UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Jorge Luís Lopes Fagundes

Seropédica, RJ

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

JORGE LUÍS LOPES FAGUNDES

Sob a Orientação da Professora
Eulina Coutinho Silva do Nascimento

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Seropédica, RJ
agosto de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JORGE LUIS LOPES FAGUNDES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** , no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 16/08/2013

Eulina Coutinho S. do Nascimento

Eulina Coutinho Silva do Nascimento

Doutora em Matemática – UFRRJ

(Orientadora)

Aline Mauricio Barbosa

Aline Mauricio Barbosa

Doutora em Matemática – UFRRJ

Carlos Eduardo Mathias Motta

Doutor em Matemática – UFF

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a professora Maria de Lourdes, minha madrinha, sem a qual nada disso seria possível e a minha neta, Laura, constante fonte de inspiração.

AGRADECIMENTOS

A minha família, por toda paciência, compreensão e incentivo nas muitas e muitas horas de trabalho.

A CAPES, por acreditar e incentivar esse programa.

Aos colegas e professores do Profmat, solidariedade e carinho, uma outra família.

A minha orientadora, professora Eulina, pela competência e boa vontade durante o desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores membros da banca examinadora pelas valiosas contribuições e sugestões, a professora Aline, em particular, pelo incentivo ao longo do curso e pela criteriosa análise desse material.

A minha esposa, Aninha, sempre comigo, com esperança e amor, juntos nessa jornada chamada vida.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo estudar a resolução de sistemas lineares, relacioná-los com o estudo dos determinantes bem como apontar alguns equívocos presentes em muitos livros didáticos do ensino médio no que diz respeito à regra de Cramer. Neste texto faremos um paralelo entre a resolução de sistemas lineares por regra de Cramer e por eliminação gaussiana. Procuramos evidenciar a estreita ligação entre a resolução de sistemas lineares e o aparecimento dos determinantes através e um breve resgate histórico. Propomos, também, demonstrações basicamente geométricas que estabelecem relações entre diferentes domínios da matemática, tudo isso fará com que o aluno veja esse conteúdo com mais curiosidade e interesse. Fizemos uma análise de alguns livros didáticos quanto a abordagem dos sistemas lineares.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Determinantes, Regra de Cramer.

ABSTRACT

The goal of the research is to come up with a new approach for the Cramer’s rule in different levels: high school and even graduation (majors like math and similar fields). Trying to show up the narrow connection between the resolution of linear systems and the emergence of determinants, the research brings back the origin of these discoveries, recapturing the historical order of development of this area. In this paper we make a parallel between solving linear systems by Cramer's rule and Gaussian elimination, which method will be explained throughout this work because it is usually the most economical computationally. This work intends to help (or even warn) textbooks authors be aware of the errors or inconsistencies that make take place. This research also proposes demonstrations that are basically geometric, in which different domains of mathematics are related in a way that learners can become really curious and interested.

Keywords: Linear systems, determinants, Cramer’s rule.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Essa dissertação é um trabalho teórico que alia pesquisa em fontes históricas, consultas a publicações originais (fontes primárias), pesquisa bibliográfica (fontes secundárias) e alguns anos de experiência em sala de aula. No presente trabalho apresentamos os determinantes como consequência da resolução de sistemas lineares, visão essa quase sempre negligenciada nos livros didáticos de ensino médio.

Acreditamos que os encadeamentos lógico-conceituais são muito importantes na formação do estudante. A construção dos determinantes a partir de sistemas lineares simples é possível de ser trabalhado no ensino médio, o que consideramos um exemplo desse encadeamento. Neste ponto os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no Ensino Médio afirmam

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio, não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1998, p.40)

Essa forma de abordar sistemas lineares e determinantes além de ser um exemplo dessa ligação temos o sentimento que o aprendizado possa ser mais efetivo por parte dos alunos, tornando-os menos refratários ao tema.

Apresentamos uma interpretação geométrica da regra de Cramer para o caso de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, onde, como sabemos, um sistema linear 2 x 2 pode ser apresentado vetorialmente e trabalhamos com os paralelogramos gerados por esses vetores. Nessa mesma linha de raciocínio, uma interpretação geométrica da regra de Cramer para o caso de sistemas lineares de três equações e três incógnitas, é proposta, onde, um sistema linear 3 x 3 pode ser posto na forma vetorial e trabalhamos com os sólidos gerados por esses vetores. Essas interpretações geométricas objetivam ilustrar e facilitar a compreensão do tema. Esse resultado também pode ser visto no livro escrito pelo próprio Cramer Lecture 2011.06.23 Part 06/9 Algebraic Interpretation of the Cramer's Rule

Neste ponto cabe dizer que observando um artigo na internet sobre a regra de Cramer encontramos uma interpretação geométrica para o caso de um sistema de duas equações e duas incógnitas. Inspirado por essa ideia, fizemos uma demonstração geométrica da regra de Cramer para o caso de um sistema de três equações e três incógnitas. Posteriormente verificamos que uma demonstração semelhante a que havíamos realizado encontrava-se em um vídeo na internet.

Com respeito ao que foi exposto no parágrafo anterior, acreditamos que um aluno, no ensino médio deve ser convidado ou incentivado a pensar mais profundamente sobre alguns problemas matemáticos e levado a fazer suas próprias descobertas. O prazer de fazer uma descoberta independente, mesmo que posteriormente se verifique que outros já a tenham feito, vai continuar sendo importante e inesquecível para esse aluno e grande fonte de satisfação pessoal, como foi para o autor.

Esse pensamento tem respaldo os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no Ensino Fundamental, (Brasil, 1997, p.19) “A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”.

Na nossa avaliação determinantes são consequência da resolução de sistemas lineares. Hoje, na maior parte de nossas escolas, determinantes são abordados praticamente sem se fazer uma ligação com os sistemas lineares, pelo menos, sem se fazer a conexão da forma que propomos. Com essa pesquisa verificamos que a regra de Cramer surge exatamente disso, da tentativa de resolver sistemas lineares.

Buscamos com esse trabalho provocar uma reflexão, com respeito ao ensino dos sistemas lineares, dos determinantes e da regra de Cramer porém, o que está discutido aqui tem validade maior, estende-se por quase todos os campos da matemática, ou seja, sempre há novas alternativas possíveis de abordagem de um determinado conteúdo de matemática, conhecendo um pouco da história da matemática, como a humanidade trabalhou até chegar ao estágio atual do desenvolvimento daquele tema. É importante conhecer em que sequência um assunto foi desenvolvido ou saber que passos foram dados até chegarmos ao plano em que estamos.

Podemos aqui citar os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática o Ensino Médio, (Brasil, 1998, p.44) “O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas".

O presente trabalho está dividido como segue: o primeiro capítulo do traz um pequeno apanhado histórico, mostrando como os determinantes, matrizes e sistemas lineares foram percebidos e estudados pela humanidade ao longo do tempo. Mostrando também algumas das principais contribuições de cada povo, desde tempos muito remotos e enumerando avanços trazidos por cada nova teoria.

No capítulo 2, discutimos um dos principais métodos de resolução de sistemas lineares, a saber, a regra de Cramer. O método é explicado e demonstrado algebricamente e ainda apresentamos algumas demonstrações geométricas.

No capítulo 3, é abordado um outro método de resolução de sistemas lineares, a eliminação gaussiana (escalonamento). Todo o processo é descrito e explicado passo a passo e uma aplicação é feita a fim de facilitar o entendimento por parte do leitor.

O capítulo 4 trata da comparação entre a regra de Cramer e o escalonamento. Vários exemplos são resolvidos pelos dois métodos e as respectivas soluções comparadas. Para introduzirmos imagens de posições relativas de planos no espaço, um pequeno comentário sobre equações de planos é apresentado.

No capítulo 5, procuramos analisar, com respeito a regra de Cramer, uma amostra dos livros didáticos mais usados no ensino médio regular em nossas escolas. Em vários desses livros, podemos verificar erros na abordagem do assunto em questão. Muitos desses livros já sofreram revisões, muitos erros foram corrigidos, embora alguns persistam.

1. DETERMINANTES E MATRIZES: UM POUCO DE HISTÓRIA

Os relatos históricos deste capítulo foram retirados de Connan & Robertson (1996). A humanidade começa estudar as matrizes e determinantes por volta do século IV a.C. O início do estudo de matrizes e determinantes surge com os sistemas de equações lineares, com os babilônios por volta de 300 a.C. Os chineses entre 200 a.C. e 100 a. C., chegaram mais perto das matrizes que os babilônios. No livro *Nove capítulos da Arte Matemática,* aparece o primeiro exemplo conhecido do método das matrizes.

Em 1545, Cardano criou uma regra para resolver sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas e De Witt, em 1660, obteve resultados que seriam equivalentes a diagonalização de uma matriz simétrica.

A ideia de determinante apareceu no Japão e na Europa quase que exatamente ao mesmo tempo. Em 1683, Seki escreveu Método para resolver problemas dissimulados, onde ele foi capaz de encontrar determinantes de matrizes 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4 e 5 x 5 e aplicá-los para resolver equações lineares. A primeira referência a determinantes surgida na Europa aconteceu exatamente no mesmo ano de 1683, na troca de correspondências entre Leibniz e de l'Hôspital.

Leibniz modernizou o uso das notações e obteve um resultado que era essencialmente a regra de Cramer. Ele também sabia que um determinante podia ser expandido usando qualquer coluna, o que é hoje chamado de expansão de Laplace.

Na década de 1730, Maclaurin escreveu *Tratado de álgebra,* embora ele não tenha sido publicado até 1748, dois anos depois de sua morte. O livro continha o primeiro resultado publicado sobre determinantes, provando a regra de Cramer para sistemas 2 x 2 e 3 x 3 e indicando como o caso 4 x 4 poderia ser feito.

Cramer obteve uma regra geral para sistemas n x n no trabalho *Introdução a análise de curvas algébricas* (1750). Isso surgiu da necessidade de encontrar a equação de uma curva plana passando por um certo número de pontos dados. A regra aparece em um apêndice do trabalho, mas nenhuma prova é fornecida.

Gabriel Cramer, um matemático suíço, fez um importante trabalho editorial e matemático. Sua atividade teve início na Suíça, notadamente na parte francófona, onde havia uma intensa troca de ideias entre os matemáticos da Basileia e seus colegas de Genebra, Lousane e Berna. Um forte estímulo surge quando Cramer e Jean-Louis Calandrini foram chamados para dividir o comando do recentemente criado curso de formação de professores de matemática da academia de Genebra.

A forma da regra atribuída a Cramer aparece em seu livro *Introduction a L'Analyse de lignes courbes algebriques* , o qual transformou-se em obra de referência durante o restante do século. (DAUBEN, 2002).

A obra foi tão bem escrita e tão frequentemente citada que, após sua morte, Cramer era considerado o criador da regra. No terceiro capítulo dessa famosa obra, Cramer se refere a curvas de grau qualquer e um dos primeiros teoremas do capítulo é um bem conhecido, onde a equação da curva de grau n é determinada quando $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos da curva são conhecidos. No exemplo da aplicação do teorema, ele aborda o caso onde se deseja encontrar a equação que passa por cinco pontos dados. A equação a ser resolvida tem a seguinte forma:

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0 \quad (1).$$

Substituindo esses pontos na equação, obteremos um sistema de cinco equações cuja solução nos dará os valores de A, B, C, D e E que posteriormente serão substituídos na equação (1).

Cramer considerava esse cálculo muito longo e, em uma nota de rodapé do livro (*CRAMER, 1750, p. 657)*, fez a seguinte observação: "... devemos procurar um meio de encurtar esse processo". Ele ainda direciona o leitor, ao apêndice do livro, onde se encontra uma regra geral que havia descoberto, com a qual poderia se obter a solução de um sistema de equações desse tipo.

Trabalhos em determinantes agora começam a surgir regularmente. Em 1764, Bezout forneceu um método para calcular determinantes, como fez também Vandermonde em 1771. Em 1772, Laplace afirmou que o método introduzido por Cramer e Bezout não era prático. Laplace nos deu a expansão de um determinante que é agora chamada de expansão de Laplace. Lagrange, em um trabalho de 1773, estudou identidades para a função determinante 3 x 3. Ele também forneceu a interpretação geométrica de um determinante como o volume de um sólido.

O termo 'determinante' foi primeiramente introduzido por Gauss, em *Disquisitiones arithmeticae* (1801), onde discutia formas quadráticas. Ele descreve a multiplicação de matrizes e a inversa de uma matriz em um contexto particular de coeficientes de uma forma quadrática.

A eliminação gaussiana, que primeiramente aparece no texto *Nove capítulos da Arte Matemática,* escrito em 200 a.C., foi usada por Gauss como um método sistemático para resolver sistemas de equações lineares.

Era Cauchy, em 1812, quem usava os ‘determinantes’ no sentido moderno. O trabalho de Cauchy é o mais completo desses primeiros trabalhos sobre determinantes. Ele reprovou os resultados anteriores e deu novos rigorosos resultados, de sua autoria. Em um trabalho de 1812, ele consegue provar o teorema da multiplicação de determinantes, pela primeira vez.

Em 1826, Cauchy encontra os autovalores e usa esse resultado para a diagonalização de uma matriz, em um contexto particular. Ele introduziu a ideia de matrizes similares (não o termo) e mostrou que se duas matrizes são similares elas têm a mesma equação característica. Ele também, novamente em um contexto particular, provou que toda matriz simétrica real é diagonalizável.

Jacques Sturm forneceu uma generalização do problema dos autovalores. Na verdade, o conceito de autovalor apareceu 80 anos antes em um trabalho de D’Alembert.

Jacobi, por volta de 1830, e então Kronecker e Weierstrass, nas décadas de 1850 e 1860, também olharam para as matrizes em um contexto especial, com a noção de transformação linear. Jacobi publicou três tratados sobre determinantes em 1841 e forneceu, pela primeira vez, uma definição de determinante como algoritmo. Esses três trabalhos de Jacobi fizeram a ideia de determinante largamente aceita.

Cailey, também escrevendo em 1841, publicou a primeira contribuição inglesa para a teoria dos determinantes. Em seu trabalho, ele usou duas linhas verticais em cada lado da matriz para denotar o determinante, notação que hoje tornou-se padrão.

Eisenstein, em 1844, denotou substituições lineares por uma única letra e mostrou como somá-las e multiplicá-las como números exceto pela falta da comutatividade. Por isso é apropriado dizer que Eisenstein foi o primeiro a pensar as substituições lineares como formas algébricas.

O primeiro a usar o termo ‘matriz’ foi Sylvester em 1850. Sylvester definiu uma matriz como *um arranjo retangular de termos*. Sylvester encontra e influencia

Cailey, que imediatamente percebe o significado do conceito de matriz e, em 1853, Cailey publica uma nota dando, pela primeira vez, a inversa de uma matriz.

Cailey, em 1858, publicou "*Memória em teoria das matrizes",* que é notável por conter a primeira definição abstrata de uma matriz. Ele mostra que os trabalhos anteriores trataram de casos particulares. Cailey apresentou a álgebra das matrizes: definições de adição, multiplicação, multiplicação por escalar e inversas. Ele forneceu uma construção explícita para a inversa de uma matriz em termos do determinante dessa matriz. Cailey também provou, no caso de uma matriz 2 x 2, que ela satisfaz sua própria equação característica.

Em 1870, a forma canônica de Jordan apareceu no "*Tratado de substituições e equações algébricas"* de Jordan.

Frobenius, em 1878, escreveu um trabalho importante sobre matrizes, intitulado *Sobre substituições lineares e formas bilineares, onde* ele provou um importante resultado sobre matrizes canônicas como representação de classes de equivalência de matrizes. Ele considera que Kronecker e Weierstrass abordaram casos especiais do seu resultado em 1874 e 1868 respectivamente. Frobenius também provou o resultado geral que uma matriz satisfaz sua equação característica. Esse trabalho também continha a definição de classificação de matrizes e de matrizes ortogonais.

A nulidade de uma matriz quadrada foi definida por Sylvester em 1884. Em 1896, Frobenius tomou conhecimento do trabalho de Cayley de 1858 (*Memória em teoria das matrizes)* e, depois disso, começou a usar o termo matriz. Frobenius foi o primeiro a provar o teorema geral de Cayley-Hamilton mas generosamente, atribuiu o resultado a Cayley.

Weierstrass apresentou uma definição de determinantes que foi usada em seus cursos e, depois de sua morte, ela foi publicada em 1903 na nota *Sobre a teoria dos determinantes.* No mesmo ano, notas de um curso de Kronecker sobre determinantes eram também publicadas. Com essas duas publicações a teoria moderna dos determinantes alcançou seu lugar mas a teoria das matrizes teve um caminho ligeiramente mais longo a percorrer até ser aceita completamente. (O'CONNOR, 1996).

2. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 2x2 e 3x3e Regra de Cramer

Os livros didáticos que tratam do tema regra de Cramer, em sua maioria, trazem primeiramente um capítulo, mais ou menos aprofundado, sobre o cálculo de determinantes e, só em seguida, abordam os sistemas lineares. Nesse ponto, é apresentada a regra de Cramer, como uma das formas possíveis de se resolver um sistema linear.

Entendemos que os determinantes surgem como consequência da resolução de sistemas lineares e disso decorre sua importância. Apresentamos também demonstrações geométricas para os sistemas lineares 2x2 e 3x3. Ainda fazemos, em 5 exemplos, uma análise comparativa entre a regra de Cramer e o método da eliminação gaussiana (escalonamento).

.

2.1 Sistemas lineares 2 X 2

Nosso objetivo nesta seção é resolver sistemas lineares 2 por 2. Tais demonstrações podem ser feitas no ensino médio e objetivam fazer o aluno perceber a relação existente entre a resolução de sistemas lineares e o cálculo de determinantes.

2.1.1 Solução Algébrica

Observe o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By = E \ (1) \\ Cx + Dy = F \ (2) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por $(-C)$ e a equação (2) por A, temos:

$$\begin{cases} -ACx - BCy = -EC \\ ACx + ADy = FA \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas equações, teremos:

(AD – BC)y = FA – AC

$$y = \frac{FA - EC}{AD - BC}$$, desde que AD – BC ≠ 0.

Substituindo esse valor encontrado para *y* na equação (1), obtemos o valor de X, como segue:

$$Ax + B\left(\frac{FA - EC}{AD - BC}\right) = E$$

$$\rightarrow Ax + \frac{FAB - EBC}{AD - BC} = E$$

$$\rightarrow A(AD - BC)x + FAB - EBC = E(AD - BC)$$

$$\rightarrow A^2Dx - ABCx + FAB = ADE$$

$$\rightarrow Ax(AD - BC) = A(ED - FB)$$

$$\rightarrow x = \frac{ED-FB}{AD-BC}$$ desde que AD – BC ≠ 0.

O professor pode perguntar aos alunos se eles conseguem notar alguma relação entre cada termo dessa fração e o sistema original. Podemos ressaltar:

1º - o denominador de x, y é o mesmo.

2º - os numeradores guardam semelhanças com esse denominador.

Neste ponto podemos definir o determinante da matriz $M_{2x2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, denotado det(M), como sendo **det(M) = AD – BC**.

2.1.2 Solução Geométrica

Nesta seção pretendemos resolver um sistema de duas equações e duas incógnitas, de maneira geométrica.

Antes disso, vamos observar como se calcula a área de um paralelogramo cujos lados são dois vetores dados.

Seja P o paralelogramo formado a partir dos vetores $\vec{u} = (A, B)$ e $\vec{v} = (C, D)$.

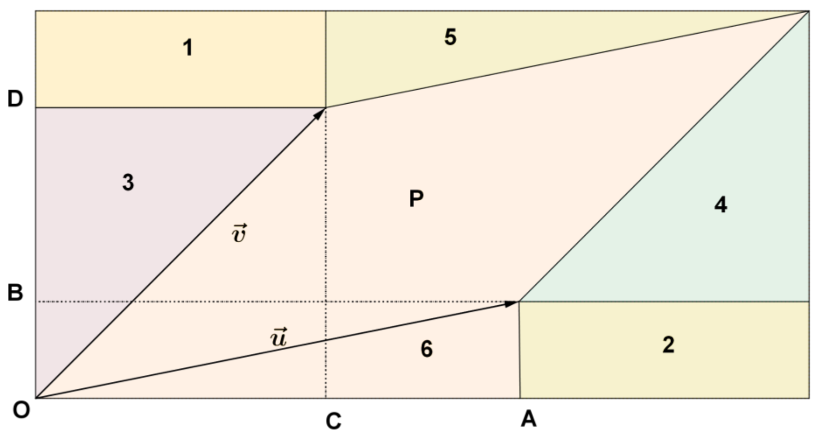

Figura 1: Paralelogramo definido por 2 vetores.

Na figura acima as regiões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e P reunidas formam um retângulo de dimensões $(A+C)$ e $(B+D)$. P é um paralelogramo de área S_p; 1 e 2 são retângulos de áreas S_1 e S_2; 3, 4, 5 e 6 são triângulos retângulos de áreas S_3 ,S_4 , S_5 e S_6. De modo que:

$$S_P + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = (A+C)\cdot(B+D)$$

$$S_P + BC + BC + \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = (A+C)\cdot(B+D)$$

$$\rightarrow S_P + 2BC + CD + AB = AB + AD + BC + CD$$

$$S_P = AD - BC$$

Observemos agora o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ax + By = \ \alpha \\ Cx + Dy = \ \beta \end{cases}$$

Matricialmente pode ser escrito por:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Na forma vetorial teremos:

$$x\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Tomemos os vetores $\vec{u} = (A, C)$, $\vec{v} = (B, D)$ e $\vec{w} = (\alpha, \beta)$, representados na figura abaixo.

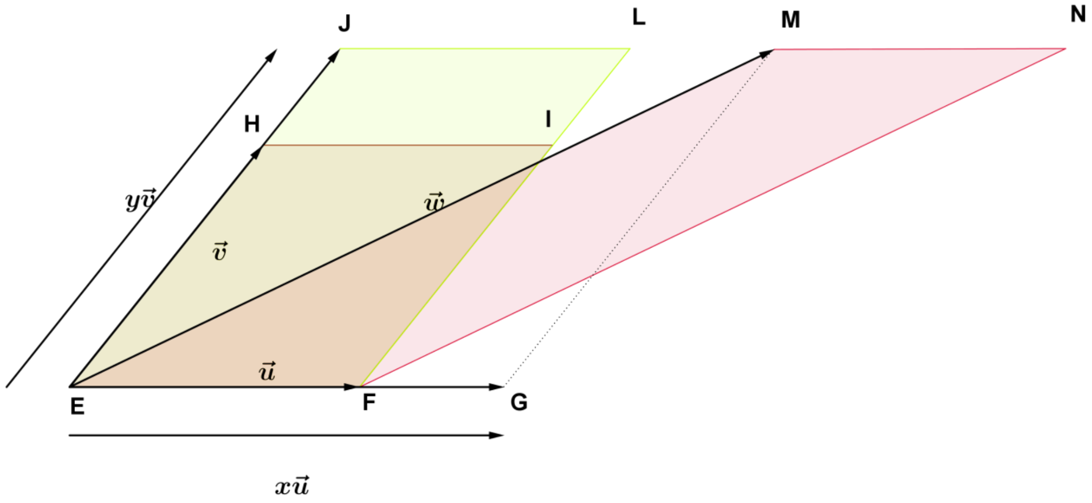

Figura 2: Resolução de sistema linear – caso plano.

Pode-se notar do diagrama que

$$S_{EFLJ} = yS_{EFIH} = S_{EFNM} \text{ , ou seja,}$$

$$y(AD - BC) = A\beta - C\alpha \rightarrow y = \frac{A\beta - C\alpha}{AD - BC}$$

Substituindo esse valor de $\boldsymbol{y}$ no sistema linear encontramos

$$\boldsymbol{x = \frac{\alpha D - \beta B}{AD - BC}}\ .$$

Obtivemos assim os mesmos valores para x e y encontrados no método algébrico e o mesmo denominador.

2.2 Sistemas Lineares 3 x 3

Nesta seção resolveremos o sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas.

2.2.1 Solução Algébrica

Vamos considerar agora o sistema com incógnitas x, y e z dado abaixo.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = K & (1) \\ Dx + Ey + Fz = Q & (2) \\ Gx + Hy + Iz = T & (3) \end{cases}$$

Este sistema pode ser apresentado na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ Q \\ T \end{pmatrix}$$

Isolamos z na primeira equação e substituímos nas outras duas equações, obtendo assim um sistema 2×2, para o qual podemos usar a solução já apresentada para este caso.

De (1) temos $z = \frac{K - Ax - By}{C}$, desde que C ≠ 0. Substituindo esse valor de z na equação (2), teremos:

$$Dx + Ey + F\left(\frac{K - Ax - By}{C}\right) = Q$$

$$\rightarrow CDx + CEy + FK - FAx - FBy = CQ$$

$$\rightarrow (CD - FA)x + (CE - FB)y = CQ - FK$$

Agora, substituindo o valor de z na equação (3) temos:

$$Gx + Hy + I\left(\frac{K - Ax - By}{C}\right) = T$$

$$\rightarrow CGx + CHy + IK - IAx - IBy = CT$$

$$\rightarrow (CG - IA)x + (CH - IB)y = CT - IK.$$

Desse modo reduzimos a um sistema de duas equações e duas incógnitas como segue:

$$\begin{cases} A'x + B'y = E' \\ C'x + D'y = F' \end{cases}$$

Onde:

$$A' = CD - FA,$$

$$B' = CE - FB,$$

$$C' = CG - IA,$$

$$D' = CH - IB,$$

e $F' = CT - IK,$

Recuperando os valores de A', B', C' e D' o sistema se escreve:

$$\begin{cases} (\,CD - FA\,)x + (\,CE - FB\,)y = CQ - FK \\ (\,CG - IA\,)x + (\,CH - IB\,)y = \quad CT - IK \end{cases}$$

Resolvendo o sistema 2 x 2 como visto na seção anterior obtemos:

$$x = \frac{(CQ - FK\,)(\,CH - IB\,) - (CT - IK\,)(\,CE - FB\,)}{(\,CD - FA\,)(CH - IB\,) - (\,CE - FB\,)(\,CG - IA\,)}$$

$$\rightarrow \; x = \left(\frac{C^2HQ - BCIQ - CFKH + BFIK - C^2ET + BCTF + CEIK\_BFIK}{C^2DH - BCDI - ACFH + ABFI - C^2EG + ACEI + BCFG - ABFI}\right)$$

Eliminando os termos simétricos do numerador e do denominador de x, e dividindo os termos de x por C, teremos:

$$x = \frac{CHQ - BIQ - FKH - CET + BTF + EIK}{CDH - BDI - AFH - CEG + AEI + BFG}$$

Desde que (CDH – BDI – AFH – CEG + AEI + BFG) $\neq$ 0.

Do mesmo modo podemos encontrar o valor de y, procedendo as substituições, teremos:

$$y = \frac{(CT - IK\ )(\ CD - FA\ ) - (CQ - FK\ )(\ CG - IA\ )}{(\ CD - FA\ )(CH - IB\ ) - (\ CE - FB\ )(\ CG - IA\ )}$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{C^2DT - ACFT - CDIK + AIFK - C^2GQ + ACIQ + CFGK - AFIK}{C^2DH - BCDI - ACFH + ABFI - C^2EG + ACEI + BCFG - ABFI}\right)$$

Eliminando os termos simétricos do numerador e do denominador de y, e dividindo os termos de y por C, teremos:

$$y = \frac{CDT - AFT - DIK - CGQ + AIQ + FGK}{CDH - BDI - AFH - CEG + AEI + BFG}$$

Desde que (CDH – BDI – AFH – CEG + AEI + BFG) $\neq$ 0.

Como já temos x e y e sabendo que $z = \frac{K - Ax - By}{C}$, podemos calcular o valor de z, fazendo as substituições, cancelando as parcelas simétricas e efetuando as simplificações, obtemos:

$$z = \frac{K}{C} - \frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y,\ \text{C} \neq 0$$

$$\rightarrow z = \frac{KDH - KEG - AHQ + AET - BDT + BGQ}{CDH - BDI - AFH - CEG + AEI + BFG}$$

Onde (CDH – BDI – AFH – CEG + AEI + BFG) $\neq$ 0.

Comparando os resultados obtidos para *x*, *y* e *z* o leitor pode perceber que:

1º - o denominador de x, y e z é o mesmo.
2º - os numeradores guardam semelhanças com esse denominador.
3º - são sempre seis parcelas, sendo três com sinal de mais e três com sinal de menos, onde cada uma é formada pelo produto de três fatores.

Ao apresentar esse desenvolvimento numa classe temos como objetivo levar o aluno a perceber padrões, investigar, pesquisar.

Novamente podemos apresentar ao discente o determinante de uma matriz 3 x 3, como segue.

Dada uma matriz M = $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$, chamamos determinante desta matriz, denotado det(M) ao número dado por: det(M) = (CDH – BDI – AFH – CEG + AEI + BFG).

Uma vez compreendido a origem dos determinantes podemos mostrar ao aluno, uma maneira prática de obter os determinantes de matrizes 3×3.

Trabalhando os casos particulares de solução de sistemas podemos motivar a definição de determinantes como uma consequência, natural da resolução de sistemas lineares. Há indícios que essa era a visão de Gabriel Cramer. Fazer o aluno perceber essa ligação é algo de muita importância para o seu aprendizado. Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no Ensino Médio:

> Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1998, p.43)

Podemos começar uma discussão no sentido de que todos os conteúdos que aprendemos e ensinamos em matemática, tem seu valor, suas utilidades e aplicações.

Posteriormente os determinantes tiveram um tratamento mais formal e passaram a ser caracterizados a partir de suas propriedades como segue:

> Seja K um corpo, n um número natural e $M(n)$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas no corpo K. Seja a função $D: M(n) \rightarrow K$ que possui as seguintes propriedades:
>
> - D é linear como função de cada linha separadamente.
> - Sendo A uma matriz, $A \in M(n)$, se duas linhas adjacentes de A são iguais, então $D(A) = 0$.
> - Se I_n representa a matriz identidade de $M(n)$, então $D(I_n) = 1$.
>
> Essas propriedades determinam uma única função chamada de função determinante. (HEFEZ, 2012, p. 211).

Embora sob o olhar da formalidade matemática os determinantes estejam muito bem definidos acima, porém, consideramos essa abordagem inadequada para o ensino médio por estar numa linguagem ainda muito abstrata para este seguimento.

2.2.2 Solução Geométrica

Nesta seção consideraremos conhecido o conceito e algoritmo para cálculo do determinante de matrizes 3 x 3. Apresentaremos uma interpretação geométrica da solução de sistemas, para tanto introduzimos algumas definições importantes para este desenvolvimento.

NORMA DE UM VETOR

Sejam dois pontos A e B do espaço e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. A norma ou comprimento do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número $\|\vec{v}\| = d(A,B)$, onde $d\ (A,B)$ é a distância entre os pontos A e B. Dados $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, $d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

PRODUTO INTERNO

O produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço é o número real:

$$\langle \vec{u}\ , \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & se \quad \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha, & se\ \vec{u} \neq \vec{0}\ e\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

onde α é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ então $< \vec{u}, \vec{v} >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

PRODUTO VETORIAL

Seja OXYZ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} := (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

PRODUTO MISTO

O produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do espaço é o número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ dado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \langle \vec{u} \times \vec{v}\ , \vec{w} \rangle$.

O produto misto nada mais é do que o determinante da matriz do tipo 3 × 3 que tem por linhas as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na ordem que são listados. Ou seja, dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Interpretação geométrica do produto misto

Sejam A, B, C e D, pontos não coplanares e P o paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas adjacentes.

Considerando T o paralelogramo de lados adjacentes AB e AC como base de P, temos que Vol (P) = $Área(T) \cdot h$, onde h é a altura de P relativa à base T (ver Figura 3).

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ obtemos que a $Área(T) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$; sendo α o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$, temos que $h = \|\vec{w}\| \cdot |\cos\alpha|$.

Como mostra a figura 3 abaixo

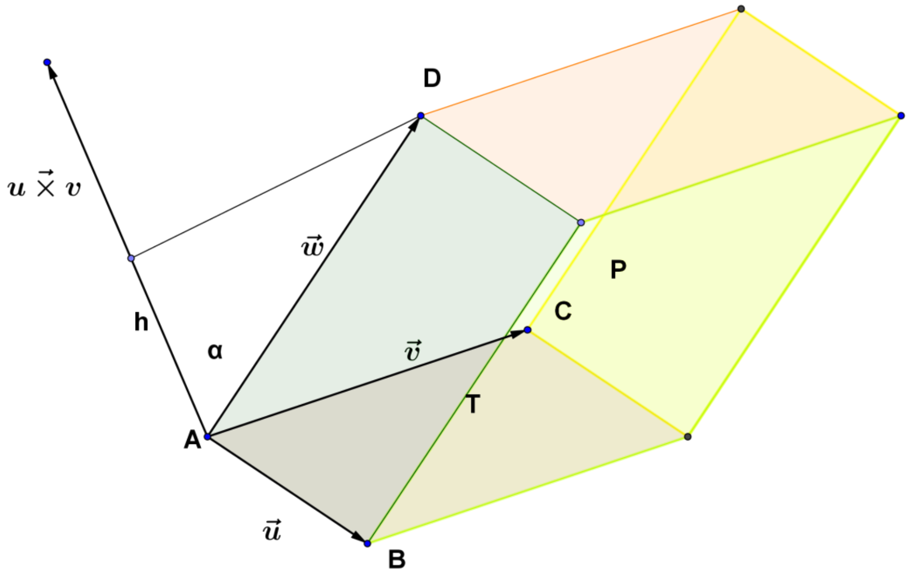

Figura 3: Interpretação geométrica do produto misto.

Portanto,

Vol (P) = $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos\alpha|$.

Ou seja, o volume de P é o módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\mathrm{Vol}\ (\mathrm{P}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|,$$

ou em termos dos vértices A, B, C e D,

$$\mathrm{Vol}\ (\mathrm{P}) = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

Seja o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = \alpha \\ Dx + Ey + Fz = \beta \\ Gx + Hy + Iz = \gamma \end{cases}$$

Na forma vetorial temos:

$$x\begin{pmatrix} A \\ D \\ G \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} B \\ E \\ H \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} C \\ F \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Tomemos os vetores $\vec{u} = (A, D, G)$, $\vec{v} = (B, E, H)$ e $\vec{w} = (C, F, I)$ e $\vec{m} = (\alpha, \beta, \gamma)$ representados na figura abaixo:

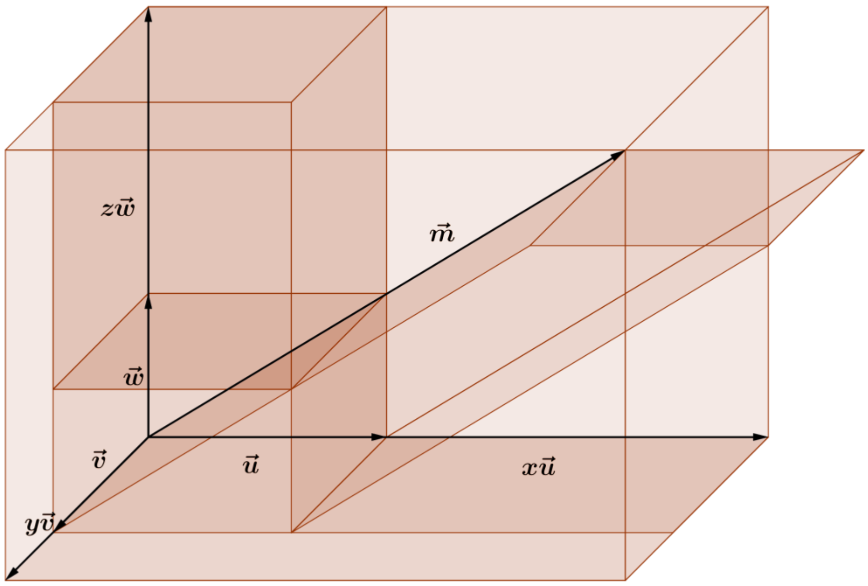

Figura 4: Resolução de sistema linear – caso espacial.

Note que o volume V_1 do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}, \vec{w}$ será $V_1 = \begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{vmatrix}$; O volume V_2 do paralelepípedo gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $z\vec{w}$ será $V_2 =$

$\begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ zC & zF & zI \end{vmatrix}$; E o volume V_3 do paralelepípedo gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{m}$ será V$_3$ = $\begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$.

E ainda $V_2 = zV_1 = V_3$.

Nessa equação, a primeira igualdade decorre do fato de que o paralelepípedo de volume V$_2$ tem a mesma base do paralelepípedo de volume V$_1$ e tem uma altura z vezes maior que este.

A segunda igualdade vem do princípio de Cavallieri, que afirma “ Dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume”. (LIMA, 2006, p.256). Como os paralelepípedos de volumes V_2 e V_3 têm a mesma base e a mesma altura, eles têm volumes iguais.

Sabendo-se que o determinante de uma matriz A, qualquer, é igual ao determinante de sua transposta, podemos afirmar que:

$$z\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & \alpha \\ D & E & \beta \\ G & H & \gamma \end{vmatrix} \to z = \frac{\begin{vmatrix} A & B & \alpha \\ D & E & \beta \\ G & H & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}}$$

Usando um raciocínio análogo, encontraremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & B & C \\ \beta & E & F \\ \gamma & H & I \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}} \text{ e } y = \frac{\begin{vmatrix} A & \alpha & C \\ D & \beta & F \\ G & \gamma & I \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}}.$$

Desde que o determinante $\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$ seja <u>não nulo</u>, como é o caso.

3. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Nesse capítulo, apresentaremos um outro método pra realizar o cálculo da solução de um sistema linear, que é muito usado já no ensino médio, a Eliminação Gaussiana, também chamado de escalonamento. Esse método apresenta algumas vantagens em relação a regra de Cramer: é computacionalmente menos custoso e serve também para classificar e discutir as soluções de um sistema linear.

3.1 Eliminação Gaussiana

A eliminação Gaussiana consiste em um dos métodos mais eficazes na resolução de sistemas lineares. Uma versão desse método apareceu pela primeira vez na literatura em torno de 200 a.C., no livro chinês *Nove Capítulos da Arte da Matemática*. Contudo, o poder do método não foi reconhecido até que o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss utilizou-o para calcular a órbita do asteróide Ceres.

O método de Gauss foi popularizado mais tarde pelo engenheiro alemão Wilhelm Jordan em seu livro intitulado *Handbuch der Vermessungskunde*, publicado em 1888. (ANTON, 2003).

Pode-se demonstrar que o conjunto solução de um sistema linear não é alterado quando são aplicadas operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema. Assim, podemos ter certeza que o sistema linear correspondente à forma escalonada reduzida por linhas tem as mesmas soluções que o sistema original.

3.1.1 Descrição do método

Dado um sistema de equações lineares da forma:

$$AX = B,$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, e X e B são matrizes colunas de ordem $n \times 1$, veja o esquema:

O método consiste em utilizar um certo número de transformações elementares, com o objetivo de tornar nulos todos os elementos da matriz que estiverem abaixo da diagonal principal.

Transformações elementares são

- inverter a posição de duas linhas;
- multiplicar uma linha por um número real;
- substituir uma linha pela soma dessa linha com um múltiplo de outra.

Descrevendo o método passo a passo:

1- Encontre uma coluna mais à esquerda cujos elementos não sejam todos nulos.

2- Troque a linha superior com outra, caso seja necessário, para obter um elemento não-nulo no topo da coluna encontrada no primeiro passo.

3- Se a é o elemento que agora está no topo, encontrado no primeiro passo, multiplique a primeira linha por $\frac{1}{a}$ para encontrar um pivô.

4- Agora pretendemos zerar todos os elementos abaixo do pivô da primeira linha, para isso, some múltiplos adequados da primeira linha a cada uma das linhas seguintes.

5- Agora desconsidere a primeira linha da matriz e recomece o método a partir do primeiro passo, aplicado a nova matriz obtida. Repita o procedimento até a matriz inteira ficar em forma escalonada por linha.

Obs: uma matriz está na forma escalonada por linha quando em cada uma das suas linhas, o primeiro elemento não-nulo está situado à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte.

Ilustraremos o método com um exemplo:

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3y - 4z = -18 \\ 3x + y + z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = -24 \end{cases},$$

A matriz dos ampliada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -18 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & -24 \end{pmatrix};$$

Encontra-se uma coluna mais à esquerda cujos elementos não sejam todos nulos (passo 1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & -18 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & -24 \end{pmatrix};$$

invertendo as posições das linhas 1 e 3 (passo 2), obteremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & -24 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -18 \end{pmatrix};$$

multiplicando a primeira linha dessa matriz por 1/2 (passo 3) teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -18 \end{pmatrix};$$

agora multiplica-se a primeira linha dessa matriz por (− 3) e soma-se a segunda linha (passo 4) obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & -5 & 10 & 40 \\ 0 & 3 & -4 & -18 \end{pmatrix};$$

multiplica-se a segunda linha por (−1/5) e desconsidera-se a primeira linha da matriz, recomeçando o processo (passo 5), obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -18 \end{pmatrix};$$

multiplicando-se a segunda linha por (− 3) e somando-se a terceira temos finalmente a matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

retornando ao sistema teremos:

$\begin{cases} x + 2y - 3z = -12 \\ y - 2z = -8 \\ 2z = 6 \end{cases}$, da última equação notamos que $z = 3$, valor que substituído na segunda equação resulta $y = -2$, substituindo os valores de x e y na primeira equação encontramos $x = 1$, sendo (x,y,z) = (1, − 2, 3) a solução do sistema.

4. REGRA DE CRAMER x ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Nesse capítulo apresentaremos a regra de Cramer e faremos uma análise comparativa da resolução de sistemas pela Regra de Cramer e Eliminação Gaussiana. Apresentaremos cinco casos (exemplos), com ilustrações que representam as posições relativas dos planos no espaço, bem como, suas interseções. Pensando geometricamente, cada uma das equações representará um plano e as posições relativas de três planos, sem que haja dois coincidentes.

4.1 Regra de Cramer

Um sistema linear é possível e determinado, isto é, tem solução e esta é única, se e somente se, o determinante da matriz M dos coeficientes for invertível, isto é, se det M $\neq$ 0.

Descrição do método

Apresentaremos nesta seção uma descrição da regra de Cramer para sistemas 2×2 e 3×3, como segue.

Considere o sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas abaixo:

$$\begin{cases} Ax + By = \alpha \\ Cx + Dy = \beta \end{cases}$$

$$detM = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$$

$$detM_x = \begin{vmatrix} \alpha & B \\ \beta & D \end{vmatrix} = \alpha D - \beta B \quad \text{e}$$

$$detM_y = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ C & \beta \end{vmatrix} = A\beta - \alpha C$$

Cramer afirma, no livro (*CRAMER, 1750, p. 657),* que a solução do sistema dado acima, desde que $detM \neq 0,$ será:

$$x = \frac{\det M_x}{\det \mathrm{M}} \text{ e } y = \frac{\det M_y}{\det \mathrm{M}};$$

No caso de 3 equações e 3 incógnitas, considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = \alpha \\ Dx + Ey + Fz = \beta \\ Gx + Hy + Iz = \gamma \end{cases}$$

Sejam:

$$detM = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = AEI + BFG + CDH - CEH - AFG - BDI$$

$$detM_x = \begin{vmatrix} \alpha & B & C \\ \beta & E & F \\ \gamma & H & I \end{vmatrix}, \; detM_y = \begin{vmatrix} A & \alpha & C \\ D & \beta & F \\ G & \gamma & I \end{vmatrix}, detM_z = \begin{vmatrix} A & B & \alpha \\ D & E & \beta \\ G & H & \gamma \end{vmatrix}$$

De acordo com Cramer a solução do sistema, onde $detM \neq 0$, será:

$$x = \frac{\det \mathrm{Mx}}{\det \mathrm{M}} \;, \; y = \frac{\det \mathrm{My}}{\det \mathrm{M}} \text{ e } z = \frac{\det \mathrm{Mz}}{\det \mathrm{M}}$$

Como foi dito anteriormente daremos exemplos de sistemas lineares com olhar geométrico antes porém, recordemos a como podemos obter a equação de um plano.

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto dado do plano π, $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer desse plano π e $\vec{n} = (A, B, C)$ um vetor normal do mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.

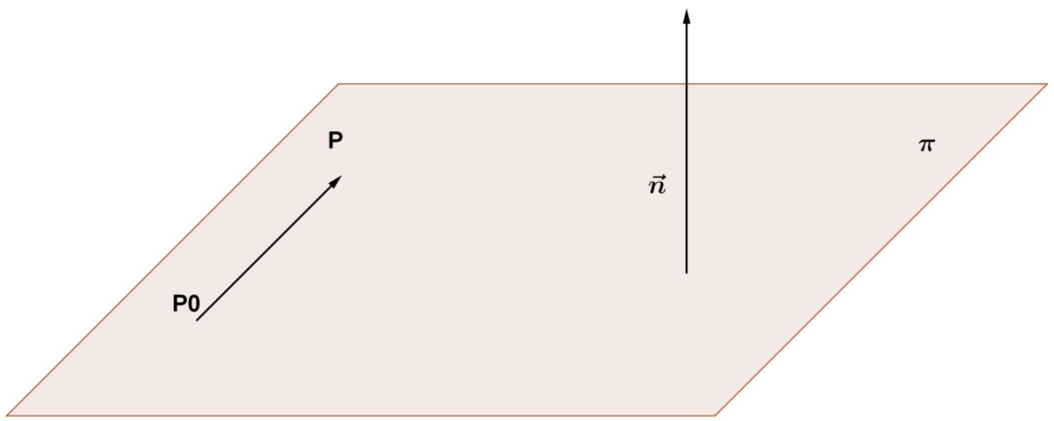

Figura 5: Plano definido por um ponto e um vetor normal.

Como os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{n}$ são normais, o seu produto interno é nulo: $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$

Notando D = $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, temos que equação do plano que contém P_0 e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ é dada por:

$$Ax + By + Cz = D$$

4.2 Resolvendo sistemas lineares

Nesta seção serão apresentadas cinco situações. Em cada uma delas, um sistema linear é proposto e resolvido tanto por regra de Cramer, quanto por escalonamento. Também é mostrada graficamente a posição relativa dos planos e comparadas as soluções obtidas por cada método. O objetivo aqui é mostrar que, em alguns casos, os sistemas lineares podem estar sendo classificados e discutidos nos livros didáticos de forma incorreta. Isso ocorre porque alguns autores fazem uso inadequado da regra de Cramer, como segue.

Forma INCORRETA da Regra de Cramer apresentada em livros didáticos:

Considere A a matriz dos coeficientes de um sistema 3 x 3.

- Um sistema é possível e determinado se $det\ A \neq 0$; (CORRETO)
- Um sistema é possível e indeterminado se $\begin{cases} detA = 0\ e \\ detA_x = detA_y = \mathrm{detA_z} = 0 \end{cases}$;
- Um sistema é impossível se $\begin{cases} detA = 0\ e \\ detA_x \neq 0\ ou\ detA_y \neq 0\ \mathrm{ou}\ \mathrm{detA_z} \neq 0 \end{cases}$;

De acordo com Cramer:

> Généralement parlant, le probléme est déterminé. Mais il peut y avoir des cas particuliers, ou il reste indetermine; & d'autres ou Il devient impossible. C'est lorsque le dénominateur commun se trouve égal à zero; c'est-à-dire, s'il n'y a que deux équations lorsque $Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1 = 0$, s'il y em a trois, lorsque $Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1 = 0$, &c. Alors, si le grandeurs A^1, A^2, A^3, &c. sont telles que les numérateurs soient aussi égaux à zero, le probléme est indéterminé; car le fractions 0/0, qui devroient donner la valeur des inconnues sont indéterminées. Mais si les grandeurs A^1, A^2, A^3, &c. sont telles que, le dénominateur commun étant zero, les numérateurs ou quelques-uns d'entr'eux ne soient pás zero, le probléme est impossible, ou du moins les grandeurs inconnues qui peuvent le résoudre sont, toutes ou em partie, infinies. (CRAMER, 1750, p. 658).
>
> De um modo geral o problema é determinado. Mas pode haver casos particulares, ou é indeterminado e em outros casos, impossível. É o caso em que o denominador comum é igual a zero; podemos dizer, se houver apenas duas equações onde $Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1 = 0$, ou três equações em que, $Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1 = 0$, etc. Assim, se as grandezas A^1, A^2, A^3, etc. são tais que os denominadores também são iguais a zero, o problema é indeterminado; porque as frações 0/0, que devem dar os valores das incógnitas são indeterminadas. Mas se as grandezas A^1, A^2, A^3, etc. são tais que, o denominador comum é zero e algum dos numeradores não é zero, o problema é impossível, ou pelo

> menos as variáveis que podem ser encontradas são, todas ou parte delas, infinitas. (CRAMER, 1750, p. 658).

Está claro que a regra é enunciada pelo autor, fazendo uso das recíprocas das implicações mostradas acima, desse modo, se considerarmos também essas recíprocas, passamos a ter 6 proposições. O exemplo número 5, feito a seguir, prova que é falsa a recíproca da segunda implicação e que também é falsa a terceira implicação.

Situação 1: Considere dois planos paralelos e o terceiro cortando os anteriores, segundo retas paralelas (ver figura 6)

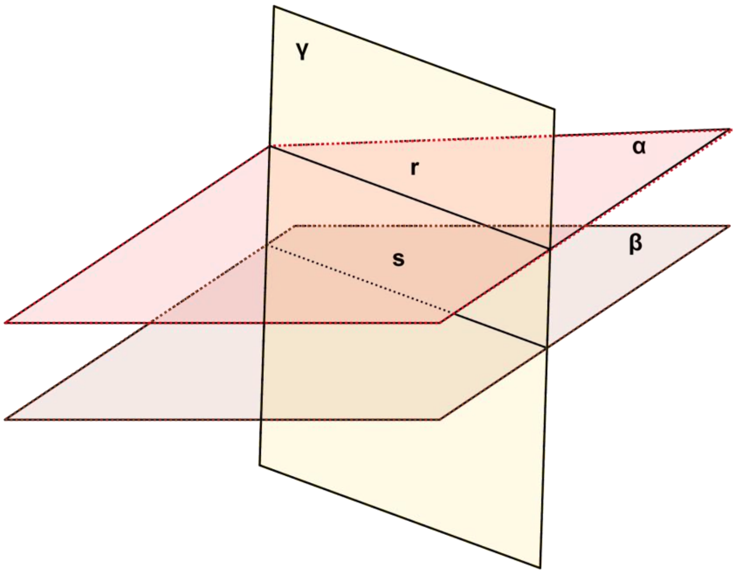

Figura 6: *Dois planos paralelos α e β cortados por um terceiro plano transversal γ.*

Para tal aplicação usaremos as equações lineares abaixo:

- Exemplo 1: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

Utilizando a regra de Cramer teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+2+3-2-3-1=0$$

$$det\ A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3-1=2$$

$$detA_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$detA_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

O sistema é impossível, pois pela regra de Cramer $x = \frac{det\ A_x}{detA}$, $detA_x = 2$ e $detA = 0$.

Aplicando o escalonamento teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_2 + (-1)L_1$$

A linha dois da primeira matriz foi substituída pela soma da linha dois com o simétrico da linha um. Observe que segunda linha da matriz escalonada indica que o sistema é impossível pois não é possível ter 0x + 0y + 0z = 1.

Repare neste exemplo o quanto foi mais vantajoso, utilizar o escalonamento em relação à regra de Cramer.

Situação 2: Dois planos intersectando-se segundo uma reta e o terceiro plano cortando essa reta em um só ponto (Ver figura 7).

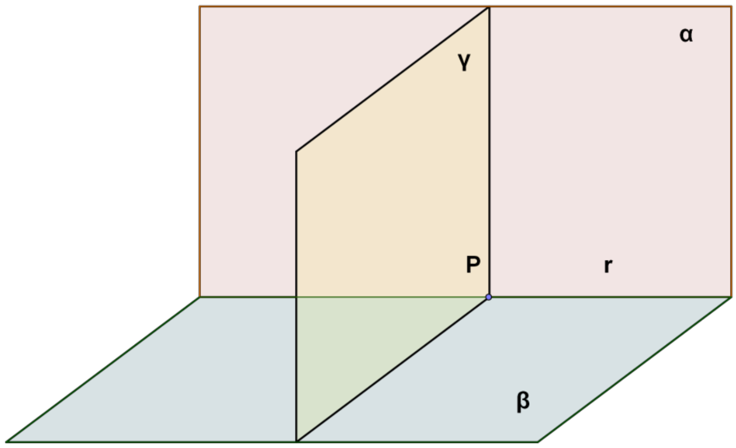

Figura 7: Dois planos α e β intersectando-se segundo uma reta e um terceiro plano γ cortando essa reta em um só ponto.

Para tal aplicação usaremos equações lineares abaixo:

- Exemplo 2: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$

Utilizando a regra de Cramer teremos:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+1+6-1-3-4 = 1$$

$$det\ A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0$$

$$det\ A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-2 = 2$$

$det\ A_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2$, de modo que a solução do sistema será:

$x = \frac{\det \mathrm{Ax}}{\det \mathrm{A}} = \frac{0}{1} = 0$, $y = \frac{\det \mathrm{Ay}}{\det \mathrm{A}} = \frac{2}{1} = 2$ e $z = \frac{\det \mathrm{Az}}{\det \mathrm{A}} = \frac{-2}{1} = -2$.

Resolvendo o exemplo 2 por escalonamento, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

Retornando ao sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-z=0 \\ -z=2 \end{cases}$$

Podemos concluir que $z = -2$ e substituindo esse valor de z na segunda equação, temos:

$$-y+2=0 \rightarrow y=2$$

Substituindo y e z na primeira equação, temos:

$$x+2-2=0 \rightarrow x=0$$

Coincidindo obviamente com a solução obtida com o outro método.

Situação 3: Três planos intersectando-se, dois a dois, segundo três retas paralelas conforme figura 8.

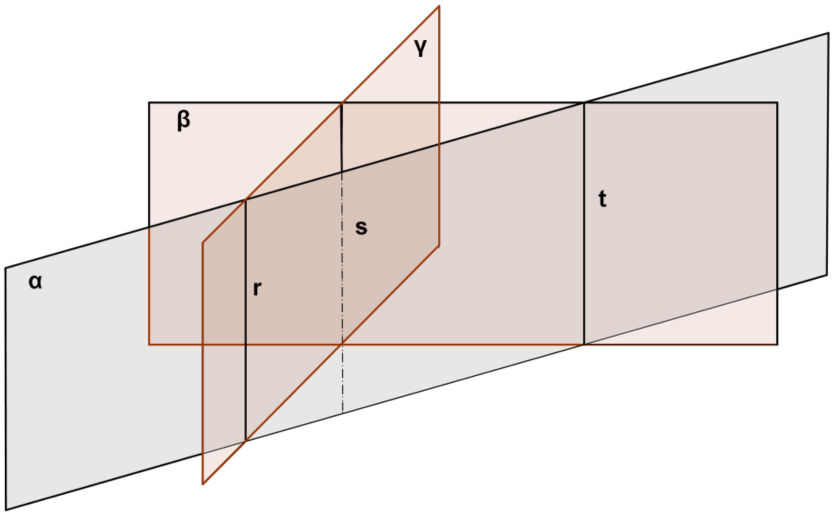

Figura 8: *Três planos intersectando-se, dois a dois, segundo três retas paralelas.*

Para tal aplicação usaremos o exemplo numérico abaixo:

- Exemplo 3: Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

Usando a regra de Cramer, teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 6 - 3 - 3 - 8 = 0$$

$$detA_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 6 - 3 = 1$$

$$detA_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 2 - 4 = -1$$

$$detA_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 3 - 8 = 1$$

Sistema impossível, pois pela regra de Cramer, $x = \frac{det\,A_x}{detA}$, $detA_x = 1$ e $detA = 0$.

Resolvendo o mesmo sistema por escalonamento, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Sistema impossível.

Situação 4: Três planos intersectam-se segundo uma única reta (ver figura 9)

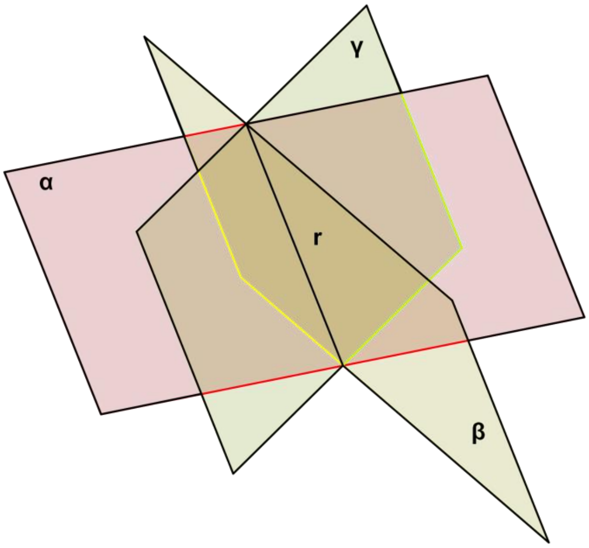

Figura 9: *Três planos α, β e γ intersectam-se segundo uma única reta.*

Para tal aplicação usaremos o exemplo numérico abaixo:

- Exemplo 4: Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Usando a regra de Cramer, teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 1 - 4 = 0$$

$$detA_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 6 - 1 = 0$$

$$detA_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$detA_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 8 = 0$$

Sistema possível indeterminado.

Observe que nesse exemplo, a regra de Cramer nos diz muito pouco sobre a solução do sistema, apenas que há infinitas soluções, mas, não dá informações sobre a natureza dessas soluções.

Vamos, agora, resolver o exemplo número 4 por escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

A última linha (nula) indica que a última equação do sistema do exemplo 4, era uma combinação linear das outras duas equações.

Voltando ao sistema, teremos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad -y - z = 2 \end{cases}$$

Nesse ponto devemos observar a incógnita que não começa em nenhuma das equações. É o 'z', esse deve ser colocado como o parâmetro α, então teremos $z = \alpha \rightarrow -y - \alpha = -2 \rightarrow y = -\alpha + 2$ e $x - 2\alpha + 4 + \alpha = 1 \rightarrow x = \alpha - 3$ e a solução do sistema será $S = \{(\alpha - 3, -\alpha + 2, \alpha)\}, \alpha \in R$. Como há só um parâmetro, α, a solução apresenta somente um grau de liberdade, portanto é uma reta.

O sistema é possível e indeterminado.

Situação 5: Três planos paralelos (ver figura 10)

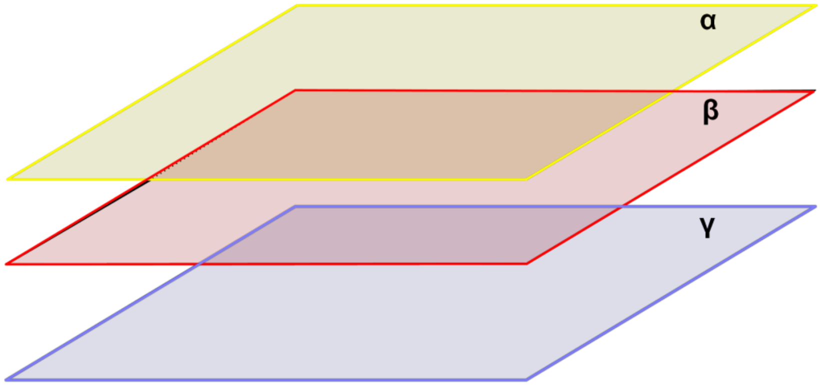

Figura 10: *Três planos α, β e γ paralelos.*

Para tal aplicação usaremos o exemplo numérico abaixo:

- Exemplo 5: Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = 3 \\ 6x - 3y + 3z = 7 \end{cases}$

Usando a regra de Cramer, teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 6 - 6 - 6 = 0$$

$$detA_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 7 - 9 - 7 - 3 + 9 = 0$$

$$detA_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 6 - 14 - 18 + 14 + 6 = 0$$

$$detA_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 + 6 - 6 + 18 - 14 = 0$$

De acordo com a regra de Cramer, este sistema é possível indeterminado.

Vamos, agora, resolver o exemplo número 5 por escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

A segunda linha nos informa que o sistema é impossível.

Repare que nos quatro primeiros exemplos, o resultado obtido com a regra de Cramer foi mesmo alcançado pelo escalonamento. Porém, no exemplo número 5, os resultados encontrados, pelos dois métodos, foram diferentes.

Isso ocorre sempre que tomamos três equações que representam três planos paralelos.

Um número infinito de sistemas como esse pode ser construído e todas as soluções encontradas pelos dois métodos serão diferentes.

Voltando ao exemplo 5, vamos utilizar agora um terceiro método para ver o que ocorre, o método da substituição. Isolando z na primeira equação, obtemos:

$$z = 1 - 2x + y.$$

Substituindo esse valor de z na segunda equação, teremos:

$$-2x + y - 1 + 2x - y = 3 \rightarrow -1 = 3.$$

Ou seja, o sistema é, realmente, impossível.

5. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS – SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo iremos analisar alguns livros didáticos utilizados em diversos sistemas de ensino de nosso país, sob os aspectos: clareza, objetividade e rigor conceitual na abordagem dos temas: determinantes, sistemas lineares e regra de Cramer, com objetivo de corrigir possíveis erros e orientar professores e alunos na escolha de um texto de referência.

Todos os livros aqui analisados são largamente utilizados no ensino médio, alguns verdadeiros *best sellers*, com milhares e milhares de cópias vendidas. Alguns fazem parte do PNLEM (programa nacional do livro didático para o ensino médio), programa que visa prover livros didáticos para todos os alunos de escolas públicas do país, nas esferas municipal estadual e federal. Assim, a cada ano, o governo brasileiro, através do FNDE (fundo nacional para a educação) adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino.

Seis livros didáticos foram analisados, como segue

5.1 Matemática - 2ªSérie

MATEMÁTICA-2ª SÉRIE, do autor Oscar Guelli, editora Ática, 1ª edição, que está no PNLEM, cita a regra de Cramer mas, não a usa para discutir sistemas lineares. Essa discussão é feita por outro método (escalonamento). Este livro também aborda primeiro o tema determinantes e só em seguida, os sistemas lineares. Ordem inversa a que propomos.

Este livro apresenta os determinantes sem fazer uma conexão com os sistemas lineares. Apresenta a fórmula para o cálculo de um determinante 2 x 2, sem fazer nenhum exemplo e faz um exemplo do caso 3 x 3. Em seguida mostra como calcular o determinante de uma matriz n x n mas, com um outro exemplo de matriz 3 x 3. Nenhum exemplo de determinante de matriz 4 x 4 é apresentado.

Com respeito à regra de Cramer, o livro apresenta uma demonstração para o caso 3 x 3 baseada em propriedades dos determinantes. Não é dito claramente que a regra só deve ser utilizada quando o determinante da matriz formada pelos coeficientes das variáveis é diferente de zero. Também não é mencionado que a regra de Cramer vale para sistemas n x n.

O método do escalonamento não aparece no texto de forma explícita. São apresentados exemplos que o autor resolve por um técnica que ele chama de adição. As operações elementares não são expostas com clareza, o mesmo ocorrendo com o passo a passo da eliminação gaussiana.

O livro não apresenta interpretações geométricas da resolução de sistemas lineares, não deixa claro que há outros métodos para resolver sistemas lineares e também não afirma que o escalonamento é o método mais adequado de abordagem do tema.

5.2 Matemática Fundamental

MATEMÁTICA FUNDAMENTAL, editora ftd, 1ª edição. o trio de autores José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni jr, apresenta na página 204 a seguinte implicação:

Impossível $\rightarrow$ det A = 0 e pelo menos um det $A_n \neq 0$.

Essa implicação está errada. Já vimos nessa dissertação (capítulo 4, exemplo 5) que se os três planos forem paralelos o sistema é impossível e todos os determinantes da regra de Cramer são nulos. Esse livro utiliza a regra de Cramer para discutir sistemas lineares (utilizando a implicação acima) o que em algum momento levará o aluno ao erro. Este livro também aborda primeiro o tema determinantes e só em seguida, os sistemas lineares. Ordem inversa a que propomos.

Nesse livro os determinantes são apresentados sem se fazer conexão com os sistemas lineares. É fornecido um método para o cálculo de um determinante de segunda ordem, de terceira ordem e de ordem maior que 3. Alguns exemplos são mostrados.

No capítulo seguinte, o livro traz os sistemas lineares, começa apresentando equações lineares e suas soluções e em seguida mostra a regra de Cramer para um sistema linear n x n, discute e classifica sistemas lineares utilizando a regra de Cramer, o que certamente não se deve fazer; e não enfatiza que a regra só deve ser usada para resolver sistemas em que a matriz dos coeficientes das variáveis é diferente de zero. O livro, nesse capítulo, não faz nenhuma consideração acerca da interpretação geométrica dos sistemas lineares e não aborda o método da eliminação gaussiana.

5.3 Matemática Aula por Aula

MATEMÁTICA AULA POR AULA, dos autores Claudio Xavier da Silva e Benigno Barreto Filho, editora ftd, 2ª edição, que está no pnlem, não usa a regra de cramer para discutir sistemas, só para resolvê-los mas, na pag. 229 há um equivoco: o texto afirma

"*Quando um sistema linear n x n é possível e determinado, o determinante D da matriz incompleta é diferente de zero.* Reciprocamente, quando o determinante D da matriz incompleta é diferente de zero, o sistema é possível e determinado." Grifo do autor.

A recíproca da implicação em destaque não é a apresentada no livro e sim - quando o determinante D da matriz incompleta é diferente de zero, o sistema linear n x n é possível e determinado -. Este livro também aborda primeiro o tema determinantes e só em seguida, os sistemas lineares. Ordem inversa a que propomos.

No capítulo de determinantes, esses são apresentados sem qualquer conexão com os sistemas lineares. O texto mostra uma fórmula para o cálculo de um determinante de segunda ordem e resolve um único exemplo. Em seguida, faz o mesmo para um determinante de terceira ordem e cita superficialmente, mostrando um único exemplo, os determinantes de ordem maior que 3.

O capítulo seguinte trata dos sistemas lineares, reforça os conceitos de equações e sistemas lineares, homogêneos e não homogêneos e suas soluções. Apresenta interpretação geométrica para sistemas lineares 2 x 2 mas, não para sistemas 3 x 3. Explica a regra de Cramer para sistemas 2 x 2 e resolve alguns exemplos. Enfatiza que a regra pode ser usada para resolver sistemas n x n e que somente pode ser utilizada quando o determinante da matriz dos coeficientes das variáveis é diferente de zero.

Com respeito ao escalonamento, as operações elementares não são colocadas de forma clara e objetiva; o método não é exposto passo a passo, o que dificulta a compreensão do leitor, a resolução dos exemplos pouco auxilia no entendimento do método. O livro não menciona o fato de que há outros métodos para a resolução de sistemas lineares e não afirma que o escalonamento é a ferramenta mais adequada para tratar o assunto sistemas lineares.

5.4 Conexões com a Matemática

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA, que está no pnlem, organizado pela editora moderna, 1ª edição, sob a responsabilidade de Juliane Matsubara Barroso, faz uma ressalva que só se deve usar a regra de Cramer quando o determinante principal é diferente de zero. Este livro não usa a regra de Cramer para discutir sistemas lineares. Essa discussão é feita utilizando-se o escalonamento. Este livro também aborda primeiro o tema determinantes e só em seguida, os sistemas lineares. Ordem inversa a que propomos.

No capítulo de determinantes, o assunto é apresentado sem que seja feita nenhuma conexão com os sistemas lineares. Essa ligação é mencionada de forma superficial no capítulo seguinte. São mostradas as formas de calcular os determinantes de ordem 1, 2 e 3 com exemplos resolvidos de forma objetiva. Há também uma explicação detalhada do cálculo de determinantes de ordem maior que 3, com exemplos.

No capítulo de sistemas lineares, estes são definidos, classificados mas, só é feita a interpretação geométrica para o caso 2 x 2. A regra de Cramer é demonstrada para sistemas 2 x 2. É indicado que ela vale para sistemas n x n e que só deve ser utilizada quando o determinante da matriz dos coeficientes das variáveis é diferente de zero.

Na seção sobre escalonamento, as operações elementares são expostas de forma clara e objetiva bem como, o passo a passo do método. São apresentados exemplos adequados para ilustrar cada situação: sistema possível determinado, sistema possível indeterminado e sistema impossível. O livro não deixa claro que há outros métodos de resolução de sistemas lineares e não enfatiza que o escalonamento é a melhor forma de abordagem do tema sistemas lineares.

5.5 Matemática Ciência e Aplicações

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, 2° volume, editora saraiva, 5ª edição, que está no pnlem. só utiliza a regra de cramer resolver sistemas lineares e faz a ressalva, na página 128, de que só se deve usar a regra de Cramer quando o determinante principal da matriz é diferente de zero. Neste livro, os sistemas lineares aparecem antes dos determinantes, ordem que consideramos mais adequada.

Ao abordar sistemas lineares, o livro exibe uma interpretação geométrica para o caso de sistemas 2 x 2, não fazendo o mesmo para sistemas 3 x 3. Quanto ao escalonamento, as operações elementares são expostas com clareza e o método é explicado, passo a passo, de forma correta e objetiva. Há exemplos resolvidos dos casos: possível determinado, possível indeterminado e de um sistema impossível. O texto não mostra que um sistema 3 x 3 também pode ser resolvido por sucessivas substituições e não indica que o escalonamento é o método mais adequado para a abordagem do tema sistemas lineares.

Quanto à regra de Cramer, o texto mostra a regra aplicada a sistemas 2 x 2 e 3 x 3. Enfatiza que a regra só deve ser usada no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes das variáveis é diferente de zero mas, não menciona o fato de que a regra de Cramer também vale para sistemas n x n.

Esse livro aborda de forma superficial a ligação dos determinantes com os sistemas lineares (na demonstração da regra de Cramer para sistemas 2 x 2). Apresenta os determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3, com exemplos resolvidos de forma objetiva e traz os determinantes de ordem maior que 3 em um apêndice.

5.6 Matemática – volume único

MATEMÁTICA – VOLUME ÚNICO do autor Manoel Paiva: Editora Moderna. 1ª edição. Aqui a ordem é primeiro, os sistemas lineares e após, os determinantes. Ordem que consideramos mais adequada.

Esse livro faz a resolução e discussão dos sistemas lineares somente pelo método do escalonamento.

No capítulo de sistemas lineares, são definidos e classificados os sistemas homogêneos e não homogêneos, discute-se a interpretação geométrica de sistemas 2 x 2 mas, não de sistemas 3 x 3. Quando se aborda o escalonamento, há uma operação elementar colocada de forma incorreta, o passo a passo do método não está claro e o exemplo resolvido não esclarece a situação satisfatoriamente. O livro não traz a regra de Cramer nem outros métodos de resolução de sistemas lineares.

Os determinantes são apresentados no livro como consequência da resolução de sistemas lineares. São demonstradas as fórmulas de cálculo dos determinantes de ordem 2 e de ordem 3 a partir a resolução de sistemas lineares. O texto explica a regra de Sarrus e alguns exemplos são resolvidos. O livro não faz referência a determinantes de ordem maior que 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procuramos chamar atenção para os erros, flagrantes ou discretos, que ainda vêm ocorrendo em um grande número de livros didáticos, com respeito a regra de Cramer. Notamos, também, a omissão do referido tema em muitos outros livros.

Está claro que os sistemas lineares devem ser discutidos pelo método do escalonamento e não pela regra de Cramer. A eliminação gaussiana é a forma mais adequada, para se discutir sistemas lineares, pois é uma teoria com vasto ferramental e a regra de Cramer é menos usada na prática, seu uso se dá principalmente na demonstração de alguns resultados matemáticos. A eliminação gaussiana é mais vantajosa em relação à regra de Cramer para resolver e discutir sistemas lineares. Primeiramente, ela é menos custosa computacionalmente e em segundo lugar, aplicada corretamente, levará a resultados corretos.

A regra de Cramer foi, durante muito tempo e em muitos livros, aplicada de forma incorreta. Havia exceções que não foram percebidas. A bem da verdade, depois de críticas feitas em algumas revistas científicas ,muitas correções foram feitas nos livros didáticos e alguns autores passaram a evitar o tema regra de Cramer mas, como pudemos ver, alguns erros acabam se perpetuando.

Quando fazemos as demonstrações algébricas da regra de Cramer, objetivamos explicitar a ligação entre a resolução de sistemas lineares e o cálculo dos determinantes, deixando claro que os determinantes só fazem sentido ou só se justificam a partir da necessidade de resolver sistemas lineares. Essa ligação é quase sempre negligenciada nos livros didáticos. Portanto, digamos que não é recomendável, a bem da lógica, o livro tratar primeiro de determinantes e só em seguida, de sistemas lineares.

As demonstrações geométricas da regra de Cramer servem para reforçar o entendimento do assunto por parte dos alunos e estabelecem uma conexão entre diferentes campos da matemática: vetores, área de paralelogramo, volume de paralelepípedo e determinantes. Constituindo assim uma proposta de construção do conhecimento.

Quando nos propomos a resolver alguns sistemas lineares e fornecemos o aspecto gráfico, as posições relativas dos planos no espaço, intencionamos em primeiro lugar, ajudar o aluno a desenvolver o raciocínio espacial em seguida, ressaltar a economia de cálculos da eliminação gaussiana em relação à regra de Cramer, e ainda, deixar claro que não devemos usar a regra de Cramer para classificar ou discutir sistemas lineares, conforme a maior parte dos livros didáticos vinha fazendo.

Tentamos propor uma nova abordagem do assunto regra de Cramer, em uma perspectiva mais histórica, passo a passo, levando o aluno (leitor) a tirar suas próprias conclusões. Como disse Paulo Freire:” Ninguém ensina nada a ninguém, mas as pessoas também não aprendem sozinhas. “Os homens se educam entre si mediados pelo mundo”, para ele a missão do professor era possibilitar a criação ou a produção de conhecimentos.

Nessa proposta, que ora apresentamos, sugerimos que os determinantes sejam vistos e ensinados, a partir da sua conexão estreita com os sistemas lineares. Defendemos que o assunto deve ser abordado assim no ensino médio.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: Ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

ANTON, Howard, BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Tradução de Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2003

BARROSO,JulianeMatsubara (Ed.). **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, 2010

CRAMER, Gabriel. **Introduction a L'analyse des Lignes Courbes Algébriques**. 1. ed. Geneve, 1750.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 4. ed.São Paulo: Ática, 2007.

DAUBEN, Joseph W., SCRIBA, Christoph J. **Writing the history of mathematics: its historical development**: Basel: Birkhauser, 2002.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Notas de Geometria Analítica**. (PROFMAT).

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto, GIOVANNI JR.. **Matemática Fundamental**. 1. ed. São Paulo: F.T.D., 1994.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no ensino médio**. 3. ed. São Paulo: Scipione, 2008.

GUELLI, Oscar. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.

HEFEZ, Abramo e FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

IEZZI, Gelson, HAZZAN, Samuel, **Fundamentos de Matemática Elementar.** 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: Ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

JOHANSON, Bengt; SWETZ, Frank; FAUVEL, John; BEKKEN, Otto; KATZ, Victor.**Learn from the masters**. [Washington D.C]: The mathematical association of America,1995.

LIMA, Elon et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática**: temas e metas. 1. ed. São Paulo: Atual, 1986.

MUIR, Thomas. **The theory of determinants**: in the historical order of development.3. ed. New York: Dover publications, 1960.

NETO, Aref Antar et al.**Combinatória, matrizes e determinantes.** 1. ed. São Paulo: Moderna,1979.

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F., Matrices and determinants. Mactutor History of Mathematics archive. Disponível em: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Matrices and determinants.html#35 1996. Acesso em: 28 de jul. 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: volume único. 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

POOLE, David. **LinearÁlgebra:** a modern introduction. 1. ed. Thomson, 1955.

SILVA, Cláudio Xavier, BARRETO, Benigno. **Matemática**: aula por aula. 2. ed. São Paulo: F.T.D., 2005.

SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.