UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA FUNÇÃO QUADRÁTICA

DAYSE MARIA ALVES DE ANDRADE RIBEIRO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MARÇO - 2013

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA FUNÇÃO QUADRÁTICA

DAYSE MARIA ALVES DE ANDRADE RIBEIRO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MARÇO - 2013

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA FUNÇÃO QUADRÁTICA

DAYSE MARIA ALVES DE ANDRADE RIBEIRO

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 22 de Março de 2013.

Comissão Examinadora:

Profª. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre, D.Sc. - UENF

Prof. Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya, D.Sc. - UFF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico essa dissertação aos meus queridos pais, ao meu marido e companheiro de formação acadêmica, aos meus amores Helena e Henrique e a todo corpo docente que participou dessa etapa da minha formação.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela minha vida, pelo dom da sabedoria e força espiritual para a realização desse objetivo profissional.

Aos meus pais, Íris e Genilson, que não tiveram oportunidade de prosseguir nos estudos, mas fizeram o possível para que os filhos fossem além. Pelo eterno orgulho de nossa caminhada, pelo apoio, compreensão, ajuda e carinho ao longo deste percurso.

A Marcos Henrique, meu marido, que sempre me apoiou e se mostrou presente junto aos nossos filhos, me implusionando a seguir.

Aos meus filhos, Helena e Henrique, pela compreensão e responsabilidades assumidas, quando não pude estar tão presente.

Agradeço a toda a minha família, motivo maior do meu equilíbrio emocional e superação das dificuldades.

Aos meus amigos e colegas de curso, pela cumplicidade, troca de conhecimentos e experiências.

Aos meus alunos do Instituto Federal Fluminense, que se mostraram disponíveis nas resoluções das atividades propostas.

Ao Mestre Rigoberto Sanabria, pela paciência e disponibilidade de transmitir conhecimentos, visando o nosso crescimento e desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos demais professores que nos auxiliaram e enriqueceram-nos com o seu saber.

‘‘Eu acredito que a realidade Matemática existe fora de nós,

que nossa função é descobrir ou observá-la,

e que os teoremas que provamos,

e que descrevemos com grandiloquência como nossas ‘criações’,

são simplesmente notas de nossas observações.’’

Godfrey Harold Hardy, Matemático do século XX.

RESUMO

A Função Quadrática é conteúdo ensinado no 1° Ano do Ensino Médio, sendo trabalhados os seguintes conceitos: equações e inequações envolvendo polinômios de 2° grau, representação gráfica e aplicações em outras áreas do conhecimento. A Função Quadrática é uma função polinomial definida por um trinômio de grau 2. Neste trabalho, foram utilizados softwares matemáticos como Winplot e o Geogebra para facilitar a compreensão de representações gráficas das funções. A parábola foi comentada dentro de um contexto histórico até a criação de termos e definições envolvendo função. Relacionamos as retas tangentes ao crescimento e decrescimento das funções. Resolvemos problemas relacionados a pontos mínimos ou máximos. No caso da função quadrática, o ponto máximo ou mínimo é o vértice da parábola. Também exibimos a parábola no contexto da Geometria Analítica, como uma das seções cônicas tão pesquisadas por Apolônio. Uma das aplicações da parábola na Física é no estudo da trajetória de um projétil, feito por Galileu Galilei no século XVI. As atividades com aplicações de conceitos relacionados à função quadrática foram trabalhadas com os meus alunos no Ensino Médio.

Palavras-chave: Função Quadrática, Parábola, Cônicas, Winplot e Geogebra.

ABSTRACT

The Quadratic Function content is taught in the 1st year of High School, being worked on the following concepts: equations and inequalities involving 2nd degree polynomials, graphing and applications in other fields of knowledge. A quadratic function is a polynomial function defined by a trinomial of degree 2. In this work, we used mathematical software like Geogebra and Winplot to facilitate understanding functions graphical representations. The parable was discussed into a historical context to the creation of terms and definitions involving function. We related the tangent lines to the increasing and decreasing of the functions. We solved problems related to minimum or maximum points. In the case of the quadratic function, the minimum or maximum point is the vertex of the parabola. We also displayed the parabola in the context of Analytical Geometry, as one of the conic sections as surveyed by Apollonius. One of the applications of the parabola in Physics is the study of the projectile trajectory, made by Galileo Galilei in the sixteenth century. The activities with concepts applications related to quadratic function were worked with my students in High School.

Keywords: Quadratic Function, Parabola, Conic, Winplot and Geogebra.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Matemática, com seus processos de construção e validação de conceitos, argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (PCNEM (200)).

Percebe-se que os alunos em sala de aula têm enorme dificuldade de interpretação de um problema. Eles sabem resolver equações, fazer cálculos, mas ficam embaraçados ao ler, extrair informações importantes e analisar uma situação em busca de sua solução.

O ensino de função permite desenvolver a habilidade do aluno elaborar modelos matemáticos para analisar problemas, através da relação entre expressões algébricas e gráficos até obter a solução desejada. A modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais. Por exemplo, a função quadrática é utilizada como modelo do movimento uniformemente variado, na queda livre dos corpos, na área de figuras planas, na receita e lucro de uma empresa.

Nesta dissertação, proponho a abordagem de função quadrática através da contextualização, representação gráfica e aplicações. Este trabalho é feito com o objetivo de se tornar material de apoio para as aulas referentes ao ensino da função quadrática, de forma a conduzir o aluno a desenvolver e construir conceitos e procedimentos matemáticos de diferentes formas, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. Os conceitos serão desencadeados a partir de uma situação-problema, conforme recomendação atual de educadores matemáticos. Serão propostas atividades envolvendo conceitos matemáticos relacionados à função quadrática para a solução de problemas de Física, Economia e da própria Matemática. Utilizaremos as vantagens do uso da tecnologia da informação, através de softwares como Winplot e Geogebra, valorizando diferentes enfoques e articulações com diversos campos da Matemática e de outras ciências. Além disso, serão abordadas características e propriedades da função quadrática, que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa dominar, tais como: plano cartesiano, gráficos, a relação entre os coeficientes e o gráfico, as raízes, os pontos de máximo e mínimo, o vértice, equações, inequações e a parábola no contexto da Geometria Analítica.

Para alcançar os objetivos deste trabalho, organizei-o em capítulos, da seguinte forma:

O capítulo 2 contém uma resenha histórica organizada, considerando a ordem cronológica do tempo e incluindo fatos relacionados a vários conceitos trabalhados no contexo de função quadrática.

O capítulo 3 traz conceitos como: definição da função quadrática, valores, raízes, forma canônica e gráficos de parábolas representativas de funções quadráticas, através de translações verticais, horizontais e rotação em torno do eixo x. Além disso, utilizamos softwares tais como o Winplot e o Geogebra, para a construção dos gráficos e para mostrar de forma dinâmica a influência dos coeficientes do trinômio de segundo grau que define a função quadrática. A representação da função quadrática será também brevemente tratada no contexto da Geometria Analítica. Somente serão abordadas as parábolas com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas, já que as outras não representam uma função. O vértice, o foco e a reta diretriz da parábola serão analisados.

No capítulo 4, veremos diferentes aplicações da função quadrática na Física e na própria Matemática, como problemas de otimização (sendo o vértice da parábola o ponto mínimo ou máximo), de taxa de variação da função quadrática, retas tangentes em determinados pontos de sua parábola representativa, entre outros. Também constam todas as atividades aplicadas em sala de aula, com resoluções.

O capítulo 5 inclui a conclusão.

O apêndice inclui algumas definições e fórmulas apresentadas aos alunos, que são pré-requisitos para a resolução de questões propostas.

Capítulo 2

Resenha Histórica

O estudo da História da Matemática é necessário para lembrarmos que o conhecimento é construído e as descobertas envolvem conflitos e incertezas. Mas o avanço da ciência foi enorme e vivemos numa época de intensa pesquisa, inovação e mudanças muito rápidas de tecnologia, o que influencia de forma significativa a vida da sociedade. Assim, é importante conhecermos a história para relacionarmos os fatos e irmos em busca de novas descobertas.

2.1 Babilônios

Em torno do ano 1700 a.C. os babilônios utilizavam tabletes cuneiformes, nos quais escreviam e operavam com o sistema de numeração sexagesimal posicional. Problemas que recaem numa equação de 2º grau já se faziam presentes, como a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.

O estudo da função quadrática tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

Até então, não se usava uma fórmula para determinar as raízes de uma equação de 2º grau, pois não representavam seus coeficientes por letras. Existiam receitas para ensinar os procedimentos. Tinham soluções puramente algébricas para resolverem as equações, o estilo para encontrar a solução era algorítmico.

Geometricamente, determinar as raízes de uma equação de 2º grau consistia em determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p. Considerando um dos números x e o outro $s - x$, seu produto é $p = x(s - x) = sx - x^2$. Os números procurados são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$.

A receita para achar dois números com soma e produto dados era assim enunciada pelos babilônios:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.(Lima (2006))

Atualmente, para uma equação do tipo $x^2 - sx + p = 0$, o procedimento pode ser traduzido algebricamente:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

A outra raiz é dada por $s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$. Atualmente encontramos as duas raízes utilizando a fórmula $x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$. Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios nunca se preocuparam com eventuais soluções negativas fornecidas por sua regra.

2.2 A Matemática Grega

Os estudiosos egípcios e babilônios continuavam a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C., mas enquanto isso uma nova civilização se preparava para assumir a hegemonia cultural. Os gregos Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-600 a.C. aproximadamente) não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas a fim de se desenvolverem.

(Eves (2008)) Dizia-se que o lema da escola pitagórica era “Tudo é número”. Os pitagóricos mostraram interesse considerável pela secção áurea e pela razão áurea. Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou secção áurea, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea. Também está intimamente ligado à razão áurea, o retângulo áureo. Ele é qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: possui lados de medidas a e $a + b$, se suprimirmos dele um quadrado de lado a, o retângulo restante será semelhante ao retângulo áureo ABCD.

O período de cerca de 300 a 200 a.C. foi denominado "Idade Áurea" da Matemática grega por se destacarem nessa época três grandes nomes: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Arquimedes (287-212 a.C.) calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola, conhecido como o problema da Quadratura da Parábola (Observe a Figura 2.1). Os gregos trabalharam as soluções geométricas para equações de 2º grau. Embora Euclides e Arquimedes tenham sido mais comentados, Apolônio, mais novo que eles, teve grande destaque, principalmente no desenvolvimento dos conceitos das secções cônicas.

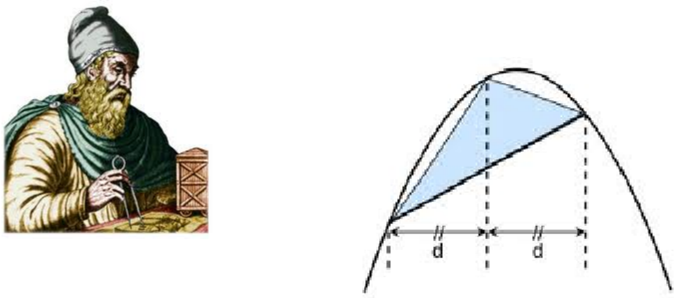


Figura 2.1: Arquimedes e a Quadratura da Parábola

A origem das seções cônicas está relacionada ao problema de duplicação do cubo que consiste em, dada a aresta de um cubo, construir, com uso de régua e compasso, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do anterior (Ver Figura 2.2). Hipócrates de Chios (470-410 a.C.) e Menaechmus (cerca de 350 a. C.) pesquisaram essas curvas (Eves (1993)).

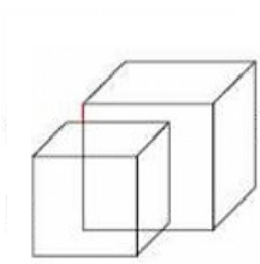


Figura 2.2: Duplicação do Cubo

Apolônio foi um famoso membro da escola de Matemática de Alexandria. Nasceu em Perga, cidade ao sul do que hoje é a Turquia, entre 246 e 221 a.C. De suas obras, a mais importante são *As Cônicas*, que aperfeiçoaram e superaram os estudos anteriores sobre o assunto e introduziram as denominações elipse, parábola e hipérbole. Segundo Boyer (2001), as secções cônicas eram conhecidas há mais de um século quando essa obra foi escrita. Anteriormente, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto, de acordo com o ângulo do vértice - agudo, reto ou obtuso. Apolônio mostrou, ao que parece pela primeira vez, que não seria necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de apenas um único cone poderiam ser obtidas todas as três espécies de secções, variando-se a inclinação do plano da secção, relacionando assim as curvas umas com as outras. Noutra consideração sobre o tema, prova que o cone não precisa ser reto - eixo perpendicular à base circular - podendo ser também oblíquo ou escaleno. Se em seus comentários sobre *As cônicas*, Eutócio estava bem informado, deduz-se que Apolônio foi o primeiro geômetra a demonstrar que as propriedades das curvas independem de serem cortadas em cones oblíquos ou retos. A visão moderna dos sólidos colocados um sobre o outro em sentidos opostos, estendendo-se indefinidamente, de forma que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre a mesma reta, também é um legado de Apolônio, que deu inclusive a definição para cone circular utilizada nos dias de hoje:

"Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo." (Figura 2.3)

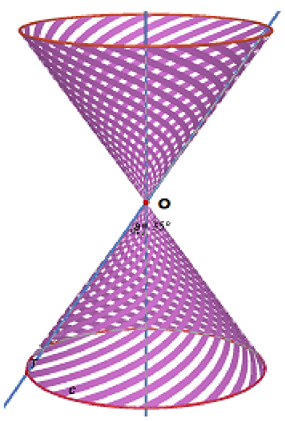


Figura 2.3: Cone Duplo

Steinbruch (2006) define a superfície cônica e suas seções: Sejam duas retas e e r concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta e, eixo da superfície, e façamos r, reta geratriz, girar 360^o em torno de e mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta r gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O. Chama-se seção cônica ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

De acordo com a Figura 2.4, quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a seção cônica será: uma **circunferência**; uma **elipse**; uma **parábola** se continuarmos inclinando o plano π de modo que seja oblíquo ao eixo e paralelo à geratriz da superfície; uma **hipérbole** (curva com dois ramos). No caso do plano π passar pelo vértice O, obtemos as cônicas degeneradas: um ponto, uma reta ou duas retas.

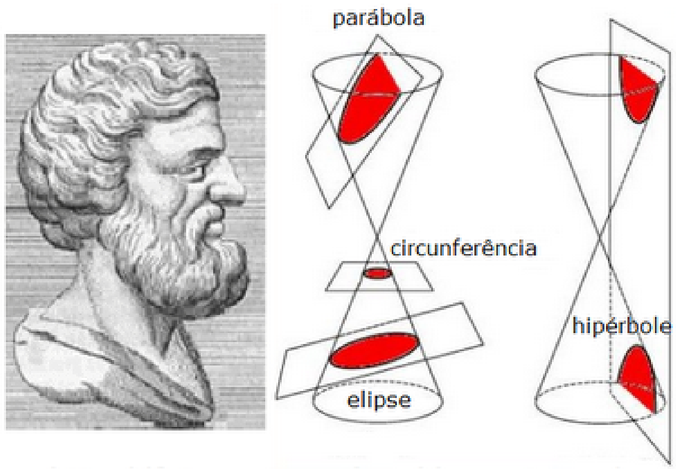


Figura 2.4: Apolônio e As Cônicas

A Astronomia encontrou, nas secções cônicas, grande aplicação. Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas ou a trajetória descrita por um projétil. Mostrando como obter todas as seções cônicas de um mesmo cone e dando-lhes nomes apropriados, Apolônio contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria. Ao serem inseridas na Geometria Analítica, definidas como lugares geométricos (conjunto de pontos que verificam uma certa propriedade), as seções cônicas ganharam uma expressão algébrica, ampliando ainda mais sua importância e sua aplicabilidade.

Por que as figuras cônicas como parábola, hipérbole e elipse também servem de nome para as figuras de linguagem e estilos de texto? Dizem os escritos antigos, que Aristóteles aplicou essas palavras da Geometria à Retórica.

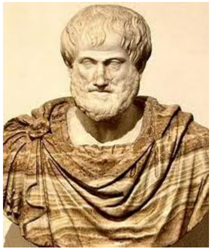


Figura 2.5: Aristóteles (384-322 a.C.)

(Figura 2.5) Aristóteles foi filósofo grego. Nasceu em Estagira, na Macedônia, antiga região da Grécia. Teve sólida formação em Ciências Naturais. Com 17 anos partiu para Atenas, foi estudar na Academia do filósofo Platão. Logo se tornou o discípulo predileto do mestre. “Minha Academia se compõe de duas partes: o corpo dos alunos e o cérebro de Aristóteles”, afirmava Platão. Aristóteles foi um dos pensadores com maior influência na cultura ocidental.

Possivelmente a relação entre a Geometria e a Retórica se explica da seguinte forma:

- **Elipse** é a **omissão** de uma palavra e também da outra folha da superfície cônica, na Geometria.

- **Parábola**, originária do grego parabole, significa narrativa curta ou apólogo, muitas vezes erroneamente definida também como fábula. Sua característica é ser protagonizada por seres humanos, possuir sempre uma razão moral e vem sendo utilizada para ilustrar lições de ética. Sinteticamente, é uma narração figurativa na qual, por meio de **comparação**, o conjunto dos elementos evoca outras realidades. Na Geometria, a parábola é obtida de uma seção cônica paralela (“corre ao lado”, comparação) à geratriz.

- **Hipérbole** significa **excesso** e na Geometria, a hipérbole possui dois ramos em sua representação geométrica.

2.3 Contribuição dos Árabes

Outro povo que contribuiu para encontrar a resolução de uma equação do segundo grau foi o povo hindu. A matemática hindu era feita a partir de problemas reais, cobrada de forma poética, sem fornecer fórmula para as resoluções e começou a utilizar os números negativos e o zero como um elemento de cálculo. A contribuição hindu para a história da matemática tem como personagens Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-665), Bhaskara I e Bhaskara II. Sobre a equação quadrática, Brahmagupta estudou a fórmula escrita e alguns anos depois, um aluno seu, conhecido como Bhaskara I (século VI), reescreveu de forma descritiva os versos nela contidos.

Segundo artigo da RPM39 (1999), o hábito de dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Na literatura internacional não se encontra esse nome Fórmula de Bhaskara. Esse costume brasileiro não é adequado, pois:

- Há quatro mil anos atrás, os babilônios já estudavam em forma de prosa as equações de segundo grau.

- Em 1114, nasce na Índia o matemático Bhaskara II e vive aproximadamente até 1185. Esse matemático conseguiu grandes feitos para a resolução da equação quadrática, dedicou-se a Astronomia e Matemática, escreveu suas principais obras Lilavati (bela) sobre aritmética, Vijaganita (extração de raízes) sobre Álgebra e resolveu equações também com receitas e prosas.

  Esses matemáticos revelaram-se hábeis em articular a abordagem geométrica utilizada pelos gregos e a abordagem algébrica empregada pelos babilônios. Deve-se aos árabes tal audácia de demonstrar algebricamente e, logo em seguida, geometricamente, a resolução da equação polinomial do segundo grau.

- Até o fim do século XVI não se usava fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, porque não se representavam por letras os seus coeficientes.

O período, que vai do século V até o XI, é conhecido como Baixa Idade Média ou Idade das Trevas. A civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos no ensino, o saber grego desapareceu e artes e ofícios antigos foram esquecidos. Foi um período marcado por violência física e intensa fé religiosa. O século XIV não foi tão produtivo para a Matemática.

2.4 Renascimento

Como vimos, anteriormente, os gregos se preocuparam muito em descrever os movimentos dos planetas, alterando significativamente a concepção que tinham do universo. Posteriormente as técnicas de investigação científica foram se modificando, causando também transformações no entendimento do homem quanto a si mesmo e em relação ao mundo em que vivia. Foi o período conhecido como Renascença, iniciado na Itália, nos séculos XIV e XV. O Renascimento Europeu foi um período em que se destacaram escritores, pintores, escultores e outros com espírito humanístico. A exploração geográfica e o interesse pelo comércio, navegação, astronomia e agrimensura aumentou. O humanismo e a independência de pensamento causaram conflitos religiosos. A Igreja passou pela Reforma e Contra-Reforma. A Reforma Protestante no século XVI também teve um impacto na expansão da Europa. A Reforma enfraqueceu a influência da Igreja Católica no norte europeu, tornando menos efetiva sua oposição à pesquisa científica.

Aos europeus coube a parte de: aprimorar a técnica de obtenção das raízes de uma equação de segundo grau, fornecida pelos árabes; desenvolver a álgebra simbólica, até então totalmente descritiva e utilizar os números negativos como possíveis raízes de uma equação quadrática, fato esse que não era considerado pelos outros povos. Isso começou a ser feito a partir de François Viète (Figura 2.6), matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Seu mais famoso trabalho foi *In artem* com o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Ele introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Ele usa uma mesma letra, adequadamente qualificada, para as várias potências de uma quantidade. Atualmente, indica-se x, x^2, x^3 para o que Viète expressava por *A, A quadratum, A cubum*.

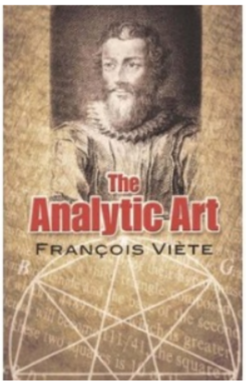


Figura 2.6: François Viète

2.5 A Matemática Moderna

O século XVII é importante na história da matemática, marcando o desenvolvimento da matemática moderna.

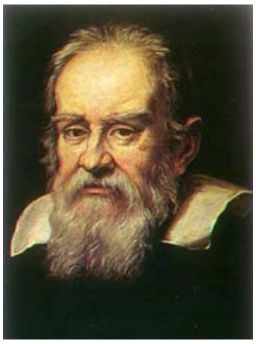


Figura 2.7: Galileu Galilei (1564-1642)

A religião foi um obstáculo ao trabalho do italiano Galileu Galilei (Figura 2.7), nascido em Pisa. De família que valorizava as artes e as novas ideias (Ronan (2001)). Quando era professor em Pisa, dizem que deixou cair diferentes pesos da torre inclinada, pesquisando o movimento da queda dos corpos. Aristóteles pensava que objetos mais pesados caíam mais depressa e Galileu mostra que, leves ou pesados, os objetos levam o mesmo tempo para chegar ao chão, com velocidade sempre crescente, caso não haja resistência do ar. Ele estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda e se traduz na fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$; provou que a trajetória de um projétil é uma parábola e fundou a ciência da dinâmica. Galileu foi um católico devoto e sentia-se angustiado por notar que seus raciocínios como cientista eram condenados pela igreja. Foi banido pelas autoridades eclesiásticas em Roma, processado pela Inquisição, condenado à prisão domiciliar, vindo a falecer no ano em que nasceu Isaac Newton.

Durante toda a história da ciência, muitas teorias revolucionárias surgiram para explicar o funcionamento do universo. Mas a revolução marcante, que gerou a moderna concepção científica ocorreu nos séculos XV e XVI, conhecida como “A Revolução Científica”.

Foi criado e utilizado pela primeira vez um sistema de coordenadas para representar gráficos, no século XVII, por René Descartes (1596 a 1650), matemático e filósofo. O sistema era constituído de eixos ortogonais e ficou conhecido por sistema cartesiano.

Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de um retângulo e o produto de três variáveis ao volume de um paralelepípedo retângulo. Descartes sugeria que x^2 era o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$. Inventou a geometria analítica e na primeira parte de *La géométrie*, marcava x num eixo dado e então um comprimento y, formando um ângulo fixo com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfazem uma relação dada. Na segunda parte de *La géométrie* desenvolve um método interessante de construir tangentes a curvas. Foi o primeiro a discutir a chamada *folium de Descartes*, uma curva nodal cúbica definida pela equação implícita $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

2.5.1 Função

A ideia de função que temos atualmente foi construída por vários matemáticos ao longo da história.

Sabemos que o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, devido às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Notável foi a invenção do Cálculo, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz.

É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária dos textos didáticos. Primeiro surgiu o Cálculo Integral e muito tempo depois, o Diferencial. A integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos e a diferenciação, resultou de problemas sobre tangentes a curvas, máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação são operações inversas.

Segundo Profmat (2012b), Isaac Newton (1642-1727), foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático. Desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico; inventou o método dos fluxos, como ele chamava o atual *cálculo diferencial*, com numerosas aplicações como determinação de máximos, mínimos, pontos de inflexão, concavidade e tangentes a curvas.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) foi um matemático, que: criou os termos função, constante e variável; usou o termo função para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, como, por exemplo, a inclinação ou um ponto qualquer situado nela; escolheu as notações dx e dy para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y e mais tarde, o sinal de integral $\int$. Achar tangentes exigia o uso do *calculus differentialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, de onde resultaram as expressões que usamos.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) criou várias fórmulas e notações. Dentre elas, $f(x)$, que agora é de utilização universal, para indicar a lei de uma função, quando uma variável depende de outra mediante uma expressão analítica, dizemos que y é uma função de x.

O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição formal de função muito próxima da que se usa atualmente: *"Se uma variável y está relacionada com uma outra variável x, de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y diz-se uma função da variável independente x".*

Posteriormente, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, a definição de função foi assim citada:

Função é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x é elemento de um conjunto A, y é elemento de um conjunto B e $\forall x \in A, \exists | y \in B / (x, y) \in f$.

2.5.2 Uma propriedade notável da parábola

Ao girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada paraboloide de revolução ou superfície parabólica, que possui inúmeras aplicações interessantes, decorrentes da propriedade refletora da parábola. A fama destas superfícies remonta à Antiguidade.

Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 a.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a ideia de que ondas de luz, de calor, de rádio ou de qualquer outra natureza, quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, ampliando enormemente a intensidade do sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida.

Outros instrumentos atuam inversamente, concentrando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis (Figura 2.8) e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora Lima (2006).

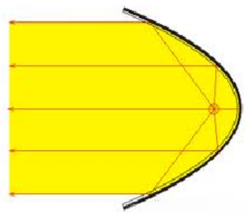


Figura 2.8: Faróis de Automóveis

2.5.3 Onde podemos visualizar parábolas?

A parábola aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos, tais como: a trajetória de uma pedra lançada obliquamente; a trajetória de um projétil a ser lançado; a trajetória da bola num chute a gol; a linha descrita pela água numa fonte; parte da estrutura metálica de uma montanha russa; na estrutura que sustenta os faróis de um automóvel; nas antenas parabólicas; fogão solar; radares; espelhos dos telescópios e outros mais.

Um importante uso recente dessas superfícies é dado pelas antenas parabólicas (Figura 2.9), por seu próprio nome, sugerem a aplicação do formato da parábola na sua estrutura. São empregadas na radioastronomia, bem como na transmissão das redes de televisão.

Figura 2.9: Antena Parabólica

Elas funcionam da seguinte forma:

As antenas parabólicas captam ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite artificial, colocado em uma órbita geoestacionária. Essas ondas formam um feixe de raios, que atingem a antena e são refletidos fazendo-os convergir para um único ponto, chamado foco da parábola. No foco, estará um aparelho receptor amplificando consideravelmente a intensidade desses sinais provenientes do satélite e convertendo-os em sinal de TV. As antenas parabólicas geralmente têm um grande diâmetro (parábola mais aberta, a pequeno) para captar uma quantidade maior de sinais do satélite, portanto a distância focal é em geral grande (p grande) por causa disso.

2.5.4 Número de Ouro e Equação de Segundo Grau

Gundlach (1993) Luca Pacioli publicou em 1509 um livro intitulado *De divina proportione*, que foi ilustrado por Leonardo da Vinci. Nele, Pacioli focalizou o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é chamado de razão áurea ou número de ouro. Ele aparece como razão em várias figuras planas, sólidas e nas proporções mais belas que a natureza nos proporciona. Por exemplo: no arranjo das pétalas de uma rosa; nas espirais que aparecem no abacaxi; na arquitetura do templo grego Parthenon, em Atenas e nas obras de arte. As mesmas proporções foram utilizadas por Leonardo da Vinci no Homem de Vitrúvio e na Gioconda.

Ávila (1985) O símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) também utiliza a mencionada sucessão de retângulos áureos, unidas por quadrantes de circunferências. A

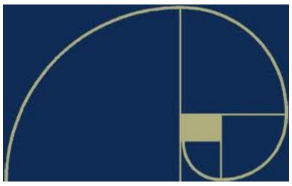


Figura 2.10: Símbolo da SBM

proporcao áurea é dada por $\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}$.

Até aqui passeamos por momentos históricos diferentes, envolvendo conceitos trabalhados em Função Quadrática e suas aplicações. No próximo capítulo, faremos uma abordagem formal desta função.

Capítulo 3

Função Quadrática: Uma Abordagem Formal

3.1 Definição de Função Quadrática

Definição 3.1 *A função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.1 *São funções quadráticas:*

- $f(x) = x^2$, *onde* $a = 1$ *e* $b = c = 0$;
- $g(x) = -x^2 + 5$, *onde* $a = -1$, $b = 0$ *e* $c = 5$;
- $h(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, *onde* $a = 1$, $b = -2$ *e* $c = 1$;
- $y = \dfrac{x^2}{2} - 3x$, *onde* $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -3$ *e* $c = 0$.

3.2 Valor da Função Quadrática

A função quadrática é definida por uma lei envolvendo um trinômio de segundo grau. Por isso, também é conhecida como função polinomial de segundo grau. Em alguns problemas é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto; assim como, dada a imagem da função quadrática, calcular os elementos do domínio correspondentes. Isto é: dado $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular $f(x_0)$ ou dada a equação $y_0 = f(x_0)$, calcular x_0.

3.3 Zeros ou Raízes

Como já foi citado na resenha histórica, os babilônios já se empenhavam em determinar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Na álgebra moderna, este problema consiste em determinar um número x e o outro $s - x$. Assim, $p = x(s - x)$ ou $p = sx - x^2 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$.

Definição 3.2 *Os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ são os zeros ou raízes desta função.*

Podemos determinar os zeros das seguintes maneiras:

1. **por fatoração**

   Para a função $f(x) = x^2 - 9$, podemos pensar na diferença entre dois quadrados e reescrever a função $f(x) = (x + 3)(x - 3)$. Para que o produto se anule, basta que um dos fatores também seja nulo. Assim, as raízes são -3 e 3.

   Para a função $g(x) = x^2 - 9x$, podemos reescrever a função $g(x) = x(x - 9)$. Resolvendo, descobrimos que as raízes são 0 e 9.

   Para a função $h(x) = x^2+6x+9$, podemos pensar no quadrado da soma e reescrever a função $h(x) = (x + 3)(x + 3)$. Pensando no produto nulo, descobrimos que -3 é uma raiz dupla da função.

2. **completando quadrado**

   A equação $x^2 + 6x + 5 = 0$ equivale a $x^2 + 6x + 5 + 4 = 4$ ou $x^2 + 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4$. Então, $(x + 3)^2 = (\pm 2)^2$. Se $x + 3 = 2$, então $x = -1$ e se $x + 3 = -2$, $x = -5$. Logo os zeros da equação são -1 e -5.

3. **pela fórmula resolutiva de equação que envolve polinômio de 2º grau:**
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   Se $\Delta > 0$, a equação possui 2 raízes reais distintas; se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla e se $\Delta < 0$, a equação não possui solução real.

4. **pela regra da soma e do produto das raízes**
   Sendo a soma $S = -\dfrac{b}{a}$ e o produto $P = \dfrac{c}{a}$, investigamos as raízes.

3.4 Forma Canônica

A lei que define a função quadrática pode ser escrita da seguinte forma:
$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.

Completando quadrado, obtemos: $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right]$.

A equação $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ é a forma canônica da função.

Decorre da forma canônica:

- **a fórmula que fornece as raízes reais da função quadrática**
  $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
  $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Caso contrário, a função quadrática não possui raízes reais.

- **a fórmula para as coordenadas do vértice (Ponto Mínimo ou Máximo) da parábola que representa a função quadrática.**
  A forma canônica envolve uma soma de parcelas $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$, onde a primeira é sempre ≥ 0, variando de acordo com o x e a segunda constante. Quando $a > 0$, o menor valor dessa soma é atingido, com a primeira parcela sendo nula. Assim, $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$. De forma análoga, quando $a < 0$, determinamos as coordenadas do vértice que corresponde ao ponto máximo da parábola.

- **a relação entre a equação e a soma e o produto das raízes.**
  Considerando as raízes $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, sua soma é $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e o produto $x_1x_2 = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

- **a forma fatorada da função quadrática**
  $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1x_2\right)$. A função quadrática pode ser escrita na forma fatorada $a(x - x_1)(x - x_2)$.

3.5 Função Quadrática e Progressão Aritmética (PA)

Teorema 3.1 ***Caracterização das Funções Quadráticas.*** *Para que a função real contínua seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada* $y_1 = f(x_1)$*,* $y_2 = f(x_2)$*, ...,* $y_n = f(x_n)$*, ...*

Exemplo 3.2 *Consideremos a função quadrática mais simples* $f(x) = x^2$ *e a progressão aritmética (PA)* $2, 4, 6, 8, ..., 2n, 2n + 2, ...$. *A sequência* $f(2) = 4$*,* $f(4) = 16$*,* $f(6) = 36$*,* $f(8) = 64$*, ...,* $f(2n) = 4n^2$*,* $f(2n + 2) = 4n^2 + 8n + 4$*, ... é denominada* ***progressão aritmética de segunda ordem****. Essa nova sequência não é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é constante. Mas, se observarmos as diferenças entre os termos consecutivos dessa nova sequência, teremos: 12, 20, 28, ...,* $8n + 4$*, ... que é uma PA de razão 8.*

Isso ocorre não só com a função quadrática mais simples $f(x) = x^2$*, mas com qualquer função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$*. Essa propriedade caracteriza a função quadrática, ou seja, se f é uma função quadrática, então ela transforma uma PA numa sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam uma PA. Essa sequência é chamada progressão aritmética de segunda ordem. E, reciprocamente, se uma função transforma uma PA em uma PA de segunda ordem, então ela é uma função quadrática.*

Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio do segundo grau em n é uma progressão aritmética de segunda ordem. Reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a_n é um polinômio do segundo grau em n. Dessa forma, se o domínio de uma função quadrática for uma PA, então sua imagem será uma PA de segunda ordem.

Exemplo 3.3 *Exemplo retirado do material de Fundamentos de Cálculo (Profmat (2012a)). Considere a sequência* $(1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ...)$ *e escreva uma sequência, com as posições que o número* 1 *ocupa. Essa nova sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem. Então, escreva o termo geral* a_n *como um polinômio de segundo grau em* n*.*

A sequência das posições do número 1 *é* $(1, 3, 6, 10, ..., a_n)$*, cujas diferenças dos termos consecutivos formam a PA* $(2, 3, 4, ...)$*. Observe que:*

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2$

$a_3 = 1 + 2 + 3$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$ .... $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ *é uma PA de razão 1.*

Como a soma dos termos de uma PA é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$*,*

$S_n = \dfrac{(1+n)n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$*.* *Assim,* $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$*.*

Verificando: $a_1 = \dfrac{1+1}{2} = 1$*,* $a_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ *e* $a_3 = \dfrac{9+3}{2} = 6$*.*

3.6 Gráficos de Funções Quadráticas

A utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que o aluno investigue relações existentes entre a lei que define a função e sua representação. Por isso, nesta seção, sempre trabalharemos com a utilização do Winplot ou Geogebra.

Toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola.

Sabemos também que a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa $x \to ax^2 + bx + c$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Veremos o efeito que cada parâmetro a, b e c causa na parábola que representa a função quadrática definida pela forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e forma canônica $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Os coeficientes a, b e c estão relacionados a características gráficas da parábola.

3.6.1 Influência dos Parâmetros ou Coeficientes da Função Quadrática no seu Gráfico

Se considerarmos, particularmente, as funções definidas por $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ e $b = c = 0$, o **parâmetro** a está relacionado à concavidade e à abertura da parábola:

- quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima e o vértice da parábola é um ponto mínimo;

- quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo e o vértice da parábola é um ponto máximo;
- quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola;
- quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada);
- os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$ em que a e a' são números simétricos, são simétricos em relação ao eixo x. Veja, por exemplo, os gráficos de $v(x) = 10x^2$ e $y = -10x^2$ (Figura 3.1). Se $a \neq 0$, os gráficos de $y = ax^2$ e $y = -ax^2$ são chamados **reflexões** de cada um deles em relação ao eixo x. (Swokowski (1995))

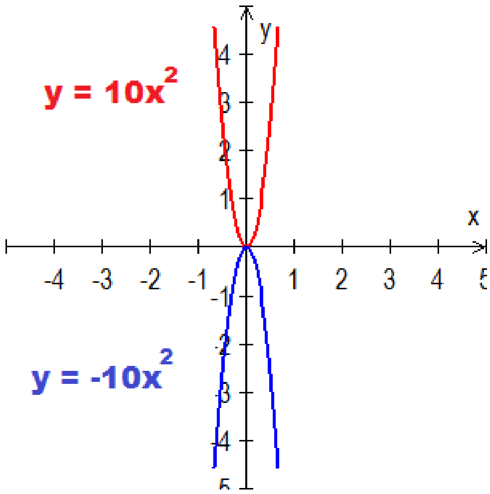


Figura 3.1: Parábolas Simétricas

E se o coeficiente a pudesse ser nulo na função $f(x) = ax^2$, o que aconteceria com o gráfico?

A função se reduziria à função constante de equação $y = 0$, ou seja, o próprio eixo x.

Sugiro a observação da Figura 3.2, incluindo parábolas geradas num arquivo criado por mim, no Geogebra.

O **parâmetro** b indica se a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente $(b > 0)$, decrescente $(b < 0)$ ou no vértice $(b = 0)$. Além disso, o parâmetro b causa uma translação vertical mais uma horizontal, como pode ser observado na Figura 3.3.

O **parâmetro** c indica onde a parábola intersecta y, no ponto $(0, c)$. Considere funções quadráticas definidas por $f(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$. Observe que a parábola de

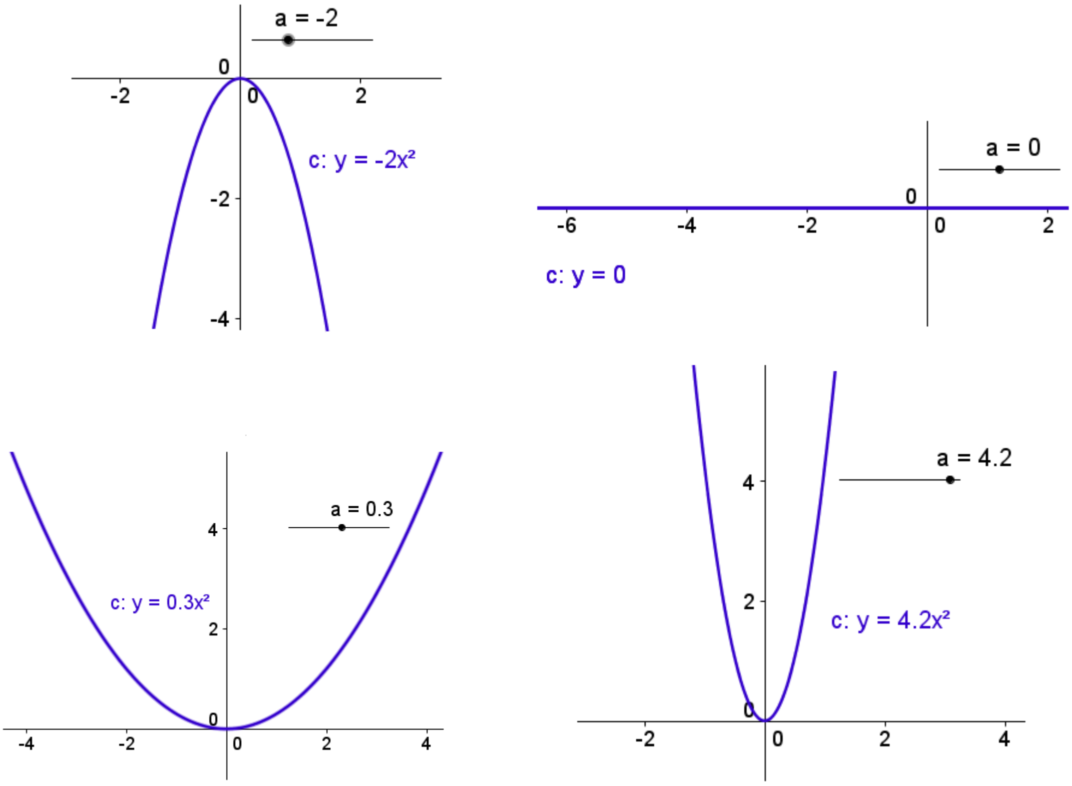


Figura 3.2: Parâmetro a nas funções $f(x) = ax^2$

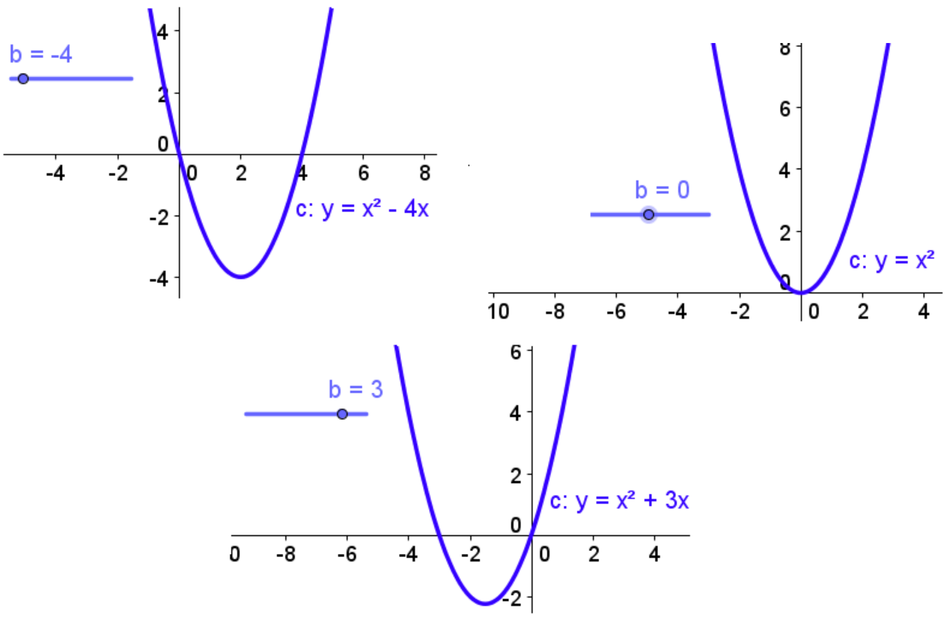


Figura 3.3: Parâmetro b nas funções $f(x) = x^2 + bx$

$f(x) = ax^2 + c$ é igual à parábola de $f(x) = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, c unidades acima ou abaixo, conforme c seja positivo ou negativo. Assim podemos construir gráficos de funções pensando em translações (ou deslocamentos) verticais para cima ou para baixo. Isso acontece quando só alteramos o coeficiente c da função. Sugiro a visualização da **translação vertical** na Figura 3.4.

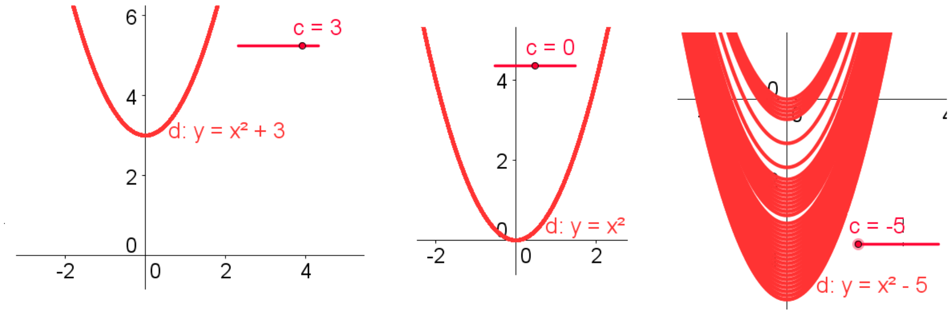


Figura 3.4: Translações Verticais da Parábola $f(x) = x^2 + c$ e Parâmetro c

Pontos sobre o eixo y têm a abscissa nula. Logo, para sabermos o intercepto y de uma parábola, basta calcularmos $f(0)$. Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, sempre encontraremos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Toda parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$. Essa é a característica marcante do coeficiente c.

A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$ e o eixo x nos pontos de abscissas iguais às raízes da função quadrática.

A reta vertical $x = x_V$, que passa pelo vértice da parábola, é chamada eixo de simetria.

A função quadrática é uma função polinomial de grau 2 que possui domínio real. Se o vértice for um ponto mínimo, a imagem é igual a $[y_V, +\infty)$ e se o vértice for um ponto máximo, a imagem é igual a $(-\infty, y_V]$. Ver Figura 3.5.

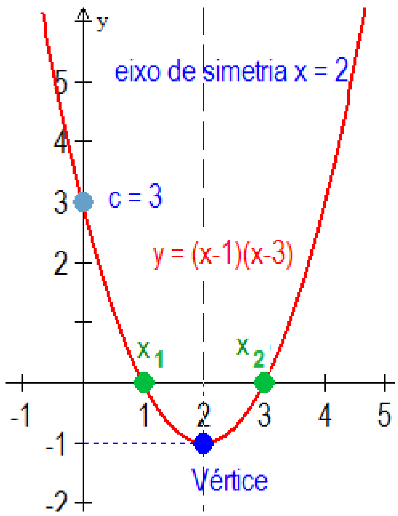


Figura 3.5: Parábola com interceptos x e y, vértice e eixo de simetria

3.6.2 Translações Horizontais

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$, com $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ corresponde a translações horizontais da função $y = ax^2$. Isto é, denotando $m = -\dfrac{b}{2a}$, temos que $f(x) = a(x - m)^2$ são translações que dependem do valor de m, conforme se visualiza na Figura 3.6.

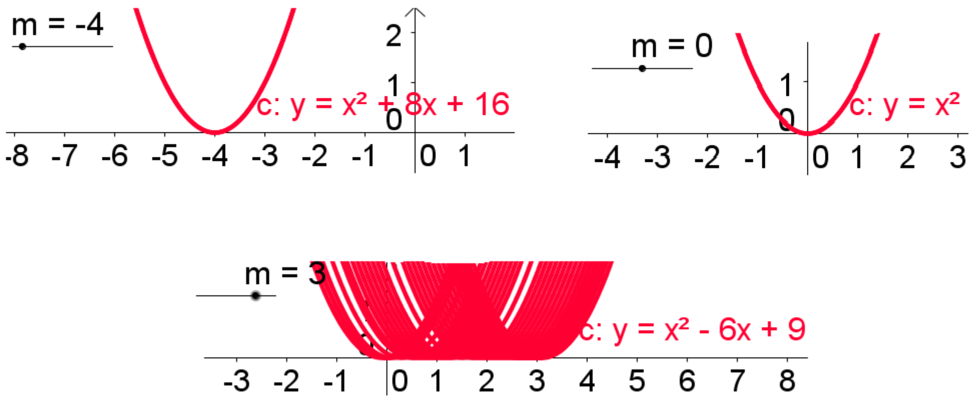


Figura 3.6: Translações Horizontais da Parábola $y = x^2$ e Parâmetro m

Observe que o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ é similar ao gráfico de $y = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, m unidades à direita ou à esquerda do gráfico de y, conforme m seja positivo ou negativo, respectivamente. Assim podemos construir gráficos de funções pensando em translações (ou deslocamentos) horizontais. Isso acontece quando só alteramos a base da potência, ou seja, variamos de $y = ax^2$ para $f(x) = a(x - m)^2$.

3.7 Resolução Gráfica de Inequações Envolvendo Função Quadrática

Podemos resolver inequações de forma algébrica. Mas, neste trabalho, tratarei somente a resolução gráfica de inequações que envolvem polinômios de 2º grau, dada a sua praticidade.

Exemplo 3.4 *Resolva, no conjunto dos reais, a inequação $x^2 - 4x + 4 \leq -x^2 + 4$.*

Observando os gráficos da Figura 3.7, percebemos que a solução da inequação corresponde ao intervalo real em que a parábola $y = x^2 - 4x + 4$ está abaixo da parábola

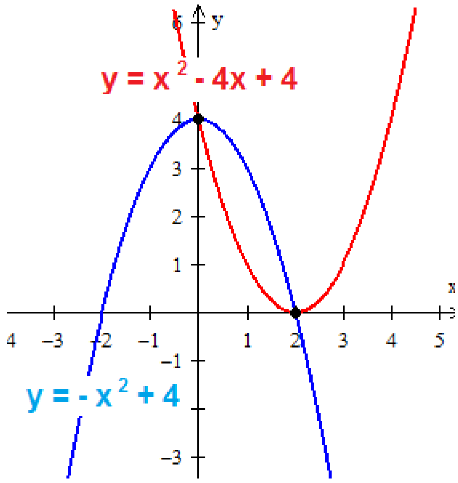


Figura 3.7: Resolução Gráfica da Inequação $x^2 - 4x + 4 \leq -x^2 + 4$

definida por $y = -x^2 + 4$, onde as imagens de $y = x^2 - 4x + 4$ são menores que as de $y = -x^2 + 4$ e incluindo suas interseções (imagens iguais), ou seja, $x \in [0, 2]$.

3.8 Taxa de Variação e Derivada da Função Quadrática

Nesta seção, definiremos a derivada da função quadrática como o limite da expressão que envolve a função f. Como as funções ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, as aplicações da derivada são numerosas, variadas e envolvem taxa de variação.

Definição 3.3 ***Taxa de Variação.*** *Seja a função quadrática definida por $f(x) = ax^2+bx+c$, com $a \neq 0$.*

- ***A taxa média de variação*** *de $y = f(x)$ em relação a x pertencente ao intervalo $[x, x+h]$ é $y_m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, conhecida como razão incremental, pois é a razão dos dois incrementos das variáveis.*

- ***A taxa instantânea de variação*** *de $y = f(x)$ em relação a x é o limite da taxa de variação média, quando fixamos o valor de x e diminuímos a medida de h até tender a (aproximar-se de) zero. O valor de h é diferente de zero para que a razão incremental esteja definida. Mas se h for suficientemente pequeno, a expressão limite dessa razão é o que se chama derivada da função no valor x da variável independente (Swokowski (1995)).*

Definição 3.4 ***Derivada da Função Quadrática***

- ***A derivada da função quadrática*** $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, *denotada por* $y' = f'(x)$ *é igual à taxa de variação instantânea da função. A derivada da função quadrática é igual ao limite da expressão* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{x+h-x}$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = \dfrac{2hax + ah^2 + bh}{h}$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + ah + b$ *quando* h *tende a zero, ou seja,* $f'(x) = 2ax + b$.

- ***A derivada da função num ponto*** *varia conforme o ponto* $P = (x_0, y_0)$ *da parábola e é dada por* $f'(x_0) = 2ax_0 + b$ *em que* x_0 *é a abscissa de* P. *Geometricamente, a taxa de variação da função quadrática em um ponto* P *é a inclinação* m *da reta tangente à parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *no ponto* P.

Exemplo 3.5 ***Interpretação Geométrica da Derivada da Função*** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Consideremos o gráfico de uma função quadrática $f(x) = x^2$. *Seja* $P = (x, f(x))$ *o ponto onde desejamos traçar uma reta tangente à curva. Quando atribuímos a* x *um acréscimo* $\Delta x = h$, *a variável dependente* y *sofre um acréscimo correspondente* Δy, *e passamos do ponto* $P = (x, y)$ *ao ponto* $Q = (x + h, y + \Delta y)$.

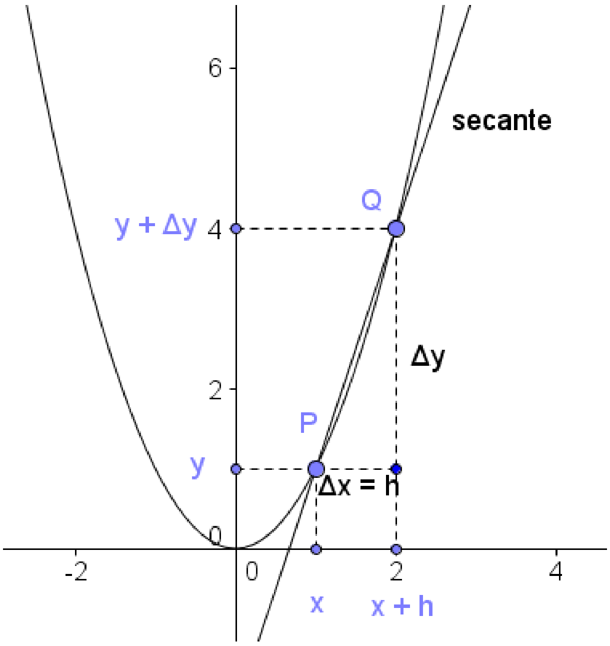


Figura 3.8: Razão Incremental

Note que: $y + \Delta y = f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ *e*
$\Delta y = f(x + h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2) - x^2 = h(2x + h)$. *Logo, a razão incremental*

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{h} = 2x + h$ é o declive da reta secante que passa pelos pontos P e Q. Se fixarmos x e diminuirmos o valor de h, a reta secante à parábola vai passando por várias posições, aproximando-se de uma posição limite definida como sendo a reta tangente à curva no ponto P. O declive ou coeficiente angular da reta tangente é o limite do declive $2x + h$ da reta secante, quando h tende a zero. Esse valor limite para a função $f(x) = x^2$ é $2x$. (Ávila (2010))

3.9 Função Quadrática e Movimento Uniformemente Variado

A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado (MUV), exemplificado pela queda dos corpos no vácuo. Tais corpos são sujeitos apenas à ação da gravidade e se deslocam sobre um eixo. Esta função quadrática $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$ fornece a posição de um objeto num certo instante t. Nesta expressão a constante a chama-se aceleração, b é a velocidade inicial (no instante $t = 0$) e c é a posição inicial do objeto.

A velocidade média é dada por $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h} = \dfrac{ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh}{h} = at + \frac{1}{2}ah + b$. Quando h se aproxima de zero, o valor da velocidade média se aproxima de $at + b$, que é a derivada da função s. Chamamos de $v(t) = at + b$ a velocidade do objeto (no MUV) no instante t. Quando $t = 0$, $v(0) = b$. Por isso b é a velocidade inicial.

Na função afim $v(t) = at + b$, a constante a (aceleração) é a taxa de variação da velocidade. Como ela é constante, o movimento chama-se uniformemente variado.

3.10 A Parábola no contexto da Geometria Analítica

Definição 3.5 *Consideremos um ponto F e uma reta $\mathcal{L}$ que não o contém. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$. Simbolicamente: $\mathcal{P} = P/d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$.*

(Figura 3.9) A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se eixo focal (eixo de simetria, reta focal) da parábola. O ponto V da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. O vértice V é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz. O número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o parâmetro da parábola $\mathcal{P}$ e $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

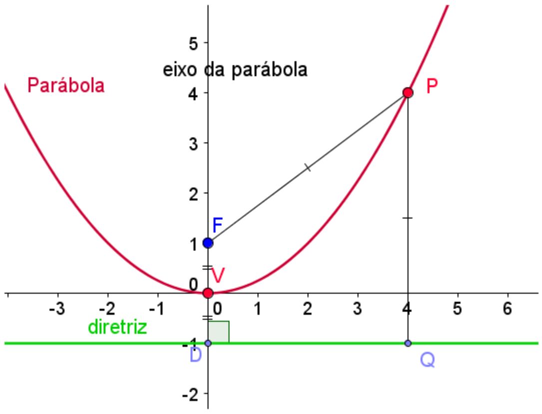


Figura 3.9: Parábola $x^2 = 4y$ e seus elementos

Abordaremos somente as parábolas com concavidade voltada para cima e para baixo, com suas respectivas translações, pois as outras não são representações de função.

Da definição de parábola, concluímos a sua equação reduzida:

- $x^2 = 4py$ é uma parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY, concavidade voltada para cima, $F = (0, p)$ e diretriz $d : y = -p$;
- $x^2 = -4py$ é uma parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY, concavidade voltada para baixo, $F = (0, -p)$ e diretriz $d : y = p$.

Sugiro a observação da Figura 3.10, exibindo partes da animação, segundo parâmetro p, de um arquivo do Geogebra.

Se a parábola tiver como vértice o ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY, a sua equação pode ser escrita como:

- $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, a concavidade está voltada para cima, $F = (x_0, y_0 + p)$ e a diretriz d é $y = y_0 - p$;
- $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$, a concavidade está voltada para baixo, $F = (x_0, y_0 - p)$ e a diretriz d é $y = y_0 + p$.

Observe a Figura 3.11.

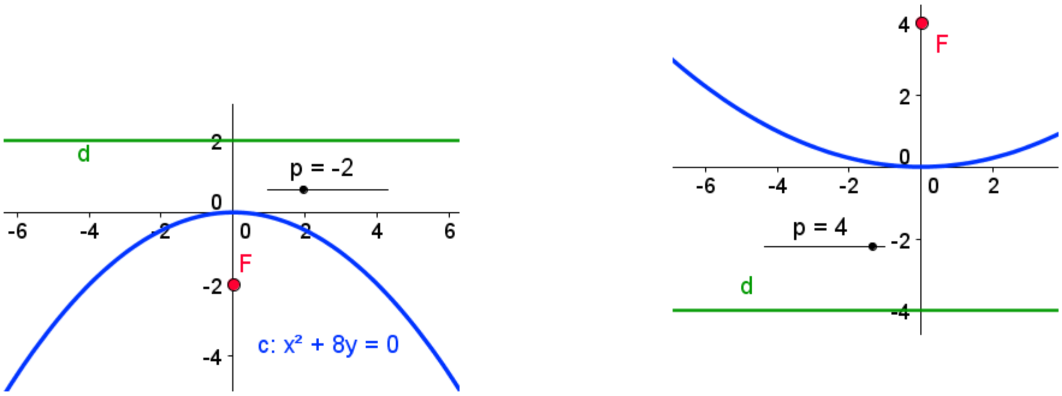


Figura 3.10: Parábola e a influência do parâmetro p

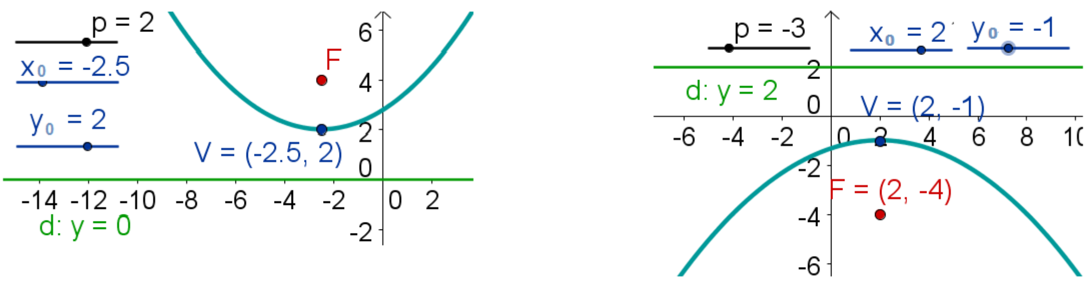


Figura 3.11: Parábolas, vértices e focos

Capítulo 4

Aplicações da Função Quadrática e Atividades

Os problemas serão apresentados em seções, conforme tipos de atividades ou área de aplicação. Assim, teremos as seguintes seções: atividades relacionadas a problemas do cotidiano; problemas de otimização; atividades com uso do Winplot ou Geogebra para observação de translações e parâmetros; atividades envolvendo a parábola no contexto da Geometria Analítica; aplicações da função quadrática na Física, no Cálculo Diferencial e atividades aplicadas em sala de aula. Todos os problemas vêm acompanhados de soluções.

4.1 Problemas do Cotidiano

O objetivo principal desta seção é a modelagem e resolução de problemas através da função quadrática, mostrando que esta função elementar é aplicada em diferentes situações do cotidiano.

Problema 4.1 ***. Futebol Brasileiro.*** *Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados. Contamos o número de jogos que cada clube participará no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será* $10 \cdot 9 = 90$*. Sabendo que o campeonato brasileiro é disputado por 20 clubes, calculamos a quantidade de jogos com o mesmo raciocínio:* $20 \cdot 19 = 380$ *jogos. Enfim, para cada quantidade* x *de clubes* *participantes, é possível calcularmos o número y de jogos do campeonato, ou seja, y é função de x. Generalize e escreva uma equação (regra) que permita calcular y a partir de x. (Problema retirado do Iezzi (2010))*

Solução: Para a resolução deste problema, lembre-se da definição da função quadrática. $y = x \cdot (x-1) = x^2 - x$

Problema 4.2 . ***Esporte.*** *Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra poliesportiva com dimensões oficiais 20m e 36m. Tendo recebido 200m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível. Ajude-os. Este problema foi retirado do livro Dante (2011a).*

Solução:

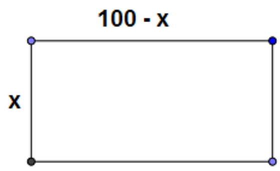


Figura 4.1: Campo de Futebol

A área é dada por $A(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$.

Como o coeficiente a é negativo, a função $A(x)$ é representada por uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo. Logo, para que a área seja máxima, a dimensão x é a abscissa do vértice $x_V = \dfrac{-100}{-2} = 50$. A área máxima a ser cercada é um quadrado de lado 50m, o que está adequado para cercar a quadra $20m \times 36m$.

Problema 4.3 . ***Número de Ouro.*** *Extraída de Oliveira (2010).*

A raiz positiva $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ da equação $x^2 - x - 1 = 0$ é chamada ***número de ouro****. Como motivação desta definição, resolva a equação $x = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$.*

Solução: *Manipulando algebricamente a equação dada, obtemos:*
$x = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1 + \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+2x}{1+x}$. *Então, devemos ter $x = \dfrac{1+2x}{1+x}$. O que nos*

leva a equação do segundo grau $x^2 + x = 1 + 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$*. Resolvendo a equação, obtemos* $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$*. Logo, o número de ouro é* $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$*, com expansão decimal aproximadamente igual a* $1,61803398$ *e muitas vezes indicado pela letra* ϕ *ou* τ*.*

Os problemas a seguir exigem a determinação de uma equação matemática de uma função que modele um problema da vida real. Neste trabalho, só nos interessa a modelagem da função quadrática.

Problema 4.4 *. **Modelagem.** O comprimento de um lote de construção retangular é três vezes a sua largura. Encontre uma equação que modele sua área em função da largura (Stewart (200)).*

Solução: $c = 3l$ e $A = cl$. Então, $A(l) = 3l^2$.

Problema 4.5 *. **Modelagem.** Um retângulo tem um perímetro de 20cm. Encontre uma função que modele sua área em termos do comprimento* x *de um de seus lados (Stewart (200)).*

Solução: O perímetro do retângulo é dado por $2x + 2y = 20$ e $A = xy$. Como $2y = 20 - 2x \Rightarrow y = 10 - x$ então, $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

4.2 Física

Segundo Galileu, as distâncias percorridas por um corpo em queda livre são proporcionais ao quadrado dos tempos gastos em percorrê-las, ou seja, a função horária das posições é quadrática e definida pela equação $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} g t^2$. Quando se diz que o corpo foi abandonado, sua velocidade inicial $v_0 = 0$. A aceleração da gravidade, ao nível do mar é $g \approx 9,8m/s^2$ e $s_0 = 0$. Assim é possível reescrever a função como $s(t) = 4,9t^2$.

Problema 4.6 *. **Queda Livre.** Um atleta vai pular de um trampolim de 44,1 metros de altura em relação ao solo. Desprezando-se a resistência do ar, quantos segundos vai demorar sua queda? Quantos metros o atleta já se deslocou após 1s? (Extraído do livro de autoria de Imenes (1992)).*

Solução: Para esta resolução, devemos aplicar o valor da função quadrática. Encontraremos $44,1 = 4,9t^2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3s$ e $s(1) = 4,9m$.

Resposta: Sua queda vai durar 3 segundos e após 1 segundo, ele já se deslocou 4,9 metros.

Problema 4.7 . ***Movimento Uniformemente Variado (MUV).*** *Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de* $v = 360km/h$ *em* $20s$. *Calcule o valor da aceleração desse avião* (m/s^2) *e o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.*

Solução: *Sabemos que* $\dfrac{360 \times 1000}{3600} = 100$, *portanto consideremos a velocidade igual a* $100m/s$. *Para o cálculo da aceleração, basta a razão* $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{100m/s}{20s} = 5m/s^2$. *Como a posição do objeto em função do tempo, no MUV, é dada pela função quadrática* $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, *temos:* $s - s_0 = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

$$\Delta s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 100 \cdot 20 + \frac{5 \cdot 20^2}{2} = 2000 + 1000 = 3000$$

Logo, $\Delta s = 3000m = 3km$ *é a variação da posição, o deslocamento do avião, ou seja, o comprimento mínimo da pista para que o avião consiga decolar.*

4.3 Cálculo Diferencial

Problema 4.8 . ***Taxa de Variação da Função Quadrática.*** *Se um objeto é solto, em queda livre, de uma altura de 100 pés e se a resistência do ar pode ser desprezada, a altura* h *do objeto no instante* t *(em segundos) é dada por* $h(t) = -16t^2 + 100$.

a) *Lembrando que a velocidade média é dada por* $v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$, *calcule a velocidade média do objeto nos intervalos* $[1, 2]$, $[1; 1,5]$ *e* $[1; 1,1]$.

b) *A taxa de variação instantânea, nesse caso chamada de velocidade instantânea é a derivada da função* h. *Lembre que a derivada da função quadrática é dada por* $f'(x) = 2ax + b$. *Calcule a velocidade do objeto quando* $t = 1$.

Resolução:

a) $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{36-84}{1} = -48$ *pés/segundo;* $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{64-84}{0,5} = -40$ *pés/segundo e* $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{80,64-84}{0,1} = -33,6$ *pés/segundo. Observe que as velocidades médias são negativas porque o objeto está se deslocando para baixo, ou seja, a altura h do objeto está diminuindo.*

b) *Neste item, precisamos calcular a velocidade instantânea. A velocidade é dada por $v(t) = -32t$. Logo, $v(1) = -32$ pés/segundo, um valor bem próximo de $-33,6$, que é a velocidade média com $\Delta t \to 0$, ou seja, a variação do tempo bem pequena.*

Atividade 4.1 *. **Retas Tangentes.** Com esta atividade, você será capaz de traçar uma parábola, calcular as equações de retas tangentes a ela em determinados pontos e através do traçado das tangentes, analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática, assim como, a existência de ponto mínimo ou máximo.*

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$, determine a equação da reta tangente à curva representada por esta função nos pontos de abscissas $x = 0$ e $x = 1$. Utilizando algum software (Winplot ou Geogebra), grafique a curva e as retas tangentes encontradas.

Resolução: *A função derivada de f é $f'(x) = 2x - 3$, o coeficiente angular da reta tangente é dado por $a = f'(0) = -3$ e o coeficiente linear b pode ser determinado por $1 = -3 \cdot 0 + b \Longrightarrow b = 1$. A equação dessa reta tangente em $x = 0$ é $y = -3x + 1$. Para a tangente no ponto de abscissa $x = 1$, temos $a = -1$, $-1 = -1 \cdot 1 + b \Longrightarrow b = 0$. A equação dessa reta tangente é $y = -x$.*

Observe a Figura 4.2. Quando as retas tangentes são decrescentes, a função f também é; quando a tangente é horizontal, a função tem um ponto crítico que pode ser máximo ou mínimo e quando as tangentes são crescentes, a função f também é crescente. Como $a_{tg} = f'(x_0) = 2a(x_0) + b$, quando a tangente horizontal que passa pelo vértice e tem $a = 0 \Rightarrow 2a(x_0) + b = 0$, donde obtemos a fórmula da abscissa do vértice $(x_0) = -\dfrac{b}{2a}$.

4.4 Otimização

Em problemas de otimização, buscamos encontrar os pontos ótimos, ou seja, os mínimos ou máximos. No caso da função quadrática, o ponto máximo ou mínimo é o vértice da parábola. Para uma função que representa o lucro de uma empresa, há interesse no valor

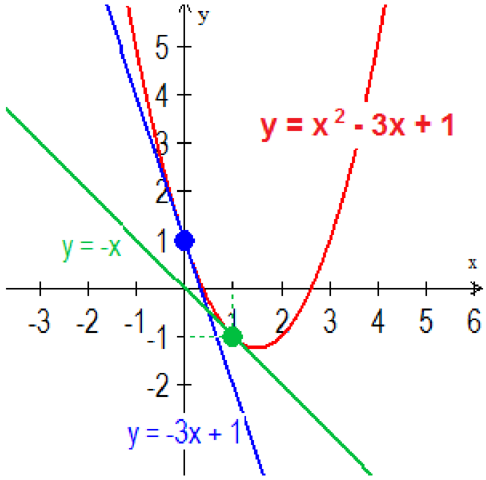


Figura 4.2: Parábola e Tangentes

máximo; para uma função que representa a quantidade de material num processo de manufatura, buscaria-se o valor mínimo. Com estes problemas, aprenderemos a determinar máximos e mínimos da função quadrática.

Problema 4.9 . *Futebol.* *A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura* ***h****, em metros,* ***t*** *segundos após o chute, seja dada por* $h(t) = -t^2 + 6t$*. Em que instante a bola atinge a altura máxima? Qual é essa altura máxima atingida pela bola? (extraído do livro de autoria de Dante (2011a))*

Solução: O que está sendo perguntado corresponde às coordenadas do vértice da parábola, que possui concavidade voltada para baixo. Portanto, o vértice é o ponto máximo da função. Como buscamos encontrar o ponto máximo, este é um problema de otimização. O instante será dado por $t_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-6}{-2} = 3$ segundos. A altura máxima atingida pela bola é $h_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{36}{4} = 9$ metros. A altura também é a imagem de 3 pela função, ou seja, $h(3) = -9 + 18 = 9$.

Problema 4.10 . *Lançamento Oblíquo.* *Um ponto material é lançado do solo, verticalmente para cima e tem posições* s *no decorrer do tempo* t *dadas pela função horária* $s = 60t - 5t^2$ *(*s *em metros e* t *em segundos).*

a) *Escreva os intervalos de crescimento e decrescimento da função;*

b) *Calcule o tempo gasto para atingir a altura máxima;*

c) *Determine a altura máxima em relação ao solo;*

d) *Grafique o problema.*

Resolução:

a) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função são determinados através do estudo do sinal da derivada primeira da função. Como $s'(t) = 60 - 10t$, $s'(t) < 0$ *quando* $t > 6$, $s'(t) = 0$ *quando* $t = 6$ *e* $s'(t) > 0$ *quando* $t < 6$. *Sendo* s *decrescente se* $t \in (6, \infty)$ *e crescente se* $t \in (-\infty, 6)$.

b) O tempo gasto para atingir a altura máxima corresponde ao valor de t *que anula a derivada primeira, ou seja,* $t = 6$ *segundos. Esse valor também poderia ser calculado como a abscissa do ponto máximo, já que a parábola tem concavidade voltada para baixo e o vértice é um ponto máximo. Logo,* $x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-60}{-10} = 6$.

c) A altura máxima em relação ao solo corresponde ao y *do vértice (valor máximo da função) que pode ser calculado como* $s(6) = 360 - 5 \cdot 36 = 180m$ *ou* $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{3600}{-20} = 180$*;*

d) Observe Figura 4.3.

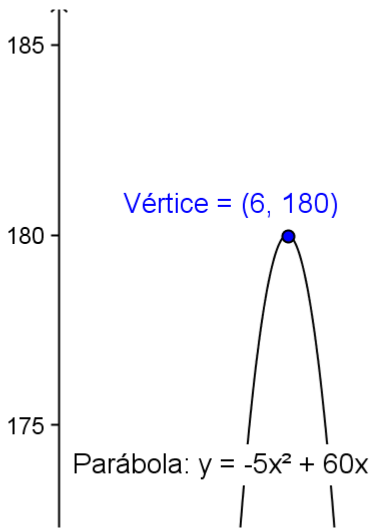


Figura 4.3: Parábola e Ponto Máximo

Problema 4.11 . ***Área Máxima.*** *O dono de uma granja quer construir um cercado retangular aproveitando um muro já existente. As dimensões do cercado podem variar, desde que o comprimento da parte cercada, sem contar o muro, seja 36m (perímetro igual a 36), pois o granjeiro só tem 36 m de tela.*

a) *Determine a área A desse cercado, em função de x.*

b) *A é uma função quadrática na variável x. Elabore o gráfico dessa função, que deve ter a concavidade voltada para baixo.*

c) *O granjeiro quer um cercado que tenha maior área. Qual é essa área e quais devem ser as dimensões do cercado? (Imenes (2010))*

Resolução: *Este é um problema também de modelagem. Precisamos: identificar a variável; expressar todas as incógnitas em função da variável; montar um modelo (equação matemática); resolver a equação e comprovar a resposta.*

a) *Observe a Figura 4.4 e conclua que $A(x) = x(36 - 2x) \Leftrightarrow A(x) = -2x^2 + 36x$.*

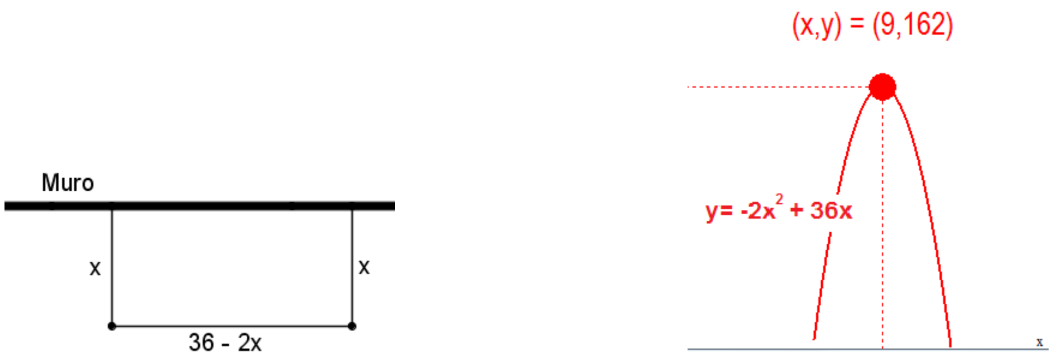


Figura 4.4: Granja e Função Área $A(x)$

b) *Observe o gráfico na Figura 4.4.*

c) *O $x_V = \dfrac{-36}{-4} = 9m$ e $A(9) = -2 \cdot 81 + 36 \cdot 9 = -162 + 324 = 162m^2$ é a área máxima. Assim, as dimensões do retângulo devem ser 9m e 18m, para que a área seja máxima.*

Problema 4.12 . *Economia.* *Seja p o preço de venda por unidade de determinado bem e q a respectiva quantidade vendida a este preço. A receita total R auferida pela venda de q unidades ao preço p é dada por $R = pq$. O lucro total é dado pela diferença entre a receita e o custo total, ou seja, $L = R - C$. Considerando $q = 20 - p$ a equação da demanda de um bem e $C = 2q + 17$ a equação do custo associado, determine:*

a) *a equação da receita;*

b) *a função lucro;*

c) *o valor de q para se obter a receita máxima;*

d) *o valor de q para a obtenção de um lucro máximo. (problema extraído do livro de Silva (1993)).*

Resolução:

a) A equação da receita é $R(q) = (20 - q)q = -q^2 + 20q$.

b) A função lucro é definida por $L(q) = -q^2 + 18q - 17$.

c) O valor de q para se obter a receita máxima é a abscissa do vértice de R, o que corresponde a $q = \dfrac{-20}{-2} = 10$ unidades.

d) O valor de q para a obtenção de um lucro máximo também é a abscissa do vértice de L, o que corresponde a $q = \dfrac{-18}{-2} = 9$ unidades.

4.5 Atividades Usando o Winplot

As atividades seguintes serão executadas no Winplot, proporcionando a visualização e investigação das consequências das mudanças dos parâmetros da função quadrática.

Atividade 4.2 . ***Parâmetro a.*** *O objetivo desta atividade é identificar o efeito que a variação do coeficiente a causa nos gráficos das funções quadráticas. Para tal, construa num mesmo sistema cartesiano, com a ajuda do Winplot, as funções definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, $h(x) = 2x^2$ e $v(x) = 10x^2$. Agora, os gráficos das funções $u(x) = -x^2$, $w(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ e $y = -10x^2$. Observe a Figura 4.5.*

O que podemos concluir? Que a concavidade e a abertura da parábola está relacionada ao parâmetro a da equação. Elas têm concavidade voltada para cima, quando o $a > 0$ e concavidade voltada para baixo, quando $a < 0$. Parábolas que têm parâmetros a opostos, são reflexões em relação ao eixo x. Quanto maior o módulo de a, mais fechada a parábola é e quanto menor o valor absoluto de a, mais aberta a parábola.

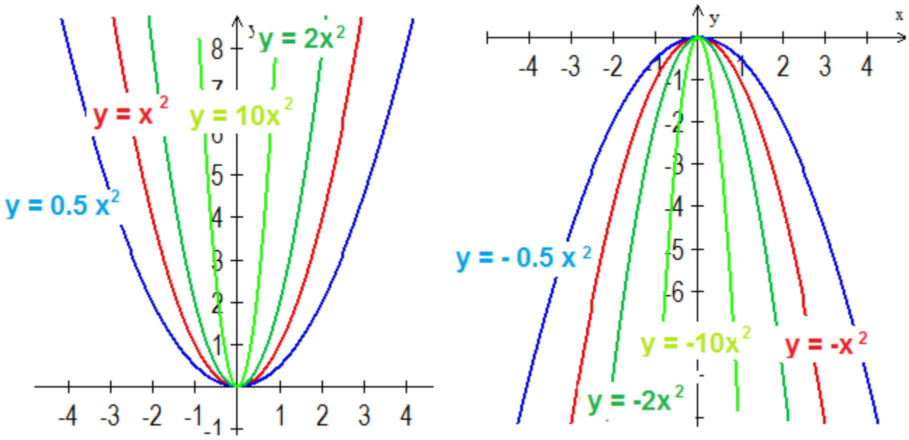


Figura 4.5: Concavidade de Parábolas definidas por $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$

Atividade 4.3 . ***Translações Verticais.*** *Com a realização desta atividade, devemos identificar o que acontece com os valores do coeficiente* c *da função quadrática, quando transladamos a parábola verticalmente para cima ou para baixo. Considere funções quadráticas definidas por* $f(x) = ax^2 + c$, *com* $a \neq 0$ *e* $b = 0$. *Construa num mesmo sistema cartesiano, com a ajuda do Winplot, as funções definidas por ,* $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 5$ *e* $h(x) = x^2 - 1$. *Observe a Figura 4.6.*

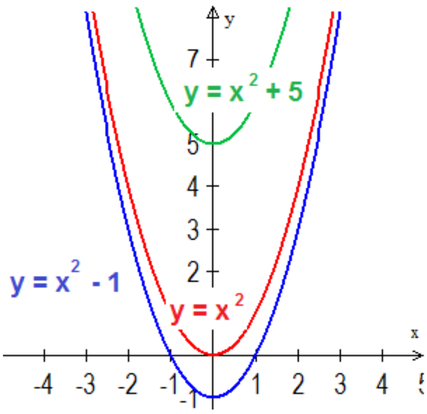


Figura 4.6: Translações Verticais

Atividade 4.4 . ***Translações Horizontais.*** *Conforme a seção de translações horizontais, do capítulo anterior, a parábola que resulta de translação horizontal da função* $y = ax^2$ *também possui uma raiz dupla e sua equação é da forma* $f(x) = a(x - m)^2$, *com* $a \neq 0$ *e* $m = -\dfrac{b}{2a}$. *Para observar tais translações, construa num mesmo sistema cartesiano, utilizando o Winplot, as funções definidas por ,* $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 5)^2$ *e* $h(x) = (x - 1)^2$. *Figura 4.7*

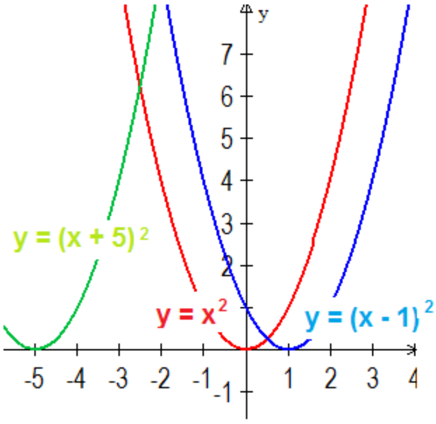


Figura 4.7: Translações Horizontais

4.6 Atividades Usando o Geogebra

Esta primeira atividade propõe a construção gráfica de uma determinada parábola, com a marcação de pontos como o vértice, o foco e a reta diretriz. Ela também poderia ter sido feita no Winplot. Não foi pedido para construir um arquivo com animação, por se tratar de uma única parábola citada. Não é objetivo desta atividade a observação da variação de parâmetros, mas a identificação das coordenadas do vértice, foco e da equação da diretriz.

Atividade 4.5 ***. Parábola e seus Elementos.*** *Vimos, no contexto da Geometria Analítica, a parábola com os seus elementos importantes, como o vértice, foco e a reta diretriz. Para relacionarmos estes elementos com a equação da parábola, faremos a atividade seguinte:*

Utilizando o Geogebra construa a parábola de equação $(x-2)^2 = 8(y-3)$ *e marque o seu vértice, o foco e a reta diretriz (Verifique a Figura 4.8).*

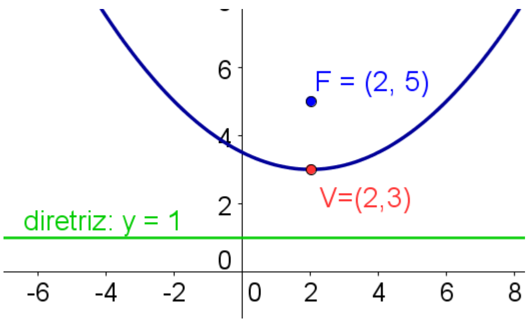


Figura 4.8: Parábola $(x-2)^2 = 8(y-3)$

As atividades seguintes têm por objetivo mostrar a influência dos parâmetros da função quadrática, mediante animações construídas no Geogebra.

Atividade 4.6 . *Animação do Parâmetro* a. *Nesta atividade, observaremos o efeito do parâmetro $a \in [-5, 5]$ da função $f(x) = ax^2$, relacionado à concavidade e abertura da parábola. Esta animação se encontra no arquivo **coeficiente a.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.9).*

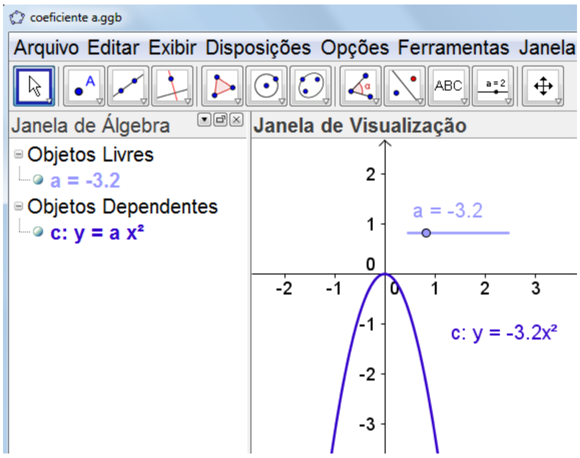


Figura 4.9: Animação do Parâmetro a

Atividade 4.7 . *Animação do Parâmetro* b. *Observaremos o efeito do parâmetro $b \in [-5, 5]$ da função $f(x) = x^2 + bx$, relacionado ao ramo da parábola que intersecta o eixo y, dependendo do sinal de b. Caso b seja nulo, o ponto de interseção da parábola com o eixo y é o seu próprio vértice. Esta animação se encontra no arquivo **coeficiente b.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.10).*

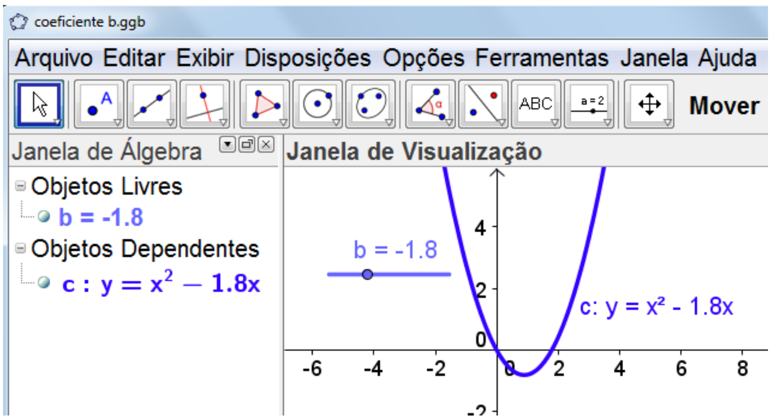


Figura 4.10: Animação do Parâmetro b

Atividade 4.8 . *Animação do Parâmetro* c. *Observaremos o efeito do parâmetro $c \in [-5, 5]$ da função $f(x) = x^2 + c$, relacionado ao intercepto y da parábola e às translações*

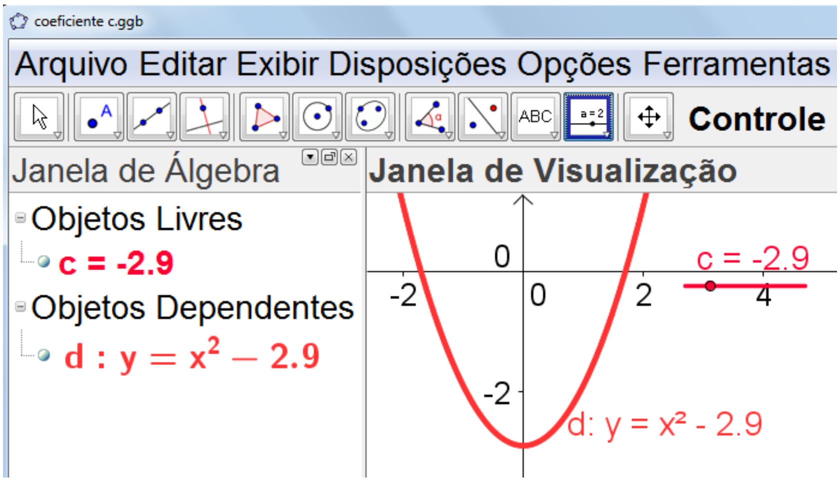


Figura 4.11: Animação do Parâmetro c

*verticais. Esta animação se encontra no arquivo **coeficiente c.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.11).*

Atividade 4.9 . *Animação Simultânea dos Parâmetros da Função Quadrática.* *Agora já somos capazes de observar, simultaneamente, as variações dos três parâmetros a, b e c no intervalo $[-5, 5]$ da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. A concavidade, as interseções e o vértice da parábola sofrem alterações. Ocorrem translações verticais, horizontais e reflexões. Tente relacionar cada alteração gráfica com os parâmetros. Esta animação se encontra no arquivo **Translacoes da Parabola.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.12).*

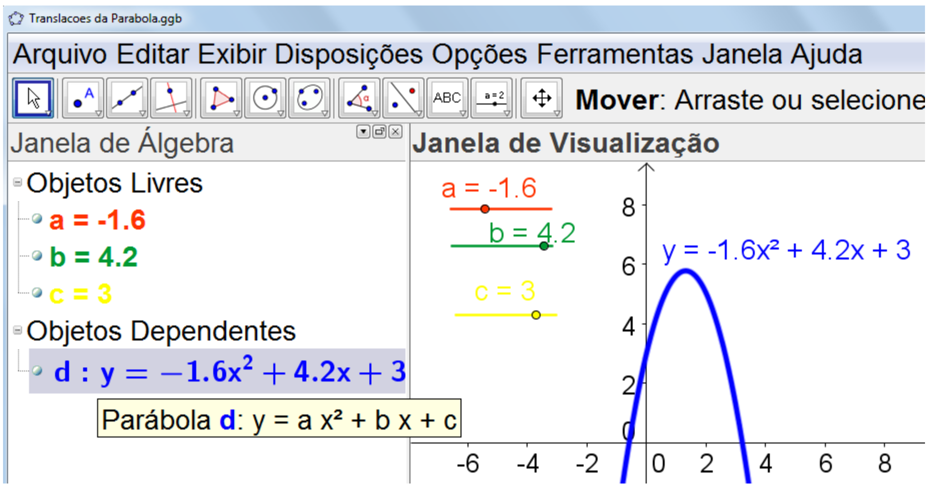


Figura 4.12: Animação dos Parâmetros a, b e c, simultaneamente

Atividade 4.10 . *Translações Horizontais.* *Teremos a oportunidade de observar translações horizontais da parábola da função $y = (x - m)^2$, conforme a variação do parâmetro*

*$m \in [-5, 5]$. A curva traçada é a mesma da função $y = x^2$, deslocada m unidades para a esquerda ou direita de acordo com o valor de m. Esta animação se encontra no arquivo **TransHorizontais.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.13).*

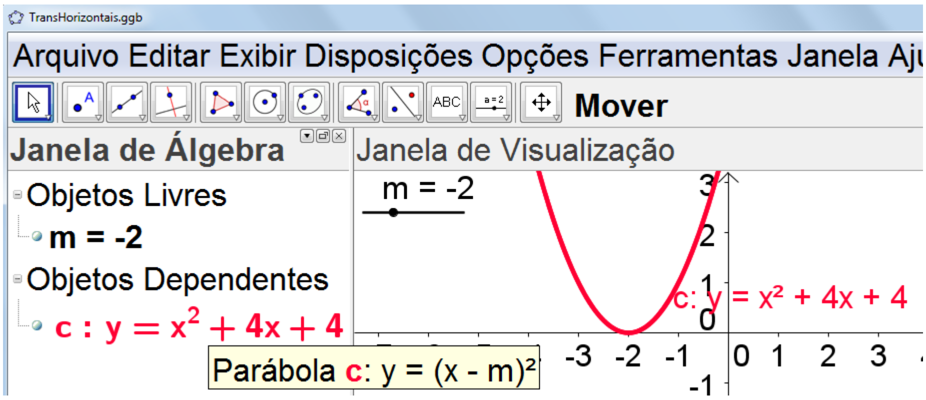


Figura 4.13: Translações Horizontais

Atividade 4.11 ***. Construção da Parábola por Definição da Geometria Analítica.*** *Esta atividade é proposta para fixarmos a definição da parábola, como lugar geométrico. Lembramos que a parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$, ou seja, $\mathcal{P} = P/d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Vamos descrever um procedimento para efetuar a construção da parábola usando o Geogebra:*

- *numa janela do Geogebra, trace a reta a (diretriz da parábola) por dois pontos A e B;*
- *escolha um ponto C, para ser o foco da parábola, fora da reta a;*
- *escolha um ponto D na reta a;*
- *trace a reta mediatriz b do segmento CD;*
- *trace a reta c perpendicular à diretriz a que passa pelo ponto D;*
- *determine a interseção E da mediatriz b com a reta c;*
- *habilite o rastro no ponto E;*
- *descreva a parábola de foco C e diretriz a, movendo o ponto D na diretriz. (Atividade extraída do material Profmat (2012b))*

*Observe a construção na Figura 4.14, que é parte da animação que pode ser visualizada no arquivo **construcao da parabola GA.ggb**.*

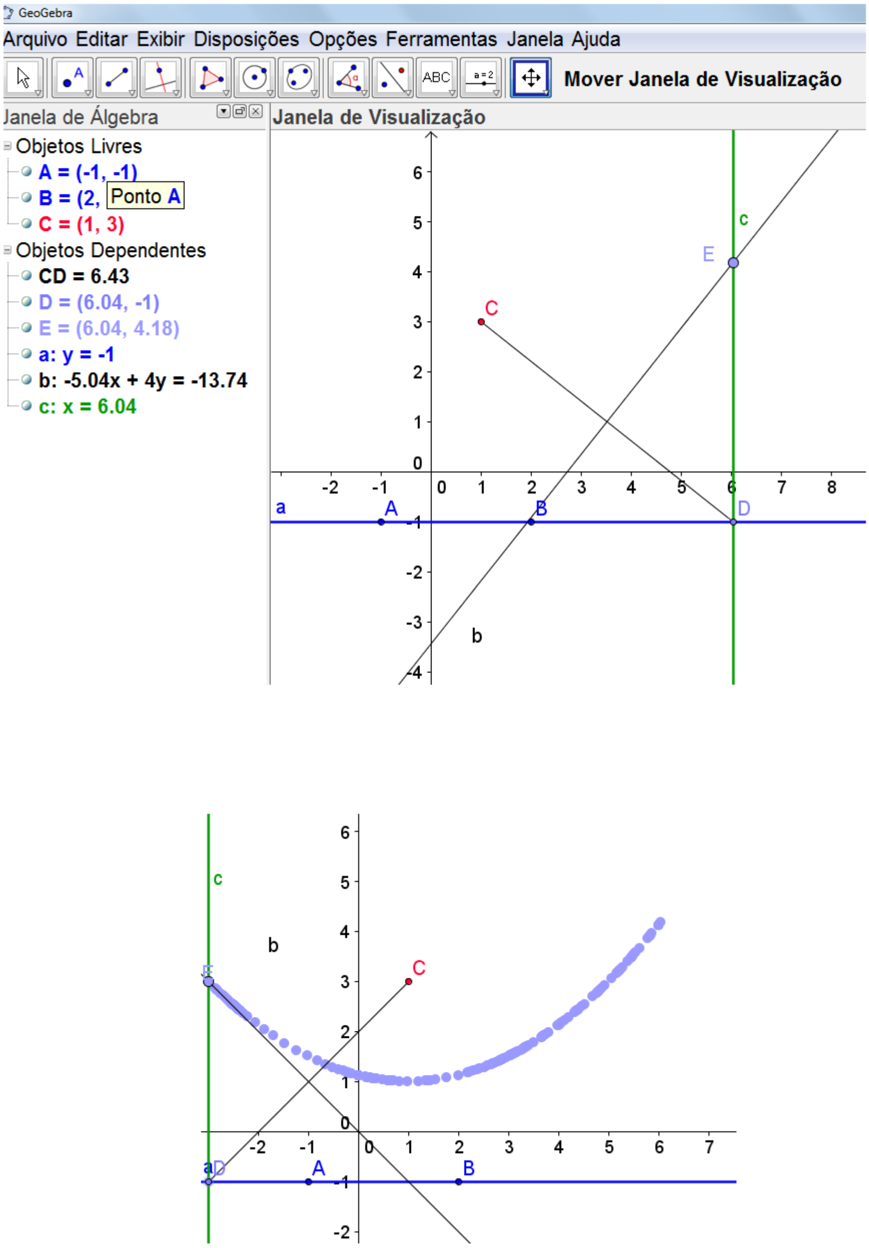


Figura 4.14: Construção da Parábola no Geogebra

No papel esta atividade pode ser feita com o auxílio de uma régua, um esquadro, lápis, alfinete e barbante (Dante (2011b)). É a construção da parábola, baseada em sua própria definição. Veja a Figura 4.15.

Atividade 4.12 . ***Parábola de Vértice na Origem.*** *Teremos a oportunidade de observar parábolas de equação* $x^2 = 4py$, *com o parâmetro* $p \in [-5, 5]$ *e o vértice da parábola em* $V = (0, 0)$. *Já sabemos que* p *correponde à distância da diretriz ao vértice da parábola, que é igual à distância do vértice ao foco. Esta animação se encontra no arquivo* ***Parabola***

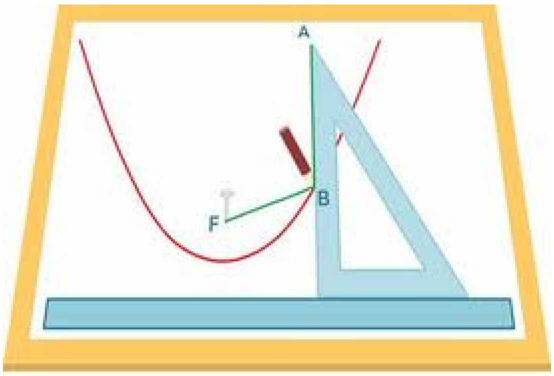


Figura 4.15: Construção de Parábola no Papel

***na GA.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.16).*

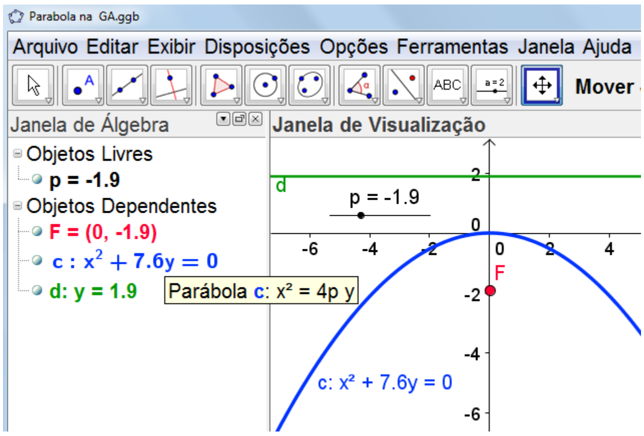


Figura 4.16: Parábola na Geometria Analítica

Atividade 4.13 . ***Parábola de Vértice*** $V = (x_0, y_0)$**.** *Nesta atividade, observaremos parábolas de equação $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, com parâmetro p, as coordenadas x_0 e y_0 do vértice variando no intervalo $[-5, 5]$. Tais variações estão relacionadas a distâncias entre foco, vértice e diretriz; concavidade; abertura e translações da parábola. O eixo focal da parábola também se modifica conforme a abscissa x_0 do vértice. Quando $p = 0$, visualizaremos uma parábola degenerada, que se resume a duas retas concorrentes no vértice V, ou seja, uma reta horizontal de equação $y = y_0$ e outra reta vertical de equação $x = x_0$. Esta animação se encontra no arquivo **Parabola foco fora de y.ggb** e uma parte dela é apresentada na Figura 4.17).*

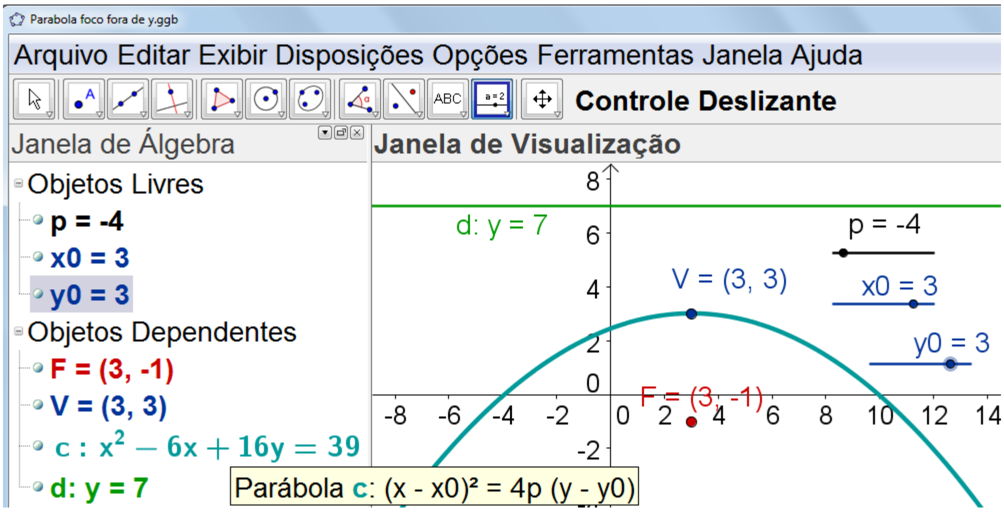


Figura 4.17: Parábola de eixo focal não coincidente com o eixo y

4.7 Atividades Aplicadas em Sala de Aula

As atividades, que seguem, foram aplicadas em minhas turmas do 2° Ano dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense (IFF), nas quais leciono Matemática. Preparei-as em forma de pequenos testes de sondagem. Como a Função Quadrática é ensinada na 1ª Série, parti do princípio que os alunos conhecem este assunto. Utilizei as atividades para identificar deficiências e propor nova prática pedagógica, mais dinâmica e questionadora. Incluí resoluções dos alunos e resolvi somente àquelas questões que, segundo eles, não foram bem trabalhadas e portanto não souberam responder.

Em minhas aulas, estimulo a utilização de softwares para a construção de gráficos. Em sala de aula, utilizo o meu notebook, ligado à televisão, quando não tenho disponível um laboratório de informática para dar aula. Conceitos e cálculos trabalhados são rapidamente verificados na construção de gráficos. Os alunos também dispõem de laboratórios de informática para poderem praticar. Tenho consciência de que esta não é a realidade da maioria das escolas públicas do nosso país. Mas como a minha possui esta estrutura maravilhosa, devo aproveitar a ferramenta das novas tecnologias como motivação e para melhorar o processo ensino-aprendizagem.

Atividade 4.14 ***Atividade 1 - Raízes ou Zeros de uma Função Quadrática***

Esta atividade tem por objetivo a determinação de raízes da função quadrática, através de diferentes técnicas , como: fatoração do polinômio de segundo grau; comple-

tando quadrados, para trabalhar com o quadrado da soma ou da diferença de dois termos; utilização da fórmula resolutiva de equação que envolve função quadrática; utilização da regra da soma e do produto das raízes e pela observação do gráfico da função quadrática.

Considere a definição anterior e as funções definidas por:

a) $f(x) = (x-1)^2 - 9$

b) $f(x) = x^2 + 6x$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1- Determine os zeros das funções quadráticas, usando fatoração.

a) $f(x) = (x-1)^2 - 9 = (x-1-3)(x-1+3) = (x-4)(x+2) = 0$. *As raízes são 4 e -2.*

b) Observe a resolução dos alunos na Figura 4.18.

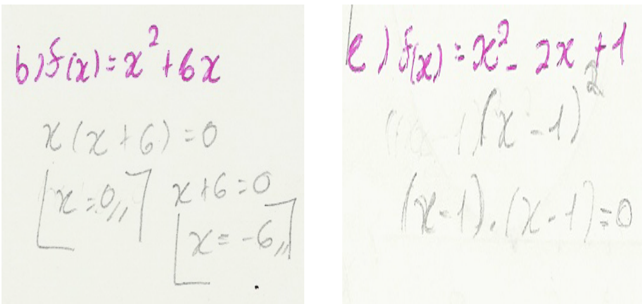


Figura 4.18: Resoluções da Questão 1- b, c dos alunos

No item c), a função tem raiz dupla igual a 1.

2- Complete quadrados e determine os zeros das funções quadráticas.

a)Veja Figura 4.19.

2-b) $x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 9 \Rightarrow x + 3 = 3$ *ou* $x + 3 = -3$*, ou seja, as raízes são 0 e -6.*

c) $(x-1)^2$ *já é quadrado da diferença. As duas raízes são iguais a 1.*

3- Determine, se existirem, as raízes reais das funções quadráticas utilizando a fórmula resolutiva de equação de segundo grau.

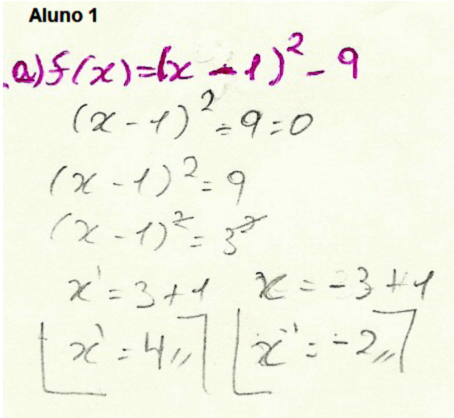


Figura 4.19: Resolução da Questão 2-a, dos alunos

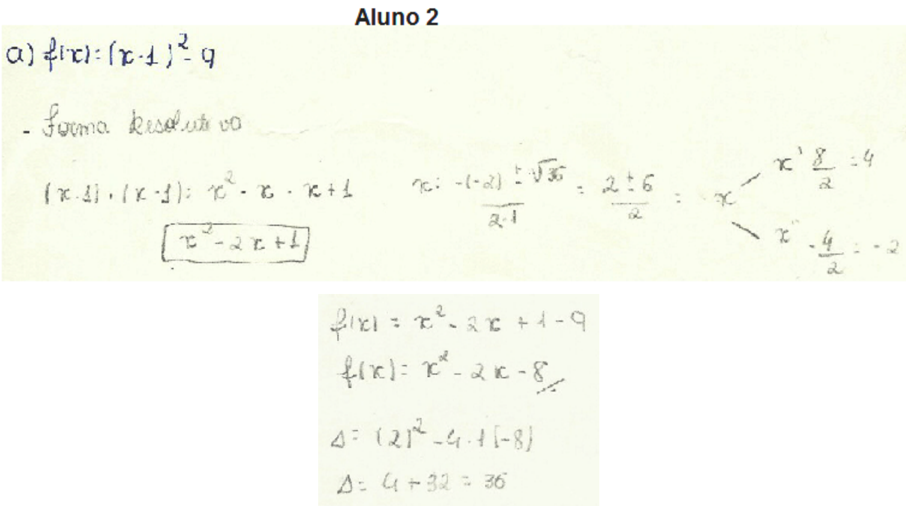


Figura 4.20: Resolução da Questão 3- a, pelos alunos

Observe as Figuras 4.20 e 4.21, nas quais foi utilizada a fórmula resolutiva de equação de segundo grau.

4- *Utilize a regra da soma e do produto das raízes para determiná-las.*

No item a), as raízes são 4 e -2; no b), 0 e -6 e c) raiz dupla 1. Verifique os cálculos na Figura 4.22

5- *Grafique as funções no Winplot e utilize a ferramenta de marcação dos zeros para conferir os seus cálculos anteriores. Os gráficos estão construídos na Figura 4.23.*

6- *Onde você pode observar as raízes na representação gráfica de uma função quadrática? Nas abscissas dos pontos de interseção com o eixo x.*

7- *Você já conhecia todas estas formas de determinação de raízes de função quadrá-*

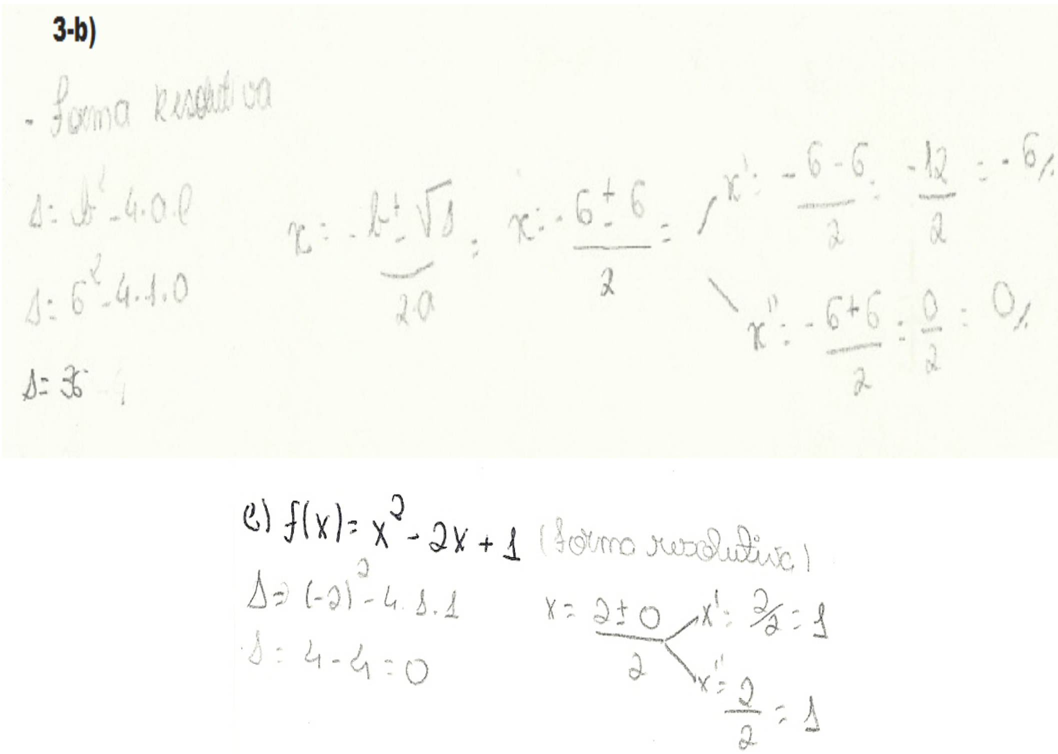


Figura 4.21: Resoluções da Questão 3- b, c, pelos alunos

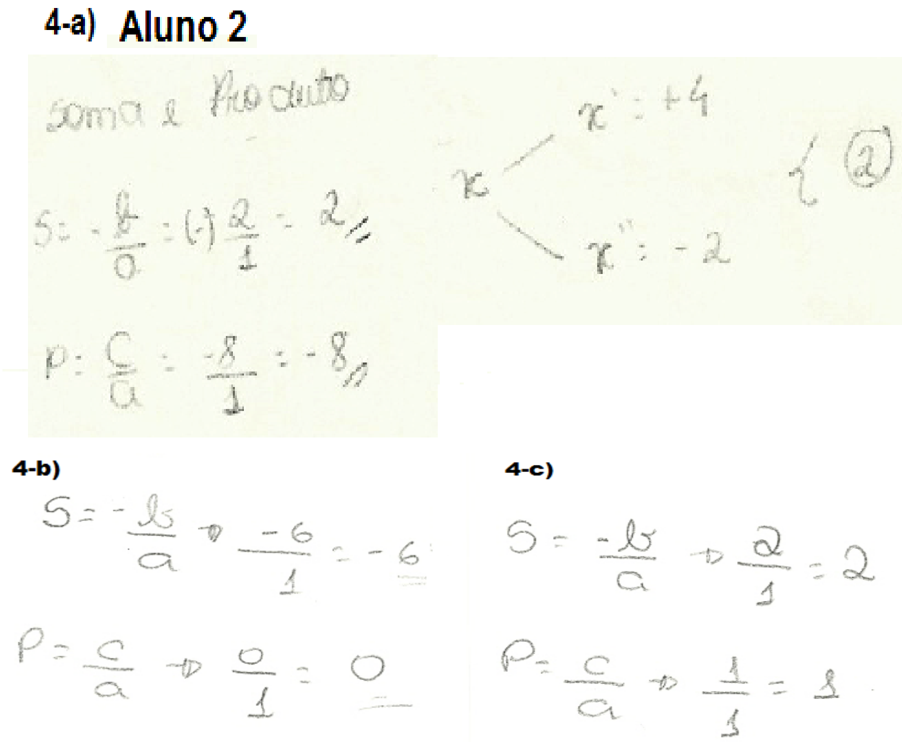


Figura 4.22: Resoluções da Questão 4, pelos alunos

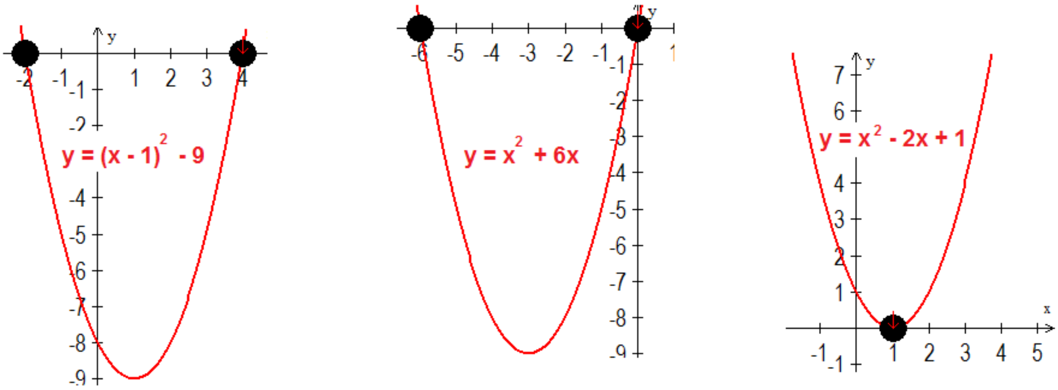
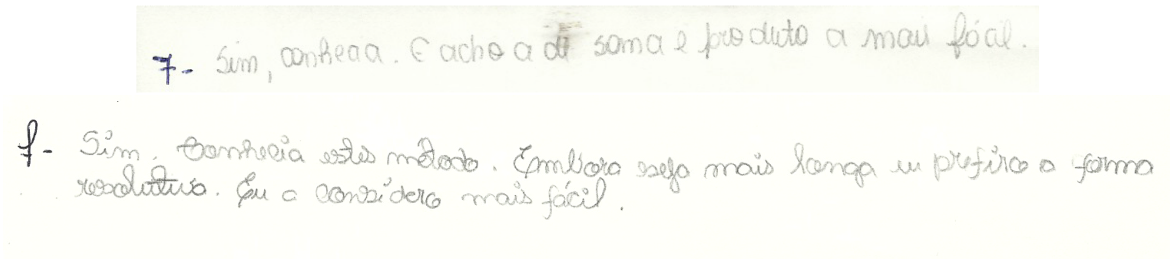


Figura 4.23: Gráficos no Winplot

tica? Achou alguma mais fácil ou mais prática? Comente. Comentários na Figura 4.24.



7- Sim, conhecia. E acho a ~~de~~ soma e produto a mais fácil.

8- Sim, conhecia este método. Embora seja mais longa eu prefiro a forma resolutiva. Eu a considero mais fácil.

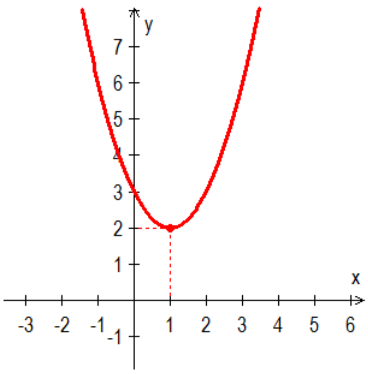
Figura 4.24: Comentários dos alunos

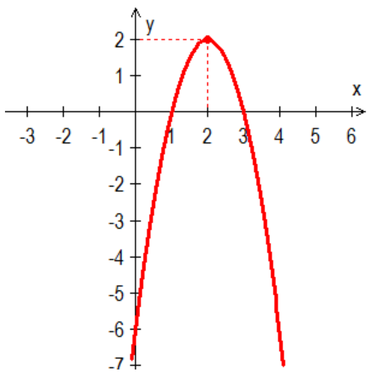
Atividade 4.15 ***Atividade 2 - Gráficos de Função Quadrática***

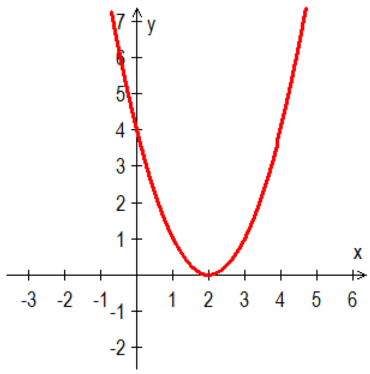
Esta é uma sugestão de atividade para ser feita após a aula, num laboratório de informática, com o propósito de fixar conceitos referentes à função quadrática relacionando-os com as parábolas. É um recurso lúdico. O software Winplot tem um recurso de adivinhar a equação de gráficos gerados. Vamos brincar?

Dos gráficos seguintes, analise os sinais dos parâmetros a, b e c e escreva a lei de formação da função graficada.

Depois que você fizer seus cálculos, clique em equação adivinhar e digite sua resposta. Caso esteja correto, aparecerá escrito: Perfeito! Caso contrário, "tentativa outra vez"e o gráfico correspondente à equação que você digitou será traçado. Esta é uma ótima brincadeira para você fixar todos os conceitos relacionados à função quadrática.







Resolução:

1. $c = 3$, $b < 0$, $x_V = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$, $2 = a - 2a + 3 \Rightarrow a = 1$ e $b = -2$. Assim a lei de formação correspondente ao primeiro gráfico é $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

2. $c = -6$. A forma fatorada da função através das raízes é $y = a(x-1)(x-3)$, com $a < 0$. Podemos escrever $y = a(x^2 - 4x + 3$ e descobrimos que $a = -2$. Assim a lei de formação correspondente ao segundo gráfico é $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

3. $c = 4$ e $f(x) = a(x-2)^2 \Leftrightarrow f(x) = ax^2 - 4ax + 4a$. Pelo valor de c observado, concluímos que $a = 1$. Assim a lei de formação correspondente ao terceiro gráfico é $f(x) = (x-2)^2$.

Os meus alunos consideraram a atividade 1, difícil. Ao conversarmos sobre função quadrática, a primeira lembrança é da fórmula resolutiva de equações. Muitos sabem utilizá-la precariamente, alguns conseguem fatorar (colocar termos em evidência) e poucos sabem trabalhar com a regra da soma e do produto. A técnica de completar quadrados não foi vista na série anterior, nem na forma algébrica e nem na geométrica. A análise de gráficos das parábolas, relacionada às raízes, interseções com os eixos e parâmetros a, b e c deveria ser bastante explorada para que ao observarem a lei de formação da função quadrática, logo pensassem em sua representação gráfica. Mas isso não acontece com frequência e eles têm muita dificuldade de traçar gráficos.

Capítulo 5

Conclusão

O ensino de funções reais é conteúdo matemático de todo o primeiro ano do Ensino Médio e pré-requisito para outras áreas do conhecimento, como Física, Biologia, entre outras.

Este trabalho foi realizado com o objetivo maior de ser material de apoio para professores ensinarem conceitos relacionados à Função Quadrática no Ensino Médio. Conteúdo simples e que deve ser bem explorado e questionado de forma algébrica e também gráfica. Apresentamos de maneira formal a definição, valor e raízes da função quadrática, sua forma geral e canônica, eixo de simetria, vértice, representação gráfica e aplicações. Como a parábola é a representação gráfica da Função Quadrática, relacionamos o conteúdo de funções com o ensino de Geometria Analítica, no qual a parábola também está inserida. Neste contexto, comentamos apenas as parábolas que têm eixo focal vertical, já que as demais não são representações gráficas de funções reais. Observamos o foco, o vértice e a reta diretriz da parábola. Foram abordados, sem muitos formalismos, os conceitos de taxa de variação e retas tangentes que são partes do Cálculo Diferencial e que poderiam ser explorados, de forma intuitiva, em sala de aula.

Ao sugerir e realizar atividades com os alunos, em sala de aula, confirmei que possuem dificuldades no traçado de gráficos. Então, observando questionamentos e deficiências deles no que se refere à função quadrática, considerei oportuna a utilização da tecnologia para a realização de atividades. Em algumas destas atividades, foi utilizado o software Winplot para construções de gráficos, resoluções de desigualdades e traçado de retas tangentes a parábolas. Usando o Geogebra, foram feitas atividades com animações, para mostrar que a mudança dos valores dos parâmetros da equação geral que define a função quadrática interfere na concavidade, abertura da parábola, interceptos, vértice e imagem. Os arquivos das animações ficam disponíveis para quem solicitar. A versão impressa é acompanhada de um CD com os arquivos.

A intenção deste trabalho foi incentivar os docentes a utilizarem a abordagem histórica, formal e tecnológica relacionadas para uma proposta dinâmica de ensino de função quadrática que contribuirá para uma melhor formação dos nossos alunos.

Referências Bibliográficas

Boyer, C. B. (2001). *História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo, 2ª edição.

Dante, L. R. (2011a). *Matemática: contexto e aplicações*, volume 1. Ática, São Paulo, 1ª edição.

Dante, L. R. (2011b). *Matemática: contexto e aplicações*, volume 3. Ática, São Paulo, 1ª edição.

Eves, H. (1993). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. Atual, São Paulo.

Eves, H. (2008). *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP, São Paulo.

Gundlach, B. H. (1993). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Números e Numerais*. Atual, São Paulo.

Iezzi, G. (2010). *Matemática: ciência e aplicações*, volume 1. Saraiva, São Paulo, 6ª edição.

Imenes, L. M.; Jakubovic, J. L. M. C. (1992). *Equação do 2º Grau*. Atual, São Paulo.

Imenes, L. M.; Lellis, M. C. (2010). *Matemática: 9º ano*. Moderna, São Paulo, 1ª edição.

Lima, E. L. (2006). *A matemática do ensino médio*, volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 9ª edição.

Oliveira, K. I. M. (2010). *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. SBM, Rio de Janeiro, 1ª edição.

PCNEM (200?). Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio.

Profmat (2012a). Ma 22: Fundamentos do cálculo.

Profmat (2012b). Ma 23: Geometria analítica.

Ronan, C. A. (2001). *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge: da Renascença à Revolução Científica*, volume III. Zahar, Rio de Janeiro.

RPM39 (1999). Revista do professor de matemática: A fórmula é de bhaskara? 39:54.

Silva, S. M.; Silva, E. M. (1993). *Matemática para os cursos de Economia, Administração e Ciências Contábeis*, volume 1. Atlas, São Paulo, 3ª edição.

Steinbruch, A. (2006). *Geometria Analítica*. Pearson Makron Books, São Paulo.

Stewart, J.; Redlin, L. W. S. (200?). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. CENGAGE Learning, 5ª edição.

Swokowski, E. W. (1995). *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1. Makron Books, São Paulo, 2ª edição.

Ávila, G. (1985). Revista do professor de matemática: Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de fibonacci. 6:9–14.

Ávila, G. S. (2010). *Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral*. Blucher, São Paulo, 2ª edição revista e ampliada.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Definições e Fórmulas Citadas nas Atividades

A.1.1 Atividade 1 - Raízes ou Zeros da Função Quadrática

Produtos Notáveis:

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Fórmula Resolutiva de uma Equação de 2º Grau $ax^2 + bx + c = 0$: as raízes reais, caso existam, são dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Considera-se $\Delta = b^2 - 4ac$ e se:

$\Delta > 0$, existem 2 raízes reais distintas;

$\Delta = 0$, existe uma raiz dupla e

$\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Definição A.1 *Os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ são os zeros ou raízes da função quadrática f.*

A.1.2 Atividade 2 - Gráficos de Função Quadrática

Sabemos que toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola. E também que:

- O coeficiente a é responsável pela concavidade e abertura da parábola. Quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima; quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo; quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola; quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada).
- O parâmetro b indica se a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente $(b > 0)$, decrescente $(b < 0)$ ou no vértice $(b = 0)$.
- A constante c indica onde a parábola intersecta y, no ponto $(0, c)$.
- A parábola intersecta o eixo x nos pontos de abscissas iguais às raízes da função quadrática.
- As coordenadas do vértice são dadas por $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.