UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE POSGRADUAÇÃO
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

SÉRGIO BARBOSA DE MIRANDA

UM ESTUDO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E O TEOREMA DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

MACAPÁ-AP

2013

SÉRGIO BARBOSA DE MIRANDA

UM ESTUDO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E O TEOREMA DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá, como requesito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

MACAPÁ-AP 2013

SÉRGIO BARBOSA DE MIRANDA

Banca examinadora

Prof. Dr.Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Presidente

Prof. Dr. Wilfredo Sosa Sandoval
Universidade Católica de Brasília - UCB
Membro Externo

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Membro Interno

Prof. Dr. Erasmo senger
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Membro Interno

Avaliado em: 05 de Dezembro de 2013

MACAPÁ-AP 2013

Dedicatória

À minha Família, fonte de Amor e Carinho, pela paciência e atenção que tiveram comigo e pelo apoio recebido, dedico-lhes essa vitória como gratidão.

(Sérgio B. de Miranda)

"Para Tales... a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos."

(Aristoteles)

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, às minhas filhas, aos meus pais e meus irmãos e todos os meus familiares que me deram apoio para seguir em frente.

À todos os professores do Colegiado do Curso, que foram imprescindíveis para o desenvolvimento das atividades do processo de formação, pela orientação e os ensinamentos ministrados e, sobretudo pelo incentivo às minhas atividades acadêmicas.

Aos meus amigos e aos colegas do Profmat pelo companheirismo e pelo aprendizado em conjunto.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela criação do Curso de Mestrado em nível nacional e à Capes pelo apoio.

À Unifap pela obtenção do título de Mestrado e aquisição da continuação de minha formação profissional.

E, uma dívida de gratidão para aqueles, que de alguma forma, contribuiram na elaboração desta dissertação, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma abordagem geométrica rigorosa e prática para o conceito de áreas de figuras planas e um problema clássico: A desigualdade isoperimétrica. Esse problema declara que dentre todas as figuras planas fechadas simples e com o mesmo perímetro, o círculo limita a maior área. É um teorema importante que teve a atenção de matemáticos gregos antigos e também do matemático Papus de Alexandria (320 dc) que estudava problemas de isoperimetria. O problema pode ajudar o aluno a compreender a diferença entre área e perímetro contextualizando com problemas de otimização que podem ser trabalhadas no ensino médio ou superior.

Palavras-chave: Matemática - Estudo e Ensino, Geometria, Área, Desigualdade Isoperimétrica.

Abstract

In this report, we present a strict geometric approach and a practice to the plain figures concept of areas, as well as a classic problem: The isoperimetric inequality. This problem states that among all simple closed plain figures and of the same perimeter, the circle limiting the largest area. It is an important theorem, which had the attention of ancient Greek mathematicians and also of the mathematician Pappus of Alexandria (320 AD) who studied isoperimetric problems. The problem can help the student understanding the difference between area and perimeter, contextualizing optimization problems that can be worked in high school or college.

keywords: Mathematics - Study and teaching, Geometry, area, isoperimetric inequality.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Neste estudo, abordam-se dois tópicos da Geometria: Áreas e Perímetros. A Geometria é considerada um dos principais eixos da Matemática para a formação do cidadão e por estar presente no cotidiano na mais variadas situações como nas construções, na natureza e objetos diversos.

Almejamos com este contribuir para o aprimoramento do ensino de geometria, em especial ao conteúdo de áreas de figuras planas, e as relações com o perímetro, que é considerado importante tanto no ensino básico quanto no nível superior. Os conteúdos de geometria quase não é estudado no ensino fundamental e médio. Mesmo alguns livros didáticos tendo procurado intercalar e interrelacionar a geometria com a álgebra, muitos professores veem esta parte, como opcional. Buscamos mostrar uma forma diferente, dinâmica e de melhor entendimento tanto por parte dos alunos quanto pelos professores. O que demonstramos aqui não é tratado nos livros didáticos, pois geralmente, estes apresentam apenas fórmulas prontas sem nenhuma demonstração ou algo que faça fixar a aprendizagem do aluno. Tratamos o conceito de áreas a passos simples até chegarmos a um grau de abstração mais elevado, com a finalidade de dar uma visão ampla ao que denominamos áreas de figuras planas. Desde a definição e comparação entre figuras à regiões limitadas por curvas.

Para isto, apresentamos os conceitos de uma maneira que possa ser implementada nos ensinos fundamental e médio (respeitando-se, obviamente os níveis de maturidade de cada fase escolar).

Trabalharemos um tema muito interessante e antigo, que é um problema envolvendo otimização de áreas dado um perímetro fixo. Desde a época de Euclides ($\pm 300 a.C.$) problemas envolvendo figuras com mesmo perímetro, já eram estudados. Temos como exemplo a demonstração que “dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que tem a maior área”. Por trás desse problema, existe uma antiga lenda, contada por Virgílio em Eneida, sobre a princesa Dido, fundadora da cidade de Cartago no norte da África. Onde foi resolvido um problema de demarcar a maior área possível para estabelecer o seu reino.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: No Capitulo 1, pesquisamos sobre os aspectos históricos de áreas de figuras planas, especificamente na geometria euclidiana procurando saber quando e como o homem começou a calcular área. No Capítulo 2 apresentamos a conceituação a definição e os axiomas de área. Demonstramos o cálculo de áreas de figuras elementares, analisando a relação entre área e semelhança e explorando o uso de áreas na resolução de problemas geométricos. No capítulo 3, apresentamos o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica com suas variantes enriquecido com exemplos interessantes. No capítulo 4, Apresentaremos uma proposta metodológica com várias atividades que envolvem área, perímetro e a desigualdade isoperimétrica para serem trabalhadas pelo professor em sala de aula do ensino básico. Em nosso trabalho, não tratamos das unidades de medidas, mas destacamos os apêndices A e B resgatamos o Sistema Métrico Decimal e as unidades de comprimento e área adotados no Brasil.

Capítulo 1

Sobre áreas de figuras planas

Desde a antiguidade usa-se o cálculo de áreas. As primeiras sociedades organizadas estavam intimamente relacionado com o cultivo e a propriedade da terra. Sendo assim, desde cedo surgiu o interesse e a necessidade de técnicas para se medir as extensões de terras, pois terra significava riqueza e poder. Temos registros muito antigos de técnicas de medidas de área desenvolvidas pelos egípcios e por outras civilizações da Mesopotâmia. As técnicas eram desenvolvidas pelas primeiras civilizações e tinham um caráter particular, não havia procedimentos gerais para todos os casos, apenas os exemplos eram numéricos. Mas, com o advento da cultura grega Matemática adquiriu rigor e generalidade, tornando-se uma conceituação precisa dos elementos envolvidos e a obtenção de resultados mais profundos e abrangentes.

Segundo Ávila (1978), a obra "Os Elementos" do matemático Euclides de Alexandria podemos encontrar vários resultados relativos a áreas de figuras planas, onde a primeira menção à palavra área ocorre na proposição 34 do livro 1, seguindo-se várias outras proposições sobre áreas de paralelogramos, culminando na demonstração do teorema de Pitágoras (proposição 47, livro 1). O livro 2 dos Elementos possui uma enorme quantidade de resultados relativos a áreas muitos deles utilizados para se obter resultados que evitassem o conceito de proporção. Muito embora a própria definição de área não seja mencionada nos Elementos, depreende-se desta obra que a noção de área era muito mais qualitativa do que quantitativa, no sentido que se referia à região delimitada por uma figura do que propriamente um valor numérico atribuído à região. Esta, aliás, era uma característica da matemática grega como um todo. A representação dos números prioritariamente por uma via geométrica.

O problema de calcular a área de uma figura plana foi uma das questões mais centrais da matemática, desde os tempos mais remotos. Arquimedes (287-212 a.C.), da escola de Alexandria, o mais eminente dos matemáticos da antiguidade, ocupou-se intensamente com esse problema, calculando as áreas e os volumes de diversas figuras geométricas. O procedimento usado nesses cálculos empregava sempre o chamado método de exaustão, que consistia essencialmente, em “exaurir” a figura dada por meio de outras áreas conhecidas. Esse método atribuído a Eudoxo (406-355 a.C) foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes.

Depois das figuras poligonais, cujo cálculo de área se reduz a calcular áreas de triângulos, o círculo é a figura geométrica mais simples a oferecer dificuldade maior. Uma primeira aproximação à área é dada pelo quadrado inscrito. Com o acréscimo de quatro triângulos convenientes, obtemos o octógono regular inscrito, cuja área dá uma aproximação maior da área do círculo. Prosseguimos com o processo de acrescentar novos triângulos, vamos exaurindo o círculo e obtendo aproximações cada vez melhores a área do círculo, através dos polígonos regulares inscrito de 2^n lados. Usando esse processo, Arquimedes calculou, em um círculo dao, inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo e por muitos séculos, o valor mais acertado para π era: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$

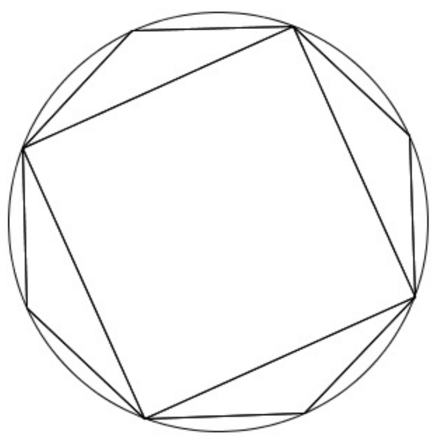

Figura 1.1: *cálculo da área do círculo através de polígonos regulares*

Uma metodologia precisa para se calcular o valor de π surgiu em 1671 como consequência da série de James Gregory(1638)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

Por essa série, o francês De Lagny calculou as 112 primeiras casas decimais de π e em 1873 o inglês W. Shanks chegou manualmente a 707 casas decimais.

No caso de um segmento de parábola ACB, Arquimedes usou, como primeira aproximação, o triângulo ABC, onde C é escolhido de maneira que a tangente à parábola por esse ponto seja paralela à reta AB. De modo análogo, escolhem-se os pontos D e E e constroem-se os triângulos ACD e BDE, e assim por diante, indefinidamente. Esses triângulos vão exaurindo a área do segmento de parábola, de forma que essa área pode ser obtida, com aproximação desejada, somando as áreas de um numero suficientemente grande de triângulos. Desse modo, Arquimedes logrou provar que a área do segmento de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ABC nele inscrito.

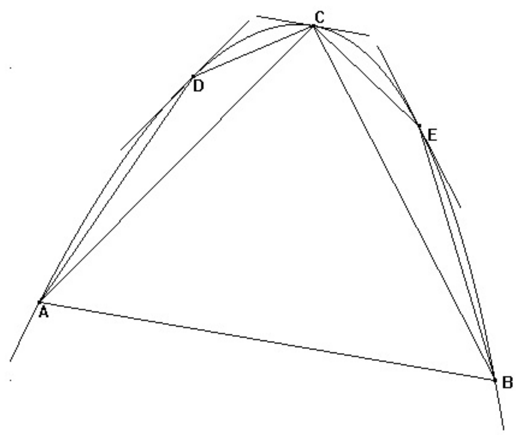

Figura 1.2: *cálculo da área de um segmento de parábola pelo método da exaustão de Arquimedes.*

Como podemos ver, pelos exemplos do círculo e da parábola, cada novo problema exigia um tipo particular de aproximação. Este foi, sem dúvida, um dos motivos por que o Cálculo Integral não alcançou completa sistematização com Arquimedes, embora esse grande sábio já possuísse as idéias fundamentais da nova ciência. Em contraste, a noção de integral permite exprimir a área sobre o gráfico de uma função f, usando sempre o mesmo tipo de aproximação por retângulos. É verdade que esta simplificação é, antes, conceitual. O Teorema Fundamental do Cálculo permite exprimir a integral de uma função em termos de uma primitiva. Foi devido a esse notável resultado, descoberto por Newton e Leibniz no século XVII, que o Cálculo pode, finalmente, atingir sua completa maturação.

Ainda, segundo Ávila (1978), "o cálculo integral é o método, por excelência de cálculo de áreas de figuras curvilíneas". No entanto, uma conceituação mais precisa do que vem a ser área somente foi estabelecida com precisão no final do século XIX. Até esta ocasião, o cálculo integral, embora extremamente útil e poderoso, não repousava sobre sólidos fundamentos. Nomes como Riemann e Lebesgue figuram entre aqueles que contribuíram de forma significativa para fundamentar o conceito de integral, que por sua vez está relacionado com o conceito de área. A teoria abstrata que cuida desta fundamentação teórica é conhecida como teoria da medida.

Capítulo 2

Cálculo de Áreas

Neste capitulo vamos apresentar uma perspectiva geométrica para o conceito de área que possa ser ao mesmo tempo rigoroso e prático do ponto de vista do ensino de matemática elementar. Em primeiro lugar, vamos introduzir a definição de área através de axiomas simples e diretos. Depois, com a ajuda das propriedades de área, calculamos as áreas de figuras geométricas elementares, o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o triângulo e o trapézio. Medir área de uma figura significa compará-la com uma unidade padrão que é o quadrado de lado unitário.

Entre todas as figuras elementares, a que envolve mais engenhosidade no cálculo de sua área é exatamente a mais básica de todas: o quadrado. Para provarmos que a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado lidamos corretamente com segmentos de comprimento irracional. O tratamento de números irracionais é, em geral, evitado nos ensinos fundamental e médio. Mas embora o assunto realmente apresente uma complexidade técnica, apresentamos de uma maneira concisa e acessível ao estudante de ensino básico. Apresentamos uma demonstração que utiliza o mínimo de resultados sobre números reais.

E, finalmente apresentamos algumas diretrizes gerais para o cálculo de áreas de qualquer figura plana. Neste ponto, evidenciamos que o princípio norteador destes procedimentos de cálculo de áreas é a decomposição em figuras elementares, o cálculo de áreas individuais e a soma de todas as áreas parciais.

Antes de definirmos área, devemos especificar os objetos geométricos para os quais esta definição está apropriada. Primeiramente, vamos limitar nossa discussão a apenas subconjuntos de pontos no plano. Em segundo lugar, os subconjuntos do plano em questão são regiões delimitadas por uma ou várias curvas fechadas e simples. Uma curva fechada é uma curva que não possui extremidade. Veja a figura abaixo um exemplo de curva aberta e um exemplo de curva fechada.

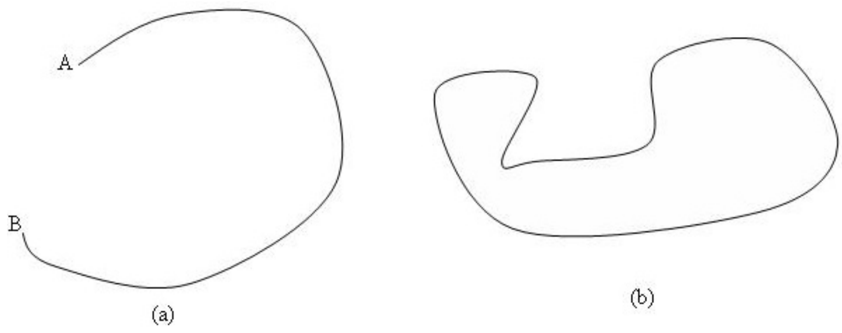

Figura 2.1: *A curva (a) é um exemplo de curva aberta, suas extremidades são os pontos A e B mostrados. A curva (b) é um exemplo de curva fechada.*

Uma curva é dita simples se não possuir pontos de intersecção. A figura 1.2 abaixo nos mostra um exemplo de curva não simples e um exemplo de curva simples.

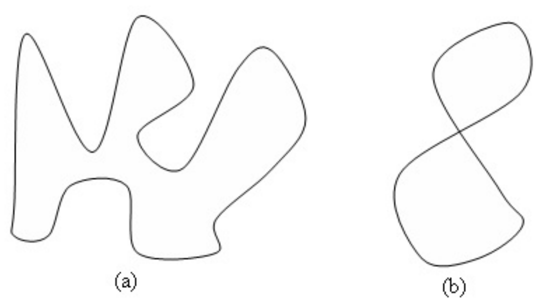

Figura 2.2: *a curva (a) é um exemplo de curva simples, enquanto a curva (b) é uma curva não simples, pois possui auto-intersecção. O conceito de curva simples não está relacionado com a complexidade do traço da mesma.*

Vamos, agora dar uma definição para o perímetro.

Definição 2.0.1 *Perímetro: Refere-se ao contorno de uma superfície ou de uma figura e à medida desse contorno. Por isso, o perímetro permite calcular a fronteira de uma superfície. No caso do círculo o perímetro é chamado também de comprimento.*

A propriedade mais simples de uma curva simples e fechada pode ser formulada no seguinte teorema:

Teorema 2.0.1 *Uma curva contínua fechada e simples divide o plano em duas regiões disjuntas.*

Este teorema, embora de fácil enunciado é de conhecimento imediato e claro. Com este resultado nos referimos de forma a não deixar dúvida sobre qual região atribuimos um valor de área. A partir deste ponto, sempre que nos referimos a uma curva, subtende-se, a menos que se diga o contrário, que a curva é fechada e simples. Dito isto, podemos agora definir o que vem a ser uma área.

Definição 2.0.2 *Definição de área: A área de uma região Γ delimitada por uma ou várias curvas é um número real positivo $A(\Gamma)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Duas regiões congruentes possuem a mesma área.*
2. *Se duas regiões Γ_1 e Γ_2 se intersectarem no máximo por pontos em sua fronteira, isto é, sua intersecção não possui pontos interiores, então: $A(\Gamma_1 \bigcup \Gamma_1) = A(\Gamma_1) + A(\Gamma_2)$.*
3. *A área de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.*

Algumas observações se fazem necessárias a respeito dos itens na definição acima: Em primeiro lugar, devemos entender o que vem a ser uma congruência entre duas figuras. A noção de congruência é a forma mais exata de dizermos que duas figuras são iguais, que pode ser sintetizada na definição abaixo.

Definição 2.0.3 *Duas figuras Γ_1 e Γ_2 são ditas serem congruentes se existe uma correspondência 1 a 1 entre os seus pontos, dada por uma aplicação $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que para quaisquer dois pontos $X, Y \in \Gamma_1$ tenhamos que a medida do segmento seja igual ao segmento $\overline{\phi(X)\,\phi(Y)}$ seja igual ao segmento $\overline{XY}$.*

Dito de outra forma, duas figuras são congruentes se conseguirmos sobrepor ambas através de um processo (rotação ou translação) que preserve as medidas de segmentos entre os pontos da figura, isto implicará também que as medidas de ângulos serão de igual modo preservadas. Pode-se mostrar que uma congruência pode ser obtida através de uma sequência finita de rotações, translações e, eventualmente, reflexões no plano.

Em segundo lugar, devemos entender o que vem a ser um ponto interior. Já vimos que uma curva γ divide o plano em duas regiões distintas. Mas estão divididos em dois sub-conjuntos distintos. Pode-se verificar sem muita dificuldade que um ponto pertence a um destes subconjuntos do complementar à curva γ no plano se existe um círculo ao redor deste ponto no qual todos os seus pontos ainda pertencerão ao mesmo conjunto. Como uma convenção, estipulamos que se a curva for orientada no sentido anti-horário, a região que se encontrar sempre à esquerda da curva será chamada interior e a região que se encontrar sempre à direita será chamada exterior, como nos mostra a figura abaixo:

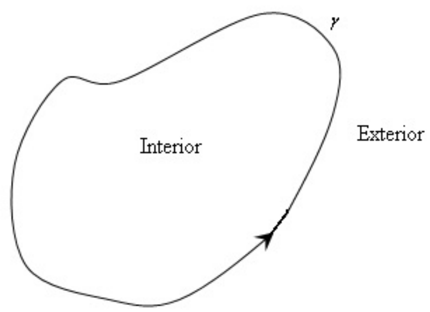

Figura 2.3: *Região interior e exterior definida por uma curva fechada e simples.*

Proposição 2.0.1 *A área de uma figura é maior do que qualquer figura no seu interior.*

Demonstração:

Considere uma figura Γ delimitada por uma curva γ e seja uma curva δ contida no interior de Γ. Podemos definir duas figuras a partir de Γ: Uma figura Γ_1, delimitada por δ e outra figura Γ_2, delimitada pelas curvas γ e δ, como ilustrado na figura abaixo.

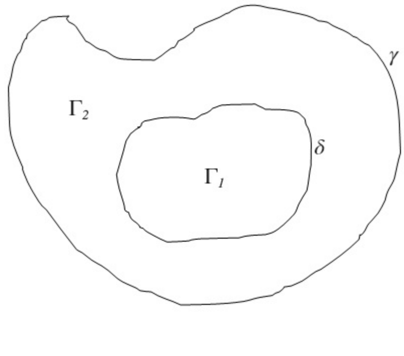

Figura 2.4: *Regiões delimitadas por duas curvas, sendo que uma delas está na região interior definida pala outra.*

A área Γ é igual à soma da área Γ_1 e da área Γ_2. Logo, a área Γ será maior que a área de uma das regiões individuais Γ_1 ou Γ_2. $\square$.

Desse modo, se duas figuras tiverem algum ponto de sua região interior em comum, a área da união entre as duas figuras será menor que a soma das áreas de cada uma das figuras individuais. Isto se deve ao fato explicado no parágrafo anterior, afinal se as regiões interiores das duas figuras possuem um ponto em comum, existe um círculo ao redor deste ponto contido na intersecção entre as duas regiões. Logo ao efetuarmos a soma das áreas das duas figuras, a área deste círculo comum será contada duas vezes, enquanto que na área da união, a área deste círculo será contada uma única vez.

Para calcularmos a área de uma figura complexa, sempre podemos decompor a mesma em figuras mais simples que saibamos calcular sua área, a área total será a soma das áreas parciais. Ou seja, a área é uma grandeza aditiva.

2.1 Áreas de Figuras simples

As figuras que consideramos mais elementares são o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o trapézio e o triângulo, os quais demonstraremos detalhadamente como se calcula suas respectivas áreas.

Proposição 2.1.1 *(Área do quadrado) A área de um quadrado de lado a é igual a a^2*

Demonstração

Vamos começar com um quadrado de lado inteiro n. Se dividirmos seus lados em n segmentos de comprimento unitário, teremos ao todo n^2 quadrados de lado unitário decompondo o quadrado original, conforme explicado na figura abaixo. Todos estes quadrados de lado unitário se intersectam no máximo por uma aresta e, portanto, pelo item 2 da definição de área, a área do quadrado é igual a soma das áreas dos quadrados de lado 1, logo A(Γ) $= n^2.1 = n^2$.

Agora, seja um quadrado cuja medida do lado é um número racional $\dfrac{m}{n}$. Obviamente, será impossível dividir este quadrado em um número inteiro de quadrados de lado unitário. Assim, devemos utilizar uma nova medida padrão de área para compararmos

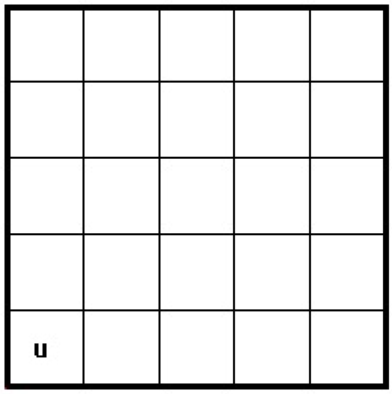

Figura 2.5: *área de um quadrado de lado inteiro*

o quadrado unitário e o quadrado em questão. Seja um quadrado Λ de lado igual a $\frac{1}{n}$. Pelo exposto no caso anterior, é fácil verificar que o quadrado de lado unitário é decomposto em n^2 quadrados congruentes a Λ , e, portanto de mesma área, assim.$1 = n^2 \cdot A\left(\Lambda\right), \Rightarrow A\left(\Lambda\right) = \frac{1}{n^2}$

Agora, um segmento de medida $\frac{1}{m}$ pode ser decomposto em m segmentos de medida $\frac{1}{n}$. Portanto, um quadrado Γ de lado $\frac{1}{m}$ possui m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$, concluímos então que: $A(\Gamma) = A(\Lambda) \cdot m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m^2}{n^2}\right)$

Nos resta mostrar que o resultado continua válido para quadrados com medida irracional. Para isto, vamos utilizar alguns fatos a respeito das propriedades dos números reais:

1. Dados dois números reais positivos x e y, temos que $x < y$ se, e somente se $x^2 < y^2$.
2. Dados dois números reais quaisquer x e y, sempre existe um número racional entre eles.
3. Dado um número real positivo a existe um único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Este número é denominado raiz quadrada de a.

Em consequência da segunda propriedade, podemos concluir que arbitrariamente próximos a qualquer número irracional a, podemos encontrar números racionais r e s tais que $r < a < s$. Assim, um quadrado Γ de lado a ficará sempre no interior de um quadrado de lado racional s, cuja área é igual a s^2, e terá em seu interior de lado r, e, portanto com área r^2, conforme nos mostra a figura abaixo:

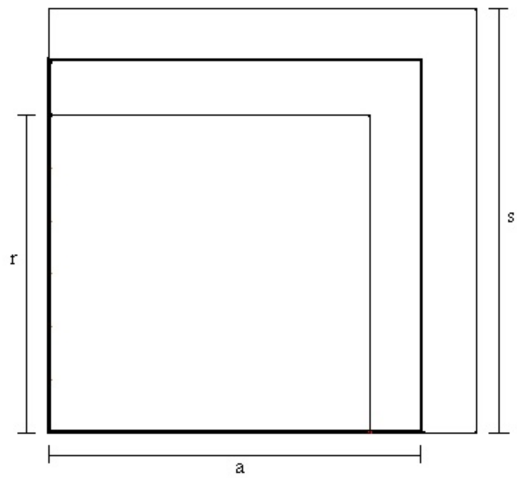

Figura 2.6: *Aproximação de um quadrado de lado irracional por quadrados de lado racional, por excesso e por falta.*

Então temos: $r^2 < A(\Gamma) < s^2$

Por outro lado, temos pela primeira propriedade que $r^2 < a^2 < s^2$, para quaisquer racionais r e s tais que $r < a < s$. Suponhamos então que a área $A(\Gamma)$ seja igual ao número $b < a^2$. Pela terceira propriedade de números reais, existirá a raiz quadrada de b, que será denotada por $\sqrt{b}$, que será um número menor que a. Ainda pela terceira propriedade existirá um número racional r entre $\sqrt{b}$ e a. Assim, devido a todas as informações expostas anteriormente, $b < r^2 < A(\Gamma)$, o que é uma contradição, pois supusemos que $A(\Gamma) = b$. Da mesma forma, podemos verificar que a área do quadrado (Γ) não pode ser um número maior que a^2. Portanto $A(\Gamma) = a^2$.

Com isto esgotamos completamente todas as possibilidades para a medida do lado de um quadrado, em todos os casos temos a área do quadrado é numericamente igual ao quadrado de medida do lado. □

Proposição 2.1.2 *(Área do retângulo) A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de sua base pela medida de sua altura.*

Demonstração

Considere um retângulo de lados a e b. Vamos mostrar que sua área é igual a $a \cdot b$. Para isto, vamos construir um quadrado de lado $(a+b)$, cuja área é, pelo teorema anterior, igual a $(a+b)^2$. Por outro lado, o quadrado de lado $(a+b)$ é constituído de um quadrado de lado a, e, portanto de área igual a a^2, um quadrado de lado b, e, portanto de área igual a b^2, e dois retângulos Γ de lados a e b, conforme ilustrado na figura abaixo.

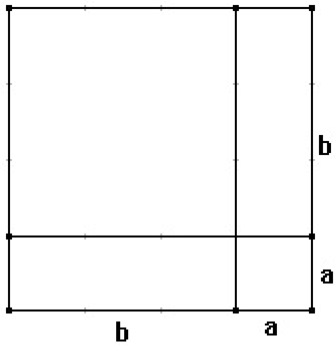

Figura 2.7: *Cálculo de área de um retângulo.*

Portanto, concluimos que: $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a^2 + 2 \cdot A(\Gamma) + b^2 \Rightarrow A(\Gamma) = a \cdot b$

Podemos agora determinar a área de um paralelogramo, isto é, um quadrilátero que possui seus lados opostos paralelos. Antes um pouco de nomenclatura: Se tomarmos um dos lados de um paralelogramo como referência, denominamos este lado por base do paralelogramo. Dada uma base, a medida de qualquer segmento perpendicular à base e que liga um ponto da base a um ponto do lado oposto que lhe é paralelo é denominada altura do paralelogramo.

Proposição 2.1.3 *(Área do paralelogramo:) A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida de sua altura.*

Demonstração:

Considere um paralelogramo ABCD, tome como base o segmento $\overline{CD}$. Sejam agora $\overline{DH}$ e $\overline{BH}$ duas alturas deste paralelogramo, conforme ilustrado na figura abaixo.

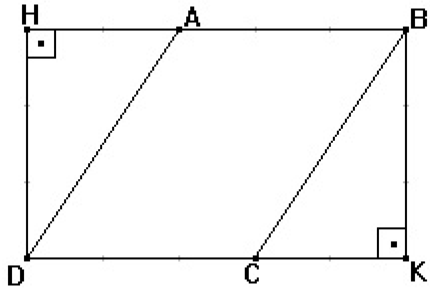

Figura 2.8: *Cálculo da área de um paralelogramo.*

Os triângulos ΔBKC e ΔDHA são triângulos retângulos em K e H, respectivamente. Além do mais, temos que as hipotenusas destes triângulos são congruentes, pois são os lados opostos paralelos de um paralelogramo. Também temos que os catetos são congruentes, logo $\Delta BKC \equiv \Delta DHA$, pelo caso de congruência entre triângulos retângulos com as hipotenusas e um dos catetos congruentes. Assim, pelo primeiro item na definição de área, concluimos que $A(\Delta BKC) = A(\Delta DHA) = A_1$.

Agora, considere o quadrilátero $HBKD$ da figura acima, pela congruência dos triângulos retângulos acima mencionados, temos que $HA = KC$, também temos que $AB = CD$, pois são lados opostos e paralelos de um paralelogramo. Portanto, temos que $HB = HA + AB = KC + CD = KD$, também sabemos $queDH = BK$, logo o quadrilátero $HBKD$ é um paralelogramo. Alem disso, devido ao fato de os ângulos serem ângulos retos, temos que $HBKD$ é de fato um retângulo, assim escrevemos:

$$A(HBKD) = KD \cdot BK = (KC + CD) \cdot BK = KC \cdot BK + CD \cdot BK$$

Por outro lado podemos escrever:

$$A(HBKD) = A(\Delta BKC) + A(\Delta DHA) + A(ABCD) = 2 \cdot A_1 + A(ABCD)$$

Para mostrarmos nosso resultado, temos que verificar que a soma das áreas dos triângulos retângulos ΔBKC e ΔDHA é igual a $KC \cdot BK$. Para isto, considere dois novos triângulos retângulos $\Delta FGI \equiv \Delta BKCe\Delta IEF \equiv \Delta DHA$, conforme ilustrado na figura abaixo.

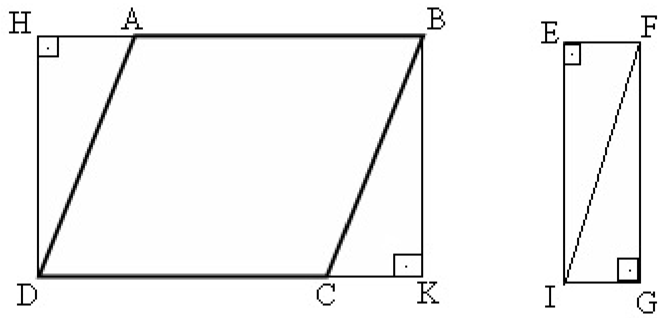

Figura 2.9: *Área das figuras complementares ao paralelogramo.*

É fácil ver que $EFGI$ é um retângulo (Verifique os detalhes), assim teremos: $A(EFGI) = A(\Delta FGI) + A(\Delta BKC) + A(\Delta DHA) = 2 \cdot A_1$

Por outro lado, $A(EFGI) = GI \cdot FG = CD \cdot BK$. Logo, $2 \cdot A_1 = KC \cdot BK$ e portanto $A(ABCD) = CD \cdot BK$.$\square$

A área do paralelogramo pode ser dada em função do ângulo agudo α formado pela base e um lado. como mostra a figura abaixo:

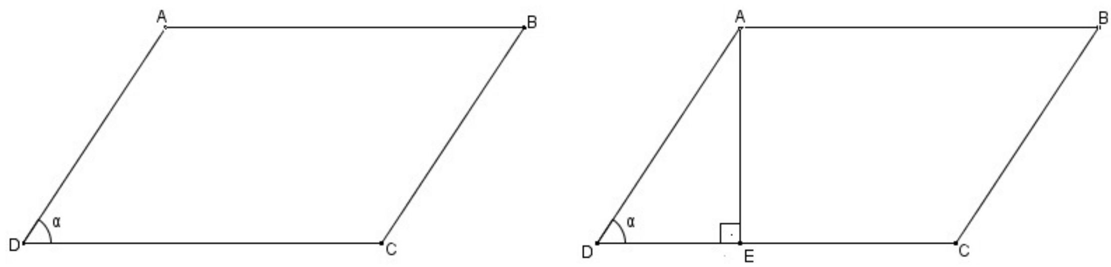

Figura 2.10: *Área do paralelogramo em função do ângulo α.*

Seja E um ponto do segmento $\overline{CD}$, de tal modo que $\overline{AE}$ seja perpendicular a $\overline{CD}$. Daí temos o triângulo retângulo ΔACE, como mostra a figura.

Então, temos: $sen(\alpha) = \dfrac{AE}{AD} \Leftrightarrow AE = AD \cdot sen(\alpha)$. Mas, provamos anteriormente que $A(ABCD) = CD \cdot BK$. E como BK e AE são alturas dos respectivos paralelogramos. Assim, $A(ABCD) = CD \cdot AD$. Mas, $AE = AC \cdot sen(\alpha)$, então, concluímos que: $A(ABCD) = CD \cdot AD \cdot sen(\alpha)\square$

Note também que como a área de um paralelogramo somente depende da base e da altura relativa à base, então todos os paralelogramos com estes mesmos dados terão a mesma área, não importando sua forma. Na figura abaixo, os paralelogramos $ABCD$, $ABEF$ e $ABFG$ estão descritos entre duas retas paralelas r e s que possuem a mesma base AB também possuem a mesma área.

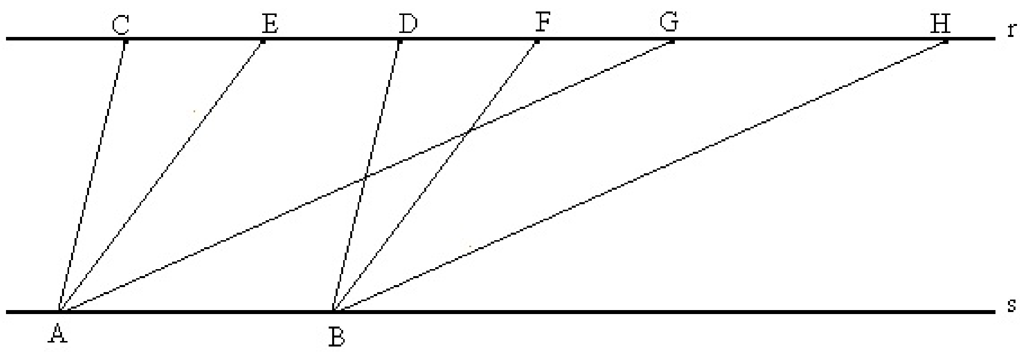

Figura 2.11: *paralelogramos com mesma área.*

Proposição 2.1.4 *(Área do triângulo) A área de um triângulo é igual a metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura.*

Demonstração:

Considere um triângulo ΔABC tomemos o segmento $\overline{BC}$ como sua base e sejam M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Denotamos o valor da altura do triângulo ΔABC relativa à altura $\overline{BC}$ por h. prolonguemos o segmento $\overline{MN}$ até o ponto P de forma que $\overline{MN} \equiv \overline{PN}$, conforme indicado na figura abaixo.

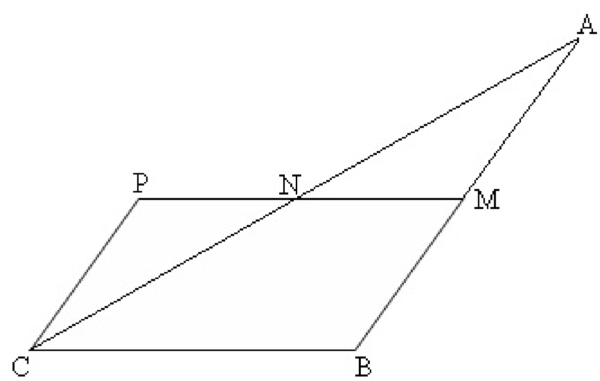

Figura 2.12: *Cálculo da área de um triângulo.*

Como $\overline{AN} \equiv \overline{CN}$ e $M\hat{N}A \equiv P\hat{N}C$, temos, pelo caso Lado-Ângulo-Lado que $\Delta MNA \equiv \Delta PNC$, assim $A(\Delta MNA) = A(\Delta PNC)$. Portanto, $A(\Delta ABC) = A(MNCB) + A(\Delta AMN) = A(MNCB) + A(\Delta CPN) = A(MPCB)$. Observamos que o quadrilátero $MPCB$ é de fato um paralelogramo com a mesma base do triângulo ΔABC, mas com metade de sua área.

$$A(\Delta ABC) = A(MPCB) = BC \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} BC \cdot h \qquad \square$$

O cálculo da área de um triângulo qualquer pode ser feito em função das medidas dos lados. Seja ΔABC um triângulo cujos lados medem a, b e c indicados na figura abaixo, então a medida da área deste triângulo é dada pela fórmula: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

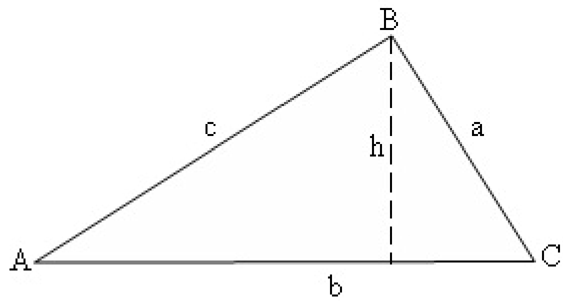

Figura 2.13: *Área do triângulo em função das medidas dos lados.*

Demonstração:

Pelo teorema de áreas, sabemos que $A = \dfrac{bc \cdot sen\hat{A}}{2}$ (I) e que aplicando a lei dos cossenos a qualquer triângulo, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\hat{A}$ (II). Formando um sistema com as equações (I) e (II), e multiplicando ambos os membros da equação (I) por 4, temos:

$$\begin{cases} 2bc \cdot cos\hat{A} = b^2 + c^2 - a^2 \\ 2bc \cdot sen\hat{A} = 4A \end{cases}$$

Elevando cada membro ao quadrado e somando as duas equações, vem:

$$(2bc \cdot cos\hat{A})^2 + (2bc \cdot sen\hat{A})^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (4A)^2$$

$$4b^2c^2 \cdot cos^2\hat{A} + 4b^2c^2 \cdot sen^2\hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (4A)^2$$

Colocando em evidência o fator comum do 1º membro, temos:

$$4b^2c^2 \cdot (cos^2\hat{A} + sen^2\hat{A}) = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (4A)^2$$

Pela relação fundamental $cos^2\hat{A} + sen^2\hat{A} = 1$ logo:

$$4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (4A)^2 \Rightarrow -(4A)^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$

Pelo princípio multiplicativo temos:

$$(4A)^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Aplicando a regra da diferença de dois quadrados no 2º membro, vem:

$16A^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$

Formando em cada fator do 2º membro, trinômios de quadrados perfeitos, temos:

$16A^2 = (b^2 + 2bc + c^2 - a^2) \cdot [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)] \Rightarrow [(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2]$

Novamente aplicando a diferença de dois quadrados no 2º membro, vem:

$16A^2 = [(b + c + a) \cdot (b + c - a)] \cdot [(a + b - c)(a - b + c)]$

Sabendo que $2p = a + b + c$, é o perímetro do triângulo, verificamos as seguintes desigualdades: $a + b = 2p - c$; $a + c = 2p - b$; $b + c = 2p - a$, e fazendo as devidas substituições teremos:

$16A^2 = 2p \cdot (2p - a - a) \cdot (2p - c - c) \cdot (2p - b - b) = 2p \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2c) \cdot (2p - 2b)$

Colocando no 2º membro o fator comum em evidência, temos:

$16A^2 = 2p \cdot 2 \cdot (p - a) \cdot 2 \cdot (p - c) \cdot 2 \cdot (p - b) \Rightarrow 16A^2 = 16p \cdot (p - a) \cdot (p - c) \cdot (p - b)$

Dividindo ambos os membros por 16, temos:

$$A^2 = p \cdot (p - a) \cdot (p - c) \cdot (p - b)$$

Logo: $A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$

Definição 2.1.1 *Um trapézio é um quadrilátero que possui dois de seus lados paralelos. Denominamos bases tanto estes segmentos paralelos como as suas medidas, em geral haverá uma base maior e uma base menor (observe que quando as bases são iguais, então o trapézio é de fato um paralelogramo). Denominamos altura do trapézio, de igual forma, qualquer segmento perpendicular às retas paralelas que contêm as bases bem como as suas medidas.*

Proposição 2.1.5 *(Área do Trapézio) A área de um trapézio T com base maior b_1, base menor b_2 é dada por:*

$$A(T) = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$$

Demonstração:

Seja um trapézio $ABCD$ com $AB = b_2$ e $CD = b_1$, conforme indicado na figura abaixo.

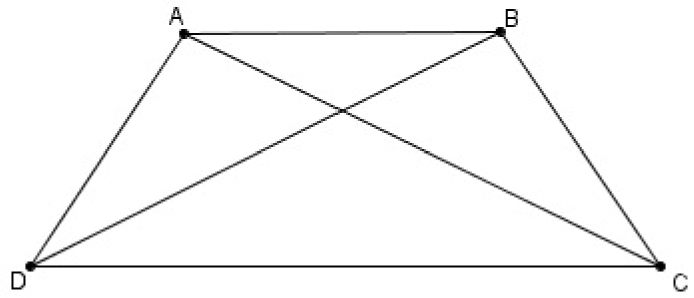

Figura 2.14: *Cálculo da área de um trapézio.*

Considere o segmento $\overline{BD}$, que determina no trapézio dois triângulos, a saber, ΔABD e ΔBCD. O primeiro possui base b_2 e altura h, enquanto o segundo possui b_1 e altura h. assim temos:

$$A(ABCD) = A(\Delta ABD) + A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \cdot h$$

2.1.1 Área de um quadrilátero de diagonais perpendiculares

Proposição 2.1.6 *A área de um quadrilátero de diagonais perpendiculares é igual a metade do produto de suas diagonais.*

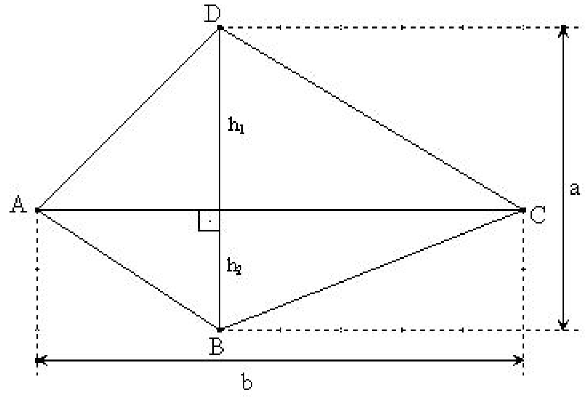

Figura 2.15: *Quadrilátero de diagonais perpendiculares*

Demonstração:

Consideremos o quadrilátero $ABCD$ com as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ com medidas respectivamente iguais a a e b como nos mostra a figura abaixo. Observe que a área do quadrilátero é igual à soma das áreas dos triângulos e $h_1 + h_2 =$ a, temos:

$$A = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} \Rightarrow A = \frac{b}{2} \cdot (h_1 + h_2) \Rightarrow A = \frac{b}{2} \cdot a \Rightarrow A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Esta mesma regra geral para quadriláteros que possuem diagonais perpendiculares, portanto, é válida também para o losango, pois este é um tipo particular deste tipo de quadrilátero o qual acabamos de demonstrar como calcular a sua área.

2.1.2 Área de um polígono regular

Proposição 2.1.7 *A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro (isto é a metade do perímetro) pela medida do apótema.*

Demonstração:

Consideremos o polígono regular de n lados cujo apótema tem medida m, seja ainda ell a medida do lado e p o semiperímetro, como nos mostra a figura abaixo:

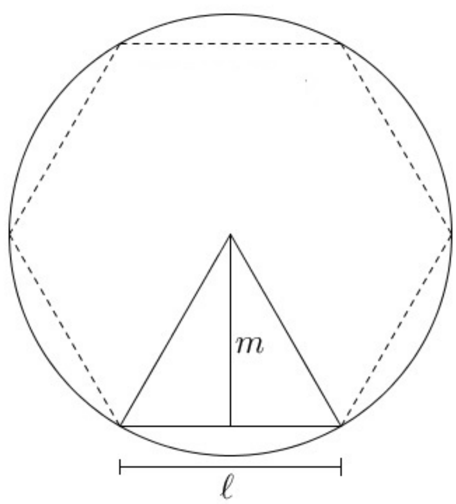

Figura 2.16: *Polígono regular inscrito numa circunferência*

Decompomos esse polígono em n triângulos de base ℓ e altura m, então, temos que a área do polígono será n vezes a área do triângulo, ou seja: $A = n \cdot A_t$. Mas a área do triângulo é dada por $A_t = \dfrac{\ell \cdot m}{2}$. Assim sendo $A = \dfrac{\overbrace{n \cdot \ell} \cdot m}{2}$ onde $n \cdot \ell = 2p$ (perímetro), vem: $A = \dfrac{2 \cdot p \cdot m}{2} \Rightarrow A = p \cdot m$

2.1.3 Área do círculo

Proposição 2.1.8 *A área do círculo* [1] *é igual o produto de seu semiperímetro pelo raio.*

Consideremos as seqüências de regiões poligonais regulares inscritas numa circunferência:

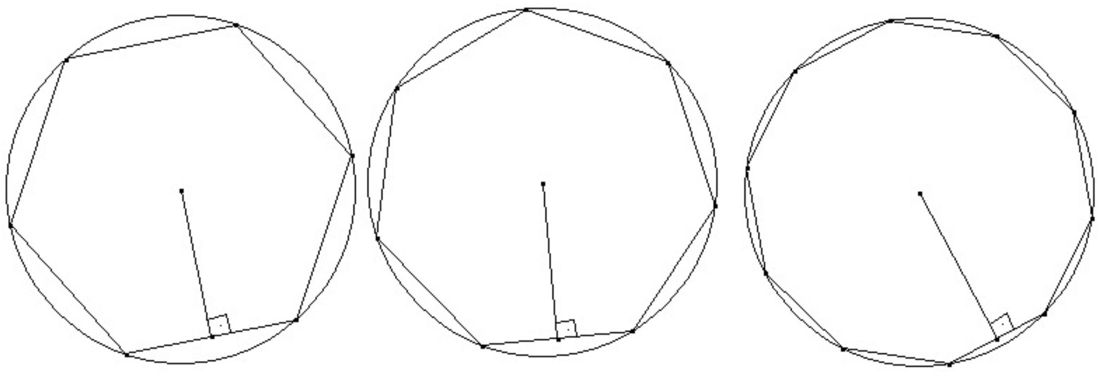

Figura 2.17: *Aproximação da área do círculo por um polígono de n lados*

Observamos que com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do comprimento do círculo e os apótemas se aproximam do raio do círculo: $A = \pi r^2$

Por outro lado, observamos que a área do círculo se aproxima por excesso do triplo da área de um quadrado de lado igual ao raio deste círculo, pois $\pi \cong 3,14$. Vejamos a figura.

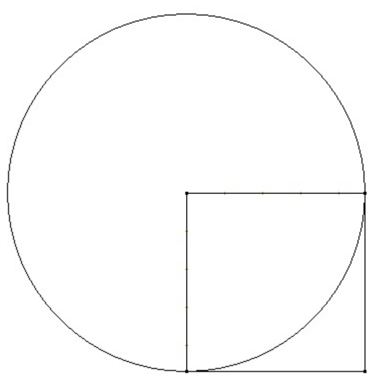

Figura 2.18: *Comparação da área do círculo com a área de um quadrado de lado igual ao raio.*

[1]Círculo é a região interior limitada pela circunferência.

Muitos problemas da Antiguidade, envolvendo construções com régua e compasso, ficaram sem solução por muitos anos, entre eles a quadratura do círculo que exige a construção, com régua e compasso, do lado de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo dado. Este problema é equivalente à construção, a partir de um segmento unitário, de um segmento de medida $\sqrt{\pi}$ ou, equivalentemente, de um segmento de medida π.

2.2 Áreas de Figuras Gerais

Até agora, calculamos algumas figuras complementares que serão úteis para o cálculo de áreas de figuras mais complexas através da decomposição e da soma de figuras constituintes. Em primeiro lugar, vamos estudar como se calcula a área de polígonos.

2.2.1 Linha poligonal

Definição 2.2.1 *Uma linha poligonal* $A_1A_2...A_n$ *é a união de segmentos* $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$. *Os pontos* $A_1A_2, ..., A_n$ *são denominados vértices da poligonal e os segmentos unindo vértices subseqüentes são denominados arestas da diagonal. Quando os pontos* A_1 *e* A_n *coincidem, dizemos que a linha poligonal é fechada. Se a linha poligonal é fechada e simples, isto é sem cruzamento entre os segmentos constituintes, então a denominaremos um polígono.*

2.2.2 Diagonal de um polígono

Definição 2.2.2 *Uma diagonal de um polígono é um segmento unindo dois vértices não subseqüentes, isto é que não seja aresta do polígono.*

Ao considerarmos as diagonais de um polígono que esteja em seu interior, podemos mostrar que é possível dividir a região interior de um polígono em triângulos. Este processo é chamado triangularização, um exemplo de triangularização pode ser visto na figura abaixo.

Muito embora pareça totalmente intuitivo este resultado e seja bastante direto encontrarmos uma triangularização para um polígono particular, uma prova geral e rigo-

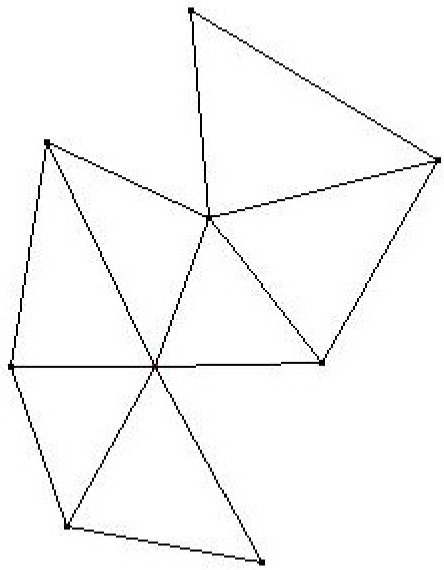

Figura 2.19: *Triangularização de um polígono.*

rosa para este fato pode ser trabalhosa e ultrapassar o objetivo deste nosso trabalho. Dito isto, vamos simplesmente aceitar este resultado. Assim, a área de um polígono qualquer pode ser obtida em geral construindo-se uma triangularização, a partir desta calcula-se a área de cada triângulo individual e por fim somam-se todas as áreas parciais.

Com respeito ao cálculo de figuras delimitadas por curvas quaisquer, devemos recorrer a um processo de limite. Dada uma figura Γ, delimitada por uma curva γ, podemos sempre traçar dois polígonos P_I e P_E, com qualquer numero de arestas e com a seguinte propriedade: O polígono interior a Γ . Por sua vez, o polígono P_E possui as arestas totalmente exteriores a Γ, a menos de eventuais pontos de tangência com a curva γ, um polígono deste tipo será denominado polígono exterior a Γ, veja a figura abaixo para um exemplo de um polígono interior e de um polígono exterior a uma figura.

Evitaremos os termos inscrito e circunscrito devido ao fato que um polígono inscrito deve ter todos os seus vértices sobre a curva e um polígono circunscrito deve ter todas as suas arestas tangentes à curva.

Como todos os polígonos interiores a uma figura Γ estão contidos em seu interior, temos que a área de qualquer um dos polígonos interiores é menor que a área de Γ. Por outro lado, a figura Γ está contida no interior de qualquer polígono exterior, portanto sua área será menor que a de qualquer um destes polígonos.

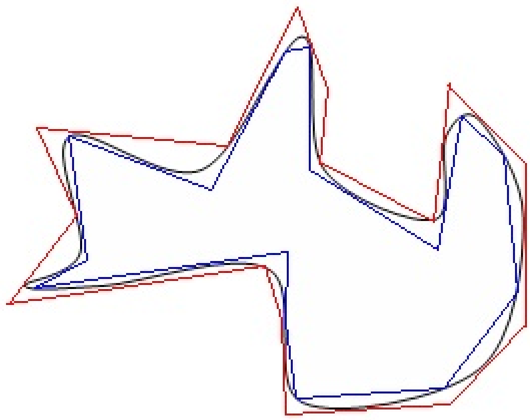

Figura 2.20: *Polígono interior e polígono exterior a uma figura.*

2.2.3 Polígono interior e exterior

Definição 2.2.3 *Dada uma figura* Γ*, um polígono* P_I *interior e um polígono* P_E *exterior a* Γ*, dizemos que a área de* P_I *é uma aproximação da área* Γ *por falta e a área* P_E *é uma aproximação da área de* Γ *por excesso.*

Ao aumentarmos o número de lados de um polígono interior ou exterior, fazemos que as aproximações por falta e por excesso fiquem cada vez mais próximas entre si. As curvas para as quais será possível a atribuição de um valor de área serão aquelas que possuam as seguintes propriedades: dado qualquer valor positivo, tão pequeno quanto se queira, existem uma aproximação por excesso e uma aproximação por falta de forma que a diferença entre estes dois valores seja menor que este valor fixado. A área da figura Γ pode então ser aproximada arbitrariamente por excesso ou por falta encontrando-se polígonos exteriores e interiores com um número cada vez maior de lados. Foi assim que Arquimedes de Siracusa conseguiu na antiguidade uma boa aproximação para o número π , aproximando a área de um círculo por polígonos inscritos e circunscritos ao mesmo. Também de Arquimedes é o cálculo da área de um segmento de parábolas, aproximando por polígonos inscritos e circunscritos formados a partir de triângulos.

Com a chegada do cálculo integral, muitas áreas de figuras curvilíneas puderam ser calculadas explicitamente. A aproximação por retângulos se mostra mais apropriada, uma vez que os pontos do plano são tomados por um sistema ortogonal de coordenadas.

2.3 Aplicações de Áreas

Agora, vamos ver o comportamento das áreas de figuras planas por semelhanças. Basicamente, temos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Esta propriedade nos auxilia grandemente na resolução de muitos problemas geométricos. Muitos teoremas clássicos da geometria plana podem ser demonstrados com o auxílio de áreas e de certa forma muito de sua complexidade pode ser elucidada ao apelarmos para o seu uso. Um exemplo que trataremos com detalhes é o teorema de Thales. Outro teorema comum no ensino médio que tem desdobramentos interessantes se for envolvido com áreas é o teorema de Pitágoras. Originalmente, o teorema de Pitágoras era um teorema relacionando áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Também apresentamos algumas demonstrações geométricas do teorema de Pitágoras.

2.3.1 Áreas e semelhanças

Caracterizamos uma congruência através de uma correspondência 1 a 1 entre duas figuras que preserva o comprimento. Da mesma forma, podemos caracterizar uma semelhança entre duas figuras, explicitando assim as propriedades desta aplicação.

Definição 2.3.1 *Duas figuras planas Γ_1 e Γ_2 são semelhantes com razão de semelhança k se existe uma aplicação bijetiva $\sigma : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ e um número $k > 0$ tal que para quaisquer pontos $X, Y \in \Gamma_1$, a medida do segmento $\overline{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$ seja igual a k vezes a medida do segmento $\overline{XY}$. Os pares de pontos $X \in \Gamma_1$ e $\sigma(X) \in \Gamma_2$ são denominados pontos homólogos.*

O termo aplicação bijetiva significa o mesmo que correspondência 1 a 1 (correspondência biunívoca). Basicamente, uma aplicação bijetiva é uma regra que se associa a cada elemento um único elemento de um outro conjunto de tal forma que todo elemento do segundo conjunto esteja relacionado com um único elemento do primeiro. A propriedade mais importante, e certamente a mais útil das aplicações bijetivas é que podemos definir uma inversa: se $f : A \to B$ é uma aplicação bijetiva, sua inversa é uma aplicação (também bijetiva) $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = Id_A$ e $f \circ f^{-1} = Id_B$.

Observamos que se a razão de semelhança é igual a 1, temos então uma congruência, assim, muitos resultados que serão mostrados pelas figuras semelhantes são automaticamente satisfeitos para figuras congruentes.

Proposição 2.3.1 *(Semelhança de figuras)*

1. *Uma figura é sempre semelhante a si mesma.*

2. *Se uma figura Γ_1 é semelhante a uma figura Γ_2, então a figura Γ_2 é semelhante à figura Γ_1.*

3. *Se uma figura Γ_1 é semelhante a uma figura Γ_2, que por sua vez é semelhante a Γ_3, então Γ_1 é semelhante a Γ_2.*

Demonstração:

1. Seja uma figura Γ e tome uma aplicação identidade $Id : \Gamma \rightarrow \Sigma(Id(X = X))$. É fácil ver que a identidade é bijetiva e preserva os comprimentos, logo a razão de semelhança é igual a 1.

2. Seja $\Gamma : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ uma semelhança de razão k. Considere a inversa $\sigma^{-1} : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$. Tome dois pontos tais que X' e Y' em Γ_2, como σ é bijetiva, existem únicos pontos $X, Y \in \Gamma_1$ tais que $X' = \sigma(X)$ e $Y' = \sigma(Y)$, assim o segmento $\overline{\sigma^{-1}(X')\sigma^{-1}(Y')}$ é igual ao segmento $\overline{XY}$. Como a semelhança σ é de razão k, temos que $X'Y' = k \cdot XY$ e, portanto $XY = \dfrac{1}{k} \cdot X'Y'$. Logo a aplicação σ^{-1} é uma semelhança de razão $\dfrac{1}{k}$.

3. Sejam as semelhanças $\sigma : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ de razão k e $\rho : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3$ de razão ℓ. É fácil ver que a composta $\rho \circ \sigma : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_3$ é uma bijeção. Tome um par de pontos $X, Y \in \Gamma_1$ e sejam $X' = \sigma(X), Y' = \sigma(Y), X'' = \rho(X')$ e $Y'' = \rho(Y')$. Temos que $X'Y' = k \cdot XY$ e $X''Y'' = \ell \cdot X'Y'$. Portanto $X''Y'' = k \cdot \ell \cdot XY$, o que nos leva a concluir que a composta $\rho \circ \sigma$ é uma semelhança de razão $k \cdot \ell$. $\square$

Esta proposição nos diz que a relação de semelhança entre figuras tem a propriedade **reflexiva** (toda figura é semelhante a si mesma), **simétrica** (se A é semelhante a B, então B é semelhante a A) e **transitiva** (se a é semelhante a B e B é semelhante a C, então a é semelhante a C). Qualquer relação entre objetos de um determinado conjunto que seja reflexiva, simétrica e transitiva é denominada uma relação de equivalência.

Proposição 2.3.2 *Uma semelhança associa pontos colineares a pontos colineares.*

Demonstração:

Seja $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ uma semelhança de razão k. Tome três pontos $X, Y, Z \in \Gamma_1$ colineares e sejam $X^{'} = \rho(Y^{'}) = \rho(Y)$ e $Z^{'} = \rho(Z)$. Como X, Y e Z são colineares, suponha, sem perda de generalidade que Y está entre X e Z, então $XZ = XY + YZ$. Por outro lado $X^{'}Y^{'} + Y^{'}Z^{'} = k \cdot XY + k \cdot YZ = k \cdot (XY + YZ) = k \cdot XZ = X^{'}Z^{'}$. Assim, concluímos que $X^{'}, Y^{'} e Z^{'}$ são colineares.

Proposição 2.3.3 *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.*

Demonstração:

Sejam dois triângulos semelhantes ΔABC, e ΔSYZ, e seja a razão de semelhança igual a k. tome como base respectivamente os segmentos, assim $XY = k \cdot AB$. De acordo com os resultados enunciados anteriormente, a altura relativa a $\overline{XY}$ é igual a k vezes a altura relativa a $\overline{AB}$. Assim: $A = (\Delta XYZ) = \frac{1}{2} \cdot XY \cdot h_{XY} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot AB \cdot k \cdot h_{AB} = K^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_{AB}\right) = k^2 \cdot A\left(\Delta ABC\right)$

Proposição 2.3.4 *A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os mesmos.*

Demonstração:

Sejam dois polígonos semelhantes Γ_1 e Γ_2 cuja razão de semelhança é igual a k. Como vimos, uma semelhança associa vértices do primeiro polígono a vértice do segundo e esta associação é 1 a 1. Assim os dois polígonos semelhantes possuem o mesmo número de vértices. Considere uma triangulação de Γ_1 composta pelos triângulos $T_1, T_2, ..., T_n$, então é fácil ver que a esta triangulação está associada uma triangulação em Γ_2 com o mesmo número de triângulos e todos semelhantes aos triângulos do primeiro polígono, denominemos estes triângulos por $T_1^{'}, T_2^{'}, ..., T_n^{'}$. Assim, temos: $A\left(\Gamma_2\right) = A\left(T_1^{'}\right) + A\left(T_2^{'}\right) + ... + A\left(T_n^{'}\right) = k^2 \cdot A\left(T_1\right) + k^2 \cdot A\left(T_2\right) + ... + k_2 \cdot A\left(T_n\right) = k^2 \cdot A\left(\Gamma_1\right)$

Teorema 2.3.1 *(Razão de semelhança entre áreas) A razão de semelhança entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre as mesmas.*

Demonstração:

Sejam Γ_1 e Γ_2 duas figuras semelhantes de razão k. Como uma semelhança leva pontos interiores em pontos interiores, e consequentemente, pontos exteriores em pontos exteriores, então qualquer polígono P interior a Γ_1 será associado a um polígono $P^{'}$ no interior de Γ_2. Como $A(P) < A(\Gamma_1) < A(Q)$, teremos que $k^2 \cdot A(P) < A(\Gamma_2) < k^2 \cdot A(Q)$ para quaisquer polígonos P interior e Q exterior a Γ_1.

Suponha agora que $A\left(\Gamma_2\right) < k^2 \cdot A\left(\Gamma_1\right)$, então $\frac{1}{k^2} \cdot A\left(\Gamma_2\right) < A\left(\Gamma_1\right)$ e portanto haverá uma aproximação por falta na área de Γ_1, dada por um polígono P interno a Γ_1, de forma que $\frac{1}{k^2} \cdot A\left(\Gamma_2\right) < A(P) < A\left(\Gamma_1\right)$.

Logo $A\left(\Gamma_2\right) < k^2 \cdot A\left(P\right)$, o que contradiz nossa afirmação anterior. Da mesma forma, não podemos ter $A\left(\Gamma_2\right) > k^2 \cdot A\left(\Gamma_1\right)$ portanto temos $A\left(\Gamma_2\right) = k^2 \cdot A\left(\Gamma_1\right)$.

Capítulo 3

A Desigualdade Isoperimétrica

Em geometria, tanto a geometria euclidiana quanto em geometria Riemanniana, é chamada desigualdade isoperimétrica qualquer desigualdade (comprimento, área, volume) de uma família de áreas ou volume de suas respectivas fronteiras.

O problema era conhecido pelos gregos, que já tinham conhecimento da solução. Porém, passou-se muito tempo para se encontrar uma prova que satisfizesse uma solução do problema isoperimétrico. Uma curva fechada de comprimento ℓ tem área menor ou igual a $\dfrac{\ell^2}{4\pi}$. A igualdade ocorre somente quando a curva é um círculo de raio $\dfrac{\ell}{2\pi}$.

De acordo com Manfredo (p-38, 2012) a desigualdade isoperimétrica *é o mais antigo teorema global em geometria diferencial.*

A desigualdade isoperimétrica está relacionada com o seguinte problema: *"Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento fixo ℓ, qual delas limita a maior área?"*

3.1 Sobre Papus e a Desigualdade Isoperimétrica

Papus de Alexandria (290-350 d.C.) compôs uma obra com o título coleção (synagoge). Este é o mais importante tratado de Papus que continha oito livros fornecendo um registro histórico valioso da matemática grega. Em seu livro V da coleção Papus mostra que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem o maior número de lados tem a maior área, concluindo que as abelhas provaram algum entendimento matémático ao construir células como prismas hexagonais em vez de quadrados ou triângulares.

As abelhas, então, "sabem"exatamente este fato que é útil para elas, que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo e vai armazenar mais mel com o mesmo gasto de material na construção de cada um dos favos. Mas vamos investigar um problema um pouco mais, ou seja, que, de todas as figuras planas equiláteras e equiangular com o mesmo perímetro, o que tem o maior número de ângulos é sempre maior, e o maior de todos é o círculo com o seu perímetro igual aos demais.

Em certo sentido, é interessante que o círculo seja a solução. O círculo é perfeito e, portanto, é um bom candidato para satisfazer o Teorema isoperimétrico. Polígonos são menos suave do que um círculo, menos perfeito que se pode dizer. Ainda em cada família de polígonos há aquele em que a sua área é maior do que a área dos demais como enunciamos a seguir:

- Entre todos os triângulos com o mesmo perímetro, o equilátero tem a maior área.
- Entre todos os quadriláteros com o mesmo perímetro, o quadrado tem a maior área.
- Em particular , entre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado tem a maior área. Este último fato é equivalente a $\sqrt{ab} \leq \dfrac{(a+b)}{2}$, de um caso particular da desigualdade entre a média geométrica e aritmética.
- Entre um número finito de polígonos regulares com o mesmo perímetro, aquele com o maior número de lados tem a maior área.
- Entre todos os n-ágonos (n fixo) com o mesmo perímetro, o regular tem a maior área. (Isto é conhecido como Teorema de Zenodoro).

Cada uma das afirmações acima tem um equivalente, onde a área é dada. De todas as curvas de comprimento fixo com extremidades fixas, um arco circular tem área máxima. De todos os polígonos com n lados inscrito em um círculo, o regular tem a maior área.

Zenodoro examinou problemas de isoperimetria, em sua obra "sobre figuras isoperimétricas", escrita a quase 200 anos antes de Cristo. Entre as proposições no tratado de Zenodoro havia uma afirmando que todas as figuras sólidas de igual superfície a esfera tem volume máximo, dando uma prova incompleta.

3.1.1 Sobre os sólidos retos e a pavimentação do plano

Entre os sólidos retos com mesma área lateral, o cilindro é o que representa maior volume.

Mas, quando empilhamos alguns cilindros, percebemos que eles deixam alguns espaços vazios, ao contrário do que pode ser feito com os prismas triangulares (tendo como base o triângulo equilátero), quadrangulares (base quadrada) ou hexagonais (tendo como base um hexágono regular). Por isso dizemos que esses três são os únicos polígonos que pavimentam o plano. os ângulos dos seus vértices somam 360^0.

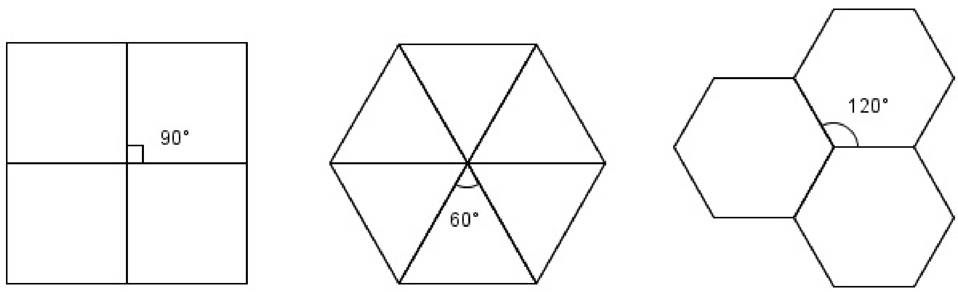

Figura 3.1: *Figuras que pavimentam o plano*

E por isso quando juntamos, não há espaços sobrando nem sobreposição. Esses prismas hexagonais lembram as abelhas, que armazenam o mel em estruturas parecidas com prismas hexagonais produzidas com cera. Essa forma é ideal para as colméias porque além de armazenar uma quantidade maior de mel, permite uma pavimentação perfeita e representa uma economia de cera para as abelhas.

3.2 Teorema da Desigualdade Isoperimétrica

O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica ou Teorema Isoperimétrico tem sido conhecido desde a antiguidade. O Teorema também tem uma história fascinante. A contribuição mais importante para a sua prova rigorosa foi dada em 1841 e é devido a

Jacob Steiner (1796-1863). Na época, estava no centro de uma controvérsia entre adeptos de analítica (ou seja, usando Cálculo) e métodos sintéticos (geometria pura). Apesar de aceitar a validade dos métodos analíticos, Steiner teria utilizado abordagem sintética. Sua prova continha uma falha que depois foi corrigido pela abordagem analítica. Para entender melhor a natureza da discussão, vamos primeiro formular duas declarações equivalentes.

Teorema 3.2.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

A. Entre todas as figuras planas com o mesmo perímetro, o círculo tem a maior área.

B. Entre todas as figuras planas, com a mesma área, o círculo tem o menor perímetro.

Demonstração

Suponha que a *afirmação A* seja falsa. Então para cada círculo $\mathcal{C}$ de perímetro $\mathcal{P}$, existe uma figura Γ com o mesmo perímetro com área menor ou igual que a área de $\mathcal{C}$. No caso em que as áreas são iguais, pela *afirmação B*, temos que o perímetro de $\mathcal{C}$ é menor do que o perímetro de Γ, o que contradiz a *afirmação A*. Portanto $A \Rightarrow B$.

Por outro lado, se a *afirmação B* é falsa, então para cada círculo $\mathcal{C}$ de área $\mathcal{A}$, existe uma figura Γ com mesma área e perímetro maior ou igual que o perímetro de $\mathcal{C}$. No caso em que os perímetros são iguais, pela *afirmação A*, temos que a área de $\mathcal{C}$ é maior que a área de Γ, o que contradiz a *afirmação B*. Logo $B \Rightarrow A$. Então $A \Leftrightarrow B$.

Vamos observar que a figura que resolve a *afirmação A* (esperamos que seja um círculo) deve ser convexo. Mas, vamos assumir que não é (veja a figura 3.2). Isso implica a existência de dois pontos na figura de tal modo que o segmento de ligação não se encontram dentro da nossa própria figura.

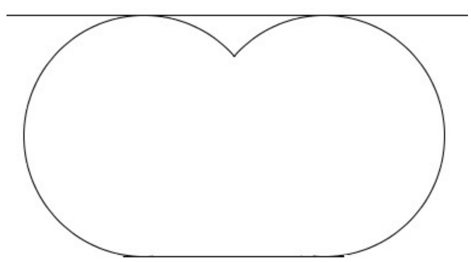

Figura 3.2: *Figura não convexa*

.

Em seguida, refletindo uma região entre o segmento e o limite da figura (veja a figura 3.3).

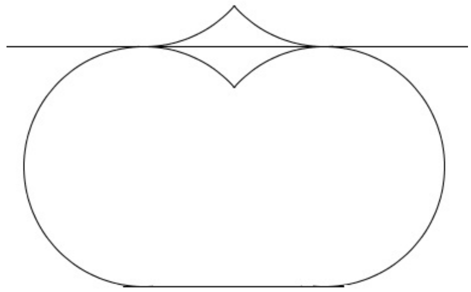

Figura 3.3: *Reflexão da parte não convexa*

Seria possível aumentar a sua área, sem modificar o seu perímetro.

3.2.1 Uma Demonstração do Teorema da Desigualdade Isoperimétrica

Vamos apresentar uma demonstração mais avançada, (feita por A. Hurwitz, 1902) encontrada em [1].

A desigualdade isoperimétrica diz que, dentre todas as curvas planas com um perímetro fixo, a circunferência engloba a maior área. A demonstração que vamos apresentar (de A. Hurwitz, 1902) faz uso essencial da teoria das séries de Fourrier.

Lema 3.2.1 *(Wintinger) Seja f uma função de classe C^1, periódica de período 2π e tal que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Então:*

$$\int_0^{2\pi} f'(t)dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

e a igualdade vale se, e somente se, existirem a e b tais que $f(t) = a \cdot cos(t) + b \cdot sen(t)$

Demonstração

Seja

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nt) + b_n sen(nt))$$

a expansão de f em série de Fourrier. Como $f'(t)$ é contínua, sua expansão obtém-se da de f(t) por derivação termo a termo, sendo assim

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n cos(nt) - na_n sen(nt))$$

. Uma vez que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \pi a_0$, nossa hipótese traduz-se em que $a_0 = 0$. Usando a fórmula de Perseval, temos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f'(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

Daqui vem

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0$$

e a igualdade somente se dá se $a_n = b_n = 0$ para qualquer $n > 1$. Já que as funções contínuas ficam determinadas por sua expansão de Fourrier, isto equivale a que seja $f(t) = a_1 cos(t) + b_1 sen(t)$. $\square$

Teorema 3.2.2 *(Desigualdade Isoperimétrica) Seja α uma curva fechada simples regular, de perímetro L, e que limita uma região Ω de área $\mathcal{A}$. Então:*

$$\mathcal{A} \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

e somente há igualdade quando α é uma circunferência.

Demonstração

Podemos reescalonar a figura usando a homotetia, de modo que não há perda de generalidade em supor que $L = 2\pi$, sendo assim$\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in [0.2\pi]$ com uma translação, que podemos fazer com que seja $\int_0^{2\pi} x(s) = 0$. Além disso, supomos que $\alpha(s)$ percorra a fronteira de Ω no sentido positivo. Aplicando o teorema de Green $\left(\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx \right)$ ao campo $(P, Q) = (0, x)$, obtemos $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} xy'ds$, e por outro lado

$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) ds.$
Podemos então escrever
$2(\pi - \mathcal{A}) = \int_0^{2\pi} \left(x'^2 + y'^2\right) ds + \int_0^{2\pi} (x - y')^2 ds$
A segunda integral desta soma é não-negativa e, pelo lema de Wirtinger, a primeira também. Concluimos assim, como queríamos, que $\mathcal{A} = \pi$. Para que haja igualdade ambas as integrais tem que ser zero, pelo que $y'(s) = x(s)$ e $x(s) = acos(s) + bsen(s)$. Tem-se assim

$$x(s) = acos(s) + bsen(s)$$

,

$$y(s) = asen(s) - bcos(s) + c,$$

e α é então a circunferência unitária com centro em $(0, c)$.

3.3 Propriedade isoperimétrica de triângulo equilátero

De acordo com o Teorema isoperimétrico, o círculo tem a área máxima entre todos os formatos com um determinado perímetro. O círculo é provavelmente o mais regular de todas as formas planas. A regularidade também desempenha um papel importante nas famílias restritas de figuras planas. Por exemplo:

Exemplo 3.3.1 *Dentre os triângulos que possuem o mesmo perímetro, qual é o de maior área?*

Classificamos os triângulos de acordo com as medidas de seus lados.

- Equilátero: possui os lados congruentes.
- Isósceles: possui dois lados com mesma medida.
- Escaleno: possui os lados com medidas diferentes.

Definição 3.3.1 *(Elipse) Lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos (chamados focos) desse plano têm soma constante; pode ser obtida com a* *interseção de um cone circular reto com um plano que faz com o eixo do cone um ângulo maior que o do vértice.*

Sejam x, y e z as medidas dos lados de um triângulo qualquer. E seja o perímetro $2p = x + y + z$.

Façamos x constante e, portanto $y + z = 2p - x = k$, $k \in \mathbb{R}^+$. Logo y, z são as medidas dos raios de uma elipse de distância focal[1] x, pois sua soma é constante. Observe a figura abaixo:

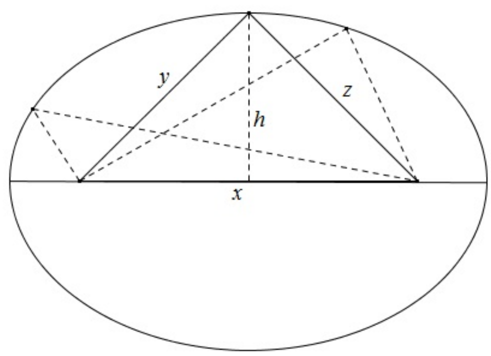

Figura 3.4: *Elipse*

Portanto, como a base x é constante, a área $\mathcal{A}$ será máxima quando a altura for a maior possível, ou seja, metade do eixo menor da elipse e o triângulo será isósceles, logo $y = z$. Colocando a altura h, temos:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$h^2 = y^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Como o triângulo agora é isósceles, temos que $y = z$. Então

$$2y = 2p - x \Rightarrow y = p - \frac{x}{2}$$

[1]Distância focal corresponde a distância entre os focos

e

$$h = \sqrt{\left(p - \frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{p^2 - px + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow h = \sqrt{p^2 - px}$$

A área em função de x é dada por

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x \cdot \sqrt{p^2 - px}}{2}$$

Vamos fazer uso do cálculo diferencial para encontrar o valor máximo da função.

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x \cdot \sqrt{p^2 - px}}{2}$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{p^2 - px}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - px}\left(\frac{d}{dx}(x)\right) + x\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{p^2 - px}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{p^2 - px}\right)\right) + 1 \cdot \sqrt{p^2 - px}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2 - px} - \frac{px\left(\frac{d}{dx}(x)\right)}{2\sqrt{p^2 - px}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2 - px} - \frac{1px}{\sqrt{2p^2 - px}}\right)$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1px}{2\sqrt{p^2 - px}} + \sqrt{p^2 - px}\right)$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{p\,(2p - 3px)}{4\sqrt{p(p - px)}} = 0$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(2p^2 - 3x)}{4\sqrt{p(p - px)}} = 0$$

$$x = \frac{2p^2}{3p} \Rightarrow x = \frac{2p}{3}$$

Logo o triângulo é equilátero.

Proposição 3.3.1 *Entre todos os triângulos de um mesmo perímetro L, o equilátero tem a maior área.*

Demonstração

A prova tem como base a fórmula de Heron. Se o triângulo for equilátero, temos $a = b = c = \dfrac{L}{3}$,
o semiperímetro $p = \dfrac{L}{2}$,
$p - a = \dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{3} = \dfrac{L}{6}$ e sua área pela fórmula de Heron é
$\mathcal{A} = \sqrt{\dfrac{L}{2} \cdot \dfrac{L}{6} \cdot \dfrac{L}{6} \cdot \dfrac{L}{6}} = \sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{L}{6}\right)^2$. No caso geral, temos:

$$\frac{\mathcal{A}^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\mathcal{A}^2 \leq \frac{p^4}{3^3} = \frac{L^4}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{3L^4}{2^4 3^4}$$

$$\mathcal{A} \leq \sqrt{3}\left(\frac{L}{6}\right)^2 \square$$

Portanto, em todos os demais casos a área de um triângulo qualquer é menor ou igual a área do triângulo equilátero.

3.4 Área máxima de um triângulo inscrito numa circuferência

Um caso particular do Teorema isoperimétrico diz que, entre todos os triângulos com o mesmo perímetro, o equilátero tem a maior área. Um teorema relacionado sobre os triângulos inscritos em um determinado círculo também é verdadeiro:

Teorema 3.4.1 *Entre todos os triângulos inscritos num determinado círculo, o equilátero tem a maior área.*

A prova depende do seguinte Lema:

Lema 3.4.1 *Entre todos os triângulos inscritos num determinado círculo, com uma dada base o isósceles tem a maior área.*

A afirmação do lema é bastante óbvio. Observe a figura abaixo:

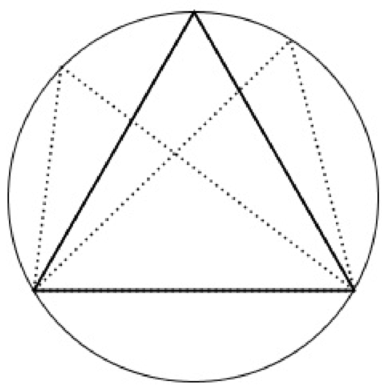

Figura 3.5: *Triângulo inscrito na circunferência*

Entre todos os triângulos inscritos com uma dada circunferência com base fixa, o que tem a maior altura é isósceles e, portanto, tem a maior área, devido ao padrão de fórmula $\mathcal{A} = b \cdot \frac{h}{2}$, onde $\mathcal{A}$, b, e h são respectivamente a área, a base e a altura de um triângulo. O lema mostra que, para um triângulo que dados dois lados desiguais, existe um outro triângulo (isósceles) circunscrito na mesma circunferência, mas de maior área. O único triângulo para que nenhum aumento de área é possível é o equilátero. O lema também mostra que, a fim de provar a afirmação só precisamos olhar entre os triângulos isósceles. Considere a figura abaixo:

3.5 Desigualdade isoperimétrica de retângulos

Um outro caso particular do Teorema Isoperimétrico diz que entre todos os retângulos de um determinado perímetro, o quadrado tem a maior área. Isto é, naturalmente, equivalente à afirmação de que entre todos os retângulos de uma determinada área o quadrado tem o menor perímetro.

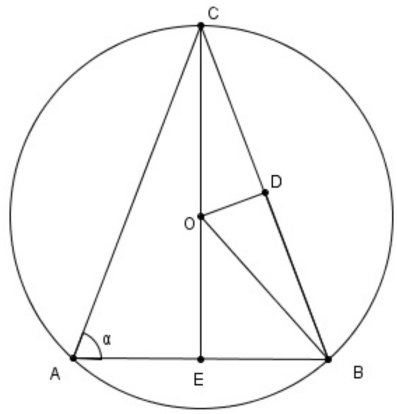

Figura 3.6: *Triângulo inscrito na circunferência*

Proposição 3.5.1 *Dentre os retângulos de área dada $\mathcal{A}$, determinar o que tem menor perímetro.*

Demonstração

Se a e b são as dimensões do retângulo, temos $\mathcal{A} = ab$. Então o perímetro é $2p = 2a + 2b = 2a + 2 \cdot \dfrac{\mathcal{A}}{a}$, e vamos determinar o valor de a para que o perímetro seja mínimo.

Podemos escrever $p = a + \dfrac{\mathcal{A}}{a}$ e resolver a equação $a^2 - pa + \mathcal{A} = 0$ em a, que tem solução se $p^2 - 4\mathcal{A} \geq 0$ ou se $p \leq -2A$ ou $y \geq 2\mathcal{A}$. considerando que $p > 0$, temos que a imagem de P é $[2\sqrt{\mathcal{A}}, +\infty)$. Assim sendo, $\sqrt{\mathcal{A}}$ é o menor valor de p.

Para determinar o retângulo de menor perímetro, resolvemos a equação

$$2\sqrt{\mathcal{A}} = a + \frac{A}{a}$$

$$a^2 - 2a\sqrt{\mathcal{A}} + \mathcal{A} = 0$$

$$\left(a - \sqrt{\mathcal{A}}\right)^2 = 0$$

O que resulta $a = \sqrt{\mathcal{A}}$ e o retângulo deve ser um quadrado.

Este caso particular do teorema geral é tão simples que pode ser adequado para alunos do Ensino Fundamental. Por exemplo:

Exemplo 3.5.1 *Se você tem 2p metros de cerca que vai usar para fazer um jardim. Seu jardim pode ser uma forma quadrada ou retangular. Você quer escolher a forma que lhe dará uma maior área de plantio. Que forma o jardim terá uma área maior?*

Seja p é o semiperímetro fixo da forma (quadrado ou retângulo), seja a o lado do quadrado de mesmo perímetro que o retângulo de lados adjacentes medindo u e v, de modo que $p = u + v = 2a$

Se um lado do retângulo ultrapassa o lado do quadrado por um comprimento x, então o outro lado v é menor do que a pela mesma quantidade x. Então

$$u = a + x$$

e

$$v = a - x$$

A área de um retângulo de lados u e v é igual a $u \cdot v$, no nosso caso

$$u \cdot v = (a + x) \cdot (a - x) = a^2 - x^2$$

Com efeito, se a área do quadrado é *1 u.a.*, o semiperímetro é $p = 2$ enquanto $1 - x^2$ é a área de um retângulo com mesmo perímetro em que um dos lados é maior do que o lado do quadrado por uma quantidade x e o outro é menor na mesma quantidade. Como $x \geq 0$, $1^2 - x^2 \leq 1u.a.$, com a igualdade somente quando $x = 0$, ou seja, quando o retângulo torna-se um quadrado.

Sejam o quadrado $ABCD$ e o retângulos $EFGH$ com mesmo perímetro

Sobrepondo o retângulo no quadrado

A área do quadrado $ABCD$ é igual à soma das áreas $AFID$ e $FBCI$, e a área do retângulo $EFGH$ é a soma das áreas $AFID$ e $DIGH$. A área de $AFID$ sendo comum a ambos, é evidente que a área do quadrado é maior que a área do retângulo se e apenas se a área de $FBCI$ excede a área de $DIGH$. Mas isso é bastante simples. A área de um retângulo é o produto dos comprimentos dos dois lados adjacentes. Se a for o lado do

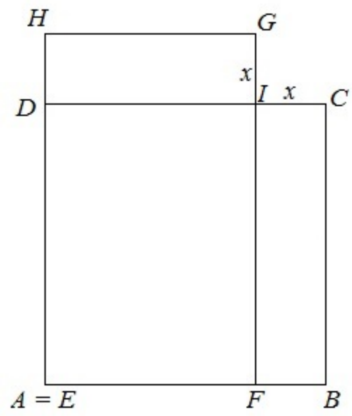

Figura 3.7: *Área do quadrado e do retângulo com mesmo perímetro*

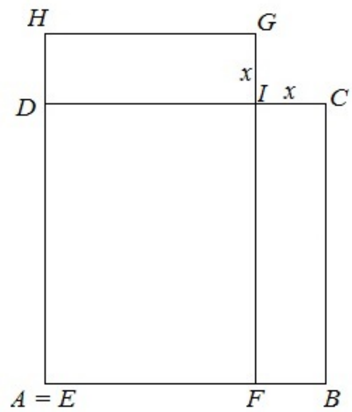

Figura 3.8: *Comparando as áreas do quadrado e do retângulo com mesmo perímetro*

quadrado, então a área de $FBCI$ é igual a $x \cdot a$ e a área da região $DIGH$é igual a $x \cdot (a-x)$. E, uma vez que a área $FBCI$ excede x^2 para $x > 0$, fica provado que o quadrado tem área maior do que o retângulo com mesmo perímetro.

3.6 Desigualdade isoperimétrica de polígonos regulares

Vimos no Cap. 2 o cálculo de áreas de figuras simples, entre elas os polígonos regulares e demonstramos que $\mathcal{A} = p \cdot m$

$$\text{Mas, } tg(\alpha) = \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)}{m} \text{ e como } \alpha = \frac{\pi}{n} \text{ e } \ell = \frac{2p}{n},$$

daí:

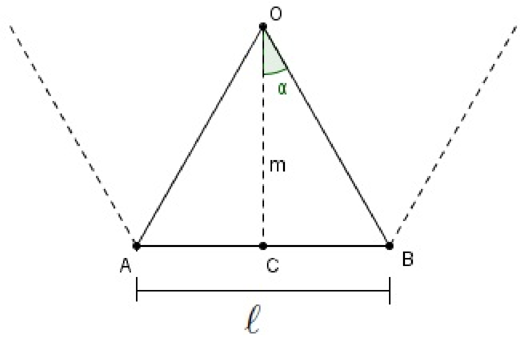

Figura 3.9: *Área do polígono regular*

$$m = \frac{\frac{2p}{2n}}{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)} \Rightarrow m = \frac{p}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Assim, temos que: $\mathcal{A} = p \cdot \dfrac{p}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

$$\text{Logo } \mathcal{A} = \frac{p^2}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Calculando o limite quando n tende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$

$\pi \cdot 1 = \pi$.

Logo $\mathcal{A} \leq \dfrac{p^2}{\pi}$ pois, a área $\mathcal{A}$ de um polígono regular de n lados é uma função de n, atingindo um limite quando este se degenera num círculo de raio $r = \dfrac{p}{\pi}$.

Exemplo 3.6.1 *Vamos considerar alguns polígonos regulares com perímetro fixo* $2p = 12$. *Quando aumentamos o número de lados, a área aumenta e se degenera num círculo sendo este o que tem a maior área.*

A construção acima foi feita usando um software educativo. Observe os pontos do gráfico que representa a sequência de polígonos regulares.

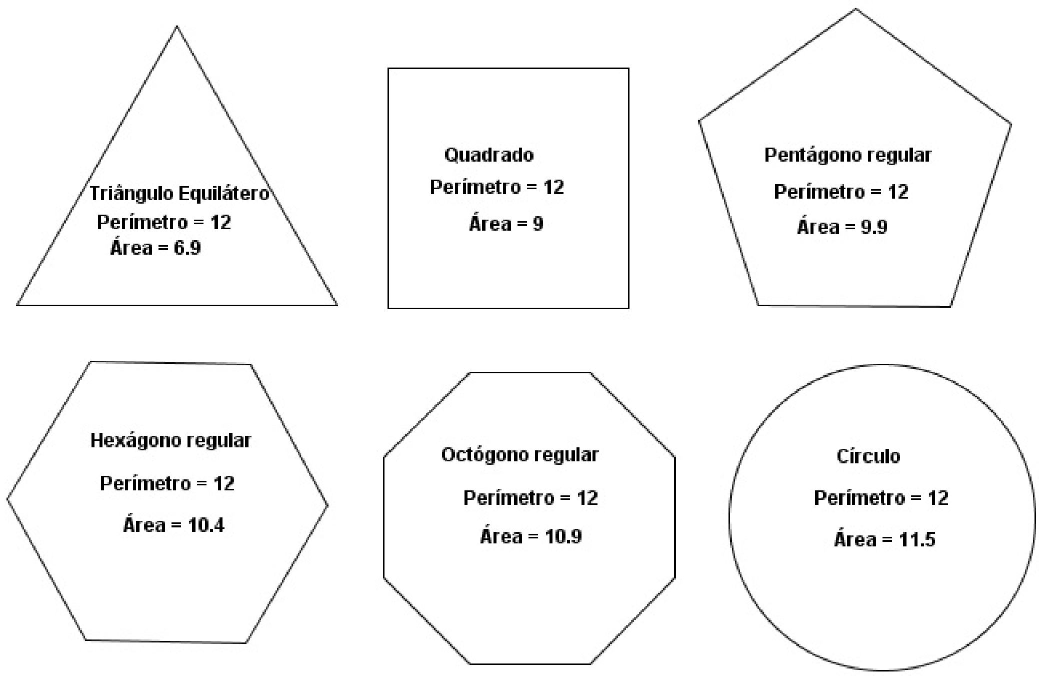

Figura 3.10: *Área de polígonos regulares com perímetro fixo*

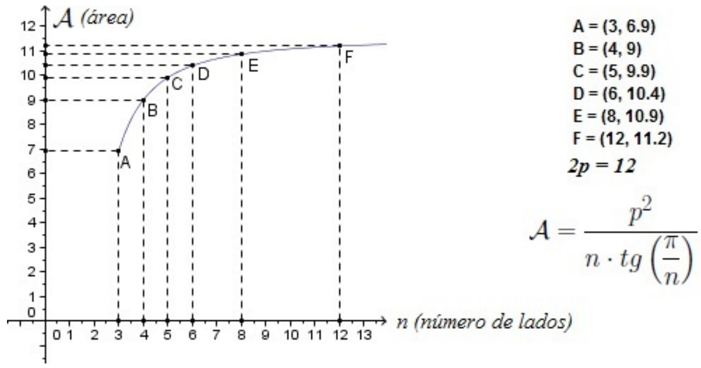

Figura 3.11: *Área x Número de lados de um polígono regular de perímetro*

Capítulo 4

Uma Proposta Metodológica

Segundo os PCN's, "... é preciso, que o aluno perceba a matemática como um sistema de códigos e regras que a torna uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de código, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos..." (Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - Ensino Médio, 1999).

Por isso, devemos nos preocupar com as etapas de construção do conhecimento pelas quais os alunos passam por estratégias utilizadas para entender determinados conceitos.

Apresentamos a seguir uma proposta metodológica que auxiliará o professor quando estiver aplicando os conteúdos de áreas de figuras geométricas planas com todos os detalhes necessários para o desenvolvimento de uma boa aula e provavelmente uma boa aprendizagem por parte dos alunos.

4.1 Identificação da Proposta

Conceituando e definindo áreas de figuras geométricas planas.

1. **Conteúdo da proposta**
   Áreas e perímetro de figuras planas

2. **Número de aulas**

   Esta proposta é prevista para uma duração de 10 horas-aula.

3. **Público alvo:**

   Alunos do Ensino Fundamental e Médio

4. **Justificativa:**

   Ao conceituar o conteúdo de áreas de figuras geométricas planas, devemos dar a idéia do que elas representam. É com esta intenção que elaboramos esta proposta metodológica a fim de que as construções sejam feitas pelos próprios alunos em sala de aula, o qual deverá fazer as suas próprias descobertas a partir das construções com lápis, régua, papel ou cartolina, etc.

5. **Objetivos:**

   Levar o aluno a desenvolver a capacidade de:

   - Conceituar áreas e determinar a área de uma região com unidades não-padronizadas;
   - Conhecer as unidades padronizadas e aplicá-las convenientemente, em situações cotidianas e em diferentes áreas do conhecimento;
   - Perceber a conservação de área na composição e decomposição de figuras;
   - Fazer estimativa de áreas, refletindo sobre a sua utilização no cotidiano;
   - Deduzir e aplicar as fórmulas de área das figuras geométricas;
   - Aplicar os conhecimentos de áreas adquiridos em situações práticas e teóricas;

6. **Metodologia:**

   Estas aulas serão compostas de listas de situações didáticas que serão discutidas no transcorrer das 10 horas-aula teórico-práticas na qual envolvem, paralelamente, a manipulação de objetos no sentido de desenvolver os conceitos básicos do conteúdo de áreas de figuras geométricas planas baseada no conceito didático deste conteúdo.

7. **Metodologia do Professor:**

   - Desafiar os alunos a fazerem construções descritas a partir de instruções;
   - Construção das figuras na lousa;

- Aulas de caráter avaliativo considerando a participação e a presença do aluno;
- Aprofundar temas já abordados em séries anteriores;
- Realizar na última aula uma avaliação das atividades desenvolvidas com base no conteúdo.

8. **Metodologia do Aluno:**

   - Desenvolver todas as atividades em duplas;
   - Desenhar numa folha as figuras que o professor desenha na lousa;
   - Usar as técnicas de dobradura para a obtenção do quebra-cabeça geométrico;
   - Desenvolver as atenções nas aulas e procurar progredir;
   - Dar a idéia de área através das construções feitas.

9. **Material necessário:**

   - Mesa para a colocação dos materiais;
   - Marcador para quadro ou giz, conforme a existência de quadro de fórmica ou negro;
   - Reprodução de material em fotocópiadora para os participantes;
   - Materiais como canudos e palitos para as construções geométricas;
   - Papel milimetrado ou com malha centimetrada;
   - Cartolina, papel A4 em cores diversas e livro didático.

4.2 Atividades para desenvolver em sala de aula

Desenvolvimento de atividades com quebracabeças para que os alunos entendam a composição e decomposição de figuras planas.

4.2.1 Como medir áreas

Material Necessário

Quadrados, retângulos, trapézios, hexágonos e losangos de papel colorido; coleção de quadrados, círculos e retângulos de papel; tangram recortado; geoplano de madeira ou papel.

1^a etapa

Pergunte aos alunos o que significam expressões como: "A área do terreno da minha casa é maior do que a da sua", "A área da quadra de futebol de salão é de 300 m^2" e "Como saber quantas lajotas ou peças de piso são necessárias para se cobrir o chão de uma sala de aula?". Os alunos podem dizer que a área é o espaço que ocupa a casa ou a quadra. Prepare um painel com as informações recolhidas e deixe-o exposto na sala. À medida que as atividades avançarem, acrescente as outras informações.

2^a etapa

Distribua quadrados e retângulos de papel colorido para cada um dos alunos e explique que esses objetos servirão como unidade de medida de algumas superfícies. Forme grupos com quatro ou cinco estudantes e proponha que eles cubram uma folha de papel sulfite com as diferentes formas. Cada grupo deve mostrar como procedeu para medir a superfície do papel. Em seguida, dê algumas formas reduzidas planas (retângulos, triângulos, trapézios, hexágonos) e uma coleção de quadrados, círculos e retângulos de papel maiores. Peça que recubram cada forma maior com as peças de papel. Registre os resultados e discuta-os: "Que forma recobre melhor o objeto? Por quê?".

3^a etapa

Diga que construam uma série de formas (que tenham áreas variadas) usando papel quadriculado. Peça que os alunos as ordenem a maior área para a menor. Depois, peça que contem os quadrados que existem em cada forma.

Avaliação

Apresente figuras de formas diversas, mas com pouca diferença em suas áreas. Os alunos devem ordená-las da menor para a maior e justificar.

4.2.2 Quebra-cabeça usando papel A4

O professor deve distribuir aos alunos folhas de papel em branco e, depois, dar as seguintes instruções.

- Dobre uma folha de papel A4 na diagonal e corte-a seguindo a dobra.

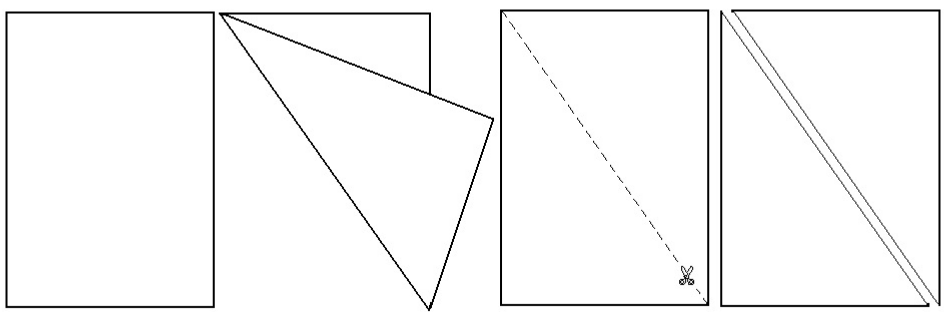

Figura 4.1: *Quebra-cabeça com papel A4*

Teremos então dois pedaços de papel, iguais e triangulares: eles serão as duas peças do quebra-cabeça. Juntando as duas peças, forme estas figuras:

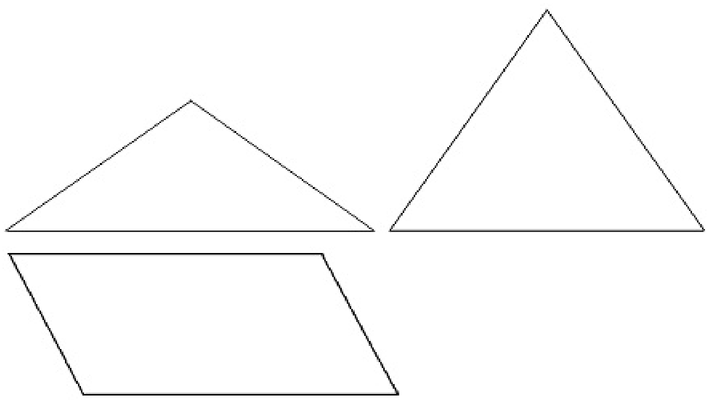

Figura 4.2: *Figuras com papel A4*

Depois, registre a montagem fazendo um desenho.

Agora, pegue outra folha e faça duas dobras seguidas, assim:

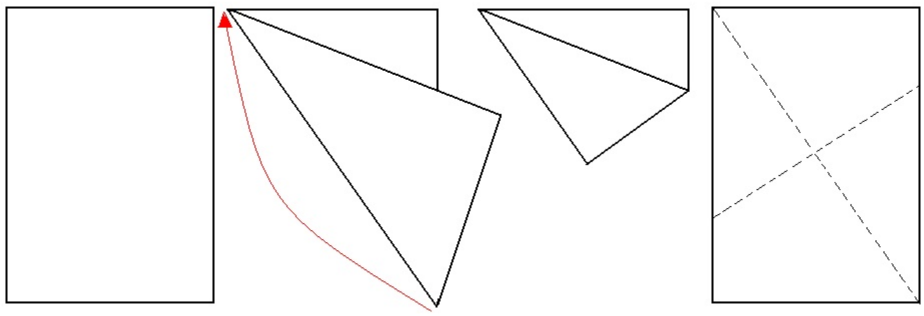

Figura 4.3: *Figuras com papel A4(2)*

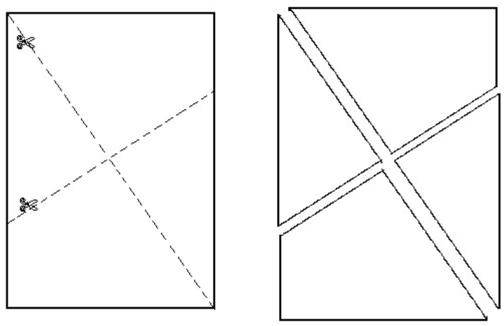

Figura 4.4: *Figuras com papel A4(2)*

Depois recorte as quatro partes. Elas serão as peças do quebra-cabeça.

Sempre juntando as quatro peças, forme estas figuras:

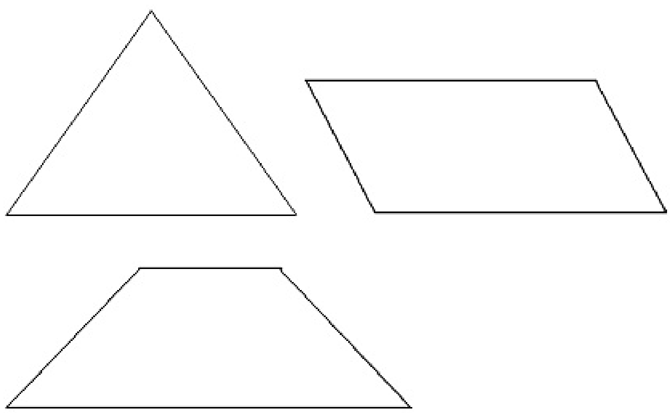

Figura 4.5: *Figuras formadas com papel A4*

Montando os quebra-cabeças, os alunos irão compor e decompor figuras planas. O primeiro quebra-cabeça é simples, pois só tem duas peças. O segundo é mais complexo, pois apresenta quatro peças. O professor pode ainda construir novos quebra-cabeças com figuras diferentes.

4.2.3 Uso do Tangram na composição e decomposição de figuras

O tangran[1] é formado por sete peças (dois triângulos pequenos, um triângulo médio, dois triângulos grandes, um paralelogramo e um quadrado). A regra do quebra - cabeça consiste em combinar (algumas ou todas) as peças, uma ao lado da outra, sem sobreposição, a fim de construir figuras solicitadas ou criadas. Mas, a atividade proposta é a seguinte:

Ação 1

Sabendo-se que a área total de um tangran (figura abaixo) é igual a 32 unidades de área (u.a.), calcular a área de cada uma de suas sete peças.

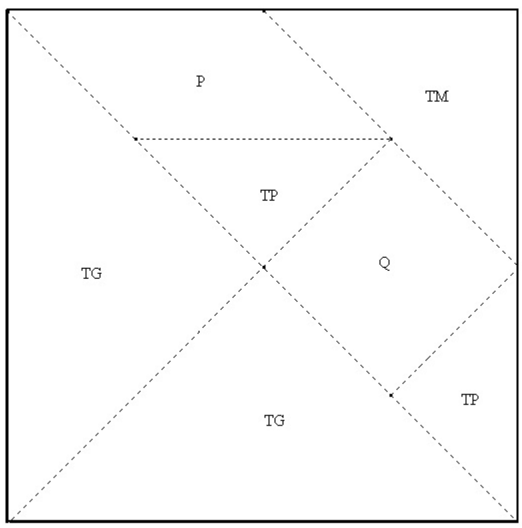

Figura 4.6: *tangram*

TG - Triângulo grande TM - Triângulo médio

TP - Triângulo pequeno Q - Quadrado P - Paralelogramo

[1]Para facilitar as atividades em sala de aula, o professor pode levar o tangran desenhado em papel e colado em cartolina, deixando os recortes por conta dos alunos, se a escola não dispor de tangran de madeira ou de borracha.

Figura	Área (u.a.)	Quantidade de figuras	Área total (u.a.)
Triângulo pequeno	2	2	4
Triângulo médio	4	1	4
Triângulo grande	8	2	16
Quadrado	4	1	4
Paralelogramo	4	1	4
Total	-	7	32

Ação 2

Construa uma tabela apresentando para cada uma das formas (peças) que constituem o tangram. Quantas delas são necessárias para cobrir toda a área do tangram

Tipo de peças do Tangran	TG	TM	TP	Q	P
Número de peças para formar o tangran	4	8	16	8	8

Ação 3

Construa uma tabela que relacione a área do tangran em função da área do triângulo menor (que número de área do tangran se obtém com um certo número de área do tangran menor). Use as medidas inteiras 1, 2, 3, 4, 8, 16, 17, 18, 19, 20 para a quantidade de triângulo menor para a quantidade de área do triângulo menor.

X número de triângulo menor	1	2	3	4	8	16
Y Número de área X no tangran	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Neste caso podemos introduzir o conceito de função onde temos $y = \frac{1}{16}x$

Uma mesma atividade com o tangran poderá ser realizada em diferentes séries, observando necessárias adaptações de linguagem e aprofundamento do conteúdo.

4.2.4 Retângulos de mesmo perímetro

Nesta atividade vamos construir, inicialmente, retângulos de mesmo perímetro e observar o que acontece com a área ao mudar-se a forma do retângulo.

Depois vamos construir retângulos de mesma área e, da mesma forma, observar o que acontece com o perímetro.

Vamos utilizar o software Geogebra que nos permite modificar as dimensões do retângulo, a partir de deslocamento de vértices.

Como construir vários retângulos de mesmo perímetro?

Para construir estes retângulos, fixamos um certo valor para o perímetro, ou seja, para a soma dos lados:

Perímetro $= 2a + 2b$, sendo a e b lados do retângulo. Fixar o perímetro do retângulo significa manter fixa a soma dos lados a e b. Para isto, vamos construir um segmento $\overline{AB}$ e um ponto C móvel sobre este segmento:

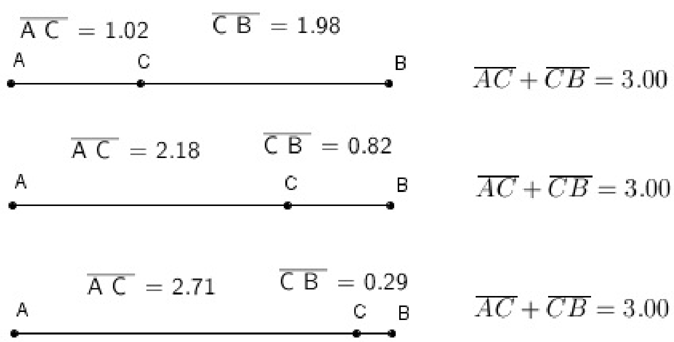

Figura 4.7: *Soma fixa dos lados do retângulo*

Se tomamos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ como lados do retângulo, teremos a soma de dois de seus lados fixa e igual à $\overline{AB}$ e o perímetro fixo igual à $2 \cdot \overline{AB}$. Ao movimentar o ponto C sobre $\overline{AB}$ obtemos diferentes medidas para os lados do retângulo, conservando o perímetro fixo.

Vamos então agora construir os retâgulos cujos lados são $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$:

- A partir dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ construídos acima, construa dois círculos concêntricos, de raios $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ (utilize a ferramenta Compasso);
- Construa o retângulo sobre dois raios perpendiculares;
- Calcule o perímetro deste retângulo;
- Movimente o ponto C que está sobre o segmento $\overline{AB}$ construído inicialmente e observe o que acontece.

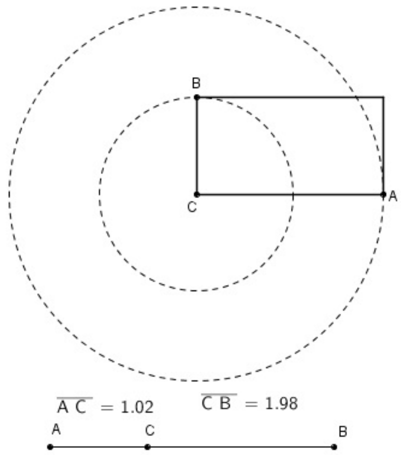

Figura 4.8: *retângulo com perímetro fixo*

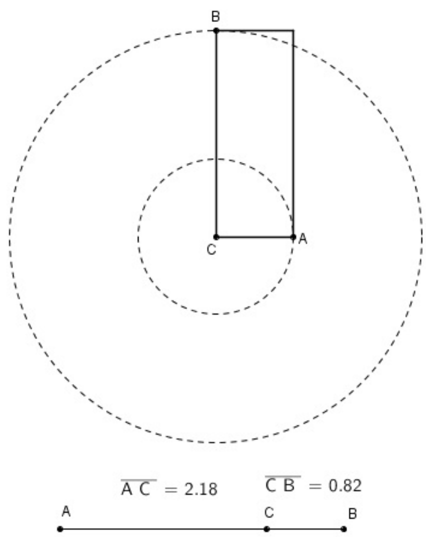

Figura 4.9: *retângulo com área diferente e mesmo perímetro*

Observe a variação da área do retângulo:

- para C próximo de A a área é quase zero
- conforme C se afasta de A a área vai aumentando
- a área atinge seu maior valor no quadrado
- conforme C se aproxima de B a área vai diminuindo
- Como é "lei"desta função ?

Ao final desta atividade deve ter se tornado claro que não existe relação funcional entre perímetro e área de retângulos. Para os alunos isto nem sempre é claro, o que

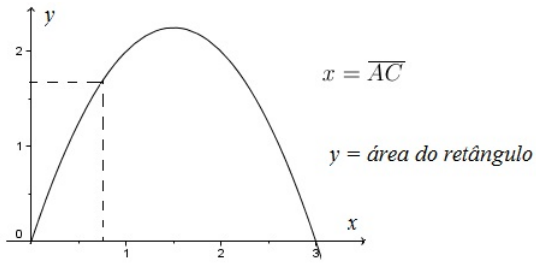

Figura 4.10: *Variação da área do retângulo*

se reflete quando fazem afirmações do tipo "se aumenta a área aumenta o perímetro"ou o contrário"se aumenta o perímetro aumenta a área". Conforme vimos:

- para um dado valor de perímetro podemos associar diferentes valores de área de retângulos
- para um dado valor de área podemos associar diferentes valores de perímetros de retângulo.

Conclusão

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica com o título Um Estudo de Áreas de Figuras Planas e a Desigualdade Isoperimétrica apresentada no Curso de Mestrado em Matemática - Profmat - da Universidade Federal do Amapá - Unifap. Foi construido com análises e leituras de vários livros, dissertações e artigos que se encontram em nossa referência bibliográficas. Começamos falando um pouco sobre áreas de figuras planas, dos conceitos de áreas e perímetro que já eram trabalhados desde a antiguidade com Arquimedes e seus contemporâneos.

É muito importante que os alunos conheçam também um pouco da história da geometria e que no início tudo era provado geometricamente, desde os problemas como a quadratura do círculo, que é um problema proposto pelos antigos geômetras gregos consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um do círculo servindo-se somente de uma régua e um compasso em um número finito de etapas.

É comum em nosso cotidiano aparecerem problemas de máximo ou mínimo e isso tem a ver com a relação custo/benefício. Por exemplo, um administrador de uma empresa deve visar sempre o lucro e conter as despesas para que a empresa não acabe indo a falência. Então o lema é "maximizar os lucros e minimizar as despesas", e isso se chama otimização.

Quanto a desigualdade isoperimétrica, esta sempre atraiu atenção desde muito tempo. Mas, esse tema tão atraente fica esquecido nas escolas pois os livros didáticos não abordam de forma eficaz. Nesta exposição vimos a isoperimetria em polígonos regulares e esta é apenas uma pequena amostra do que os matemáticos desenvolveram desde a antiguidade e isto serve para nos estimular em estudos mais aprofundados.

Para nós, foram muito válidas essas demonstrações, pois, até então, algumas eram desconhecidas. Apenas tínhamos conhecimento, pura e simplesmente das fórmulas. Com isso, percebemos ainda mais, a importância que os conteúdos da Geometria possuem, principalmente, pelas suas aplicações em diversos campos do conhecimento.

Procuramos desenvolver atividades que reduzam a “distância”entre o aluno e o conhecimento de áreas de figuras planas e desigualdade isoperimétrica, partindo de conceitos elementares para que o professor possa acompanhar o aluno em seu desenvolvimento até a compreensão de teoremas e proposições de áreas com um pouco mais de abstrações. Acreditamos que não é viável apenas a apresentação de uma fórmula de calcular a área de uma determinada figura geométrica sem a sua devida demonstração, pois o aluno quer saber e compreender de onde é que vem tantas fórmulas e como é que se chegaram a elas e isto só é possível saber se fizermos uma demonstração, mesmo que seja singela pois, para o educando devemos procurar o método mais simples de compreensão, já que nem todos tem a mesma facilidade dar o devido apreço.

Um dos objetivos na aplicação das atividades é colocar o aluno como elemento ativo do processo ensino-aprendizagem, pois o motiva a trabalhar mais ativamente com conceitos em sala de aula. Oportunizando novas experiências aos alunos e condições de realizarem comparações entre figuras que possuem a mesma área, mas que apresentam formatos diferentes e descobrindo formas diferentes de resolver um mesmo problema. Mesmo com a orientação nas atividades, entendemos que os alunos demonstram grande interesse naquilo que fazem e encontram suas próprias soluções sem a intervenção contínua do professor.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, P.V. *Geometria Diferencial*, Coleção matemática universitária 2.ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[2] ÁVILA, G.S. *Cálculo I: Diferencial e Integral* - Rio de Janeiro, LTC; Brasília, Editora Universitária, 1978.

[3] BARBOSA, J.L.M. *Geometria Eucliciana Plana*, SBM, 2003.

[4] BOYER, C.B. *História da Matemática* - 2^a ed. - São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

[5] BRASIL, MEC, SEF, *Parâmetros Curriculares Nacionais de 5^a a 8^a séries* / Ensino Médio, Matemática, MEC, Brasília, 1998.

[6] BOYER, C., *História da Matemática* - 2ª edição -tradução Elza Gomide, São Paulo - SP: Edgar Blucher, 1996.

[7] CARMO, M.P. do, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Textos Universitários, SBM, 2012.

[8] CAVALCANTI, G.R., *Problemas Variacionais Geométricos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

[9] CENTURION, Marília et al. *Matemática na Medida Certa* - Ensino Fundamental (5^a a 8^a séries). Edição Reformulada. São Paulo: Scipione, 2003

[10] DOLCE O., J.N. Pompeo: Fundamentos de Matemática elementar, vol. 9, Geometria Plana, Atual - 1991.

[11] EVES, H. *História da Geometria* Trad.: Hygino H. Domingues - São Paulo: Atual, 1992.

[12] FIGUEIREDO, D.G. *Problemas de Máximos e Mínimos na Geometria Euclidiana*, Matemática Universitária n. 9/10, Rio de Janeiro, SBM, 1989.

[13] FREUDENTHAL, Hans. Mathematics as an educational task. Dordrecht::Reidel, 1973, p.407 apud FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. *O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.* Belo Horizonte, Autêntica, 2001.

[14] LIMA, E.L. et al, *A Matemática do Ensino Médio*, V 1,2,3 SBM, 2011.

[15] LIMA, E.L. *Curso de Análise*,coleção Projeto Euclides, IMPA: 1976.

[16] LIMA, E.L. *Medida e Forma em Geometria*, coleção do Professor de Matemática, SBM-1991.

[17] LIMA, E.L. *Matemática e Ensino*, Coleção do Professor de Matemática, SBM - 2001.

[18] MADEIRA, T.M., *O Problema Isoperimétrico Clássico*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2005.

[19] MOREIRA, C.G.T.A., SALDANHA N.C, *A Desigualdade Isoperimétrica*, Matemática Universitária, n° 15, 13-19, 1993.

[20] NOTARE, M.T. et al. *Perímetro e Área de Retângulos*. Disponível em: < *http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/ativ04/ativ4.htm* >. Acesso em: 10/10/2013.

[21] PIÑEYRO, J.P.H, *Una História del Problema isoperimétrico Clássico con Geometría Elemental*, 2011.

[22] SCIENTIFIC AMERICAN, *Arquimedes, Pioneiro da Matemática.* Série Gênios da Ciência. São Paulo: Duetto, 2005.

[23] TRAJANO, A. *Aritmética Progressiva.* 84^aed. Editora: P. de Azevedo - Rio de Janeiro, 1954.

Apêncice A

Sistema Métrico

O sistema de unidades de medir em vigor no Brasil foi instituído pelo Decreto 4257 de 16 de junho de 1939 e se baseia no Sistema Métrico Decimal, que era de uso obrigatório em nosso país desde 1872.

Notícia sobre o sistema métrico decimal

Por longos anos, a França reconheceu a imperfeição e inconveniência do seu antigo sistema de pesos e medidas, porque em muitos lugares, elas não só variavam de tamanho, mas até de nome e de divisões, o que dava lugar a fraudes e embaraços para o comércio.

O Governo francês, por muitas vezes desejou estabelecer uma uniformidade, e regular todas as medidas por aquelas que eram usadas em Paris, mas nada pode conseguir pelas muitas dificuldades que apareciam. Afinal, em 1790, a Assembléia francesa determinou fazer uma reforma completa nos pesos e medidas, e para isso convidou os governos de alguns países para cooperarem na organização de um sistema de medidas, que fosse fácil e simples, e também comuns a todas as nações.

A academia de Ciências de Paris nomeou uma comissão composta de matemáticos franceses para estudar as bases do novo sistema de medidas. Esta comissão, não querendo dar ao sistema um caráter nacional, tomou como base das suas operações a distância do Equador ao Pólo Norte, pelo meridiano de Paris. Delambre e Méchain mediram a distância entre Dunquerque e Barcelona, seguindo aquele meridiano, e por esta distância, eles calcularam o quadrante da Terra, e acharam que tinha 5130740 toesas; dividindo o comprimento do quadrante em dez milhões de partes iguais, deram a uma destas partes o nome de metro. De sorte que o metro foi instituído como a décima milionésima parte da distância do Equador ao Pólo Norte.

Em seguida, foram construídos os protótipos, quer dizer, os padrões para o metro e para o quilograma, ambos de platina iridiada, os quais se acham depositados na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.

Posteriormente, novas verificações provaram ter havido pequeno erro no cálculo do comprimento do quadrante terrestre e, por conseguinte, no comprimento tomado para unidade fundamental do sistema. Apesar disso, não foi alterado o metro-padrão, que desde então, passou a ser uma medida convencional.

A palavra metro vem do grego metron, que significa medida. Este vocábulo já era usado na composição de outras palavras como termômetro, barômetro, cronômetro, etc. O novo sistema chamou-se métrico, porque a sua base é o metro; chamou-se também decimal porque a razão entre os seus múltiplos e submúltiplos é sempre decimal.

Quase todos os países da Europa e da América, reconhecendo a imperfeição e inconveniência das suas medidas antigas, e vendo, ao mesmo tempo, as vantagens e simplicidade do Sistema Métrico Decimal, adotaram este sistema, e proibiram o uso de todos os outros.

Portanto, o metro tem aproximadamente o comprimento da décima milionésima parte da distância do Equador ao Pólo Norte. É a seguinte definição legal do metro: "Distância, à temperatura de 0°C, dos eixos médios gravados sobre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro pela 1ª Conferência Geral de pesos e Medidas, estando submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de 1 centímetro, situados simetricamente num mesmo plano horizontal e à distâncias de 571 milímetros. Existe uma outra definição mais recente que diz o seguinte: "a distância de um metro corresponde a distância percorrida pela luz no vácuo num intervalo de $\frac{1}{299792458}$ segundos".

Apêndice B

Unidades de comprimento

O metro tem os seguintes múltiplos:

MÚLTIPLOS	m
Decâmetro	10
Hectômetro	100
Quilômetro	1000

Os submúltiplos usuais do metro são:

SUBMÚLTIPLOS	m
Decímetro	0,1m
Centímetro	0,01m
Milímetro	0,001

Para as grandes distâncias em terra usa-se o quilômetro e no mar usa-se a milha marítima com 1852 metros

Usam-se as seguintes abreviaturas para as unidades de comprimento:

Unidade	Sigla
Quilômetro	km
Hectômetro	hm
Decâmetro	dam
Metro	m
Decímetro	dm
Centímetro	cm
Milímetro	mm

Unidades de área

A unidade do sistema internacional de área é o metro quadrado, isto é, a área de um quadrado que tem 1 metro de lado.

É fácil mostrar que esse quadrado contém 100 quadrados menores de um decímetro de lado. Suponhamos que o quadrado aqui traçado tem um metro de lado e que dividimos cada um dos seus lados em 10 partes iguais. Cada uma destas partes será um decímetro. Se ligamos os pontos da divisão que se correspondem nos lados opostos, o quadrado ficará dividido em 100 quadrados menores com 1 decímetro de lado. Cada um destes se chama decímetro quadrado.

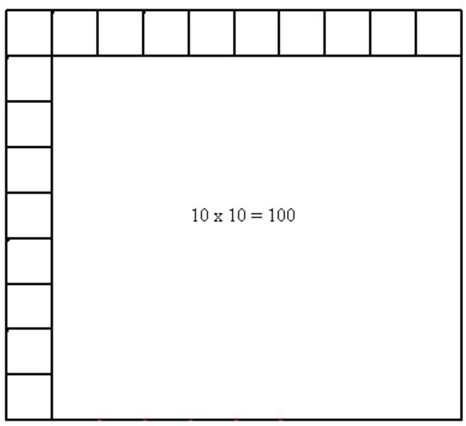

Figura 4.11: *Comparação de metro quadrado e decímetro quadrado*

O metro quadrado contém, por conseguinte 100 decímetros quadrados. Do mesmo modo mostraríamos que o decímetro quadrado contém 100 centímetros quadrados e que o centímetro quadrado contém 100 milímetros quadrados.

O metro quadrado tem, portanto, 100 x 100 ou 10000 centímetros quadrados e 100x100x100 ou 1000000 de milímetros quadrados.

Se passarmos agora aos múltiplos do metro quadrado podemos mostrar que o decâmetro quadrado é igual a 100 metros quadrados, o hectômetro quadrado igual a 100 decâmetros quadrados ou 10000 metros quadrados e que o quilômetro quadrado é igual a 100 hectômetros quadrados ou 1000000 de metros quadrados.

Há, portanto, entre o metro quadrado e seus múltiplos e submúltiplos, isto é, entre as medidas de área, uma relação centesimal. Quer isto dizer que cada unidade é 100 vezes maior do que a imediatamente inferior ou, o que dá no mesmo, cada unidade é um centésimo da imediatamente superior.

Para as unidades usam-se as seguintes abreviaturas:

Unidade	Sigla
Quilômetro quadrado	km^2
Hectômetro quadrado	hm^2
Decâmetro quadrado	dam^2
Metro quadrado	m^2
Decímetro quadrado	dm^2
Centímetro quadrado	cm^2
Milímetro quadrado	mm^2

Leitura e escrita de números que exprimem áreas

Para ler e escrever uma medida de superfície é preciso ver qual a unidade escolhida e levar em consideração que:

$$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$$
$$1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$$
$$1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2$$

Assim, $45dm^2$ são 45 centésimos de metro quadrado e escrevem-se $0{,}45m^2$; $368cm^2$ são 368 décimos milésimos do metro quadrado e escrevem-se $0{,}036m^2$; também

50483 milímetros quadrados são 50483 milionésimos do metro quadrado e escrevem-se 0,050483 m^2.

Por outro lado 0,08 m^2 lê-se 8 decímetros quadrados porque cada centésimos do é um decímetro quadrado; 0,3547 m^2 lê-se 3547 centímetros quadrados; 0,563480 m^2 lê-se 563480 milímetros quadrados.

Para as grandes áreas (regiões, cidades, países, etc.) usa-se como unidade o quilômetro quadrado. Deve-se levar em conta, neste caso, que o metro quadrado equivale a um milionésimo do quilômetro quadrado. Assim, 3 quilômetros quadrados e 2560 metros quadrados escrevem-se 3,002560km^2. Por outro lado 4,468500km^2 lê-se 4 quilômetros quadrados 468500 metros quadrados.

Medidas agrárias

Para medidas agrárias, isto é, medição de matas e terras de cultura, usa-se como unidade o decâmetro quadrado com o nome de are. O are equivale, portanto, a um quadrado de 10 metros de lado. O único múltiplo do are é o hectare com 100 ares e um único submúltiplo é o centiare, que é a centésima parte do are. O hectare equivale, portanto, ao hectômetro quadrado e o centiare equivale ao metro quadrado. As abreviaturas usadas são:

Hectare	ha
Are	a
Centiare	ca

Não há dificuldade na leitura e escrita das medidas agrárias: 3,48 ha lê-se 3 hectares e 48 ares; 5,32ª lê-se: 5 ares e 32 centiares; 4,0325 há lê-se 4 hectares e 325 centiares.

É obrigatório no Brasil, o uso de unidades baseadas no sistema métrico decimal. Todavia, a própria lei que mais confirmou essa obrigatoriedade (Decreto nº 4257, de 16 de junho de 1939) manda que seja tolerada a indicação em unidades diferentes das legais nas mercadorias importadas e destinadas à exportação. Como temos relações comerciais de grande vulto com dois países que não aderiram ao Sistema métrico decimal (Inglaterra e Estados Unidos da América), devemos conhecer ao menos as unidades mais usuais entre ingleses e norte-americanos. Citaremos as seguintes acompanhadas da equivalência nas unidades legais:

Unidades de comprimento

Nome em inglês	Nome em português	Abreviatura	Valor aproximado
inch	polegada	in	2,54 cm
foot=12 in	pé	ft	0,304 m
yard=3ft	jarda	yd	0,914 m
fathom=2 yd	braça	fa	1,828 m
mile=880 fa	milha inglesa	mi	1609 m

Nota. Não confundir a milha inglesa com a milha marítima que mede 1852m

Unidades de área

Para unidades de área, em qualquer sistema usam-se os quadrados construídos sobre as unidades de comprimento. Por isso, no sistema inglês usam-se:

Nome em inglês	Nome em português	Abreviatura	Valor aproximado
square inch	polegada quadrada	sq.in	6,45 cm^2
square foot in	pé quadrado	sq.ft	9,29 dm^2
square yard	jarda quadrada	sq.yd	0,8361 m^2
square mile	braça quadrada	sq.mi	2,59 km^2 ou 259 ha