UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CARLOS ALBERTO MAZIOZEKI DE OLIVEIRA

OS TEOREMAS DE STEWART E DE HERON E O CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

CARLOS ALBERTO MAZIOZEKI DE OLIVEIRA

OS TEOREMAS DE STEWART E DE HERON E O CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Rudimar Luiz Nós, Dr.
Co-orientadora: Olga Harumi Saito, Dra.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

O48 Oliveira, Carlos Alberto Maziozeki de
Os teoremas de Stewart e de Heron e o cálculo da área de um triângulo em função dos lados / Carlos Alberto Maziozeki de Oliveira. – 2014.
64 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Rudimar Luiz Nós
Coorientadora: Olga Harumi Saito.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 63-64.

1. Demonstração automática de teoremas. 2. Stewart, Teorema de. 3. Heron, Teorema de. 4. Ceva, Teorema de. 5. Triângulo. 6. Geometria plana. 7. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio). 8. Matemática – Dissertações. I. Nós, Rudimar Luiz, orient. II. Saito, Olga Harumi, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 012

"Os teoremas de Stewart e de Heron e o cálculo da área de um triângulo em função dos lados"

por

Carlos Alberto Maziozeki de Oliveira

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 07 de março de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Carlos Eduardo Durán Fernández, Dr.
(UFPR)

Prof. Marcio Rostirolla Adames, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

Aos professores de matemática de nosso país, que muitas vezes anônimos, buscam fazer do Brasil um lugar melhor para a aprendizagem dos conteúdos da área de Ciências Exatas.

AGRADECIMENTOS

- À Deus, o meu ALFA e o meu ÔMEGA, minha força e inspiração, consolo e fortaleza.
- Aos meus pais, Nilo e Izaura, que mesmo não estando mais entre nós, sempre se esforçaram em me dar o que de mais precioso existe : EDUCAÇÃO.
- À minha esposa Simone, que durante este tempo teve de me aguentar, suportou as mudanças de humor e me auxiliou em retomar o juízo quando necessário.
- À minha família, que sempre teve um lugar para mim em seus corações, facilitando a caminhada nesta vida.
- Ao professor Dr. Rudimar Luiz Nós, que aceitou me orientar e inspirou-me ao longo do desenvolvimento deste TCC; foi flexível e teve paciência, possibilitando a finalização do trabalho.
- À professora Dra. Olga Harumi Saito, que mesmo não tendo tempo disponível, aceitou ser a ponte entre mim e o professor Rudimar, além de usar o seu tempo de descanso semanal para efetuar todas as correções sugeridas e fazer novas sugestões para a melhoria deste trabalho.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À SBM, que em busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Aos meus alunos, que auxiliaram na realização deste através da participação nas atividades envolvendo a resolução de problemas.
- Aos professores da UTFPR, especialmente aos do PROFMAT, que se embrenharam conosco nesta empreitada.
- Aos amigos da Turma de 2011, que durante estes anos criaram um ambiente possível à aprendizagem e amizade.

RESUMO

MAZIOZEKI DE OLIVEIRA, Carlos Alberto. OS TEOREMAS DE STEWART E DE HERON E O CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS LADOS. 65 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Organizou-se esta dissertação a partir da constatação de que teoremas de matemáticos como Matthew Stewart e Heron são pouco empregados nas aulas de matemática do ensino fundamental e médio. As contribuições desses matemáticos no cálculo das cevianas e da área de triângulos podem simplificar a solução de muitos problemas. Como ponto de partida, elaborou-se uma atividade extraclasse contendo quatro questões centradas no Teorema de Stewart e aplicou-se a mesma a três turmas do ensino médio do CPM-PR. A partir da análise dos resultados dessa atividade, definiu-se a pesquisa bibliográfica, a estrutura do texto e a organização de uma coleção de problemas aplicados.

Palavras-chave: o Teorema de Stewart, o Teorema de Heron, triângulos, cevianas, área, o problema das quatro circunferências tangentes.

ABSTRACT

MAZIOZEKI DE OLIVEIRA, Carlos Alberto. STEWART´S THEOREM AND HERON´S THEOREM AND THE CALCULUS OF THE AREA OF A TRIANGLE IN FUNCTION OF SIDES. 65 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This dissertation was organized from the observation that mathematical theorems as Stewart's theorem and Heron's theorem are rarely used in mathematics classes in middle and high schools. The contributions of these mathematicians in calculating cevians and area of triangles can simplify the solution of many problems. As a starting point, we prepared one extracurricular activity containing four questions centered on Stewart's theorem and applied the same in three high school classes of CPM-PR. From the analysis of the results of this activity, we defined the literature, the text structure and organization of a collection of applied problems.

Keywords: Stewart´s theorem, Heron´s theorem, triangles, cevians, area, the four tangent circumferences problem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
CPM-PR	Colégio da Polícia Militar do Paraná - Cel Felippe de Sousa Miranda
CEDERJ	Centro de Educação a Distância do Estado do Rio de Janeiro
CN	Colégio Naval
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
SMO	Singapore Mathematics Olympiad
IME	Instituto Militar de Engenharia
ARML	American Regions Mathematics League

LISTA DE SÍMBOLOS

$\triangle ABC$	Triângulo ABC
$\angle ABC$	Ângulo ABC
$m\angle(ABC)$	Medida do ângulo ABC
$\overline{AB}$	Segmento AB
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta AB
h_a	Altura relativa ao lado a
m_a	Mediana relativa ao lado a
s_a	Bissetriz relativa ao ângulo interno A
S_{ABC}	Área do triângulo ABC
S_{abc}	Área do triângulo de lados a, b e c
$\overline{AB}\perp\overline{CD}$	Segmento AB perpendicular ao segmento CD
$2p$	Perímetro
$\overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{CD}$	Reta AB paralela à reta CD
$\overline{AB}\cong\overline{CD}$	Segmento AB congruente ao segmento CD
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	Triângulo ABC congruente ao triângulo DEF
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta AB
$C(O,r)$	Círculo ou circunferência de centro O e raio r
$sen\alpha$	Seno do ângulo α
$cos\alpha$	Cosseno do ângulo α

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste capítulo o problema motivador desta dissertação, assim como os objetivos e a disposição do tema nos demais capítulos.

1.1 MOTIVAÇÃO

O problema motivador é o problema geométrico do cálculo da medida do raio de uma circunferência tangente a outras três (DOLCE; POMPEO, 2005).

Problema 1.1. *Calcular o raio da circunferência de centro E, sabendo-se que o raio da circunferência de centro D mede xcm e o raio da circunferência de centro C mede ycm. As três circunferências são tangentes entre si e tangentes à circunferência de centro O, como ilustra a Figura 1.*

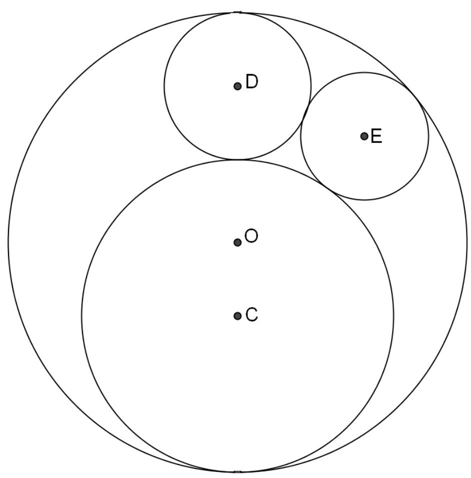


Figura 1: O problema das quatro circunferências tangentes.

Com o intuito de verificar como os estudantes do ensino médio solucionam o Problema 1.1, bem como problemas correlatos, organizou-se uma atividade extraclasse contendo quatro questões de Geometria versando sobre triângulos (Anexo A). A atividade deveria ser realizada individualmente e tendo como prazo de entrega uma semana, possibilitando desta maneira a consulta a livros e à internet. Como era desejável saber se os alunos reconheceriam o Teorema de Stewart, a lista de questões foi apenas apresentada aos mesmos sem qualquer comentário de quais relações ou caminhos matemáticos deveriam ser tomados na solução. Agindo assim foi possível verificar várias maneiras de resolução das questões que seguem.

Questão 1.2. *Em um triângulo retângulo, os catetos medem* $5cm$ *e* $12cm$*. Calcule a medida da mediana relativa ao ângulo reto.*

Questão 1.3. *No triângulo da Figura 2, calcule a medida da mediana* CM*.*

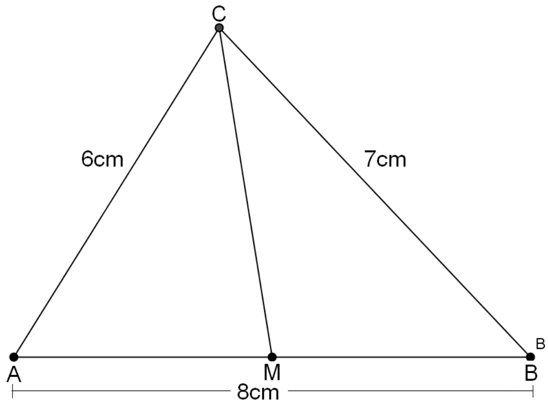


Figura 2: Triângulo ABC **e a mediana** CM**.**

Questão 1.4. *Em um triângulo* ABC*, os lados medem* $a = 15cm$ *,* $b = 8cm$ *e* $c = 12cm$*. Sobre o lado* a*, marque um ponto* D *de maneira que* $DB = p$ *e* $DC = q$*. Sabendo que* $p/q = 1/2$*, calcule a medida de* AD*.*

Questão 1.5. *A Figura 3 mostra quatro circunferências tangentes entre si de centros* C*,* D*,* E *e* O*. Calcule o raio da circunferência de centro* E*, sabendo-se que o raio da circunferência de centro* D *mede* $1cm$ *e o raio da circunferência de centro* C *é igual a* $2cm$*.*

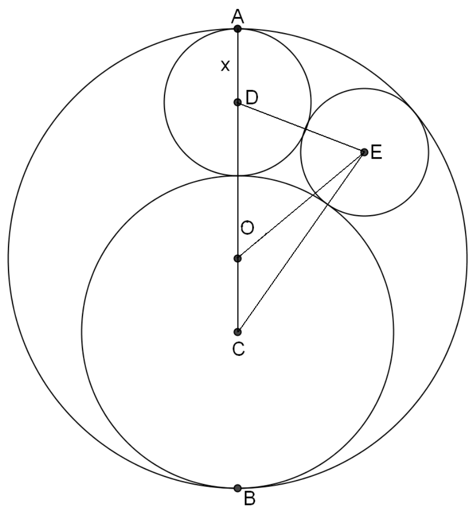


Figura 3: Circunferências de centro O**,** C**,** D **e** E**, tangentes entre si.**

Aplicou-se a atividade composta pelas quatro questões anteriores a três turmas do segundo ano do ensino médio do CPM-PR envolvendo 81 alunos dos turnos da tarde e noite. Estes dispuseram de uma semana para solucionar as questões propostas. Apresentou-se a atividade logo após o estudo da Lei dos Cossenos. Os resultados da atividade são mencionados na Tabela 1 e ilustrados na Figura 4.

Turma	N^o Alunos	Questão	Acertos
$2C$	25	1	21
		2	06
		3	00
		4	04
$2D$	28	1	26
		2	04
		3	00
		4	00
$2E$	28	1	27
		2	10
		3	00
		4	01

Tabela 1: Resultados comparativos da atividade extraclasse: número de acertos por turma em cada uma das quatro questões.

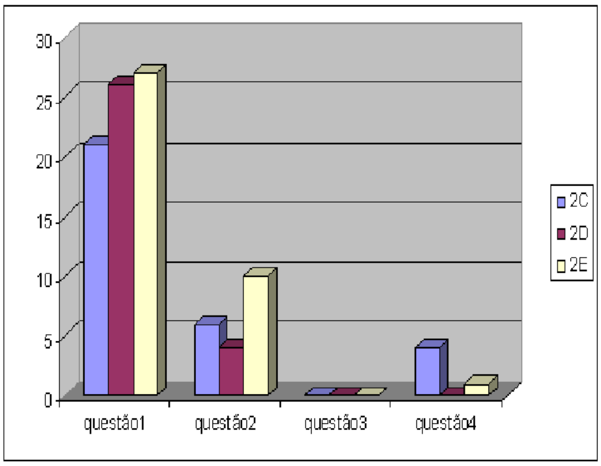


Figura 4: Resultados comparativos da atividade extraclasse: número de acertos por turma em cada uma das quatro questões.

A análise da Tabela 1 possibilita algumas reflexões. Esperava-se que a primeira questão fosse solucionada por todos os alunos, o que de fato quase ocorreu, como evidencia a Figura 4. Os resultados verificados na Questão1.2 se justificam pela saída geométrica simples da mesma.

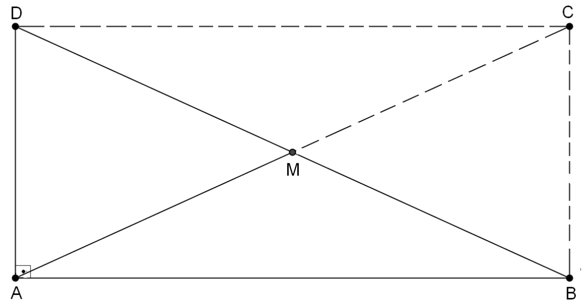


Figura 5: Triângulo *ABD* da Questão1.2 da atividade extraclasse.

Como o triângulo ABD mostrado na Figura 5 é retângulo em A, a mediana AM relativa ao ângulo reto é igual à metade da diagonal BD. Isto se prova pelo fato de que as diagonais AC e BD do retângulo $ABCD$ se interceptam no ponto médio M, centro geométrico do retângulo. A quase totalidade dos alunos chegou à solução da questão, uma vez que se discutiu em sala de aula a inscrição do triângulo retângulo em uma semicircunferência e como a mediana relativa ao ângulo reto equivalia ao raio da circunferência.

Analisando a Questão1.3, pode-se perceber a dificuldade apresentada pelos alunos quanto ao uso das relações métricas em um triângulo qualquer. Três destes alunos, pesquisando a solução na internet, encontraram o Teorema de Stewart e aplicaram-no à questão. Dois alunos aplicaram a Lei dos Cossenos mais de uma vez e conseguiram assim obter o resultado correto. Esperava-se o mesmo da maioria dos demais alunos, uma vez que esse conteúdo fora abordado anteriormente à aplicação da atividade. Outros dois alunos mediram os lados da figura e obtiveram o resultado correto, isto porque a Figura 2 foi desenhada em escala natural. Por ter sido feita com o Geogebra, optou-se pelo desenho em tamanho real, o que foi observado pelos dois alunos que, utilizando-se apenas de uma régua, obtiveram uma boa aproximação para o resultado.

A Questão1.4, similar à Questão1.3, não foi solucionada corretamente por nenhum dos alunos. Para esboçar o triângulo ilustrado na Figura 6, era necessário dividir o maior lado em uma razão dada. Supõe-se que este fato contribuiu para o insucesso, pois, na solução da Questão1.3, tanto os alunos que aplicaram a Lei dos Cossenos duas vezes como aqueles que resolveram por escala não foram capazes de repetir a estratégia na solução da Questão1.4. Isto evidencia que os alunos que participaram da atividade não perceberam que poderiam resolver a questão pelo uso da Lei dos Cossenos aplicada várias vezes.

Finalmente tem-se a Questão1.5. Supunha-se que esta não teria acertos ou que o número de alunos que a resolvesse fosse bastante reduzido. Após algumas indagações verificou-se que os acertos se deram porque os discentes tinham encontrado-a na internet. A questão fora

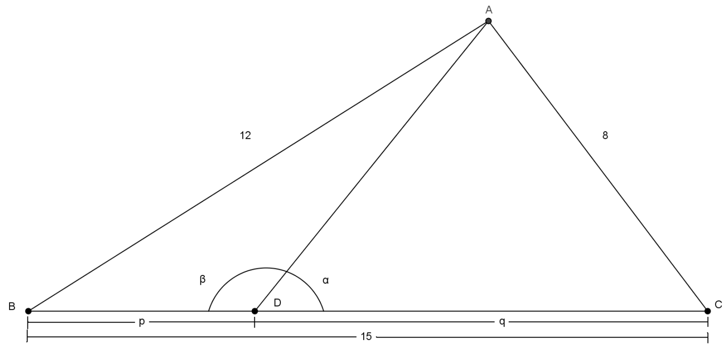


Figura 6: Triângulo *ABC* da Questão1.4 da atividade extraclasse.

retirada do livro *Geometria Plana - Fundamentos de Matemática Elementar* (DOLCE; POMPEO, 2005), onde estava resolvida, facilitando assim a sua cópia.

Em resumo, as três primeiras questões têm o mesmo formato, em todas elas era necessário encontrar a medida de uma mediana relativa a um certo lado, em nenhuma delas foi cobrada outra ceviana. Desse modo pode-se fazer um levantamento das dificuldades dos alunos em relação a aplicação de um conteúdo já abordado, uma vez que tinham acabado de estudar trigonometria em triângulos quaisquer. Verificou-se que, à exceção dos alunos que buscaram estes conteúdos fora de sala de aula ou daqueles que se utilizaram de métodos de desenho geométrico para a resolução dos problemas, apenas dois alunos conseguiram resolver um desses problemas com o uso dos conhecimentos que fizeram parte de seu ensino curricular. Com a Questão1.5 foi possível verificar o desconhecimento do Teorema de Stewart, trazendo assim mais uma motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho pretende mostrar o Teorema de Stewart como uma ferramenta auxiliar no ensino do conteúdo de trigonometria em triângulos quaisquer. Deseja-se incentivar seu uso, apresentá-lo como um método rápido para a solução de alguns problemas e empregá-lo para mostrar outros resultados, como por exemplo, o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos lados.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar o Teorema de Stewart, que infelizmente não consta na maioria dos livros didáticos de matemática de nosso país, e empregá-lo para obter as medidas das cevianas de um triângulo.

- Utilizar as relações métricas em um triângulo qualquer, que embora sendo pré-requisito para a Lei dos Cossenos, têm pouco destaque nos livros do ensino básico.

- Incentivar o emprego da demonstração como ferramenta no ensino de matemática, uma vez que a maioria das demonstrações no ensino médio público apenas acontecem ao final deste, em Geometria Analítica.

- Motivar o uso do Teorema de Stewart como facilitador de cálculos. Como percebido na atividade extraclasse, os dois alunos que resolveram um dos problemas utilizando-se da Lei dos Cossenos mais de uma vez, tiveram que fazer muitos cálculos (Anexo A).

- Motivar a pesquisa de conteúdos matemáticos não comumente tratados em sala de aula. Assim como o Teorema de Stewart, tem-se outros teoremas, como o de Pappus, Menelaus, etc., que podem, além de facilitar o entendimento dos conteúdos, trazer mais história e rigor matemático para a sala de aula.

1.3 JUSTIFICATIVA

A escolha do tema deve-se à afinidade do autor pela Geometria e ao esquecimento quase que completo do Teorema de Stewart nos livros didáticos que tratam de geometria no ensino fundamental e médio.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Nos demais capítulos o tema é desenvolvido da forma descrita a seguir.

Capítulo 2: apresenta-se algumas definições necessárias no decorrer deste TCC assim como as relações métricas em triângulos quaisquer. Tem-se ainda um pouco da história de Matthew Stewart, suas contribuições à Ciência e a demonstração de seu mais famoso teorema.

Capítulo 3: demonstra-se o cálculo das alturas de um triângulo qualquer, da forma convencional e também utilizando o Teorema de Stewart. Ainda, tem-se um breve histórico de Heron e a prova que o mesmo deu ao teorema da área de um triângulo em função das medidas dos lados. Como curiosidade, mostra-se o Teorema de Heron como consequência de um teorema de Brahmagupta.

Capítulo 4: soluciona-se os exercícios extraclasse pela Lei dos Cossenos e pelo Teorema de Stewart, para que se possa comparar a síntese de cálculos. A dificuldade de se encontrar questões aplicadas fez com que se organizasse uma lista de problemas de várias fontes, que foram disponibilizados no final do capítulo.

Anexo A: comenta-se os problemas resolvidos pelos alunos, os procedimentos utilizados, acertos e erros, analisando-se as prováveis causas.

Anexo B: apresenta-se uma demonstração do Teorema de Brahmagupta para o cálculo da área de um quadrilátero inscrito em uma circunferência, cujo resultado foi utilizado no Capítulo 3.

Conclusão: apresenta-se os comentários que encerram o TCC.

2 O TEOREMA DE STEWART

Neste capítulo menciona-se a classificação de um triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos internos, os pontos notáveis e cevianas. Apresenta-se também as relações métricas em triângulos quaisquer e a história e demonstração do Teorema de Stewart.

2.1 DEFINIÇÕES

2.1.1 CLASSIFICAÇÃO DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo é classificado de acordo com a medida de seus lados e também de acordo com a medida de seus ângulos internos. Em relação à medida dos ângulos internos, um triângulo é classificado como:

- retângulo: quando apresenta um ângulo reto, isto é, um ângulo de medida igual a 90°;
- acutângulo: quando todos os ângulos internos medem menos que 90°;
- obtusângulo: quando um dos ângulos internos mede mais que 90°.

A Figura 7 ilustra a classificação de um triângulo quanto a medida dos ângulos internos.

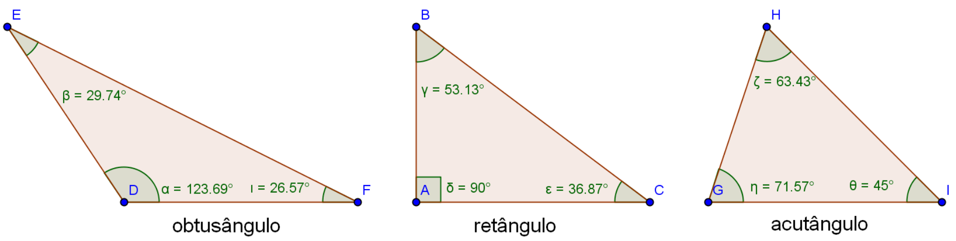


Figura 7: Classificação de um triângulo em relação às medidas dos ângulos internos.

Quanto às medidas dos lados, um triângulo é classificado como:

- escaleno: todos os lados têm medidas diferentes;
- isósceles: dois lados são congruentes, ou seja, têm a mesma medida;

- equilátero: todos os lados são congruentes.

A Figura 8 ilustra a classificação de um triângulo quanto à medida dos lados.

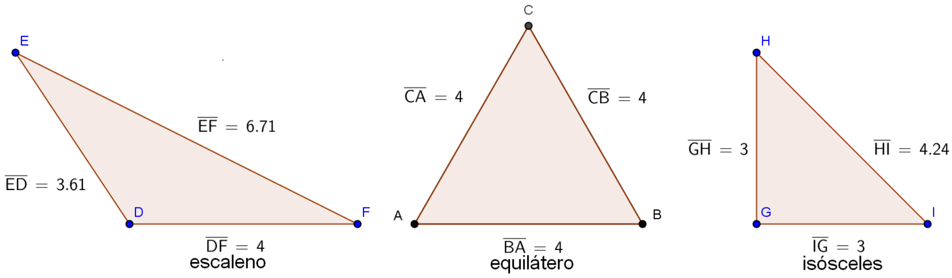


Figura 8: Classificação de um triângulo em relação às medidas dos lados.

2.1.2 CEVIANAS

Chama-se ceviana de um triângulo a todo segmento de reta que tenha como extremidades um vértice do triângulo e um ponto qualquer da reta suporte do lado oposto ao vértice dado. O nome ceviana deve-se ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734), que demonstrou teoremas importantes sobre elas (POSAMENTIER; SALKIND, 1996) (MORGADO et al., 2009).

São cevianas de um triângulo as alturas, as medianas e as bissetrizes internas.

- Alturas: são cevianas perpendiculares ao lado oposto a um vértice considerado. Todo triângulo tem três alturas e estas concorrem em um único ponto chamado *ortocentro*.

- Medianas: são cevianas que definem no lado oposto a um vértice considerado segmentos de mesma medida. Todo triângulo possui três medianas e estas concorrem em um único ponto chamado *baricentro*.

- Bissetrizes internas: são cevianas que dividem cada ângulo interno do triângulo em dois ângulos congruentes. Todo triângulo possui três bissetrizes internas e estas concorrem em um único ponto chamado *incentro*.

O Teorema de Stewart possibilita o cálculo da medida de uma ceviana qualquer de um triângulo. A Figura 9 ilustra três cevianas de um triângulo: a altura, a bissetriz interna e a mediana.

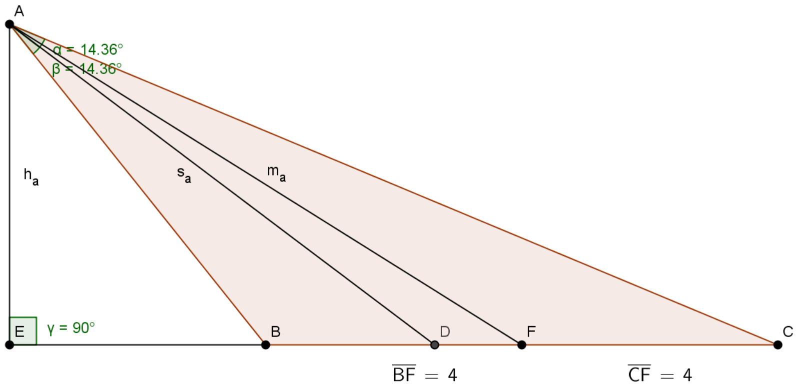


Figura 9: Três cevianas relativas ao vértice A do triângulo ABC.

2.2 RELAÇÃO MÉTRICA NO TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

Teorema 2.1. *Em um triângulo acutângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.*

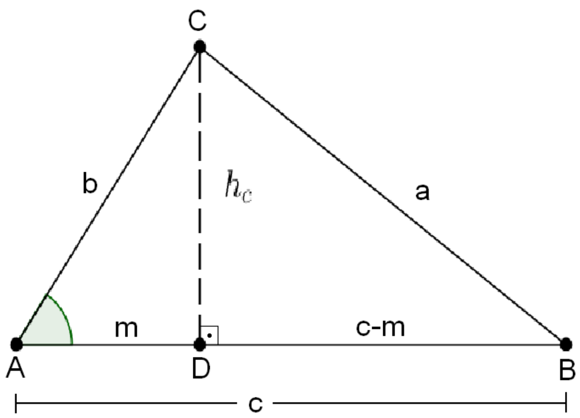


Figura 10: Relação métrica em um triângulo acutângulo.

Demonstração

Dado o triângulo acutângulo ABC, ilustrado na Figura 10, sejam m a projeção do lado b sobre o lado c e $CD = h_c$ a altura relativa ao lado c. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo CDB tem-se que

$$a^2 = (h_c)^2 + (c-m)^2. \tag{1}$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo CDA, obtém-se

$$(h_c)^2 = b^2 - m^2. \tag{2}$$

Somando-se membro a membro as equações (1) e (2) e desenvolvendo-se o produto notável, tem-se que

$$a^2 + (h_c)^2 = (h_c)^2 + c^2 - 2cm + m^2 + b^2 - m^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \tag{3}$$

2.3 RELAÇÃO MÉTRICA NO TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

Teorema 2.2. *Em um triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, mais duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.*

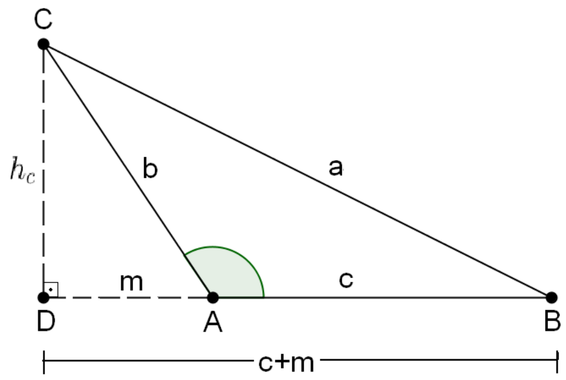


Figura 11: Relação métrica em um triângulo obtusângulo.

Demonstração

Dado o triângulo obtusângulo ABC, sejam m a projeção do lado b sobre o lado c e $CD = h_c$ a altura relativa ao lado c. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo CDB, tem-se que

$$a^2 = (h_c)^2 + (c+m)^2. \tag{4}$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo CDA, obtém-se

$$(h_c)^2 = b^2 - m^2. \tag{5}$$

Somando-se membro a membro as equações (4) e (5) e desenvolvendo-se o produto notável, chega-se a

$$a^2 + (h_c)^2 = (h_c)^2 + c^2 + 2cm + m^2 + b^2 - m^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \tag{6}$$

2.4 MATTHEW STEWART

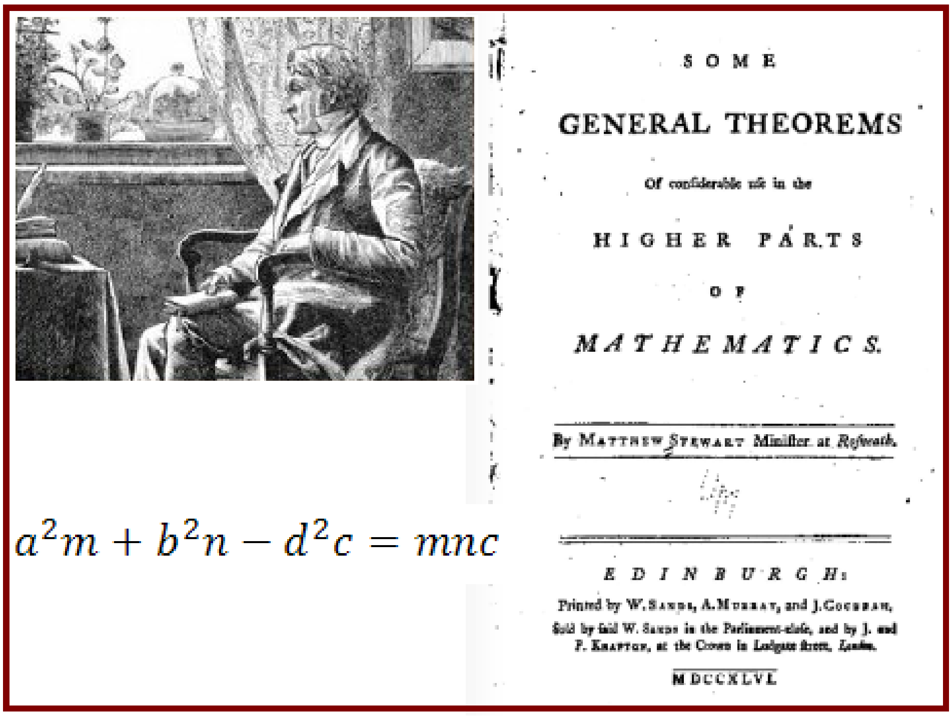


Figura 12: Contracapa do livro de Matthew Stewart (BARICENTRO, 2014).

Matthew Stewart foi um matemático escocês nascido em 1717 em Rothesay, na ilha de Bute, e falecido em 23 de janeiro de 1785 em Edimburgo, onde seu corpo foi sepultado no Greyfriars Kirkyard.

Educado na Rothesay Grammar School, Matthew Stewart entrou para a Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou com o filósofo Francis Hutcheson e o matemático Robert Simson. Com esse último estudou geometria antiga. Em 1741 começou a estudar com Maclaurin na Universidade de Edimburgo. Durante este tempo continuou a se corresponder com Simson, que era agora um amigo em vez de um professor de geometria grega. A amizade desenvolvida entre Simson e Stewart ao longo dos anos, em parte por causa da admiração mútua por Pappus de Alexandria, resultou em muitas comunicações curiosas em relação ao *De Locis Planis* de Apolônio de Perga e aos *Porisms* de Euclides. A correspondência entre ambos sugere que Stewart passou várias semanas em Glasgow a partir de maio de 1743 auxiliando Simson na produção de seu *Apollonii Pergaei Locorum Planorum Libri II*, que foi publicado em 1749. Quase ao mesmo tempo, seu pai, o Reverendo Dugald Stewart, Ministro de Rothesay, convenceu-o a entrar para o ministério. Stewart foi licenciado para pregar em Dunoon em maio de 1744 e um ano depois se tornou ministro em Roseneath, Dumbartonshire.

Antes de entrar para o ministério, Stewart participou das palestras de Colin Maclaurin na Universidade de Edimburgo, entre 1742 e 1743. A cadeira ficou vaga com a morte de Maclaurin em 1746 e em setembro de 1747 Stewart renunciou ao cargo de ministro em Roseneath para assumir a cadeira de Maclaurin em Edimburgo. A publicação de sua obra mais conhecida, *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*, cuja contracapa é ilustrada na Figura 12, pode ter ajudado a garantir a cadeira. Esse livro ampliou algumas idéias de Simson e é mais conhecido pela proposição II, ou o que é agora conhecido como Teorema de Stewart, que relaciona as medidas dos lados de um triângulo e uma ceviana. Em 1772, sua saúde começou a deteriorar-se e os seus deveres como professor em Edimburgo foram inicialmente compartilhados com seu filho Dugald Stewart, que mais tarde assumiu sua cadeira e tornou-se um proeminente filósofo escocês.

2.4.1 CONTRIBUIÇÕES

- Em 1746 Stewart publicou *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*. Vários dos teoremas da obra eram de fato “porisms”, mas Stewart evitou o nome por temer antecipar o trabalho de seu amigo Simson. Embora sem as demonstrações, os teoremas colocaram Stewart entre os geômetras de primeira linha.
- Em 1756 Stewart publicou no “Essays” da Sociedade Filosófica de Edimburgo (vol. II) uma solução do problema envolvido na segunda Lei de Kepler do movimento planetário. Nessa obra, Stewart evitou o uso de infinitesimais e empregou princípios de geometria elementar.
- Em 1761, prosseguindo com o seu plano de introduzir a simplicidade das demonstrações geométricas em antigas investigações astronômicas, Stewart publicou folhetos de Física e Matemática contendo explicações de vários pontos em Astronomia Física. Nessa área, depois que estabeleceu a doutrina de forças centrípetas em uma série de proposições que exigem apenas conhecimento dos elementos de geometria plana e de seções cônicas, passou a determinar o efeito dessas forças que perturbam os movimentos de um planeta secundário. Propôs também um teorema sobre o movimento de apsides da lua que atingiu grande precisão, superando de longe o resultado obtido por Newton. Esse resultado foi confirmado através de métodos algébricos por Charles Walmesley em 1749.
- Em 1763 Stewart publicou um suplemento intitulado *The Distance of the Sun from the Earth determined by the Theory of Gravity*, no qual calculou a distância entre o sol e a terra em cerca de 119 milhões de quilômetros. A imprecisão desse resultado deveu-se à dificuldade de tratar um assunto tão complexo geometricamente. Stewart foi obrigado a negligenciar várias pequenas quantidades em seu cálculo, o que provocou um erro que

afetou seriamente o resultado. A natureza da sua falha foi apontada pela primeira vez em 1769 por John Dawson em um panfleto intitulado *Quatro proposições*. Em 1771, John Landen publicou uma refutação independente das conclusões de Stewart.

- Além das obras mencionadas, Stewart publicou em 1763 *Propositiones Geometricae more Veterum Demonstratae*. Também publicou em 1754, no primeiro volume de "Ensaios e Observações" do Edimburgh Philosophical Society, quatro proposições que formavam um teorema no quarto livro de Pappus.

(WIKIPEDIA4, 2014) (WIKISOURCE, 2014) (BARICENTRO, 2014) (CSMATES, 2014) (MATEMALESCOPIO, 2014)

A biografia de Stewart não é facilmente encontrada, como já citado. Apenas para se ter ideia desta dificuldade, é assim que a mesma consta em um site da Irlanda que fala sobre matemáticos ingleses:
"Matthew Stewart, nascido em Rothesay, em 1717, e falecido em Edimburgo, em 23 de janeiro de 1785, sucedeu seu professor Maclaurin em sua cadeira em Edimburgo. Stewart, matemático de considerável poder, a quem me refiro de passagem por seus teoremas sobre o problema dos três corpos e a discussão desses tratada por transversais e involução das propriedades do círculo e linha reta" (MATHS, 2014).

Observações:
1^a) apsides: qualquer um dos dois pontos em uma órbita excêntrica, um mais alto (apsis), mais distante do centro de atração e outro (apsis inferior) mais próximo do centro de atração;

2^a) *porism*: proposição matemática ou corolário. Em particular, o termo *porism* é utilizado para se referir ao resultado direto de uma prova, de forma análoga ao modo como corolário refere-se ao resultado direto de um teorema. No uso moderno, um *porism* é uma relação que vale para uma infinita gama de valores, mas apenas se uma determinada condição é assumida. O termo é oriundo de três livros de Euclides que foram perdidos. Note-se que uma proposição pode não ter sido provada, e portanto, um *porism* não pode ser um teorema.

2.4.2 O TEOREMA DE STEWART

O Teorema de Stewart possibilita calcular o comprimento de uma ceviana de um triângulo qualquer.

Teorema 2.3. *Dados um triângulo ABC e um ponto D do lado AB, vale a relação*

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn,$$

onde $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ são as medidas dos lados, d é a ceviana CD e m e n são os segmentos determinados pela ceviana CD no lado AB.

A Figura 13 ilustra as hipóteses do Teorema 2.3.

Demonstração 1

Na Figura 13, o triângulo *BCD* é acutângulo e vale a relação (3), e o triângulo *ACD* é obtusângulo, valendo para este a relação (6). Pode-se então escrever, sem perda de generalidade, que

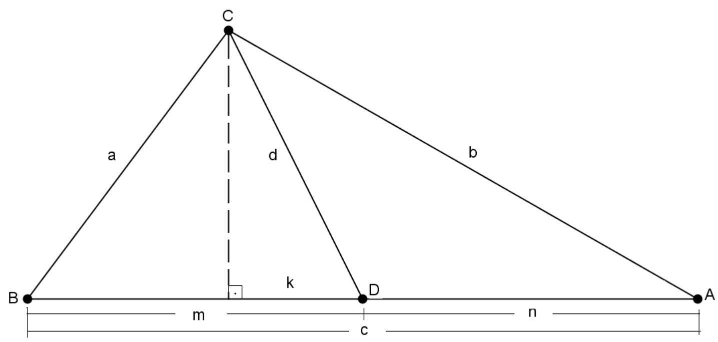


Figura 13: Demonstração do Teorema de Stewart pelas relações métricas.

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2mk, \tag{7}$$

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nk. \tag{8}$$

Multiplicando-se a equação (7) por n e a equação (8) por m, obtém-se

$$a^2n = m^2n + d^2n - 2mnk, \tag{9}$$

$$b^2m = mn^2 + d^2m + 2mnk. \tag{10}$$

Somando-se as equações (9) e (10), obtém-se

$$a^2n + b^2m = mn(m+n) + d^2(m+n). \tag{11}$$

Como $m+n = c$, pode-se reescrever a equação (11) como

$$a^2n + b^2m = cmn + d^2c \tag{12}$$

ou

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn. \tag{13}$$

Demonstração 2

Pode-se demonstrar também o Teorema de Stewart utilizando-se a Lei dos Cossenos. Aplicando-a ao triângulo BCD da Figura 14, tem-se que

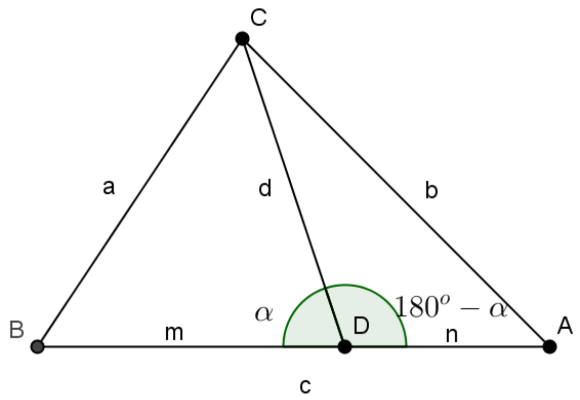


Figura 14: Demonstração do Teorema de Stewart pela Lei dos Cossenos.

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2mdcos\alpha. \tag{14}$$

Da mesma maneira, aplicando-se a Lei dos Cossenos ao triângulo ACD, tem-se que

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2ndcos(180^\circ - \alpha). \tag{15}$$

Como $cos\alpha = -cos(180^\circ - \alpha)$, pode-se reescrever a equação (15) da forma

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2ndcos\alpha. \tag{16}$$

Subtraindo-se as equações (14) e (16) chega-se a

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2 - 2mdcos\alpha - 2ndcos\alpha. \tag{17}$$

Isolando-se $cos\alpha$ na equação (17), obtém-se

$$cos\alpha = \frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2md + 2nd}. \tag{18}$$

Substituindo-se (18) em (14), tem-se que:

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2md\,\frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2md + 2nd};$$

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2md\,\frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2d(m+n)};$$

$$a^2(m+n) = m^2(m+n) + d^2(m+n) - b^2m - m^3 + a^2m + n^2m;$$

$$a^2m + a^2n = m^3 + m^2n + d^2m + d^2n - b^2m - m^3 + a^2m + n^2m;$$

$$a^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n). \tag{19}$$

Como $m + n = c$, pode-se reescrever a equação (19) como

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn. \tag{20}$$

2.4.3 CURIOSIDADES

1^a) Em inglês há uma forma mnemônica para o Teorema de Stewart.

Sejam o triângulo ABC de lados a, b e c, a ceviana AX de comprimento d e $m = BX$ e $n = CX$. Aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo ABC, tem-se que:

$$b^2m + c^2n = d^2a + man; \tag{21}$$

$$bmb + cnc = dad + man; \tag{22}$$

$$man + dad = bmb + cnc. \tag{23}$$

A equação (23) pode ser memorizada como "a man and his dad put a bomb in the sink", cuja tradução é: "um homem e seu pai colocaram uma bomba na pia".

2^a) Stewart propôs em 1746 a equação (21) como

$$b^2 + c^2\frac{n}{m} = an + d^2\frac{a}{m}, \tag{24}$$

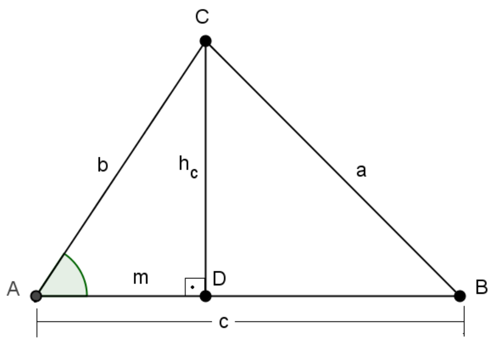
porém não a demonstrou. Por ter sido apresentada por ele, a relação (24) é chamada de Teorema de Stewart. Esse teorema foi demonstrado em 1751 por Thomas Simpson (1710-1761), em 1780 por Leonard Euler (1707-1783) e em 1803 por Lazare N.M. Carnot (1753-1823).

3 O TEOREMA DE HERON

Neste capítulo, além de demonstrar o cálculo da medida das alturas de um triângulo qualquer pelo método tradicional que consta nos livros didáticos, demonstra-se também pelo Teorema de Stewart. Além disso, como citado nos objetivos, uma das utilizações do Teorema de Stewart é a de confirmar resultados por caminhos diferentes àqueles que são conhecidos na literatura oferecida em nossas escolas. Desta maneira, usa-se o Teorema de Heron para exemplificar essa ideia. Um pouco da história de Heron, a prova que o mesmo fez para o teorema da área de um triângulo e a demonstração de como fazê-lo utilizando-se Stewart encerram o capítulo.

3.1 CÁLCULO DAS ALTURAS

Em qualquer triângulo, conhecendo-se as medidas dos lados, é possível calcular as medidas das alturas relativas aos mesmos. No caso do triângulo ser retângulo, duas das alturas coincidem com os catetos enquanto que a altura relativa à hipotenusa pode ser calculada utilizando-se o Teorema de Pitágoras e as relações métricas. Não sendo o triângulo em questão retângulo, a resolução fica um pouco mais complexa e pode ser feita da forma descrita a seguir, independentemente se o triângulo é acutângulo ou obtusângulo.



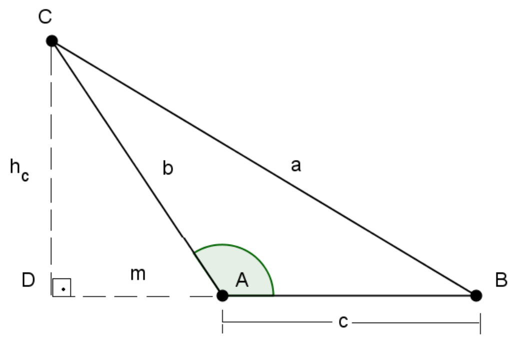


Figura 15: Triângulo ABC acutângulo (esquerda) e obtusângulo (direita) e a altura h_c relativa ao lado AB.

3.1.1 MÉTODO TRADICIONAL

Teorema 3.1. *Em um triângulo ABC qualquer, a altura h_c relativa ao lado AB é dada por*

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo ABC e a, b e c as medidas dos lados desse triângulo.

Demonstração

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo ADC, ilustrado na Figura 15, tem-se que

$$h_c{}^2 = b^2 - m^2. \tag{25}$$

Aplicando-se em seguida as relações métricas (7) e (8) ao triângulo ABC, obtém-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cm;$$
$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\pm 2c}. \tag{26}$$

Substituindo (26) em (25), chega-se a:

$$h_c{}^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{\pm 2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2};$$
$$4c^2h_c{}^2 = [2bc + (b^2+c^2-a^2)][2bc - (b^2+c^2-a^2];$$
$$4c^2h_c{}^2 = [(b^2+2bc+c^2)-a^2][a^2-(b^2-2bc+c^2)];$$
$$4c^2h_c{}^2 = [(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2];$$
$$4c^2h_c{}^2 = [(b+c+a)(b+c-a)][(a+b-c)(a-b+c)];$$
$$4c^2h_c{}^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c). \tag{27}$$

Sabendo-se que o perímetro do triângulo ABC é $2p = a+b+c$, pode-se escrever

$$-a+b+c = 2p-2a, \tag{28}$$

$$a-b+c = 2p-2b, \tag{29}$$

$$a+b-c = 2p-2c. \tag{30}$$

Substituindo (28), (29) e (30) em (27), obtém-se

$$4c^2{h_c}^2 = 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c),$$

$$4c^2{h_c}^2 = 2p2(p-a)2(p-b)2(p-c),$$

$$4c^2{h_c}^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{31}$$

De forma análoga, tomando-se por bases os lados b e a, obtém-se

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{32}$$

e

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{33}$$

3.1.2 UTILIZANDO O TEOREMA DE STEWART

Seja o triângulo ABC um triângulo qualquer. Sem perda de generalização, escolheu-se para a demonstração do Teorema 3.1 o triângulo acutângulo de base c, ilustrado na Figura 16.

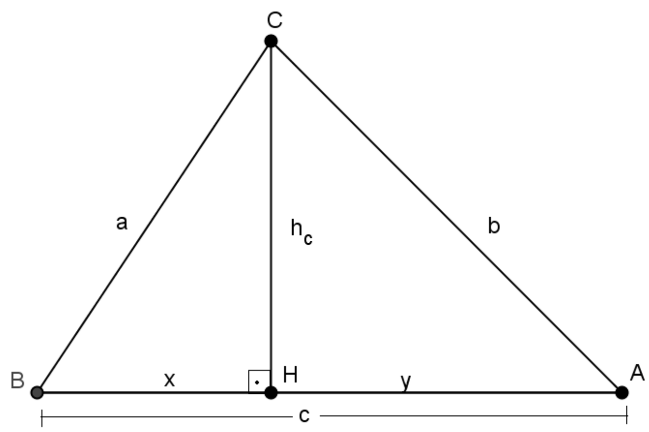


Figura 16: Triângulo acutângulo de base c e altura h_c.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos triângulos BHC e AHC, obtém-se, respectivamente,

$$a^2 = x^2 + h_c^2 \tag{34}$$

e

$$b^2 = y^2 + h_c^2. \tag{35}$$

Subtraindo-se membro a membro as equações (34) e (35), tem-se que

$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2. \tag{36}$$

Fatorando-se (36), chega-se a

$$a^2 - b^2 = (x+y)(x-y). \tag{37}$$

Como $x+y=c$, então

$$y = c - x. \tag{38}$$

Substituindo-se (38) em (37), obtém-se:

$$a^2 - b^2 = (x + c - x)[x - (c - x)];$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= c(2x - c); \\ 2x - c &= \frac{a^2 - b^2}{c}; \\ 2x = \frac{a^2 - b^2}{c} + c &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{c}; \end{aligned}$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}. \tag{39}$$

Substituindo-se (39) em (38), tem-se que

$$y = c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{2c^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2c},$$

$$y = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \tag{40}$$

Aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo ABC, tem-se que

$$a^2 y + b^2 x - ch_c^2 = cxy. \tag{41}$$

Substituindo-se (39) e (40) em (41), obtém-se

$$a^2 \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} + b^2 \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} - h_c^2 c = c \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \tag{42}$$

Desenvolvendo-se o lado esquerdo de (42), tem-se

$$\frac{-a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - b^4 - 2h_c^2c^2}{2c}. \tag{43}$$

Desenvolvendo-se o lado direito de (42), obtém-se

$$\frac{-a^4 - b^4 + c^4 + 2a^2b^2}{4c}. \tag{44}$$

Igualando-se (43) e (44), tem-se que:

$$-2a^4 + 4a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^4 + 2b^2c^2 - 4h_c^2c^2 = -a^4 - b^4 + c^4 + 2a^2b^2;$$

$$4h_c^2c^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \tag{45}$$

Somando-se e subtraindo-se $2a^2c^2$ ao lado direito de (45), obtém-se:

$$4c^2h_c^2 = 4a^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2);$$

$$4c^2h_c^2 = 4a^2c^2 - [(a^4 + 2a^2c^2 + c^4) - 2b^2(a^2 + c^2) + b^4];$$

$$4c^2h_c^2 = 4a^2c^2 - [(a^2 + c^2)^2 - 2(a^2 + c^2)b^2 + b^4];$$

$$4c^2h_c^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2;$$

$$4c^2h_c^2 = [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)][2ac - (a^2 + c^2 - b^2)];$$

$$4c^2h_c^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2);$$

$$4c^2h_c^2 = [(a^2 + 2ac + c^2) - b^2][-(a^2 - 2ac + c^2) + b^2];$$

$$4c^2h_c^2 = [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2];$$

$$4c^2h_c^2 = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c). \tag{46}$$

Como a, b e c são os lados do triângulo ABC, o seu perímetro será dado por

$$a + b + c = 2p.$$

Logo:

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b); \tag{47}$$

$$b + a - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c); \tag{48}$$

$$b - a + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a). \tag{49}$$

Substituindo-se as igualdades (47), (48) e (49) em (46), obtém-se:

$$4c^2h_c^2 = 2p2(p - b)2(p - c)2(p - a);$$

$$4c^2h_c^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c);$$

$$h_c^2 = \frac{4}{c^2} p(p-a)(p-b)(p-c);$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (50)$$

De maneira análoga, tem-se que

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (51)$$

e

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (52)$$

3.2 HERON DE ALEXANDRIA

Heron de Alexandria, também escrito como Héron, Herão, Hierão e Hero, provavelmente nasceu em Alexandria e viveu em data não muito bem estabelecida. Entre as várias encontradas na literatura estão 10-70, 65-125, 150a.C-100a.C. Atualmente, aceita-se ser do começo da era cristã (século I).

Figura 17: Heron de Alexandria (WIKIPEDIA3, 2014).

Heron foi um sábio matemático, inventor, físico e escritor. Estudou a pressão do ar e o vapor e também desenvolveu vários instrumentos para medir distâncias em linha reta e caminhos. Entre as suas invenções, encontram-se a dioptra (instrumento de geodesia), a fonte de Héron (aparelho construído com base nos princípios da Hidrostática) e o mais extraordinário de todos: a eolípila, mecanismo que servia para provar a pressão do ar sobre os corpos. Esta nada mais era do que uma turbina a vapor (o primeiro motor a vapor que se tem documentado). Em seu principal trabalho sobre Geometria, denominado *Métrica* (encontrado apenas em 1896), Heron enumera diferentes maneiras de determinar a área de regiões limitadas por triângulos, quadriláteros, polígonos regulares de três a doze lados, elipses e a área do círculo, bem como o volume de cilindros, cones e esferas e um método (já conhecido pelos babilônicos 2000 anos antes) para calcular raízes quadradas e cúbicas aproximadas. Nesse trabalho está o teorema que leva o seu nome, embora este talvez tenha sido empregado inicialmente por Arquimedes: a relação para calcular a área de um triângulo quando são conhecidas as medidas dos lados.

Sua obra *Mecânica* foi preservada pelos árabes e nela enunciou a regra do paralelogramo para a composição de velocidades. Mostrou como encontrar centros de gravidade de figuras simples e discorreu sobre polias para levantar grandes pesos. Estudou também pneumática, ótica, máquinas de guerra, hidráulica e geodésia. Morreu na Grécia em lugar não determinado (THEODORA, 2014) (POMBO, 2014) (LOPPES, 2014).

3.2.1 O TEOREMA DE HERON

Teorema 3.2. *A área S de um triângulo ABC qualquer é dada por*

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ *o semiperímetro do triângulo e a, b e c as medidas dos lados.*

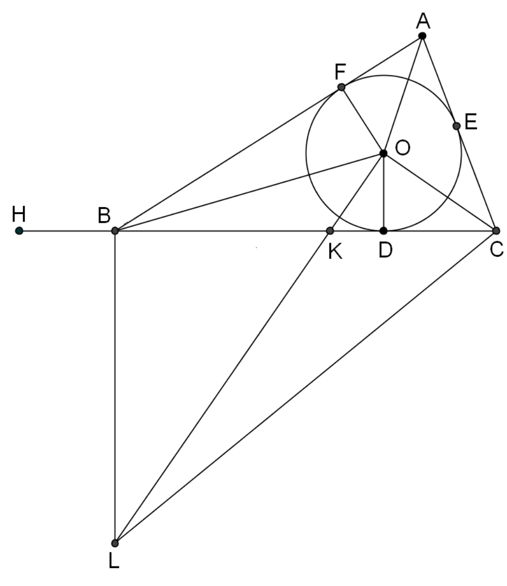


Figura 18: Figura utilizada por Heron para demonstrar seu teorema.

Demonstração

Segundo (FOWLER, 2014), a demonstração feita por Heron foi a que segue. Uma adaptação da prova feita por Heron também aparece em (DALCIN, 2009).

Em um triângulo ABC qualquer, ilustrado na Figura 18, desenha-se o círculo inscrito de centro O e que tangencia os lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ nos pontos D, E e F, respectivamente.

Como $OD = OE = OF = r$, sendo r o raio do círculo, e sabendo-se que o raio é perpendicular aos lados do triângulo nos pontos de tangência, tem-se que

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA},$$
$$S_{ABC} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2},$$
$$S_{ABC} = \frac{pr}{2}, \tag{53}$$

onde $p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo ABC.

Prolongue-se CB até H, de modo que $BH = AF$. Dessa maneira, tem-se que

$$CH = \frac{p}{2} = s,$$

pois $p = CD + DB + BF + FA + AE + EC$. Como $CD = EC$, $DB = BF$ e $BH = FA = AE$, então $p = 2CD + 2DB + 2BH$ e

$$\frac{p}{2} = CD + DB + BH = CH. \tag{54}$$

Substituindo-se (54) em (53), tem-se que

$$S_{ABC} = CH.r,$$
$$S_{ABC} = CH.OD,$$
$$(S_{ABC})^2 = CH^2.OD^2. \tag{55}$$

Em seguida, traça-se pelo ponto O uma perpendicular a OC e pelo ponto B uma perpendicular a BC, obtendo-se o ponto L, intersecção dessas duas perpendiculares e chama-se de K a intersecção de OL com BC. Na sequência, traça-se o segmento CL.

O quadrilátero $COBL$ assim contruído é inscritível em um círculo de diâmetro CL. Logo, $\angle COB + \angle CLB = 180°$.

Como AO é bissetriz do ângulo FAE, CO é bissetriz do ângulo ECD e BO é bissetriz do ângulo DBF, $\angle COB + \angle AOF = 180°$ e $\angle AOF \cong \angle CLB$.

Portanto, os triângulos retângulos AOF e CLB são semelhantes e

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AF}{FO}. \tag{56}$$

Como $AF = BH$ e $FO = OD = r$, escreve-se (56) na forma

$$\frac{BC}{BL} = \frac{BH}{OD}$$

e portanto

$$\frac{BC}{BH} = \frac{BL}{OD}. \tag{57}$$

Como os triângulos KOD e KLB também são semelhantes, tem-se que

$$\frac{BL}{OD} = \frac{BK}{KD}. \tag{58}$$

De (57) e (58), pela transitividade, obtém-se

$$\frac{BC}{BH} = \frac{BK}{KD}.$$

Somando-se um a cada membro de $\frac{BC}{BH} = \frac{BK}{KD}$, obtém-se

$$\frac{BC}{BH} + 1 = \frac{BK}{KD} + 1 \Rightarrow \frac{BC + BH}{BH} = \frac{BK + KD}{KD}$$

ou

$$\frac{CH}{BH} = \frac{BD}{KD}. \tag{59}$$

Pode-se escrever (59) como

$$\frac{CH.CH}{BH.CH} = \frac{BD.CD}{CD.KD}. \tag{60}$$

Como no triângulo retângulo OCK vale a relação métrica $OD^2 = CD.DK$, reescreve-se (60) como

$$\frac{CH^2}{CH.BH} = \frac{BD.CD}{CD.KD} = \frac{BD.CD}{OD^2},$$

$$CH^2 OD^2 = CH.HB.BD.CD. \tag{61}$$

Substituindo-se (61) em (55), obtém-se

$$(S_{ABC})^2 = CH.HB.BD.CD = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$S_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{62}$$

Observação: neste TCC adotou-se $2p$ como perímetro. No caso desta demonstração, respeitou-se a notação da literatura.

De acordo com (HEATH, 1921), atribui-se esta prova a Arquimedes.

3.3 HERON E BRAHMAGUPTA

Como já mencionado, Heron viveu no século I d.C. e Stewart no século XVIII d.C.. Neste interim, foram propostos muitos teoremas em geometria. Como uma das aplicações dos teoremas aqui apresentados é provar outros resultados conhecidos, vale a pena comentar mais um teorema. Entre 589-668 da nossa era, viveu o matemático e astrônomo indiano Brahmagupta. Entre as suas contribuições, está um teorema sobre quadriláteros inscritíveis ao círculo (ou cíclicos), que serve para o cálculo da área desses quadriláteros. Utilizando-se a Lei das Áreas e a Lei dos Cossenos, pode-se mostrar que a área do quadrilátero $ABCD$ cíclico é dada pela relação

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \tag{63}$$

onde $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ é o semiperímetro do quadrilátero e a, b, c e d são as medidas dos lados.

Caso se retire um dos vértices do quadrilátero ou se considere um lado com medida igual a zero, o quadrilátero será transformado em triângulo e, portanto,

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{64}$$

que é a relação de Heron para o cálculo da área de um triângulo. Note-se que, como todo triângulo é inscritível em uma circunferência, a relação (64) é válida para todo triângulo. A demonstração do Teorema de Brahmagupta encontra-se no Anexo B.

3.4 HERON E STEWART

Finalmente, com as ideias deste capítulo, pode-se demonstrar o Teorema de Heron utilizando-se o Teorema de Stewart.

Como a área de um triângulo é dada pelo semiproduto de um lado pela altura relativa a esse lado, pode-se calcular a área de um triângulo ABC qualquer pela relação

$$S_{ABC} = \frac{c}{2} h_c, \tag{65}$$

sendo h_c a altura relativa ao lado c.

Porém, da relação (50), tem-se que

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.^{1} \tag{66}$$

Substituindo (66) em (65), obtém-se

$$S_{ABC} = \frac{c}{2}\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{67}$$

Desta maneira, pode-se utilizar o Teorema de Stewart para comprovar resultados já conhecidos, como neste caso, o Teorema de Heron.

[1]Essa relação foi provada usando-se o Teorema de Stewart.

4 STEWART, HERON E PROBLEMAS INTERESSANTES

Neste capítulo soluciona-se os problemas propostos aos alunos na atividade extraclasse utilizando-se duas maneiras diferentes: a primeira através da Lei dos Cossenos e a outra pelo Teorema de Stewart. Apresenta-se também alguns problemas interessantes cuja solução depende da aplicação dos Teoremas de Stewart e de Heron.

4.1 SOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA ATIVIDADE EXTRACLASSE

Questão1.2: Em um triângulo retângulo, os catetos medem $5cm$ e $12cm$, como ilustra a Figura 19. Calcule a medida da mediana relativa ao ângulo reto.

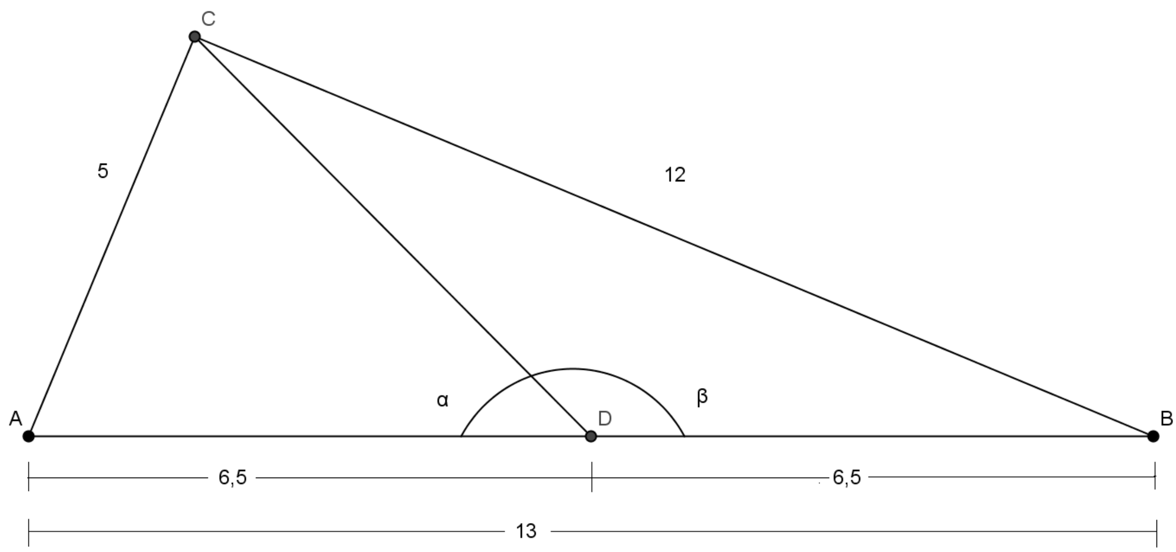


Figura 19: Triângulo da Questão1.2.

Como o triângulo ABC é retângulo, a simples aplicação do Teorema de Pitágoras fornece a medida da hipotenusa, que é igual a $13cm$. Neste caso, basta lembrar que todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência e concluir que o raio desta semicircunferência é igual à medida dos segmentos em que a hipotenusa foi dividida. Portanto $d = 6,5cm$.

De outra maneira, tomando-se $a = 12cm$, $b = 5cm$, $c = 13cm$, $m = 6,5cm$ e $n = 6,5cm$ e chamando-se a mediana CD de d, obtém-se com a aplicação do Teorema de Stewart:

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn;$$

$$12^2(6,5) + 5^2(6,5) - d^2 13 = 13(6,5)(6,5);$$

$$936 + 162,5 - 13d^2 = 549,25;$$

$$13d^2 = 549,25;$$

$$d = 6,5.$$

A aplicação do Teorema de Stewart nessa questão não necessita de outros conhecimentos geométricos, como a inscrição do triângulo retângulo.

Questão1.3: No triângulo ilustrado na Figura 20, calcule a medida da mediana CM.

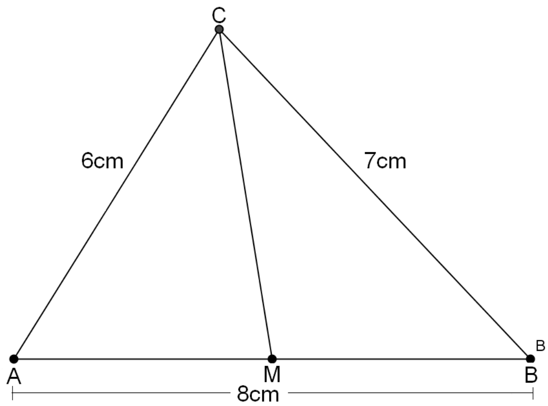


Figura 20: Triângulo da Questão1.3.

Seja d a mediana desejada. Aplicando-se a Lei dos Cossenos nos triângulos ACM e BCM, obtém-se

$$6^2 = 4^2 + d^2 - 2(d)(4)cos(M) \tag{68}$$

e

$$7^2 = 4^2 + d^2 - 2(d)(4)cos(180^\circ - M). \tag{69}$$

Como $cos(M) = -cos(180^\circ - M)$, reescreve-se (68) e (69) como

$$36 = 16 + d^2 - 8dcos(M) \tag{70}$$

e

$$49 = 16 + d^2 + 8dcos(M). \tag{71}$$

Somando-se membro a membro as equações (70) e (71), tem-se que:

$$85 = 32 + 2d^2;$$

$$53 = 2d^2;$$

$$d = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$

Considerando-se $a = 7$, $b = 6$, $c = 8$, $m = n = 4$ e $z = d$, obtém-se com a aplicação do Teorema de Stewart:

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn;$$

$$7^2(4) + 6^2(4) - d^2(8) = 8(4)(4);$$

$$196 + 144 - 8d^2 = 128;$$

$$212 = 8d^2;$$

$$d^2 = \frac{53}{2};$$

$$d = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$

Percebe-se facilmente nessa questão a economia de espaço e tempo que a aplicação do Teorema de Stewart proporciona.

Questão1.4: No triângulo ABC ilustrado na Figura 21, os lados medem $a = 15cm$, $b = 8cm$ e $c = 12cm$. Sobre o lado a, marque um ponto D de maneira que $DB = p$ e $DC = q$. Sabendo que $p/q = 1/2$, calcule a medida de AD.

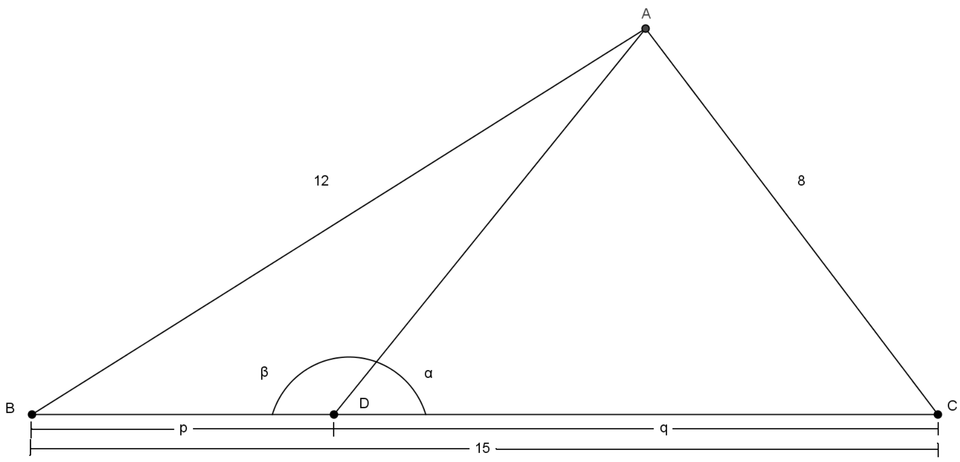


Figura 21: Triângulo da Questão1.4.

Sabendo que o lado BC mede $15cm$ e a razão de p para q equivale a $1/2$, conclui-se que $p = 5cm$ e $q = 10cm$. Considerando-se $AD = d$, $\angle ADC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ e aplicando-se a Lei dos Cossenos aos triângulos ABD e ACD, obtém-se

$$8^2 = 10^2 + d^2 - 2(10)(d)cos\alpha \tag{72}$$

e

$$12^2 = 5^2 + d^2 - 2(5)(d)cos\beta. \tag{73}$$

Como $\beta = 180^\circ - \alpha$ e $cos\beta = -cos\alpha$, reescreve-se (72) e (73) como

$$64 = 100 + d^2 - 20dcos\alpha \tag{74}$$

e

$$144 = 25 + d^2 + 10dcos\alpha. \tag{75}$$

Multiplicando-se (74) por dois e somando-se a (75), tem-se que:

$$352 = 150 + 3d^2;$$

$$202 = 3d^2;$$
$$d^2 = \frac{202}{3};$$
$$d = \frac{\sqrt{606}}{3}.$$

Considerando-se $a = 8cm$, $b = 12cm$, $c = 15cm$, $m = 5cm$, $n = 10cm$ e $z = d$, obtém-se com a aplicação do Teorema de Stewart:

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn;$$

$$8^2(5) + 12^2(10) - d^2(15) = 15(10)(5);$$

$$320 + 1440 - 750 = 15d^2;$$
$$d^2 = \frac{202}{3}$$
$$d = \frac{\sqrt{606}}{3}.$$

Novamente tem-se economia de espaço e tempo na solução do problema com o emprego do Teorema de Stewart.

Questão1.5: A Figura 22 mostra quatro circunferências tangentes entre si de centros C, D, E e O. Calcule o raio da circunferência de centro E, sabendo-se que o raio da circunferência de centro D mede $1cm$ e o raio da circunferência de centro C é igual a $2cm$.

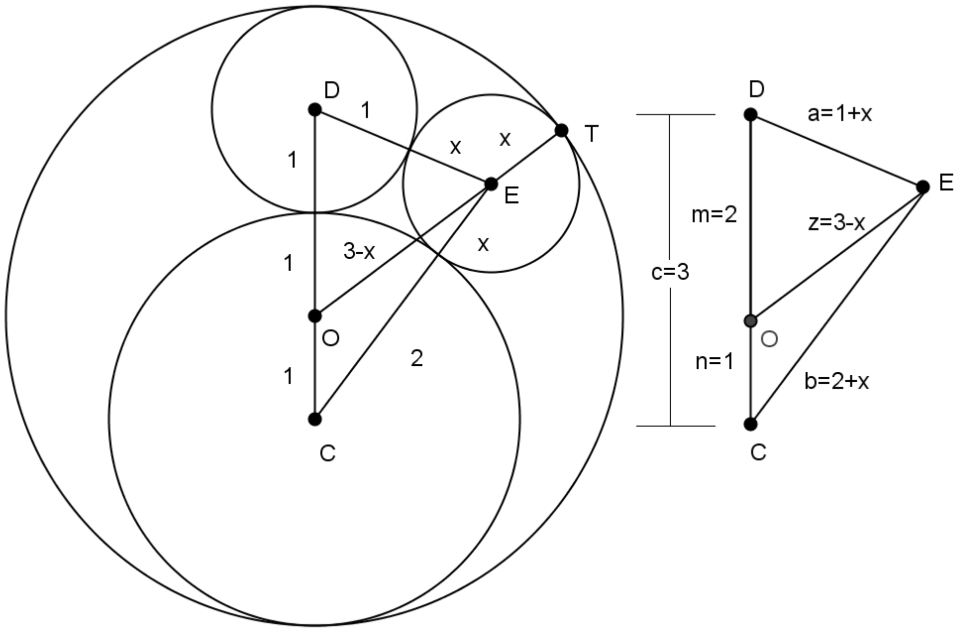


Figura 22: Circunferências tangentes da Questão1.5.

O resultado mais importante da geometria para a resolução desta questão é o seguinte: "quando duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros das circunferências são colineares". Isto explica porque O, E e T estão alinhados na Figura 22, o que torna a Questão1.5 tão simples quanto às anteriores.

Assim, sejam x o raio da circunferência de centro E, $\angle DOE = \alpha$ e $\angle COE = \beta$. É fácil verificar que o raio da circunferência de centro O mede $3cm$. Pode-se construir, utilizando-se da propriedade acima, o triângulo CDE que acompanha as circunferências tangentes na Figura 22, onde:

$$OE = OT - ET = 3 - x = z;$$

$$DE = 1 + x = a;$$

$$CE = 2 + x = b;$$

$$OD = 2 = m;$$

$$OC = 1 = n.$$

Aplicando-se a Lei dos Cossenos aos triângulos ODE e OCE, respectivamente, obtém-se

$$(1+x)^2 = (3-x)^2 + 2^2 - 2(2)(3-x)cos\alpha, \tag{76}$$

$$(2+x)^2 = (3-x)^2 + 1^2 - 2(1)(3-x)cos\beta. \tag{77}$$

Como α e β são ângulos suplementares,

$$cos\beta = -cos\alpha.$$

Pode-se então reescrever (76) e (77) como

$$1+2x+x^2 = (3-x)^2 + 4 - 4(3-x)cos\alpha \tag{78}$$

e

$$4+4x+x^2 = (3-x)^2 + 1 + 2(3-x)cos\alpha. \tag{79}$$

Efetuando-se a diferença entre as equações (78) e (79), tem-se que

$$-3-2x = 3-6(3-x)cos\alpha,$$

$$cos\alpha = \frac{-6-2x}{-6(3-x)},$$

$$cos\alpha = \frac{3+x}{3(3-x)}. \tag{80}$$

Substituindo-se (80) em (78), obtém-se:

$$1+2x+x^2 = 9-6x+x^2+4-4(3-x)\frac{3+x}{3(3-x)};$$

$$0 = 9-6x+4-\frac{12+4x}{3}-1-2x;$$

$$0 = 27-18x+12-12-4x-3-6x;$$

$$-24 = -28x;$$

$$x = \frac{6}{7}.$$

De outra maneira, solucionando-se a Questão1.5 com o Teorema de Stewart, tem-se que:

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn;$$

$$(1+x)^2(1) + (2+x)^2(2) - (3-x)^2(3) = 3(2)(1);$$

$$1+2x+x^2+8+8x+2x^2-27+18x-3x^2 = 6;$$

$$28x = 24;$$

$$x = \frac{6}{7}.$$

Este é o melhor exemplo para se mostrar a facilidade de uso do Teorema de Stewart.

É visível a diferença de espaço, tempo e número de relações necessários para a solução do problema das duas maneiras citadas.

Conforme (D'AMBROSIO, 2011): "O estudo das cevianas seria feito quase que exclusivamente com a relação de Stewart, evitando-se a decoração inútil de fórmulas das medianas e bissetrizes".

4.2 PROBLEMAS INTERESSANTES

Selecionou-se alguns problemas cuja solução pode ser determinada utilizando-se o Teorema de Stewart e o Teorema de Heron.

1) (CEDERJ) Calcular as alturas de um triângulo cujos lados medem $6m$, $10m$ e $12m$.

2) (CEDERJ) Mostre que em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das três medianas é igual a três vezes a metade do quadrado da hipotenusa.

3) (CEDERJ) Em um triângulo ABC, os lados medem a, b e c. Calcule as medidas das três alturas.

4) (Colégio Visão) Seja o triângulo ABC cujos lados AB, BC e AC medem, respectivamente, $8cm$, $9cm$ e $10cm$. Determine o comprimento da mediana BM relativa ao lado AC.

5) (Colégio Visão) Seja o triângulo ABC cujos lados AB, BC e AC medem, respectivamente $8cm$, $10cm$ e $9cm$. Determine o comprimento da bissetriz BS relativa ao vértice B.

6) (CN 1984) Na Figura 23, $AC = 3AF$ e $BC = 3CE$. Sendo S a área do triângulo ABC, a área do triângulo AGF é:

a) $S/3$.
b) $S/7$.
c) $S/9$.
d) $S/21$.
e) $S/18$.

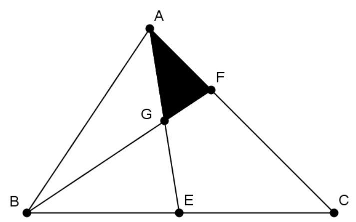


Figura 23: Triângulo do problema 6.

7) Um triângulo ABC, retângulo em A, tem lados $AB = 24$, $BC = 25$ e $AC = 7$. Calcule a bissetriz do ângulo C.

8) (UFSC-adaptada) Vamos construir um pentágono regular, Figura 24.

a) Construa uma circunferência de raio R centrada em O.

b) Construa os diâmetros ortogonais AB e CD.

c) Marque o ponto médio E do segmento OC.

d) Considere o triângulo OBE. Trace a bissetriz EF do ângulo OEB.

e) Por F trace a reta l paralela ao segmento OC. Seja G o ponto de encontro de l com a circunferência.

f) BG é o lado do pentágono.

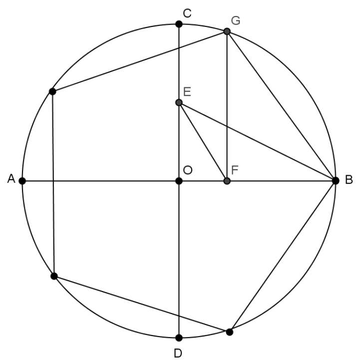


Figura 24: Pentágono regular do problema 8.

Usando o Teorema de Stewart, calcule OF.

9) (SMO 2009) Sejam $P_1, P_2, ..., P_{41}$ pontos do lado BC de um triângulo ABC. Sabendo que $AB = AC = 7$, calcule o somatório $\sum_{i=1}^{41} (AP_i^2 + P_iB.P_iC)$.

10) No triângulo ABC ilustrado na Figura 25, $AB = 13$, $AC = 14$ e $BC = 15$. O ponto D pertence a BC de modo que $CD = 6$ e o ponto E pertence a BC de modo que $\angle BAE = \angle CAD$. Calcule a medida de BE.

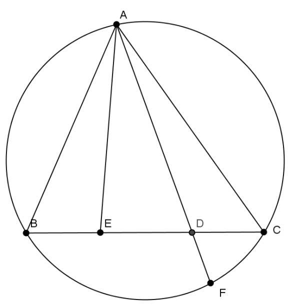


Figura 25: Triângulo do problema 10.

11) Dois lados de um triângulo medem 7 e 9 enquanto a mediana relativa ao terceiro lado mede 5. Determine a medida do terceiro lado.

12) Dados os lados a, b e c de um triângulo ABC, calcular a distância do vértice A ao ponto M que divide a base BC em segmentos proporcionais a m e n (DOLCE; POMPEO, 2005).

13) (IME) Considere uma elipse de focos F_1 e F_2, e M um ponto qualquer desta curva. Traça-se por M duas secantes MF_1 e MF_2, e que interceptam a elipse nos pontos P_1 e P_2, respectivamente. Demonstre que a soma $\dfrac{MF_1}{F_1P_1} + \dfrac{MF_2}{F_2P_2}$ é constante.

14) A Figura 26 mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências $C1$ e $C3$, a reta s é tangente as circunferências $C2$ e $C3$ e as circunferências são tangentes entre si. As circunferências $C1$ e $C2$ tem raios a e b, respectivamente. Qual é o raio da circunferência $C3$?

a) $2\sqrt{a^2+b^2}$.

b) $a+b$.

c) $2\sqrt{ab}$.

d) $\dfrac{4ab}{a+b}$.

e) $2b-a$.

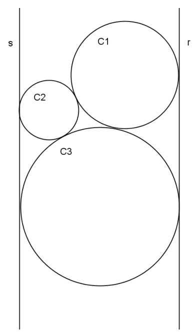


Figura 26: Circunferências tangentes do problema 14.

15) Os lados de um triângulo são três números consecutivos e a sua área é um número inteiro. Encontre o triângulo não retângulo com o menor perímetro que satisfaz essa condição. Existem outros? Explique.

16) (ARML-1994) Um triângulo isósceles tem uma mediana medindo 15 e uma altura igual a 24. Estas informações determinam exatamente dois triângulos. Calcule a área de cada um destes triângulos.

17) Verdadeiro ou Falso: duas medianas de um triângulo são congruentes se e somente se os lados que elas dividem são congruentes.

18) Na estrutura geométrica da Figura 27, mostre que $h = 2r$.

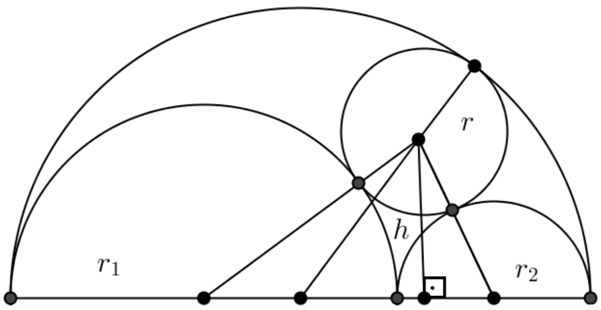


Figura 27: Arbelos.

Observação: as semicircunferências e a circunferência da Figura 27 são todas tangentes duas a duas. A estrutura é denominada *arbelos*, do grego "faca de sapateiro", conforme (PEDRO, 2012).

19) Demonstre que em um triângulo qualquer, a soma dos quadrados das medianas é igual a $3/4$ da soma dos quadrados dos lados (POSAMENTIER; SALKIND, 1996).

20) Três circunferências de raios $6cm$, $7cm$ e $8cm$ tangenciam-se externamente de modo que a primeira tangencia a segunda, a segunda tangencia a terceira e esta tangencia a primeira, como ilustra a Figura 28. Sejam P, S e Q os pontos de tangência. Calcule o raio da circunferência inscrita no triângulo PSQ.

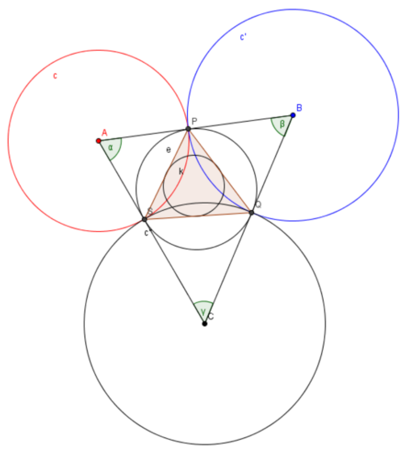


Figura 28: Circunferências tangentes do problema 20 (WIKIBOOKS, 2014).

21) Um quadrilátero é dito bicêntrico quando é inscritível e circunscritível ao círculo. Prove que a área máxima de um quadrilátero bicêntrico com perímetro fixo ocorre quando os dois círculos são concêntricos.

5 CONCLUSÃO

Dada a afinidade do autor pela geometria, optou-se em pesquisar um matemático que, apesar de pouco conhecido, estudou geometria elementar e antiga e entre as suas contribuições está o teorema para calcular a medida de uma ceviana qualquer: Matthew Stewart.

Para verificar o quanto os estudantes sabiam sobre esse teorema, organizou-se um conjunto de questões que foram aplicadas, na forma de atividade extraclasse, aos alunos de três turmas do ensino médio de uma instituição pública do estado do Paraná. Tais alunos já haviam estudado trigonometria em triângulos quaisquer anteriormente à aplicação da atividade. Após a análise das soluções apresentadas pelos 81 participantes, pode-se concluir duas coisas: os alunos não conheciam o Teorema de Stewart e aqueles que conheciam a Lei dos Cossenos tiveram muita dificuldade em solucionar os exercícios quando estes exigiam mais de uma aplicação da mesma. As soluções apresentadas por alguns alunos foram comentadas e evidenciou-se no TCC como o teorema pode ser empregado para facilitar a solução das questões propostas.

Tinha-se ainda como objetivo secundário a utilização do Teorema de Stewart como ferramenta para a demonstração do Teorema de Heron. Na pesquisa bibliográfica, constatou-se que Stewart não demonstrou o teorema que leva seu nome e o mesmo também parece ter acontecido com Heron, uma vez que alguns historiadores atribuem a demonstração do teorema da área de um triângulo em função das medidas dos lados a Arquimedes. Isto reforça a ideia de que o professor de matemática precisa conhecer a história da matemática e divulgar a mesma junto a seus alunos.

Quanto ao aspecto matemático do TCC, verificou-se que, sem um bom conhecimento de álgebra, a demonstração dos teoremas aqui apresentados fica inviabilizada. Assim, torna-se evidente que os currículos do ensino fundamental e médio precisam associar geometria e álgebra e que o professor de matemática deve empregar a demonstração como ferramenta efetiva no processo ensino-aprendizagem.

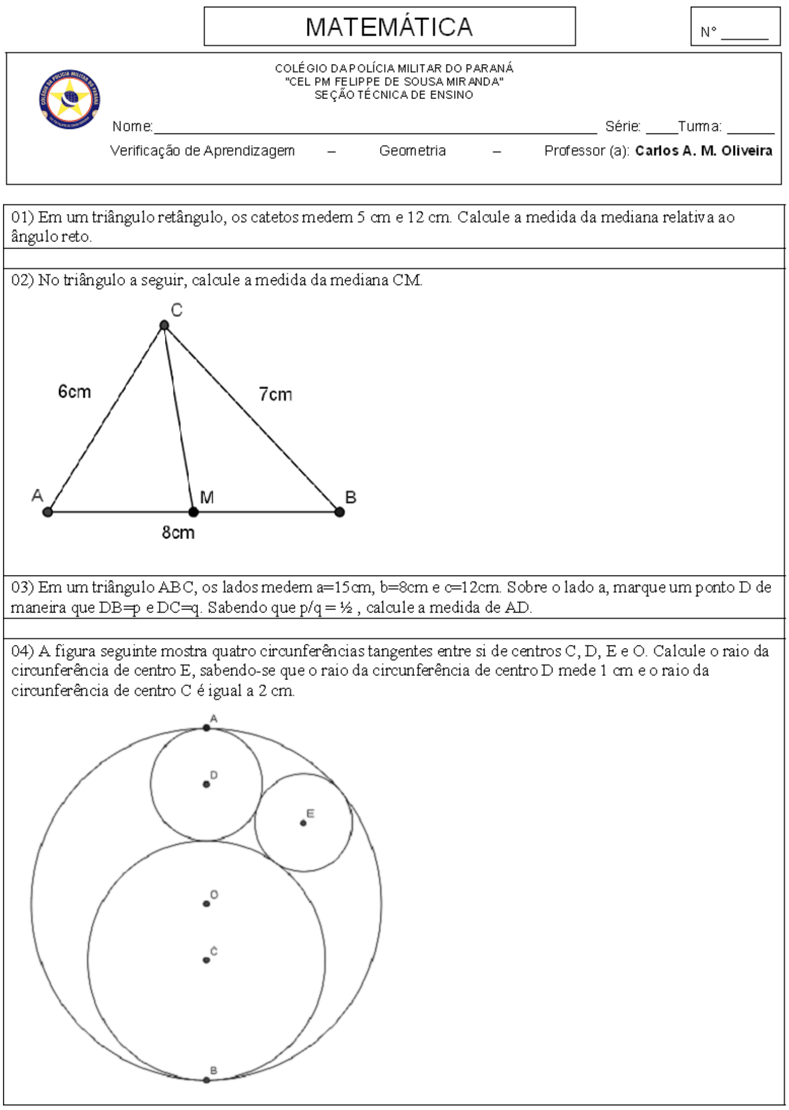
Finalizando, organizou-se também uma pequena coleção de questões aplicadas, centradas no Teorema de Stewart, um teorema que segundo Ubiratan D'Ambrósio (D'AMBROSIO, 2011), pesquisador renomado em metodologias de ensino da matemática, deveria ser o principal meio para o cálculo de cevianas.

ANEXO A – ALGUMAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

Neste anexo, apresenta-se algumas das soluções propostas pelos alunos para as questões da atividade extraclasse.

A.1 QUESTÕES APLICADAS AOS ALUNOS

A Figura 29 ilustra as questões que compuseram a atividade extraclasse aplicada aos alunos do ensino médio do CPM-PR.


MATEMÁTICA

N° ______

COLÉGIO DA POLÍCIA MILITAR DO PARANÁ
"CEL PM FELIPPE DE SOUSA MIRANDA"
SEÇÃO TÉCNICA DE ENSINO

Nome:______________________________ Série: ____Turma: ______

Verificação de Aprendizagem – Geometria – Professor (a): **Carlos A. M. Oliveira**

01) Em um triângulo retângulo, os catetos medem 5 cm e 12 cm. Calcule a medida da mediana relativa ao ângulo reto.

02) No triângulo a seguir, calcule a medida da mediana CM.

03) Em um triângulo ABC, os lados medem a=15cm, b=8cm e c=12cm. Sobre o lado a, marque um ponto D de maneira que DB=p e DC=q. Sabendo que p/q = ½ , calcule a medida de AD.

04) A figura seguinte mostra quatro circunferências tangentes entre si de centros C, D, E e O. Calcule o raio da circunferência de centro E, sabendo-se que o raio da circunferência de centro D mede 1 cm e o raio da circunferência de centro C é igual a 2 cm.

Figura 29: Atividade extraclasse aplicada aos alunos do CPM-PR.

Como já mencionado anteriormente, seria desejável que os alunos solucionassem as questões utilizando a Lei dos Cossenos uma ou mais vezes. É este o caso da questão ilustrada na Figura 30. Mesmo sendo mais trabalhosa que o uso do Teorema de Stewart, a solução não ficou extensa e pode-se aferir o resultado desejado.

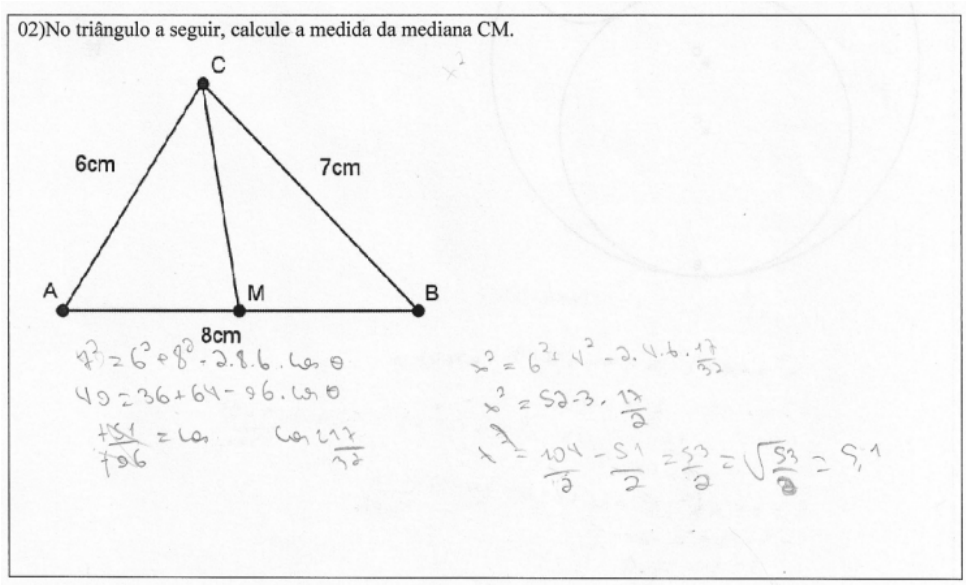


Figura 30: Solução correta da Questão1.3 utilizando a Lei dos Cossenos duas vezes.

O mesmo não se pode dizer da questão ilustrada na Figura 31, pois apesar do aluno ter extraído da questão todos os dados corretamente, o mesmo cometeu erros durante o processo de cálculo. O uso repetitivo da Lei dos Cossenos foi novamente empregado.

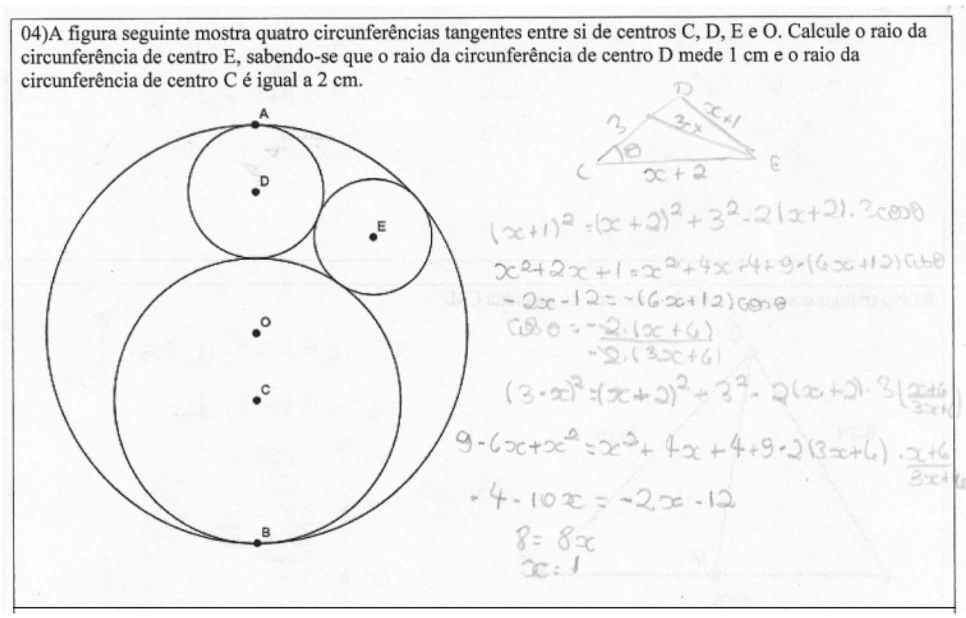


Figura 31: Solução incorreta da Questão1.5 utilizando a Lei dos Cossenos duas vezes.

A.2 SOLUÇÕES CORRETAS SEM JUSTIFICATIVA

Algumas questões foram respondidas de maneira correta, porém não da forma esperada. A questão ilustrada na Figura 32 apresenta uma resposta satisfatória por aproximação, contudo sem procedimento algébrico. Como dito no Capítulo 1, os desenhos do trabalho foram feitos no GEOGEBRA e em escala natural. Assim, dois alunos apenas mediram o segmento desejado.

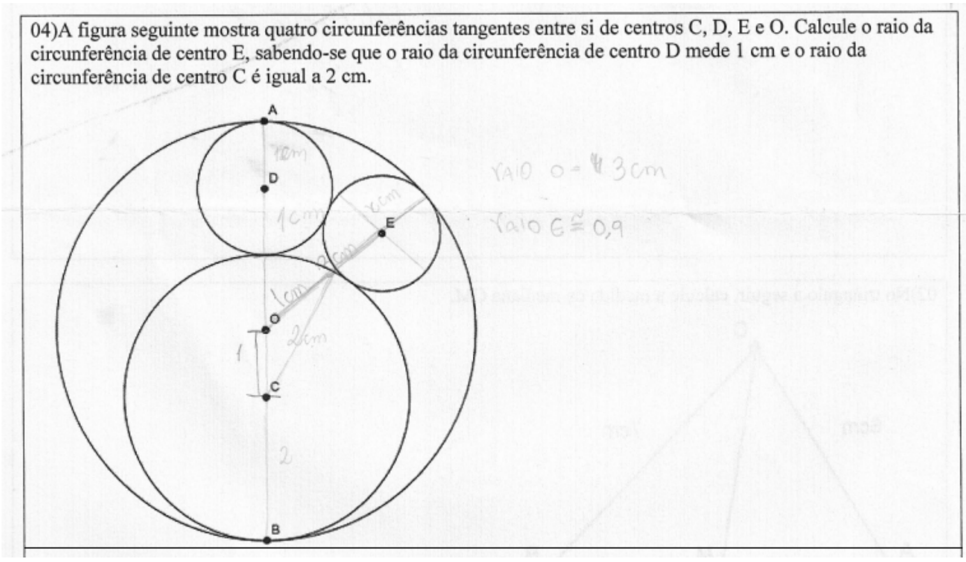


Figura 32: Solução da Questão1.5 utilizando escala.

O outro caso foi o de dois alunos que chegaram ao resultado esperado utilizando o Teorema de Stewart. Eles sequer sabiam o que estavam fazendo, o que de fato comprovou-se depois conversando-se com ambos. O fato de que a última questão do trabalho era facilmente encontrada na internet contribuiu para a cópia da mesma. Nessa questão, ilustrada na Figura 33, os dados foram destacados no triângulo e na sequência já estavam em uma fórmula. É possível verificar também que consta na solução uma fórmula para o cálculo de uma mediana qualquer, que deriva do Teorema de Stewart.

A.3 SOLUÇÕES INCORRETAS

Muitos alunos não perceberam que o único triângulo retângulo da atividade era aquele da Questão1.2. Isto conduziu muitos ao erro. Um desses casos é ilustrado na Figura 34, onde o aluno calculou uma mediana como se fosse a altura porque supôs que o triângulo fosse retângulo. Semelhante a este, tem-se também a solução ilustrada na Figura 35, onde o aluno utilizou-se das relações métricas no triângulo retângulo.

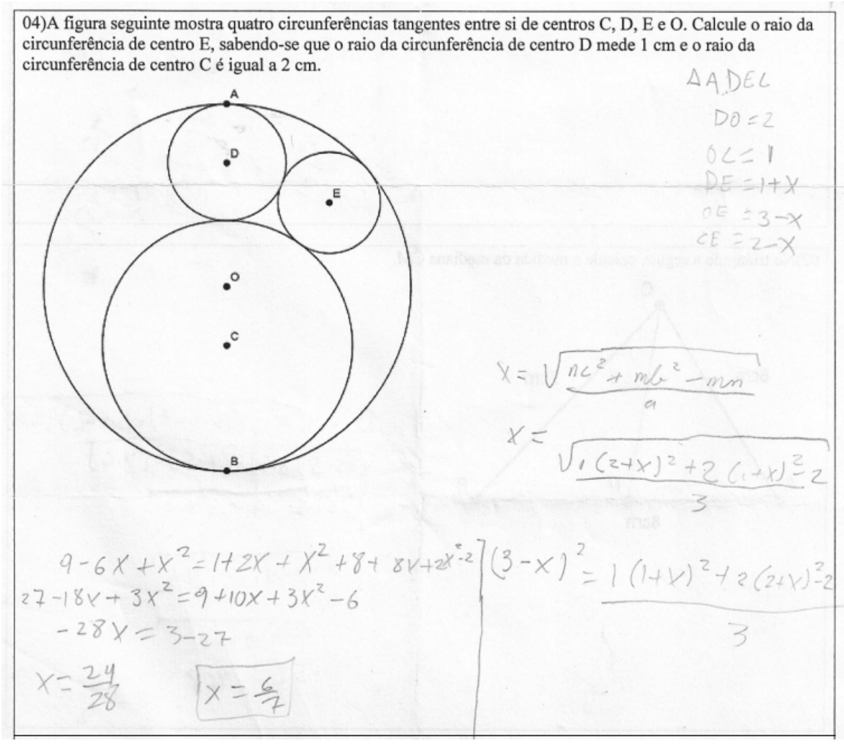


Figura 33: Solução da Questão 1.5 extraída da internet.

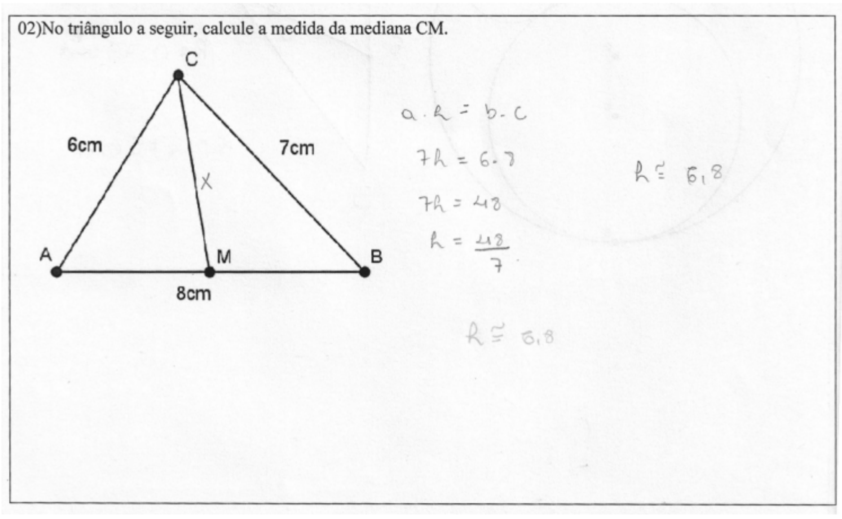


Figura 34: Primeira solução incorreta da Questão1.3.

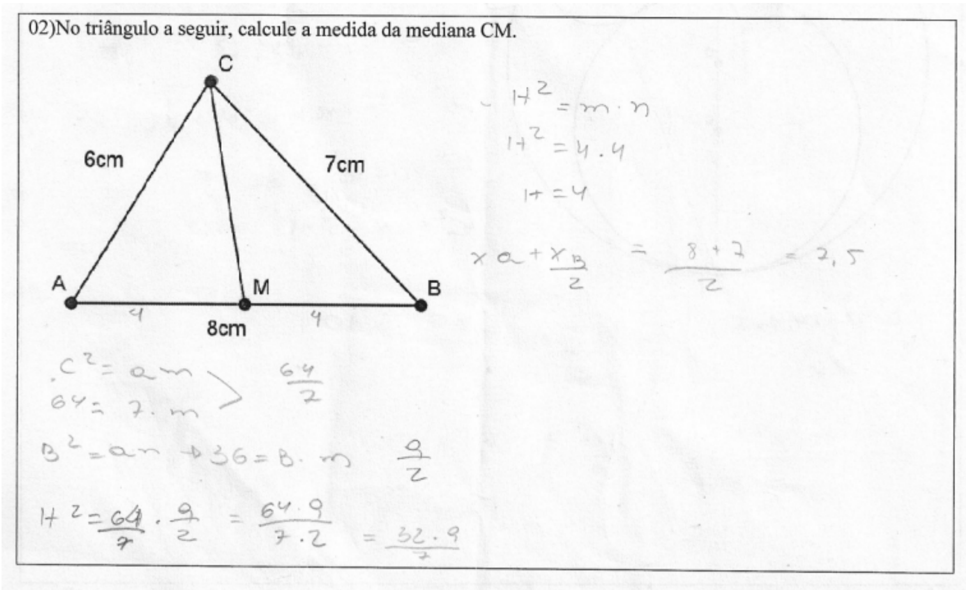


Figura 35: Segunda solução incorreta da Questão1.3.

Uma excelente proposta de solução da Questão1.3 é apresentada na Figura 36. Nela, o aluno utilizou-se do Teorema de Heron e calculou a área através das medidas dos lados. Infelizmente, considerou a mediana como se fosse a altura.

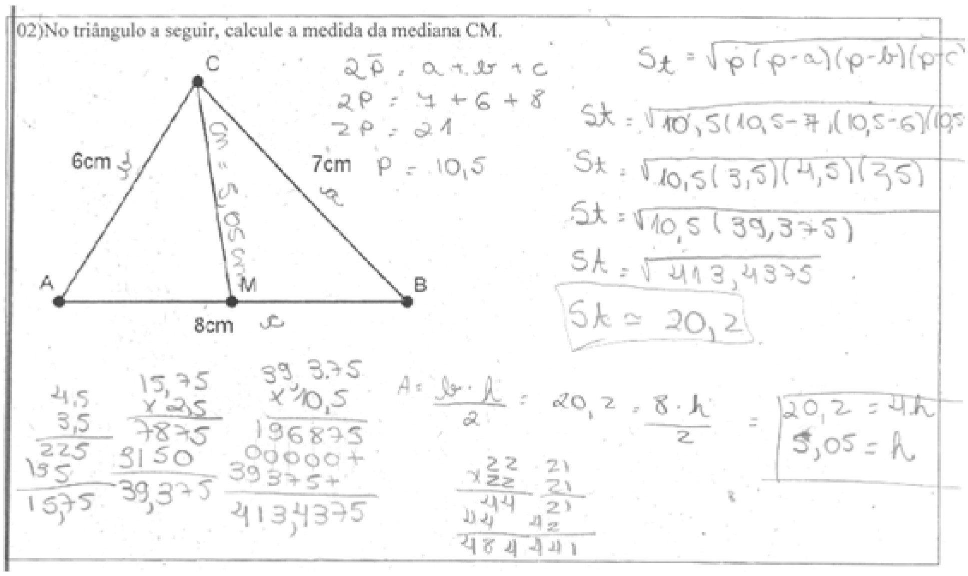


Figura 36: Terceira solução incorreta da Questão1.3.

ANEXO B – DEMONSTRAÇÃO DE BRAHMAGUPTA

No Capítulo 3 mostrou-se o Teorema de Heron como resultado do Teorema de Brahmagupta para o cálculo de um quadrilátero cíclico ou inscritível. Neste anexo, faz-se a demonstração do Teorema de Brahmagupta.

B.1 QUEM FOI BRAHMAGUPTA

Brahmagupta (589-668), ilustrado na Figura 37, matemático e astrônomo hindu, é considerado o pai da aritmética, da álgebra e da análise numérica.

Figura 37: Brahmagupta: matemático e astrônomo indiano (WIKIPEDIA2, 2014).

Foi o líder do observatório astronômico em Ujjain e durante o período que lá permaneceu escreveu quatro livros sobre matemática e astronomia: Brahmasphutasiddhanta (A Abertura do Universo), Cadamekela, Durkeamynarda e Khandakhadyaka, sendo o primeiro deles considerado o mais importante e pelo qual é até hoje reconhecido. Nesse livro escrito em 650, demonstrou a generalização do Teorema de Heron para o cálculo da área de um quadrilátero inscrito em uma circunferência (cíclico) e que é considerada a maior descoberta da geometria hindu. Nesse livro também introduziu o zero e suas operações na aritmética, elevando o zero à categoria dos samkhya (números). Antes dele, o sistema hindu-arábico contava com apenas 9 dígitos (1 a 9).

Entre seus trabalhos na matemática estão a soma da série finita de números naturais, a solução de equações do segundo grau com raízes naturais, uma generalização da fórmula para calcular uma das raízes da equação quadrática do tipo $ax^2 + bx = c$, além de vários outros com áreas de triângulos, quadriláteros e círculos e volumes e áreas laterias de cones e pirâmides. Embora tenho sido importantíssimo para a matemática, definiu $\frac{0}{0} = 0$ e em um livro de astronomia que foi escrito em versos, negou a rotação da Terra (PEDRO, 2012) (AMATEMATICAPURA, 2014) (FATOSMATEMATICOS, 2014) (CUT, 2014).

B.2 QUADRILÁTERO CÍCLICO

Um quadrilátero é considerado cíclico ou inscritível quando existe uma circunferência que intercepte os seus quatro vértices, como mostra a Figura 38. A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja cíclico é que a soma dos pares de ângulos opostos seja 180° (AMATEMATICAPURA, 2014) (WIKIPEDIA5, 2014) (SOMATEMATICA, 2014).

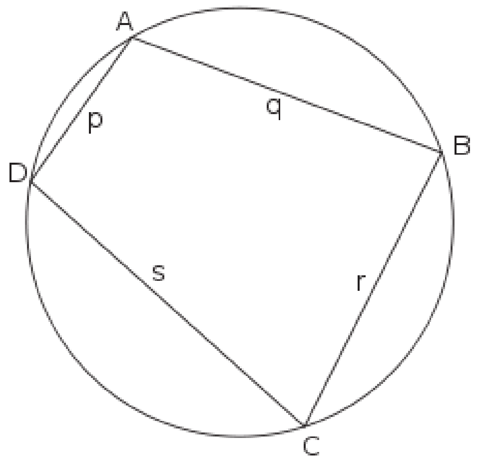


Figura 38: Quadrilátero cíclico (WIKIPEDIA1, 2009).

B.3 TEOREMA DE BRAHMAGUPTA

Teorema B.1. *A área de um quadrilátero cíclico é dada por*

$$S_{ABC} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

onde $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ *é o semiperímetro do quadrilátero e a, b, c e d são as medidas dos lados.*

Demonstração

Seja e uma das diagonais do quadrilátero cíclico, ilustrado na Figura 39.

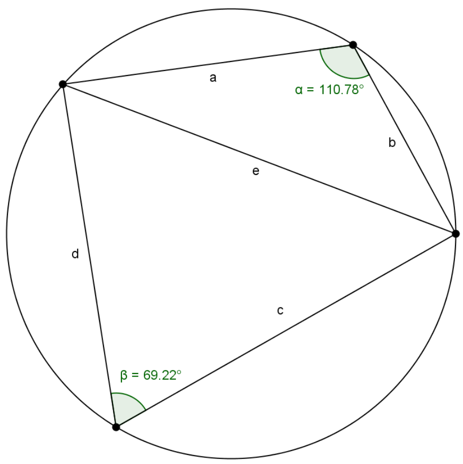


Figura 39: Quadrilátero cíclico da demonstração do Teorema de Brahmagupta.

A diagonal e é lado comum a dois triângulos. Assim, pode-se pela Lei dos Cossenos escrever a igualdade

$$a^2+b^2-2abcos\alpha = c^2+d^2-2cdcos\beta. \tag{81}$$

Na Figura 39, como $\alpha+\beta = 180^\circ$ e α é o ângulo obtuso, então $cos\beta = -cos\alpha$. A igualdade (81) pode então ser reescrita como

$$a^2+b^2-2abcos\alpha = c^2+d^2+2cdcos\alpha,$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2(ab+cd)cos\alpha,$$

$$cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}. \tag{82}$$

Sabendo-se que a área de um triângulo é dada pelo semiproduto de dois de seus lados pelo seno do ângulo por eles formado, a área do quadrilátero cíclico pode ser escrita na forma

$$S_{ABCD} = S_{ABE}+S_{CDE},$$

$$S_{ABCD} = \frac{absen\alpha}{2}+\frac{cdsen\beta}{2}. \tag{83}$$

Sendo $sen\alpha = sen\beta$, pois α e β são suplementares, reescreve-se a relação (83) como

$$S_{ABCD} = \frac{(ab+cd)sen\alpha}{2}. \tag{84}$$

Da relação trigonométrica fundamental, tem-se que

$$sen\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}. \tag{85}$$

Substituindo-se (82) em (85), obtém-se:

$$sen\alpha = \sqrt{1 - \left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right]^2};$$

$$sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}. \tag{86}$$

Fatorando-se (86), tem-se que:

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)][2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2)};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)][(c+d)+(a-b)][(c+d)-(a-b)]};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}. \tag{87}$$

Como o perímetro do quadrilátero cíclico é dado por $2p = a+b+c+d$, pode-se reescrever (87) como:

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{(2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)};$$

$$sen\alpha = \frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{2(p-d)2(p-c)2(p-b)2(p-a)};$$

$$sen\alpha = \frac{4}{2(ab+cd)}\sqrt{(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)};$$

$$sen\alpha = \frac{2}{(ab+cd)}\sqrt{(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)}. \tag{88}$$

Substituindo-se (88) em (84), obtém-se:

$$S_{ABCD} = \frac{ab+cd}{2}\frac{2}{(ab+cd)}\sqrt{(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)};$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)}. \tag{89}$$

Considerando-se em (89), por exemplo, o lado $d = 0$, o triângulo de lados a, b e c terá por área

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

que nada mais é que o Teorema de Heron (AMATEMATICAPURA, 2014).

REFERÊNCIAS

AMATEMATICAPURA. **Brahmagupta−Heron−e−algumas−aplicacoes.html**. 2014. Disponível em: <http://amatematicapura.blogspot.com.br/2012/07/brahmagupta−heron−e−algumas−aplicacoes.html>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

BARICENTRO. **O teorema de Stewart**. 2014. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/02/o−teorema−de−stewart.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

CSMATES. **El Teorema de Stewart**. 2014. Disponível em: <http://cscmates.blogspot.com.br/2012/11/el−teorema−de−stewart.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

CUT. **Generalization/Brahmagupta**. 2014. Disponível em: <http://www.cut−the−knot.org/Generalization/Brahmagupta.shtml>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

DALCIN, M. **Revista do Professor de Matemática**. v. 2. São Paulo: SBM, 2009.

D'AMBROSIO, U. **Cuadernos De Investigación en Educación Matemática**. Ãno 6, n. 7, pp 219-224. Costa Rica: [s.n.], 2011.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 9, 6^a ed. São Paulo: Atual, 2005.

FATOSMATEMATICOS. **BRAHMAGUPTA E A ÁREA DO QUADRILÁTERO**. 2014. Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/04/brahmagupta−e−area−doquadrilatero.html>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

FOWLER, M. **Geometrical Proof of Herons Formula**. 2014. Disponível em: <http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/morestuff/Heron.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

HEATH, T. **A History of Greek Mathematics**. [s.n.], 1921. Disponível em: <https://archive.org/stream/historyofgreekma029268mbppage/n339/mode/2up>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

LOPPES, F. **Heron de Alexandria**. 2014. Disponível em: <http://fernandoloppes.blogspot.com.br/2011/08/formula−de−heron−de−alexandria.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

MATEMALESCOPIO. **ARTICLES MATEMATICOS DEL DIA**. 2014. Disponível em: <http://matemalescopio.over−blog.es/article−matematicos−del−dia−95870235.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

MATHS. **Stewart**. 2014. Disponível em: <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/18thCentury/ RouseBall/RBEngl18C.htmlStewart>. Acesso em: 11 de fevereiro de 2014.

MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. 4^a ed. São Paulo: VestSeller, 2009.

PEDRO, J. **Brahmagupta, Heron e algumas aplicações**. 2012. Disponível em: <http://amatematicapura.blogspot.com/2012/07/brahmagupta−heron−e−algumas−aplicacoes−html>. Acesso em: 24 de janeiro de 2014.

POMBO, O. **Heron de Alexandria**. 2014. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/museu/fisica.htm>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

POSAMENTIER, A.S.; SALKIND, C.T. **Challenging Problems in Geometry**. New York: Dover, 1996.

SOMATEMATICA. **Quadrilátero cíclico**. 2014. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/brahma.php>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

THEODORA. **Heron de Alexandria**. 2014. Disponível em: <http://www.theodora.com/encyclopedia/h2/heroofalexandria.html>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

WIKIBOOKS. **Problema das três circunferências**. 2014. Disponível em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Guiadeproblemasmatemáticos/Geometriaplana/Problemadascircunferênciastangentes1>. Acesso em: 13 de fevereiro de 2014.

WIKIPEDIA1. **Brahmaguptasformula**. 2009. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Brahmaguptasformula.svg>. Acesso em: 10 de fevereiro de 2014.

WIKIPEDIA2. **Brahmagupta**. 2014. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

WIKIPEDIA3. **Heron de Alexandria**. 2014. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/HerondeAlexandria>. Acesso em: 2 de fevereiro de 2014.

WIKIPEDIA4. **Matthew Stewart**. 2014. Disponível em: <en.wikipedia.org/wiki/MatthewStewart(mathematician)>. Acesso em: 2014.10.02.

WIKIPEDIA5. **Quadrilátero cíclico**. 2014. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadriláterocíclico>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2014.

WIKISOURCE. **Matthew Stewart**. 2014. Disponível em: <http://en.wikisource.org/wiki/Stewart,Matthew(1717-1785)(DNB00)>. Acesso em: 2014.10.02.