemática financeira no cotidiano das pessoas. O fato de vivermos num país capitalista em desenvolvimento e que sofre os efeitos da globalização da economia torna essa importância ainda maior. Sabemos que os cidadãos exercem várias tarefas tais como: fazer aplicações financeiras, pagar empréstimos, discernir entre as melhores e piores opções na compra ou venda de algum bem.

No regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo principal (capital). Não existe a capitalização de juros nesse regime, pois os juros de determinado período não são incorporados ao principal para que essa soma sirva de base de cálculo de juros do período subsequente. Portanto, o capital crescerá a uma taxa linear, e a taxa de juros terá um comportamento linear em relação ao tempo. A aplicação de juros simples é muito limitada, tem algum sentido apenas para espaços de tempo bastante curtos.

O rendimento por uma aplicação financeira aplicada pelo prazo de um único período de tempo a que se refere a taxa de juros pode ser calculado da seguinte forma:

$$J = C_0 \ . \ i$$

Devido ao comportamento linear no regime de juros simples, se aplicarmos um capital durante um periodo n, que se refere a taxa de juros, o rendimento será calculado por:

$$J = C_0 \ . \ i \ . \ n,$$

onde J é juros produzidos depois de n períodos, do capital C_0 aplicado a uma taxa de juros por período igual a i.

O montante ou valor de resgate de uma aplicação é o capital inicialmente investido acrescido de sua remuneração no período (juros obtidos):

$$
\begin{aligned}
& montante = capital \ + \ juros \\
& M = C_0 + J \\
& M = C_0 + C_0.i.n \\
& M = C_0(1 + i.n)
\end{aligned}
$$

O cálculo do principal a partir do montante é simplesmente o processo inverso:

$$C_0 = \frac{M}{1 + i \times n}.$$

Portanto, $M = C_0(1 + i.n)$, representa o montante adquirido por uma aplicação de um capital C_0 a uma taxa de juros de i durante n períodos[1].

Exemplo 1.12 *Qual é o rendimento de* $R\$ \ 10.000,00$ *aplicados por um mês à taxa simples de* 36% *a.a.?*

Solução: Os dados são: $C = R\$ \ 10.000,00$ n $= 1$ mês, $i = 36\%$ a.a. e queremos calcular o juro J. Assim

$$J = C_0 \ . \ i \ . \ n = \ R\$ \ 10.000,00 \ . \ \left(\frac{0,36}{12}\right) \ . \ 1 = R\$ \ 300,00$$

Observe que a taxa foi dividida por doze devido ao fato dela ser anual e o tempo foi dado em meses, isto é, se quisermos transformar uma taxa anual para mensal é suficiente dividi-la por doze.

Exemplo 1.13 *Em sete meses* $R\$ \ 18.000,00$ *renderam* $R\$ \ 4.000,00$ *de juros. Qual é a taxa anual simples que foi imposta?*

Solução: Os dados são: $C = R\$ \ 18.000,00$, n $= 7$ meses, $J = R\$ \ 4.000,00$ e queremos

[1]Para mais esclarecimentos, veja a seguinte referência[3]

calcular a taxa i. Assim:

$$R\$\ 4.000,00 = R\$\ 18.000,00\ .\ \left(\frac{i}{12}\right)\ .\ 7 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{R\$\ 4000,00}{R\$\ 18.000,00}\ .\ \frac{12}{7} = 0,381 = 38,1\%\ a.a.$$

Notem que a taxa de juros i e o período n têm de ser referidos à mesma unidade de tempo. Assim, por exemplo, se num problema a taxa de juros for $i = 12\%$ *ao ano* $= \frac{12}{100} = 0,12$ e o período n = 36 meses, antes de usar as fórmulas devemos colocá-las à mesma unidade de tempo, ou seja:

12% ao ano, aplicado durante $\frac{36}{12} = 3$ anos, ou
1% ao mês $= \frac{12\%}{12}$, aplicado durante 36 meses, etc.

1.3.1 Relação entre o montante a juros simples e uma P.A.

Sabemos que numa P.A. todos os termos sofrem acréscimos constantes e iguais a r (razão da P.A.), para a obtenção do termo seguinte (posterior) e tem como termo inicial a_1 (primeiro termo da P.A.) e que numa aplicação a juros simples temos que o montante ao final de cada período, também sofre acréscimo constante e igual ao juro produzido por um período de aplicação e tem como termo inicial o capital aplicado. Desta forma, percebemos que o montante ao final do primeiro se encontra deslocado um termo à frente do primeiro termo de uma progressão aritmética, considerando $n \in \mathbb{N}$, conforme podemos observar abaixo:

Termos	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
Montantes	C_0	M_1	M_2	M_3	$\cdots$	M_{n-2}	M_{n-1}

Tabela 1.1: Relação entre P.A. e Montante

Queremos estabelecer uma correspondência entre os termos de uma P.A. e os montantes ao final de cada período, incluindo aí o capital (C_0) aplicado. Então como mostrado na tabela acima observamos que:

a_1 corresponde ao montante inicial $\rightarrow \quad a_1 = M_0 = C_0(1 + i.0) = C_0$;
a_2 corresponde ao montante ao final do primeiro período $\rightarrow \quad a_2 = M_1 = C_0(1 + i.1)$;
a_3 corresponde ao montante ao final do segundo período $\rightarrow \quad a_3 = M_2 = C_0(1 + i.2)$;

a_4 corresponde ao montante ao final do terceiro período $\rightarrow \quad a_4 = M_3 = C_0(1 + i.3)$;

....

....

a_n corresponde ao montante ao final do $(n-1)$ período $\rightarrow a_n = M_{n-1} = C_0(1+i.(n-1))$

Agora comparando a expressão que determina o termo geral de uma P.A. ($a_n = a_1 + (n-1)r$) com a expressão que determina o montante correspondente ao n-ésimo termo ($M_{n-1} = C_0[1 + i.(n-1)]$) e reescrevendo esta última ($M_{n-1} = C_0 + (n-1).i.C_0$), por comparação, temos:

$$a_n = M_{n-1} \qquad a_1 = C_0 \qquad e \qquad r = i.C_0$$

Assim, para que a sequência: $C_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ ....,\ M_{n-1}$, seja uma P.A., as três condições acima apresentadas deverão ser satisfeitas. Tendo as duas primeiras condições já verificadas resta mostrar a terceira condição.

De fato, dados dois montantes consecutivos M_k e M_{k+1} temos:

$$M_{k+1} - M_k = C_0 + (k+1)\ .\ i\ .\ C_0 - (C_0 + k\ .\ i\ .\ C_0) = i\ .\ C_0 = r$$

Para ratificarmos a relação que há entre P.A. e o montante no final de cada período, incluindo nessa sequência o capital aplicado inicialmente a juros simples, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.14 *Paulo aplicou* $R\$400,00$ *a juros simples durante 6 meses à taxa de* 12% *ao mês. Determine o montante obtido por essa aplicação no final de cada período.*

Este exemplo foi resolvido em sala de aula do seguinte modo: Dividimos a turma em 6 grupos e determinaremos que cada grupo fique com um final de período para calcular o montante e posteriormente preenchermos a tabela abaixo com os valores obtidos.

Feito os cálculos obtemos a seguinte disposição abaixo:

C_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
400	448	496	544	592	640	688

Tabela 1.2: Tabela com os valores montantes

Calculamos a razão dessa P.A., utilizando a expressão $r = i.C_0$,

$$r = i.C_0 = 48$$

Portanto, o montante ao final de cada período sofrerá um acréscimo de C_0 . i, o que na verdade está representando a razão de uma progressão aritmética e C_0 representando o primeiro termo da P.A..

Mostramos que o montante a juros simples, incluindo o capital aplicado, sempre representarão uma P.A., pois cada montante a partir do referente ao final do primeiro período serão acrescentados ao final do período, valores constantes, ou seja, adicionados a razão $(r = C_0\,.i)$.

Por fim, pedimos aos alunos que pesquisem problemas envolvendo cálculo de montante a juros simples e verifiquem se de fato esses montantes formam, ou melhor, representam uma progressão aritmética e por meio da relação $r = C_0\,.i$, pediremoss a eles que determinem a razão, confrontando com a definição de P.A. que estabelece a razão como a diferença entre o termo posterior e o anterior, apartir do segundo, isto é, $r = a_{n+1} - a_n$.

1.3.2 Representação gráfica dos Juros Simples

Regime de capitalização simples corresponde a uma progressão aritmética (P.A.), onde os juros crescem de forma linear ao longo do tempo, como mostra o gráfico abaixo, um capital de $R\$$ 1.000,00 aplicado por dez meses a uma taxa de 10% a.m., acumula um montante de $R\$$ 2.000,00 no final.

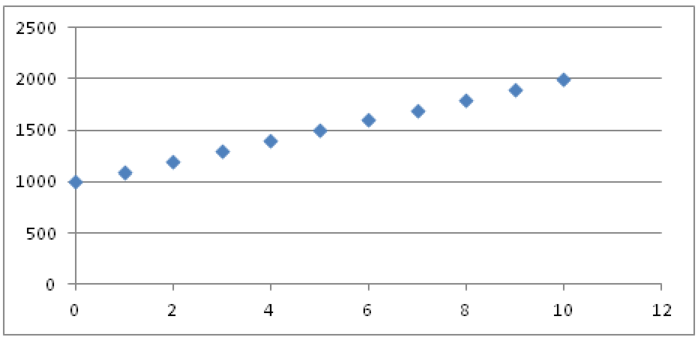

Figura 1.2: Representação gráfica dos Montantes a juro simples

1.4 A Espiral de Arquimedes

Arquimedes, nascido em 287 A. C. na cidade de Siracusa, foi o maior gênio da Antiguidade. Seus feitos nos campos da Matemática e da então incipiente Física foram admiráveis e credenciam-no a integrar o seleto rol dos três maiores matemáticos de todos os tempos junto a Isaac Newton (1642 - 1727) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Conhece-se razoavelmente bem a vida de Arquimedes porque ele é citado por vários autores do passado, em especial pelo historiador Plutarco, de Queroneia (46 d.C.- 120 d.C.), no livro Vidas de Nobres Gregos e Romanos, também conhecido por Vidas Paralelas. Filho de um astrônomo de nome Fídias, Arquimedes estudou em Alexandria, onde aprendeu a Matemática da época e fez vários amigos, com os quais se correspondia, depois de retornar a Siracusa, para servir ao rei Hierão. Ao final de sua carreira, com cerca de 75 anos, ele havia estendido as fronteiras da matemática para muito além daquilo que recebera de Euclides e outros e a Humanidade teve que esperar 19 séculos para que, com Newton, surgisse alguém que a ele pudesse ser comparado.

O paralelo com Newton é bastante pertinente, pois ambos foram grandes na Matemática, na Física e na habilidade com que construíam os mais sofisticados mecanismos. Na concepção e produção de engenhosos equipamentos e máquinas, aliás, Arquimedes nitidamente superou Newton. Surpreendem nele sua capacidade de trabalho, a abrangência dos temas de seu interesse, a originalidade de suas ideias e a profundidade, a clareza e o rigor de seus raciocínios. Várias de suas obras chegam até nós tais como foram escritas (ou com pequenas distorções) e podem ser encontradas em edições modernas: Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Corpos Flutuantes, Sobre Espirais, A Quadratura da Parábola, Sobre Conoides e Esferoides, A medida de um Círculo, O Contador de Grãos de Areia e o Método. Sabe-se que outros de seus trabalhos foram perdidos, entre eles dois sobre Mecânica (Sobre Alavancas e Sobre Centros de Gravidade), um sobre Óptica, um chamado Sobre o Calendário e outro denominado Sobre a Construção de Esferas.

No tratado Sobre Espirais, com 28 proposições, ele estudou as propriedades de uma curva criada por ele mesmo, a chamada Espiral de Arquimedes. Por definição, tal curva é a linha descrita por um ponto que, partindo da origem O, move-se uniformemente sobre um segmento de reta que, também uniformemente, gira em torno de O. Hoje, usando coordenadas polares, diríamos que a equação da Espiral de Arquimedes é $r = a.\theta$, onde **a** é uma constante. Arquimedes mostrou que sua espiral resolveria o problema da trissecção do ângulo, se fosse construtível com régua e compasso. Mostrou também como traçar sua tangente em qualquer ponto e calculou a reta de seu primeiro giro. Aliás, no traçado da tangente a sua espiral, Arquimedes considerou que um pequeno deslocamento do ponto sobre a curva pode ser visto como resultante de dois componentes (hoje diríamos vetores), um radial e outro tangencial, com que criou um conceito que se demonstrou imprescindível em todo o desenvolvimento posterior da Física[7].

Podemos então definir a Espiral de Arquimedes, também conhecida como Espiral Aritmética, como o lugar geométrico de um ponto movendo-se a velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um ponto de origem fixo a velocidade angular constante.

Em coordenadas polares $(r,\ \theta)$, a espiral de Arquimedes pode ser descrita pela equação seguinte:

$$r = a + b.\ \theta$$

sendo a e b números reais. Quando o parâmetro a muda, a espiral gira, ainda que b controla a distância em giros sucessivos.

Esta curva se distingue da espiral logarítmica pelo fato de que voltas sucessivas da mesma têm distâncias de separação constantes (iguais a $2\pi b$ se θ é medido em radianos), enquanto em uma espiral logarítmica a separação esteja dada por uma progressão geométrica.

Há de se notar que a espiral de Arquimedes tem dois braços, um para $\theta > 0$ e outro para $\theta < 0$. Os dois braços estão discretamente conectados na origem, abaixo mostramos o caso em que $\theta > 0$. Tomando a imagem refletida no eixo Y poderemos produzir o outro braço.

Às vezes, o termo é usado para um grupo mais geral de espirais.

$$r = a + b.\ \theta^{\frac{1}{x}}$$

A espiral normal ocorre quando x = 1. Outras espirais que caem dentro do grupo incluem a espiral hiperbólica ou logarítmica, a espiral de Fermat, e a espiral de Lituus. Vir-

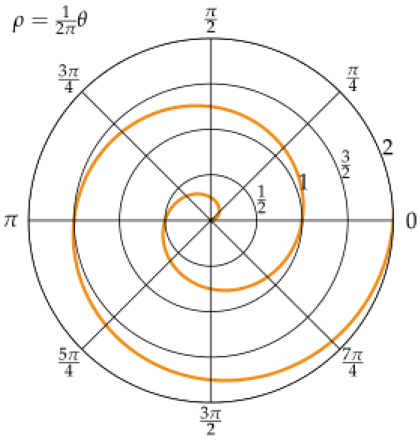

Figura 1.3: Espiral de Arquimedes

tualmente todas as espirais estáticas que aparecem na natureza são espirais logarítmicas, não de Arquimedes. Muitas espirais dinâmicas (como a espiral de Parker do vento solar, ou o padrão produzido por uma roda de Catherine) são do grupo de Arquimedes[20].

Vários tipos de espirais que ocorrem na natureza. Por exemplo, o caramujo de argonauta (1.4) que tem câmaras forma uma espiral logarítmica e uma corda de marinheiro (1.5) enrolada forma uma espiral de Arquimedes. As espirais também ocorrem em flores, nas presas de certos animais e no formato de galáxias[1].

Figura 1.4: caramujo de argonauta
Fonte: Disponível em
http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:NautilusCutawayLogarithimicSpiral.jpg

Figura 1.5: corda de marinheiro
Fonte: Disponível em http://lhe.ggpht.com/-65d-7PVtOq4/TyWSO-HnAQI/AAAAAAAAQ9A/plj-LmDtbT8/s1600-h/image%5B4%5D.png

Capítulo 2

Progressão Geométrica

2.1 Lenda do criador do jogo de xadrez

O jogo de xadrez, que tanto apaixona as pessoas, teve origem na Índia, mil anos antes de Cristo.

As lendas sobre sua origem são múltiplas. A mais plausível atribui a criação a Sissa, sacerdote brâmane, a pedido do rajá Balhait.

O rei queria um jogo em que a inteligência, o esforço, a prudência e o conhecimento fossem fatores de vitória, excluindo-se a sorte.

Balhait encantou-se quando Sissa lhe apresentou o novo jogo, batizado de "chaturanga". Ordenou que fosse preservado nos templos, por considerar que a sua prática representava um belo aprendizado para o exercício da autoridade e da Justiça. Disse o sacerdote que pedisse o que quisesse como recompensa.

Modestamente, Sissa respondeu que a satisfação do Rei já era boa recompensa. Que se contentaria com grãos de milho - um grão de milho, pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, dobrando sempre até atingir a última casa, de número 64.

O Rei achou pouco, mas como Sissa insistisse, mandou calcular o milho pedido. Surpreendeu-se com o resultado: não havia milho suficiente no mundo para atender o pedido. O número de grãos cobriria todos os continentes com uma camada de cinco centímetros de altura.

Segundo a tradição, fascinado pela inteligência do sacerdote, o Rei o nomeou seu primeiro-ministro, que era o que o ambicioso sacerdote realmente desejava[5].

Vamos analisar da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lcl}
1 - Quadrado & \rightarrow & 1\,\text{grão} = 2^0\text{grão} \\
2 - Quadrado & \rightarrow & 2\,\text{grãos} = 2^1\text{grãos} \\
3 - Quadrado & \rightarrow & 4\,\text{grãos} = 2^2\text{grãos} \\
4 - Quadrado & \rightarrow & 8\,\text{grãos} = 2^3\text{grãos} \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
64 - Quadrado & \rightarrow & = 2^{63}\text{grãos}
\end{array}
$$

Observamos que a quantidade a ser paga é a soma de todas as quantidades por cada quadradinho do tabuleiro de xadrez.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{63}$$

2.2 Propriedades das potências

A maioria dos problemas envolvendo o estudo de progressões geométricas é necessário o uso das propriedades de potência, como ferramenta indispensável para realização dos cálculos de P.G..

Por essa razão, apresentamos essas propriedades, no intuito de facilitar a aprendizagem do aluno, uma vez que é esse um dos nossos objetivos.

$$\underbrace{a}_{base}{}^{\overbrace{n}^{expoente}} = \underbrace{a\ .\ a\ .\ a\ .\ a\ .\ ...\ .\ a}_{n\,vezes}$$

1 - Toda potência de expoente 1 é igual a base. Exemplos:

$$4^1 = 4 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

2 - Toda potência de expoente zero e base não nula é igual a 1. Exemplos:

$$5^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

3 - Todo número **a**, diferente de zero, temos que vale a seguinte propriedade:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{\underbrace{(-4)\,.\,(-4)\,.\,(-4)}_{3\,vezes}} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$$

4 - O produto $3^5\,.\,3^3$ pode ser escrito na forma de uma única potência.

$$3^5\,.\,3^3 = \underbrace{3.3.3.3.3}_{5\,vezes}\,.\,\underbrace{3.3.3}_{3\,vezes} = 3^8$$

Para multiplicarmos potências que possuem a mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes, assim:

$$3^5\,.\,3^3 = 3^{5+3} = 3^8$$

5 - A divisão $4^3 \div 4^5$ pode ser escrita na forma de uma única potência.

$$4^3 \div 4^5 = \frac{4^3}{4^5} = \frac{\overbrace{4.4.4}^{3\,vezes}}{\underbrace{4.4.4.4.4}_{5\,vezes}} = \frac{1}{4.4} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$$

Para dividirmos potências que possuem a mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes, assim:

$$4^3 \div 4^5 = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

6 - Podemos reescrever $(11\ .\ 6)^4$ como o produto de duas potências.

$$(11\,.\,6)^4 = \underbrace{(11\times 6)\ .\ (11\times 6)\ .\ (11\times 6)\ .\ (11\times 6)}_{o\ fator\ (11\times 6)\ aparece\ 4\ vezes} = \underbrace{11\times\ 11\times\ 11\times 11}_{4\ vezes}\times\underbrace{6\times 6\times 6\times 6}_{4\ vezes} = 11^4\times 6^4$$

Para elevar o produto de números inteiros a uma potência, elevamos cada fator a essa potência, assim:

$$(11\times 6)^4 = 11^4\times 6^4$$

7 - Para o cálculo de potência de uma potência, procedemos da seguinte maneira:

$$\left(5^2\right)^3 = \underbrace{5^2\ .\ 5^2\ .\ 5^2}_{3\ vezes} = 5^{2+2+2} = 5^6$$

Para elevar uma potência a um expoente, mantemos a base e multiplicamos os expoentes, assim:

$$\left(5^2\right)^3 = 5^{2\ \cdot\ 3} = 5^6$$

8 - Para efetuarmos o cálculo de potência de frações, agrimos assim:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Para fazer potência de frações, basta calcular a potência do numerador e a potência do denominador, assim:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

O resumo apresentado das propriedades de potências desempenhará um papel importante para a aprendizagem do aluno no que tange o estudo de P.G., tendo em vista que o mesmo recorrerá a essas propriedades para a resolução de problemas envolvendo P.G., e sendo dessa forma, consideraremos de fundamental importância tal resumo, uma vez que, no estudo de P.G. trabalharemos por demais com potências.

Vale ressaltar que não estaremos perdendo tempo fazendo-a, pois os alunos estão sempre recorrendo a essas propriedades nos diversos assuntos da Matemática, ou até mesmo em outras disciplinas, como por exemplo, na Física e na Química. Portanto, sua aplicação é essencial para o nosso estudo em questão, visto que, a operação de multiplicação se faz presente de forma contínua no estudo de P.G..

2.3 Progressão Geométrica

Progressão geométrica é uma sequência de números reais não nulos cujo quociente entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante, que aqui no estudo de P.G., como são conhecidas as progressões geométricas, indicada pela letra q.

Dizemos que uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada. Também podemos representar uma progressão geométrica de igual forma como representamos uma P.A.:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

com $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\ \in \mathbb{N}$ e a_i representa i-ésimo termo.

Alguns exemplos de progressões geométricas:

i - $(1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ ...\ )\quad onde \quad a_1 = 1 \quad e \quad q = 3$

ii - $(-1,\ -3,\ -9,\ -27,\ -81,\ ...\ )\quad onde \quad a_1 = -1 \quad e \quad q = 3$

iii - $(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ ...\ )\quad onde \quad a_1 = 1 \quad e \quad q = \frac{1}{2}$

iv - $(-32,\ -16,\ -8,\ -4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},..)\quad onde \quad a_1 = -32 \quad e \quad q = \frac{1}{2}$

v - $(6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ ....\ )\quad onde \quad a_1 = 6 \quad e \quad q = 1$

vi - $(3,\ -3,\ 3,\ -3,\ 3,\ -3,\ 3,\ ...\ )\quad onde \quad a_1 = 3 \quad e \quad q = -1$

vii - $(12,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...\ )\quad onde \quad a_1 = 12 \quad e \quad q = 0$

2.3.1 Classificação:

Crescentes: Quando cada termo é maior que o anterior. E que por sua vez pode ocorrer de duas maneiras.

a) com termos positivos:

$$a_n > a_{n-1} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \qquad \leftrightarrow \qquad q > 1$$

Exemplo: i

b) com termos negativos:

$$a_n > a_{n-1} \qquad \leftrightarrow \qquad 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \qquad \leftrightarrow \qquad 0 < q < 1$$

Exemplo: iv

Constantes:: Ocorre quando termo é igual ao anterior. E que por sua vez pode ocorrer de duas maneiras.

a) com termos todos nulos:

$$a_1 = 0 \qquad e \qquad q \;\; qualquer$$

b) com termos iguais e não nulos:

$$a_n = a_{n-1} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \qquad \leftrightarrow \qquad q = 1$$

Exemplo: v

Decrescentes: Ocorre quando cada termo é menor que o anterior. E que por sua vez pode ocorrer de duas maneiras.

a) com termos positivos:

$$a_n < a_{n-1} \qquad \leftrightarrow \qquad 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \qquad \leftrightarrow \qquad 0 < q < 1$$

Exemplo: ii

b) com termos negativos:

$$a_n < a_{n-1} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \qquad \leftrightarrow q > 1$$

Exemplo: iii

Alternantes:

Ocorre quando cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

Exemplo: vi

Estacionárias: Ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 =$ ...... $= 0$, portanto $q = 0$. Exemplo: vii

2.3.2 Termo geral de uma P.G.

Afim de estudarmos as progressões geométricas, é necessário conhecermos os seus termos, para isso apresentamos a seguir a fórmula do termo geral que é dada por:

$$a_n = a_1 \ . \ q^{n-1}$$

Note que esta fórmula depende apenas do termo inicial a_1 e da razão q.

Demonstração: De fato, pela definição de P.G. e admitindo que temos o primeiro termo $(a_1 \neq 0)$ e a razão $(q \neq 0)$, os termos podem ser obtidos da seguinte forma:

$$a_2 = a_1 \, . \, q$$
$$a_3 = a_2 \, . \, q$$
$$a_4 = a_3 \, . \, q$$
$$.....................$$
$$a_n = a_{n-1} \, . \, q$$

Multiplicando essas (n - 1) igualdades temos:

$$a_2 \, . \, a_3 \, . \, a_4 \, . \, ... \, . \, a_n = a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \, . \, ... \, . \, a_{n-1} \, . \, \underbrace{q \ . \ q \ . \ q \ . \ \cdots \ . \ q}_{n\text{ - }1\text{ vezes}}$$

Cancelando os termos iguais nos dois lados da igualdade, temos:

$$a_n = a_1 \, . \, q^{n-1} [10]$$

■

Exemplo 2.1 *Vamos determinar o vigésimo termo da P.G. (2, 6, 18, ...).*

Solução: Dados do problema: $a_1 = 2$ e $q = \dfrac{18}{6} = 3$

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral temos:

$$a_{20} = a_1 \,.\, q^{20-1}$$

$$a_{20} = 2 \,.\, 3^{19}$$

$$a_{20} = 2324522934$$

Com o uso de uma calculadora cientifica, obtemos um número com dez dígitos.

Desta maneira mostramos a importância da fórmula do termo geral da P.G., diante de uma situação simples, mas que certamente os levariam a muitas contas, se caso fossem calcular cada termo dessa PG até obterem o vigésimo.

Por outro lado, há situações em que o conhecendo-se dois termos de uma P.G. o aluno desejando determiná-la, recorrerá ao termo geral, no entanto se deparará diante de um sistema com duas incógnitas (o primeiro termo a_1 e a razão q) a resolver. Para simplificar o cálculo e reforçar ainda mais o conceito de P.G., podemos reescrever a expressão do termo geral da seguinte forma:

$$a_n = a_k \,.\, q^{n-k} \quad (n \; e \; k) \;\in\; N$$

Demonstração: Seja a P.G. $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots.\,,\, a_{k-1},\, a_k,\, \ldots..,\, a_{n-1},\, a_n)$ com $k, n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 \;.\; q^{n-1} \tag{2.1}$$

$$a_k = a_1 \;.\; q^{k-1} \tag{2.2}$$

Agora, dividindo-se (2.1) por (2.2), obtemos:

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_1 \;.\; q^{n-1}}{a_1 \;.\; q^{k-1}} \Rightarrow a_n = a_k \;.\; q^{n-k} \tag{2.3}$$

■

Com fórmula (2.3) podemos calcular a razão de uma P.G., conhecendo dois termos quaisquer da mesma. Uma outra possibilidade, é de obtermos qualquer termo de uma P.G., a partir de um termo e a razão dessa P.G. Ainda, podemos utilizar a mesma ideia aplicada na P.A., que corresponde ao fato de avançar ou retroceder numa sequencia a partir de um determinando termo, para determinarmos outro termo da sequência. Ou seja, dada a P.G.$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n)$ para avançarmos um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, para retroceder um termo basta dividir pela razão, para retroceder dois termos, basta dividir duas vezes pela razão[4][11].

Exemplo 2.2 *Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 7 e o oitavo termo vale 189. Quanto vale o sétimo dessa progressão?*

Solução: $a_8 = a_5 \,.\, q^3$, pois ao passar do quinto para o oitavo, avançamos 3 termos. Logo:

$$7\ .\ q^3 = 189$$
$$q^3 = 27$$
$$q = 3$$

De forma análoga, temos:

$$a_7 = a_5\ .\ q^2$$
$$a_7 = 7\ .\ 32$$
$$a_7 = 63$$

2.3.3 Propriedades:

As propriedades constituem fundamental importância na P.G., e as mesmas são responsáveis por resolver muitos problemas sobre P.G..

A P.G. possui duas propriedades básicas, que são:

Propriedade 1: Numa P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos, ou seja:

$$a_m^2 = a_1 \times a_n, \quad \text{onde :} \quad a_m \text{ é o termo médio.}$$

Demonstração: Seja a P.G. $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n)$ sendo n ímpar, tem-se que há $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ termos antes e depois do termo médio, dessa forma podemos escrever as seguintes expressões:

$$a_m = a_1.q^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.4}$$

$$a_n = a_m \,.\, q^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.5}$$

Dividindo (2.4) por (2.5), tem-se:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1.q^{\frac{n-1}{2}}}{a_m.q^{\frac{n-1}{2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1}{a_m} \quad \rightarrow \quad {a_m}^2 = a_1 \,.\, a_n$$

■

Portanto, em qualquer P.G. com o número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Exemplo 2.3 *Seja a P.G.* (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192)*, verifique a propriedade dada acima.*

Solução: De acordo com a propriedade temos que o termo médio é o quarto termo. E dessa forma têm-se:

$$24^2 = 3\ .\ 192$$
$$576 = 576$$

E portanto se verifica a propriedade dada.

Propriedade 2: O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma P.G. é igual ao produto desses extremos, ou seja:

$$a_p\ .\ a_q = a_1\ .\ a_n$$

Demonstração: Seja a P.G.: $(\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_p,}_{temos\, p\ termos}\ ...,\ \underbrace{a_q, ..., a_{n-1}, a_n}_{temos\ p\ termos})$. Observamos que a partir do primeiro termo até o termo a_p existem p termos e a partir do termo a_q até o termo a_n também existem p termos. Por isso esses termos são denominados de equidistantes dos extremos. Temos que provar que o produto desses termos $(a_p \,.\, a_q)$ é igual ao produto dos extremos $(a_1 \,.\, a_n)$.

De fato:

Temos que,

$$a_p = a_1 \,.\, q^{p-1} \tag{2.6}$$

$$a_n = a_q \,.\, q^{p-1} \tag{2.7}$$

Dividindo-se (2.6) por (2.7) tem-se:

$$\frac{a_p}{a_n} = \frac{a_1 \,.\, q^{p-1}}{a_q \,.\, q^{p-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_p}{a_n} = \frac{a_1}{a_q} \quad \Rightarrow \quad a_p \,.\, a_q = a_1 \,.\, a_n$$

■

Exemplo 2.4 *Seja a PG* $(3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384)$*, verifique a propriedade dada acima.*

Solução: De acordo com a propriedade temos os seguintes pares de termos equidistantes dos extremos: 6 e 192; 12 e 96; 24 e 48. E desta forma temos:

$$\begin{aligned} 6 \,.\, 192 &= 3 \,.\, 384 \\ 12 \,.\, 96 &= 3 \,.\, 384 \\ 24 \,.\, 48 &= 3 \,.\, 384 \end{aligned}$$

o que verifica a propriedade dada.

2.3.4 Soma dos n termos de uma P.G. finita

Antes de apresentarmos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. e a sua demonstração, vamos resolver umm exemplo, em que o aluno tem todas as condições de determinar a soma desejável dos termos de uma P.G..

Exemplo 2.5 *Obtenha a soma dos dez primeiros termos da PG* $(1,\ 2,\ 4,\ ...\ )$.

Com cálculos básicos de multiplicação e adição, o aluno chegará à solução do problema. Vejamos como ele se sai quando pedimos para que calcule a soma dos vinte primeiros termos da mesma P.G..

Certamente não tentarão buscar uma solução, em decorrência da quantidade de termos pedidos para tal soma e por outro lado, se tornaria muito cansativo e necessitaria de muito tempo para encontrá-la, o que os desestimulariam.

Então, diante desse desestimulo, apresentaremos a seguir a fórmula da soma dos n termos iniciais de uma PG finita e em seguida a sua demonstração. Para posterior resolvermos o problema lançado para o nosso aluno e soma dos grãos necessários para pagar a sua promessa ao inventor do xadrez.

Sendo dada uma PG, isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q, a seguir determina a soma (S_n) dos n termos iniciais dessa progressão geométrica.

$$S_n = a_1 \, . \, \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \quad com \quad q \neq 1$$

Agora vejamos a demonstração dessa fórmula:

Demonstração: Temos que:

$$S_n = a_1 + a_1 \, . \, q + a_1 \, . \, q^2 + \; .... \; + a_1 \, . \, q^{n-2} + a_1 \, . \, q^{n-1} + a_1 \, . \, q^n \tag{2.8}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.8)por q, obtemos:

$$q \, . \, S_n = a_1 \, . \, q + a_1 \, . \, q^2 + a_1 \, . \, q^3 + \; ..... \; + a_1 \, . \, q^{n-1} + a_1 \, . \, q^n \tag{2.9}$$

Comparando os segundos membros de (2.8) e (2.9), observamos que a parcela a_1 só aparece em (2.8), a parcela $a_1 \, . \, q^n$ só aparece em (2.9) e todas as outras partes são comuns às duas igualdades, então, subtraindo (2.9) de (2.8), temos:

$$q \, . \, S_n = a_1 \, . \, q^n - a_1 \quad \Rightarrow \quad S_n \, .(q-1) = a_1 \, . \, (q^n - 1)$$

E portanto, a soma dos n termos iniciais de uma PG é dada por:

$$S_n = a_1 \, . \, \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \quad com \; q \; \neq 1$$

■

Retomando para o problema jogado para o aluno que pedia para se determinar a soma dos vinte primeiros termos iniciais da PG (1, 2, 4, ...), temos:

Dados do problema: $a_1 = 1$ e $q = 2$

Substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PG finita temos:

$$S_{20} = 1\,.\left(\frac{2^{20} - 1}{2 - 1}\right)$$

$$S_{20} = 2^{20} - 1$$

$$S_{20} = 1048576$$

Apresentaremos agora uma solução para a lenda dos grãos de trigo.

Temos a nossa PG $(2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ ....,\ 2^{63})$ onde $q = 2$ e $a_1 = 2^0 = 1$, $a_{64} = 1 \times 2^{63}$ e $n = 64$

Utilizando a fórmula da soma obtemos:

$$S_{64} = 1\,.\left(\frac{2^{64} - 1}{2 - 1}\right)$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

$$S_{64} = 18446744073709551615$$

Como vemos, o criador do xadrez não tinha nada de bobo.

Vejamos outro exemplo para reforçar a ideia da soma dos termos de uma PG:

Exemplo 2.6 *No 1° dia de dezembro, um menino propôs ao pai que lhe desse R\$1,00 e fosse, a cada dia, dobrando o valor da quantia diária até 24 de dezembro. O filho usaria o dinheiro para comprar um presente de Natal para o pai. De quanto vai dispor o filho para comprar o presente?*

Solução: Temos que o primeiro termo dessa PG é 1, a razão é 2 e apresenta 24 termos. Substituindo na fórmula acima demonstrada temos:

$$S_n = a_1 \ . \ \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$
$$S_{24} = 1 \ . \ \left(\frac{2^{24} - 1}{2 - 1}\right)$$
$$S_{24} = R\$ \ 16.777.215, 00$$

Portanto, o pai desse menino precisará de $R\$ \ 16.777.215, 00$. Uma quantia bem elevada para um presente.

2.3.5 Soma dos termos de uma P.G. infinita

Numa P.G. do tipo (1, 4, 16, 64, ...) não seria possível calcularmos exatamente a soma de todos os seus termos que crescem infinitamente. Porém, há casos em que a PG é decrescente, ou seja, possui razão $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$ e neste caso, calculamos a sua soma.

Consideremos, por exemplo, uma criança que possui uma barra de chocolate e não quer vê-la acabar tão rápido. Essa criança decide, então, que vai comer sempre a metade do pedaço que ela tiver.

Assim, no primeiro dia comerá a metade da barra inteira. No segundo dia, a metade da metade que sobrou do dia anterior. No terceiro dia, comerá a metade do pedaço do dia anterior, e assim por diante.

Esses pedaços consumidos formam uma P.G. infinita (considerando-se que a criança conseguiria dividi-la sempre) e decrescente:

Porém, a soma de todas essas quantidades seria igual à barra toda [17].

Dessa forma, é possível determinar a soma desse tipo de P.G. infinita, por meio da expressão:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

É importante destacarmos que a última fórmula somente poderá ser utilizada no cálculo da soma dos termos de uma P.G. infinita na qual $|q| < 1$.

Na demonstração abaixo usaremos o conceito de limite de forma bem básica que possibilitará o entendimento dessa demonstração com facilidade. Sendo assim, vejamos a demonstração dessa fórmula matemática.

Demonstração: Tomemos como ponto de partida, a fórmula para determinar a soma dos termos de uma P.G. finita:

$$S_n = a_1 \ . \ \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \tag{2.10}$$

Seja a P.G. infinita $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...\ )$, e reescrevendo (2.10), temos:

$$S_n = a_1 \ . \ \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{a_1 \ . \ q^n}{q - 1} \ - \ \frac{a_1}{q - 1} \tag{2.11}$$

Notemos que a_1 e q são constantes numa P.G., de modo que $\left(\dfrac{a_1}{q-1}\right)$ também o será. Por outro lado, q^n é variável, devido à n.

Dessa forma, temos que quando $-1 \ < \ q \ < \ 1$ e $q \neq 0$ e n tendendo para o infinito temos que o termo q^n se aproximará de zero, vejamos:
Fazendo $q = \dfrac{1}{a}$ com $a \ \in \ Z$ e $n \ \rightarrow \ \infty$, temos:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \cong 0$$

Consideraremos $\left(\dfrac{1}{a^n}\right)$ igual a zero, por estar tão próximo de zero à medida que fazemos n crescer. Assim sendo, podemos reescrever (2.11) da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{a_1 \ . \ 0}{q - 1} \ - \ \frac{a_1}{q - 1}$$

$$S_n = 0 \ + \ \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \tag{2.12}$$

Portanto, para obtermos a soma dos infinitos termos de uma P.G. infinita decrescente e substituindo n por ∞, utilizaremos a fórmula a seguir:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \tag{2.13}$$

■

Vale reforçar que a condição $-1 < q < 1$ é necessária para a determinarmos a soma da sequência[1].

Agora vamos utilizar (2.13) para verificar que a quantidade de chocolate consumida pelo menino, corresponde uma barra de chocolate.

Sendo assim, temos: $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, substituindo na expressão dada, obtermos:

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad S_\infty = 1$$

Conforme fora mencionado acima.

Outra aplicação da fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita é determinação das frações geratrizes de dízimas periódicas. E que poderá ser mostrado com um exemplo simples e prático.

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.7 *Utilizando a fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, encontre a fração geratriz da dízima periódica* $0,666...$.

Solução: Podemos decompor a dízima periódica através da adição de infinitas parcelas as quais são termos de uma PG. Então vejamos a decomposição:

$$0,666... = 0,6 + 0,06 + 0,006 + ... = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \;... \;= \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \;...$$

Observemos que as parcelas determinam a P.G. $(\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + ...)$ de razão:

$$q = \frac{\frac{6}{10^3}}{\frac{6}{10^2}} = \frac{1}{10}$$

[1]Para mais esclarecimentos, veja a seguinte referência[19]

Como $-1 < \dfrac{1}{10} < 1$, temos que $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica $0,666...$ é $\dfrac{2}{3}$

2.3.6 Representações especiais para uma P.G.

Pata resolver muitos problemas de P.G. utilizamos algumas notações para representá-la. Geralmente são PG com 3 ou 4 ou 5 termos, então vejamos as seguintes notações práticas:

a) PG com 3 termos: $(\underbrace{\frac{x}{q}}_{a_1}, \underbrace{x}_{a_2}, \underbrace{x\ .\ q}_{a_3})$

Exemplo 2.8 *A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Quais são esses números?*

Solução: Sejam $(x-r,\ x,\ x+r)$ a progressão aritmética e $(x-r+1,\ x,\ x+r)$ a progressão geométrica.

Dado que $x - r + 1 + x + x + r = 19$, tem-se que $3x = 18$ portanto: $x = 6$

Substituindo o valor de x encontrado na P.G. tem-se:

$$6 - r + 1,\ 6,\ 6 + r \quad \rightarrow \quad 7 - r,\ 6,\ 6 + r$$

E pela definição de P.G. temos:

$$\frac{6}{7-r} = \frac{6+r}{6}$$

o que resulta em: $36 = (7-r) \times (6+r)$ De onde encontramos os seguintes valores para razão: $r = 3$ ou $r = -2$

Desta forma os números são 4, 6 e 9 ou 9, 6 e 4.

É interessante mostrarmos para o aluno que qualquer uma das sequências encontradas satisfazem o problema. Para isto deixemos a cargo do nosso aluno tal verificação.

b) PG com 4 termos: $(\underbrace{\frac{x}{y^3}}_{a_1}, \underbrace{\frac{x}{y}}_{a_2}, \underbrace{x\ .\ y}_{a_3}, \underbrace{x\ .\ y^3}_{a_4})$ com $q = y^2$

c) PG com 5 termos: $\underbrace{\frac{x}{q^2}}_{a_1}, \underbrace{\frac{x}{q}}_{a_2}, \underbrace{x}_{a_3}, \underbrace{x\ .\ q}_{a_4}, \underbrace{x\ .\ q^2}_{a_5}$

Da mesma forma que no estudo de progressão aritméticas, as notações apresentadas acima não se restringem somente para as P.A.'s de 3 ou 4 ou 5 termos, mas também quando houver problemas que trazem consigo situações envolvendo(3 ou 4 ou 5) termos consecutivos de uma P.G. qualquer, sendo dadas características desses termos.

2.3.7 Interpolação geométrica

É possível supor a quantidade de pessoas presentes em um evento público, correspondente a cada hora, aos termos de uma progressão geométrica em um determinado período do dia. Inicialmente, existiam 8 pessoas, mas após 5 horas, o número total era igual a 25000. Dessa forma, como evoluiu o número total de pessoas por hora?
Este problema pode ser representado do seguinte modo:

$$8, \underbrace{\_\_\_, \ \_\_\_, \ \_\_\_, \ \_\_\_}_{\text{4 meios geométricos}}, \ 2500$$

Utilizando os conceitos estudados de PG, podemos escrever:

$$a_1 = 8 \quad a_n = a_6 = 2500 \quad n = 4 + 2 = 6 \quad q = ?$$

Diante desses dados podemos obter a razão utilizando a fórmula do termo geral da PG:

$$a_6 = a_1 \,.\, q^{6-1}$$
$$2500 = 8 \,.\, q^5$$
$$q^5 = 3125$$
$$q = \sqrt[5]{3125}$$
$$q = 5$$

Logo, a cada hora, o número de pessoas presentes ao evento quintuplicava, ou seja, era multiplicado por cinco.

Daí podemos dizer que:

$$a_1 = 8 \quad a_2 = 40 \quad a_3 = 200 \quad a_4 = 1000 \quad a_5 = 5000 \quad a_6 = 25000$$

Na situação apresentada, fizemos uso de uma interpolação geométrica. Nesse caso, a palavra interpolação significa inserção de elementos na sequência. Os termos inseridos são chamados de meios geométricos.

Interpolar ou inserir **k** meios geométricos entre os números **a** e **b** significa construir uma PG com $(k+2)$ termos, onde **a** é o primeiro e **b** é o último termo da progressão geométrica.

2.3.8 Produto dos n termos de uma P.G.

Conhecendo-se as propriedades de P.G., podemos determinar o produto desses n termos por meio da seguinte expressão:

$$P_n = {a_1}^n \, . \, q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Vejamos a demonstração dessa fórmula:

Demonstração:

Seja

$$P = a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \, . \, \cdots \, . \, a_n \tag{2.14}$$

Temos dois casos a considerar:

1° caso: n par

Sendo **n** par temos $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ pares de termos equidistantes dos extremos. E pela propriedade dada anteriormente, temos que o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual a produto dos extremos. Dessa forma podemos reescrever (2.14) da seguinte forma:

$$P_n = (a_2 \, . \, a_{n-1})\,(a_3 \, . \, a_{n-2})\,(a_4 \, . \, a_{n-3}) \cdots \left(a_{\frac{n}{2}} \, . \, a_{\frac{n}{2}+1}\right)(a_1 \, . \, a_n) \tag{2.15}$$

Como cada par de produto em (2.15) é igual ao produto dos extremos temos:

$$P_n = \underbrace{(a_1 \ . \ a_n)\,(a_1 \ . \ a_n)\cdots(a_1 \ . \ a_n)}_{\frac{n}{2}\ pares} \tag{2.16}$$

Como temos $\frac{n}{2}$ pares de produto, logo podemos rescrever (2.16):

$$P_n = (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{n}{2}} \tag{2.17}$$

Substituindo a_n por $a_1 \ . \ q^{n-1}$ em (2.17) tem-se:

$$P_n = \left(a_1 \ . \ a_1 \ . \ q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$P_n = {a_1}^n \ . \ q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

2° caso: n ímpar

Sendo n ímpar temos $\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)$ pares de termos equidistantes dos extremos mais o termo médio, que pela segunda propriedade de PG dada, tem - se que o quadrado desse termo médio (a_m) é igual a produto dos extremos. Dessa forma podemos reescrever (2.14) da seguinte maneira:

$$P_n = (a_2 \ . \ a_{n-1})\,(a_3 \ . \ a_{n-2})\,(a_4 \ . \ a_{n-3})\cdots\left(a_{\frac{n-1}{2}} \ . \ a_{\frac{n+3}{2}}\right) \ . \ a_m \ . \ (a_1 \ . \ a_n) \tag{2.18}$$

Como cada par de produto que há é igual ao produto dos extremos temos:

$$P_n = \underbrace{(a_1 \ . \ a_n)\,(a_1 \ . \ a_n)\cdots(a_1 \ . \ a_n)}_{\frac{n-3}{2}\ parcelas\ de\ produtos} \ . \ a_m \ . \ (a_1 \ . \ a_n) \tag{2.19}$$

Dessa forma temos $\left(\frac{n-3}{2} + 1\right)$ parcelas de produtos mais um termo, o termo médio. Assim sendo, podemos reescrever (2.19) da seguinte forma:

$$P_n = (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{n-1}{2}} \ . \ a_m \tag{2.20}$$

Sabendo-se que ${a_m}^2 = a_1 \ . \ a_n$ tem-se que $a_m = (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{1}{2}}$ e substituindo esta em

(2.20), temos:

$$P_n = (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{n-1}{2}} \ . \ (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{1}{2}} = (a_1 \ . \ a_n)^{\frac{n}{2}} \tag{2.21}$$

Substituindo a_n por $a_1 \ . \ q^{n-1}$ em (2.21) tem-se:

$$P_n = {a_1}^{\frac{n}{2}} \ . \ \left(a_1 \ . \ q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$P_n = {a_1}^{\frac{n}{2}} \ . \ {a_1}^{\frac{n}{2}} \ . \ q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$P_n = {a_1}^{n} \ . \ q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\blacksquare$

Vejamos a verificação da fórmula com o exemplo a seguir:

Exemplo 2.9 *Seja a P.G.:* (3, 6, 12, 24)*, temos* $P_4 = 3 . 6 . 12 . 24 = 5184$*. Determine* P_4 *dessa P.G. utilizando a fórmula do produto dos n primeiro termos de uma P.G.*

Solução: Dados: $a_1 = 3 \quad q = 2 \quad n = 4$, tem-se:

$$P_4 = 3^4 \ . \ 2^{\frac{4(4-1)}{2}}$$
$$P_4 = 81 \ . \ 2^6$$
$$P_4 = 81 \ . \ 64$$
$$P_4 = 5184$$

Dessa forma verificamos a validade da fórmula.

2.4 Juros compostos

As primeiras transações comerciais de que se tem notícia foram as trocas de mercadorias. Preocupado com os bens que poderia acumular, o homem começou a trocar o excedente do que produzia por mercadorias que lhe fossem mais convenientes. É daí que vem o termo salário, quantidade de sal que era dada como pagamento. As primeiras moedas surgiram no século VII a.C. na Turquia. Eram peças feitas geralmente de metal, que substituíam as mercadorias e iam organizar a comercialização de produtos. Durante muito tempo possuíram um valor real que dependia, portanto, do material que eram feitas, ao contrário do que acontece hoje, quando as moedas têm valor nominal.

Na Idade Média surgiu o costume de se guardar os valores com o ourives, pessoa que negociava objetos de ouro e prata. E como garantia ficavam com um recibo que com o tempo acabou sendo usado para efetuar pagamentos, dando origem à moeda de papel. Ficava assim instituída a figura do banco.

A relação entre o dinheiro e o tempo foi logo percebida, uma vez que em processos de acumulação de capital a moeda desvalorizava com o passar do tempo. Foi então que surgiu o conceito de juro, uma espécie de remuneração do banqueiro.

Por volta de 575 a. C., a Babilônia sediava alguns escritórios de banqueiros que cobravam altas taxas pelo dinheiro que emprestavam a fim de financiar o comércio internacional da época. O juro era pago como uma recompensa pelo dinheiro emprestado, como se fosse um aluguel. Com o tempo, uma extensa rede bancária foi criada no século XII, iniciada em Veneza. Proliferavam-se as instituições financeiras.

Assim se desenvolveu a Matemática Financeira, que utiliza uma série de conceitos matemáticos aplicados à análise de dados financeiros em geral. É uma área da Matemática especialmente prática, pois é aplicada em situações particulares e objetivas.

Atualmente, qualquer transação comercial demanda, de quem a faz, certo conhecimento de alguns conceitos específicos dessa área da Matemática. A simples decisão de se comprar um bem à prazo ou a vista envolve o cálculo financeiro: no caso de se dispor do dinheiro e ele estar aplicado, precisaremos comparar os juros cobrados pela loja e os oferecidos pelo banco.

O regime de juros compostos é o mais comum no dia-a-dia do sistema financeiro e do cálculo econômico. Nesse regime os juros gerados a cada período são incorporados ao capital aplicado para o cálculo de juros do período subsequente. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação é incorporado a ela, passando a participar da geração de rendimentos no período seguinte; dizemos então que neste sistema são cobrados juros sobre juros, isto é, os juros são capitalizados. Chamamos de capitalização ao processo de incorporação dos juros ao principal (capital)[6].

No quadro abaixo apresentamos um exemplo. Suponha que se aplicássemos $R\$ \ 1.000,00$

durante três anos à taxa de 20% a.a., teríamos os seguintes rendimentos no regime de juro simples e de juros compostos.

	JURO SIMPLES		JUROS COMPOSTOS	
ANO	RENDIMENTO	MOTANTE	RENDIMENTO	MOTANTE
1	R$ 1.000,00 x 0,2 = R$ 200,00	R$ 1.200,00	R$ 1.000,00 x 0,2 = R$ 200,00	R$ 1.200,00
2	R$ 1.000,00 x 0,2 = R$ 200,00	R$ 1.400,00	R$ 1.200,00 x 0,2 = R$ 240,00	R$ 1.440,00
3	R$ 1.000,00 x 0,2 = R$ 200,00	R$ 1.600,00	R$ 1.440,00 x 0,2 = R$ 288,00	R$ 1.728,00

Figura 2.1: Tabela comparativa entre JS e JC

Um investimento de $R\$\ 1.000,00$ a juros simples de 20% a.a. ganha $R\$\ 200,00$ por ano. Em três anos o montante seria de $R\$\ 1.600,00$. Entretanto, se, à medida que forem recebidos, os juros forem incorporados ao principal, o montante será $R\$\ 1.728,00$ ao término dos três anos. A juros compostos o dinheiro cresce exponencialmente em progressão geométrica ao longo do tempo, dado que os rendimentos de cada período são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez a render juros.

2.4.1 Demonstração da fórmula do montante a juros composto

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal. Vejamos a demonstração da fórmula que nos permite calcularmos o montante nesse regime de capitalização.

Demonstração: Para calcularmos, no sistema de juros compostos, o montante **M** produzido por um capital **C**, aplicado à taxa **i** ao período, no fim de **n** períodos, temos:
1º período:

$$M_1 = C + J_1 = C + i\ .\ C = C(1+i)$$

2º período:

$$
\begin{aligned}
M_2 &= M_1 + i \ . \ M_1 \\
M_2 &= C(1+i) + i \ . \ C(1+i) \\
M_2 &= C(1+i)(1+i) \\
M_2 &= C(1+i)^2
\end{aligned}
$$

3º período:

$$
\begin{aligned}
M_3 &= M_2 + i \ . \ M_2 \\
M_3 &= C(1+i)^2 + i \ . \ C(1+i)^2 \\
M_3 &= C(1+i)^2 \ . \ (1+i) \\
M_3 &= C(1+i)^3
\end{aligned}
$$

....

....

n períodos:

$$
\begin{aligned}
M_n &= M_{n-1} + i \ . \ M_{n-1} \\
M_n &= C(1+i)^{n-1} + i \ . \ C(1+i)^{n-1} \\
M_n &= C(1+i)^{n-1} \ . \ (1+i) \\
M_n &= C(1+i)^n
\end{aligned}
$$

Podemos escrever então que, no sistema de juros compostos, o capital **C**, aplicado à taxa **i** ao período, produz juros **J** e gera um montante M_n no fim de **n** períodos:

$$M_n = C \ . \ (1+i)^n$$

■

Agora, fazendo uso da fórmula, como fica o exemplo dado?

Temos:

Capital: $C = R\$ \ 1.000,00$

Taxa: $i = 20\%$ ao mês

Período: n = 3 meses

$$M_n = C.(1+i)^n$$

$$M_3 = R\$ \ 1000 \ . \ (1+0,20)^3$$

$$M_3 = R\$ \ 1000 \ . \ 1,728$$

$$M_3 = R\$ \ 1.728,00$$

E, para sabermos o juro produzido, fazemos:

$$J = M - C$$

$$J = R\$ \ 1.728,00 - R\$ \ 1.000,00$$

$$J = R\$ \ 728,00$$

2.4.2 Uso da P.G. no cálculo do montante a juros compostos

Sabemos que numa P.G. obtemos um termo posterior, multiplicando o anterior pela razão, a partir do segundo. E numa aplicação a juros compostos, temos que o montante ao final de cada período, sofre acréscimos de **i**% sobre o montante anterior que compõe os juros produzidos ao final de cada período e que tem como termo inicial o capital aplicado. Desta forma, percebemos que o montante, ao final do primeiro período, se encontra deslocado um termo à frente do primeiro de uma progressão geométrica, considerando $n \in \mathbb{N}$, conforme podemos observar abaixo:

Termos da P.G.	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
Montantes	C_0	M_1	M_2	M_3	$\cdots$	M_{n-2}	M_{n-1}

Tabela 2.1: Relação entre P.G. e Montante

Agora pretendemos estabelecer uma correspondência entre os termos de uma P.G. e os montantes ao final de cada período, incluindo aí o capital C_0 aplicado. De fato,

a_1 corresponde ao montante inicial $\rightarrow \quad a_1 = M_0 = C_0(1+i)^0 = C_0;$

a_2 corresponde ao montante ao final do primeiro período $\rightarrow \quad a_2 = M_1 = C_0(1+i)^1;$

a_3 corresponde ao montante ao final do segundo período $\rightarrow \quad a_3 = M_2 = C_0(1+i)^2;$

....

....

a_n corresponde ao montante ao final do $(n-1)$ período $\rightarrow a_n = M_{n-1} = C_0(1+i)^{n-1}$

Diante da expressão que determina o termo geral de uma P.G. $(a_n = a_1 \, . \, q^{n-1})$ e da expressão que determina o montante correspondente ao n-ésimo termo $(M_{n-1} = C_0 \, . \, (1+i)^{n-1})$ e por comparação, temos:

$$a_n = M_{n-1} \qquad a_1 = C_0 \qquad e \qquad q = (1+i)$$

Assim, para que a sequência: $(C_0, \; M_1, \; M_2, \; M_3, \; M_4, \; ...., \; M_{n-1})$, seja uma PG, as três condições acima apresentadas deverão ser satisfeitas. Tendo as duas primeiras condições já verificadas, resta mostrarmos a terceira condição.

De fato, dados dois montantes consecutivos M_k e M_{k+1}, com $k \in N$, temos:

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} = \frac{C_0(1+i)^{k+1}}{C_0(1+i)^k} = \frac{(1+i)^{k+1}}{(1+i)^k} = (1+i)^{k+1-k} = (1+i) = q$$

Para ratificarmos a relação que há entre PG e o montante no final de cada período, incluindo nessa sequência o capital aplicado inicialmente a juros composto, propomos em sala de aula, o seguinte exemplo:

Exemplo 2.10 *Paulo aplicou* $R\$100,00$ *a juros compostos durante 6 meses à taxa de* 200% *ao mês. Determine o montante obtido por essa aplicação no final de cada período.*

Para agilizar no tempo, dividiremos a turma em 5 grupos e determinaremos que cada grupo fique com um final de período para calcular o montante.

Feito os cálculos obteremos a seguinte disposição abaixo:

C_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
100	300	900	2700	8100	243000

Tabela 2.2: Tabela dos Montantes Calculados

Diante dessa sequência de números representam montantes, incluindo nessa sequência o capital inicial, pediremos que a turma de forma individual determine o quociente entre número posterior e o anterior dessa sequência, a partir do segundo. Os alunos chegarão à conclusão de que o quociente é constante em toda essa sequência e igual a 3.

Com esses resultados, os indagaremos sobre a sequência encontrada com a seguinte interrrogativa: Essa sequência representa uma PG? Esperamos que ele reconheça de imediato que se trata de uma PG de razão 3. E de fato notarão que se trata de uma PG de acordo com a definição dada de progressão geométrica. E para ratificar ainda mais o que fora afirmado de que $q = (1 + i)$, calculemos a razão dessa PG, utilizando essa expressão.

$$r = (1 + i) = (1 + 200\%) = \left(1 + \frac{200}{100}\right) = (1 + 2) = 3$$

Portanto, para obtermos o montante ao final de cada período multiplicaremos o montante anterior por $(1 + i)$ o que na verdade está representando a razão de uma progressão geométrica de primeiro termo C_0.

E de forma simples e de fácil compreensão, mostramos para o nosso aluno que o montante a juros compostos, incluindo o capital aplicado, sempre representarão uma PG, pois cada montante a partir do referente ao final do primeiro período serão obtidos multiplicando-os a (1 + i).

Por fim, pediremos aos alunos que pesquisem problemas envolvendo cálculo de montante a juros compostos e verifiquem se de fato que esses montantes formam, ou melhor, representam uma progressão geométrica e por meio da relação $q = (1 + i)$, pede-se que os mesmos determinem a razão confrontando com a definição de PG que estabelece razão como o quociente entre o termo posterior e o anterior a partir do segundo, isto é, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

2.5 A Espiral Logarítmica

Jacques Jacob Bernoulli[2] tinha fascinação por curvas e pelo cálculo, e uma curva tem seu nome - a "lemniscata de Bernoulli", dada pela equação por $r^2 = a\cos 2\theta$. A curva foi descrita na *Acta eruditorum* de 1694 como semelhante a um oito ou uma fita

[2](Basileia, 27/12/1654 - Basileia, 16/08/1705), foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

com laço (*lemniscus*). Mas a curva que mais lhe prendeu a imaginação foi a espiral logarítmica. Bernoulli mostrou que tem várias propriedades notáveis não observadas antes: (1) a evolutiva de uma espiral logarítmica é uma espiral logarítmica igual; (2) a curva pedal de uma espiral logarítmica em relação seu polo (isto é, o lugar geométrico das projeções do polo sobre as tangentes da curva dada) é uma espiral logarítmica igual; (3) a cáustica por reflexão para raios emanado do polo (isto é, a envoltória dos raios refletidos em pontos da curva dada) é uma espiral logarítmiva igual; e (4) a cáustica por refração para raios emanados do polo (isto é, a envoltória de raios refratados em pontos da curva) é uma espiral logarítmica igual. Estas propriedades o levaram a pedir que a *spira mirabilis*fosse gravada em sua pedra tumular juntamente com a inscrição *Eadem mutata resurgo* ("Embora modificada, novamente apareço igual")[2].

Seu nome, curva de *spira mirabilis* (em latim, espiral maravilhosa), advém de sua expressão analítica, que pode ser escrita na forma de:

$$r = a.e^{b\theta}$$

Onde **r** é a distância a partir da origem, θ é o ângulo desde o eixo **x** , e **a** e **b** são constantes arbitrárias. A espiral logarítmica é também conhecido como a espiral geométrica, a espiral de crescimento, espiral equiângulo e Spira mirabilis.

Esta espiral está relacionada com os números de Fibonacci, a proporção áurea, e retângulos de ouro, e às vezes é chamado de espiral dourada .

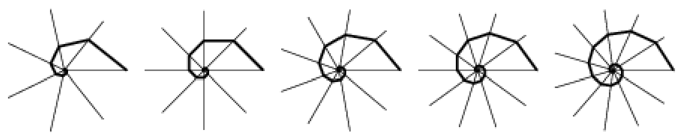

Figura 2.2: Espiral Logarítmica

A Espiral Logarítmica apresenta-se em várias ocorrências na natureza, tais como:

- Os braços das galáxias espirais são aproximadamente espirais logarítmicas. Nossa própria galáxia, a Via Láctea, é considerada predominantemente pelos astrônomos como tendo quatro braços espirais maiores, cada um deles sendo uma espiral logarítmica de uns 12 graus.

- Os braços dos ciclones tropicais, como os furãcões, também formam espirais logarítmicas.
- Em biologia são frequentes as estruturas aproximadamente iguais à espiral logarítmica. Por exemplo, as teias de aranhas e as conchas de moluscos. A razão é a seguinte: começa com uma figura irregular F_0. Se aumenta F_0 em um certo fator para obter F_1, e se põe F_1 junto a F_0, de forma que se toquem dois lados. Se aumenta F_1 no mesmo fator para obter F_2, e se põe junto a F_1, como antes. Repetindo este processo se gera aproximadamente uma espiral logarítmica cujo grau está determinado pelo fator de expansão e o ângulo com que as figuras são postas uma ao lado de outra.
- Os falcões se aproximam de sua presa segundo uma espiral logarítmica: sua melhor visão está em ângulo com sua direção de vôo; este ângulo é o mesmo que o grau da espiral.
- Os insetos se aproximam da luz segundo uma espiral logarítmica porque acostumam-se a voar com um ângulo constante em relação à fonte luminosa. Normalmente o Sol é a única fonte de luz e voar desta forma consiste praticamente em seguir uma linha reta.
- Em geotecnia, a superfície de falha é o lugar geométrico dos pontos onde o solo ´´se rompe"e permite um deslizamento, ao estar submetido a cargas maiores a que pode suportar. Estas superfícies de falha em muitos casos são iguais ou aproximáveis a uma espiral logarítmica[21][22].

2.6 Crescimento Populacional

Thomas Robert Malthus nasceu no ano de 1766, no condado de Surrey, na Inglaterra. Filho de Daniel e Henrieta Malthus era o penúltimo de sete irmãos. Provavelmente, sobre influências pedagógicas de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), Daniel fez com seus filhos não frequentassem escolas antes de ter idade suficiente para frequentarem a universidade, educando tanto Malthus como seu irmão na sua própria casa (SZMRECSÁNYI[3], 1982 apud OLIVEIRA, 2011).

Em 1784, dezoito anos de idade, Malthus começou a estudar no Jesus College da Universidade de Cambridge, se formando em Matemática quatro mais tarde. Ele teve a oportunidade de estudar a Física newtoniana e recebeu uma boa formação humanística, tornando-se versado em História e em Letras clássicas (grego, latim) e modernas (inglês, francês).

Em 1804, Malthus casou-se com sua prima Harriet Eckersall e, em 1805, foi nomeado professor de História Moderna e Economia Política no East India College. Segundo Szmrecsányi(1982), as atribuições deste posto, que foi conservado até a morte, deram origem a todos seus demais trabalhos. Malthus faleceu em 1834 [12].

Sua fama decorreu dos estudos sobre a população, contidos em dois livros conhecidos como Primeiro ensaio e Segundo ensaio:

- Um ensaio sobre o princípio da população na medida em que afecta o melhoramento do futuro da sociedade, com notas sobre as especulações de Mr. Godwin, M. Condorcet e outros escritores(1798).

- Um ensaio sobre o princípio da população ou uma visão de seus efeitos passados e presentes na felicidade humana, com uma investigação das nossas expectativas quanto à remoção ou mitigação futura dos males que ocasiona(1803).

O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados pelo economista clássico Thomas Robert Malthus. Segundo Malthus:“Pode-se seguramente declarar que, se não for a população contida por freio algum, irá ela dobrando de 25 em 25 anos, ou crescerá em progressão geométrica (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...). Pode-se afirmar, dadas as actuais condições médias da terra, que os meios de subsistência, nas mais favoráveis circunstâncias, só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)”.

[3] O professor Tamás Szmrecsányi escreveu o livro Thomas Robert Malthus: economia com o intuito de passar em revista a vida e a obra de Malthus. Neste livro são apresentados alguns dos principais trechos de publicações selecionadas no que se refere às teorias da população, de renda de terra e da demanda efetiva.

Segundo o economista clássico Malthus o poder da população é tão superior ao poder do planeta de fornecer subsistência ao homem que, de uma maneira ou de outra, a morte prematura acaba visitando a raça humana.

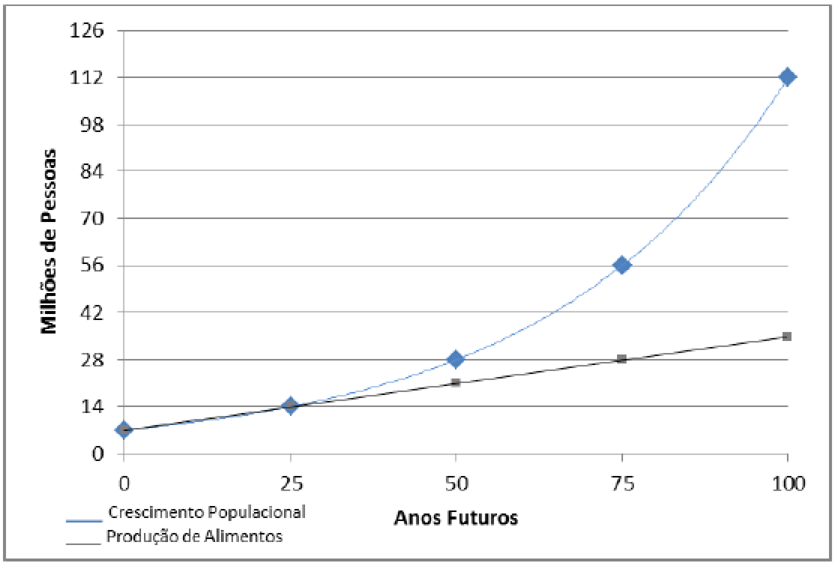

Figura 2.3: Representação gráfica da Teoria Malthusiana
Fonte: Disponível em OLIVEIRA, Camila Fogaça de

2.6.1 Modelo de Malthus

Thomas Malthus, no trabalho "An Essay on the Principle of Population"formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo.

Considerou $P = P(t)$ o número de indivíduos de uma população, sendo P_0 esta população no instante $t = 0$.

Considerou a hipótese que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e que a variação da população era conhecida entre dois períodos, num lapso de tempo Δt.

Se ΔP é a variação da população, temos:

$$\Delta P = nP(t)\Delta t - mP(t)\Delta t$$

onde $nP(t)\Delta t$ é o número de nascimentos e $mP(t)\Delta t$ é o número de mortes no período.

Dessa forma

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP(t)$$

onde k = n - m, representa uma constante de proporcionalidade da população, a qual assumiu ser dependente apenas de taxas constantes de natalidade e mortalidade.

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

que é a EDO para o modelo populacional do ponto de vista de Malthus.

A solução da EDO $\frac{dP}{dt} = kP$, obtida pelo método das variáveis separáveis é dada por:

$$P(t) = C.e^{kt}$$

Se no instante t = 0, a população tem P_0 indivíduos, então a constante C pode ser tomada como $C = P_0$ e desse modo:

$$P(t) = P_0.e^{kt}$$

é a solução da equação populacional de Malthus, mas o gráfico correto para esta função depende dos valores de P_0 e k.

Portanto, conclui-se que:

- Se $k > 0$, a população cresce.
- Se $k < 0$, a população se reduzirá.

Este modelo que estudamos supõe que o meio ambiente tenha pouca ou nenhuma influência sobre a população, logo, ele funciona melhor como um indicador do potencial de sobrevivência e de crescimento de uma certa espécie de população do que como um modelo para mostrar o que realmente ocorre[13].

Como a solução P = P(t) é uma função exponencial, o seu gráfico terá a mesma forma que o gráfico da função $f(t) = e^t$. O modelo Malthusiano, devido à curva exponencial de $P(t)$ pode ser denominado como modelo de crescimento exponencial. No entanto, como podemos relacionar este modelo com o crescimento de uma população que cresce de forma geométrica? Esta pergunta é respondia com a situação dada a seguir:

- Suponhamos que uma população a cada mês aumente na razão a, i.e., no primeiro mês é P_0, no segundo aP_0, no terceiro a^2P_0, etc.

Podemos verificar que o crescimento descrito acima corresponde a uma progressão geométrica e desse modo, a população no mês t é dado pela expressão:

$$P(t) = a^t P_0, \tag{2.22}$$

onde $P(t)$ corresponde ao termo de ordem t na progressão, ou seja, $P(t) = P_t$. Agora, derivando $P(t)$ em relação a t, temos:

$$\frac{d}{dt}P(t) = a^t \ln(a) P_0 \Rightarrow \frac{d}{dt}P(t) = \ln(a)P(t),$$

que corresponde ao modelo de Malthus com $k = \ln(a)$, isto é, $P(t)$ satisfaz o modelo malthusiano com a taxa de crescimento populacional $k = \ln(a)$. Portanto, $P(t)$ pode ser escrito da forma:

$$P(t) = \mathrm{e}^{\ln(a)t} P_0.$$

Em concordância com as idéias de Malthus, onde afirmava que a população crescia de forma geométrica.

Considerações Finais

Ao concluirmos este trabalho, faz-se necessário tecermos um breve resumo sobre os principais pontos tratados. Este capítulo tem como finalidade apresentar as conclusões obtidas no estudo de progressões para os alunos do 1º ano do Ensino Médio segundo uma abordagem contextualizada e fazendo uso de demonstrações das fórmulas apresentadas para a resolução dos problemas que envolvam progressões.

Esta pesquisa teve como objetivo facilitar a compreensão do conhecimento de acerca de progressões dos alunos da 1 série do ensino médio, assim como, servir de material auxiliar para professores que trabalham nessa modalidade de ensino, além de apresentar aplicações importantes do estudo sobre progressões.

Consideramos que através desta abordagem o aluno foi capaz de construir seus próprios conhecimentos que o ajudaram a resolver problemas, fazendo o uso correto das fórmulas apresentadas em nosso trabalho de pesquisa.

A maioria dos livros didáticos faz uma abordagem diferente da que desenvolvemos nesse trabalho, uma vez que não se preocupam como as fórmulas surgem, apenas as lançam aos alunos, visto que não as justificam, ou melhor, não fazem uso de demonstrações para representar o caso geral e de fato se faz necessário e importante mostrarmos a validade de cada fórmula estudada para que o aluno compreenda melhor o assunto. Além disso, acreditamos ser importante para o professor ter uma atitude crítica frente às fórmulas que lhe são apresentadas nos livros didáticos, uma vez que, estes são suas ferramentas de trabalho.

Pretendíamos buscar um estudo de progressões com mais aprofundamento para os alunos e oferecer aos docentes uma maior segurança do assunto exposto quando trabalhado em sala de aula. Na tentativa de satisfazer esse desejo procuramos confirmar a hipótese de que a abordagem mais adequada para o ensino de progressões se daria por meio de situações problemas,que contextualiza o assunto em questão e mostrando a demonstração de cada fórmula e propriedades apresentadas, visando potencializar a absorção do conhecimento, para que quando as utilizarem, saibam de fato o que estão fazendo.

Para verificar a hipótese levantada acima, utilizamos uma linguagem simples em todas as demonstrações e pedimos que os alunos tomassem como modelo demonstrações já feitas em sala para reproduzirem em outras demonstrações, quando foram solicitados para demonstrarem algumas fórmulas e propriedades, sem falar que os mesmos foram incentivados a realizarem pesquisas buscando comparar as demonstrações realizadas de cada fórmula e propriedade dada. Quanto aos docentes, ainda há uma resistência para aceitação dessa proposta de trabalho, mas logo perceberão que o estudo de progressões vai muito além da simples apresentação de fórmulas para resolver problemas.

Antes da exposição do assunto, os alunos no término da cada aula eram instigados a realizarem pesquisas preliminares do assunto, com o intuito de investigar como as fórmulas matemáticas eram desenvolvidas nos livros didáticos. Com isto, pretendíamos desenvolver junto aos alunos o espírito crítico de como as progressões são trabalhadas nos livros didáticos. Constatamos que poucos livros abordam progressões fazendo uso de demonstrações com aplicações práticas das mesmas.

Nossa preocupação na elaboração e aplicação desse trabalho sempre foi a de propor ao aluno situações significativas, que favorecessem a construção do conhecimento. Para isto privilegiamos atividades de observação e verificação, para que o aluno pudesse tirar suas próprias conclusões.

Analisando as respostas dadas pelos alunos à pergunta: Qual é a sua opinião sobre a forma como foi trabalhado as progressões, chegamos às seguintes conclusões, que são indícios de que atingimos o nosso objetivo:

Percebemos que os alunos estavam motivados e procuraram resolver as questões;

Reconhecemos que a abordagem através de demonstrações e partindo do conhecimento prévio dos alunos, os levaram à compreensão dos principais conceitos e propriedades das progressões, já que os mesmos conseguiram resolver os problemas propostos.

Percebemos também pela observação de alguns livros didáticos que a abordagem dos conteúdos de progressão não é feita de forma que produza sentido para o aluno. Acreditamos que a nossa sequencia didática, que utiliza a abordagem por demonstrações para ensinar os conceitos e propriedades das progressões, possibilitará a caminhos de resolução para um mesmo problema, auxiliando e estimulando o aluno na criação de sua própria maneira de resolvê-lo.

Ao final de nossos estudos gostaríamos de evidenciar a necessidade de melhor capacitar o professor para desenvolver o estudo de progressões, para que o mesmo consiga trabalhar com segurança este assunto, além de diversificar estratégias para garantir uma apreensão mais concreta dos alunos.

Enfim, esperamos que este trabalho tenha contribuído para os conhecimentos sobre o tema e que, além disso, possa contribuir para a sensibilização dos professores do ensino médio da necessidade de trabalhar com situações problemas que envolvam progressões.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. Cálculo Volume II. 8 ed. São Paulo: Bookman, 2005.

[2] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] CABACINHA, Christian Dias et al. ENCICLOPÉDIA BIOSFERA, vol. 6. 9. ed. Goiânia: Centro Científico Conhecer, 2010.

[4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto et al. A Matemática do Ensino Médio. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[5] COPSTEIN, Jayme. Notas curiosas da espécie humana: histórias que a história não conta. 2 ed. Porto Alegre: AGE, 2002.

[6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática, Contexto e Aplicações, vol. 1. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

[7] GARBI, Gilberto Geraldo. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 3 ed ver e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[8] HENRIQUES, Abel. A Teoria Malthusiana. Instituto Politécnico de Coimbra. São Paulo: 2007.

[9] HURON, René. A VERDADEIRA AMÉRICA Volume II: CALENDÁRIO MAIA. TZOLKÍN 2012.

[10] IEZZI, Gelson et al. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 4. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[11] MORGADO, Augusto César et al. Progressões e Matemática Financeira. Coleção do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1992.

[12] OLIVEIRA, Camila Fogaça de. Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: um olhar à luz da socioepistemologia. Londrina, PR: Dissertação de Mestrado em Educação de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina, 2011.

[13] PUGENS, Bruna Pagani et al. Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados do município de Osório. Artigo publicado na Revista Modelos FACOS/CNEC Osório Ano 2 Vol.2 Nº2 AGO/2012 ISSN2237-7077.

[14] RIBEIRO, Alexandre. Matemática Financeira. 1. ed. São Paulo Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[15] YAMAZAKI, S.C. Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul. Disponível em http://fisica.uems.br/profsergiochoitiyamazaki/2008/texto 1 referenciais teoricos ausubel.pdf. Acessado em 07 jun 2013.

[16] http://www.ugr.es/eaznar/fotosgauss.htm (28/03/2013).

[17] http://www.progressaogeometricablogstop.com.br/ (31/03/2013).

[18] http://www.educacional.com.br/glossariopedagogico/verbete.asp?idPubWiki=9586 (09/06/2013).

[19] http://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/p-g/formula-da-soma-dos-termos-de-uma-pg-infinita/(09/06/2013).

[20] http://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arquimedes(20.06.2013)

[21] http://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_logar%C3%ADtmica(21.06.2013)

[22] http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html(23.06.2013)