



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Uma Introdução ao Estudo das Coordenadas Baricêntricas no Triângulo[†]

por

José Edmar Bezerra Junior

sob orientação do

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2013

João Pessoa - PB

Uma Introdução ao Estudo das Coordenadas Baricêntricas no Triângulo

por

José Edmar Bezerra Junior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Setembro/2013

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço ao Grande Criador, Deus, por me guiar e iluminar meus pensamentos, fortalecer minha vontade, por me dar forças pelas incansáveis e longas viagens, abençoar minha vida e permitir generosamente a realização de meus sonhos.

A minha caríssima esposa Roseane Melo, pelo apoio e força, compreensão com meus estudos e paciência com a minha ausência em tantos momentos, principalmente aos fins de semana.

À minha mãe, saudosa mãe, Bemvinda Novaes, e ao meu pai, José Edmar, por todo o apoio e luta para dar o melhor em educação para todos os seus filhos.

Aos meus irmãos Leandro e Lisandro, pelo apoio em cuidar de minha família nos momentos em que eu estava distante.

Aos meus filhos, o que nos faz buscar sempre o melhor para nossa família.

Aos coordenadores do Programa de Mestrado, Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó e Prof. Dr. Bruno Henrique, pelo apoio e conselhos no decorrer de nosso Curso.

Agradeço a acolhida que tive na residência do Sr. Antonio Coutinho e sua esposa, Sra. Lizete, os quais me receberam em seu lar, um desconhecido até então, como um membro da família.

A todos os professores envolvidos com o Mestrado Profissional em Matemática

- PROFMAT que são nossos inspiradores e motivadores para o nosso crescimento como um profissional do ensino. Um agradecimento especial ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Venegas, pelas orientações neste trabalho e pelas aprendizagens que me permitiu com o desenvolvimento desta dissertação.

Aos colegas e amigos de PROFMAT, especialmente ao grande amigo Antonio Marcos, companheiro de luta o qual estivemos juntos durante esses dois anos de curso, durante nossas cansativas viagens e que muito me encorajou em seguir em frente o obter nossos objetivos.

Dedicatória

*A todos os profissionais de Ensino das
escolas públicas brasileiras.*

Resumo

Abordar a geometria dos triângulos significa, obrigatoriamente, tratar dos diversos centros ou pontos notáveis do triângulo. Dentre eles, os mais destacáveis e antigos são indubitavelmente o incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro, mas não são os únicos. Para ajudar a compreender melhor as propriedades e relações entre estes e outros centros do triângulo, a introdução das coordenadas trilineares ocupa um papel muito importante. A partir daí, abre-se espaço para o estudo das coordenadas geométricas dos triângulos, sendo o enfoque deste trabalho monográfico o estudo das coordenadas baricêntricas de tais figuras.

Palavra-chave: Coordenadas baricêntricas, triângulo, geometria analítica.

Abstract

Addressing the geometry of triangles necessarily mean dealing with various centers or notable points of the triangle. Among them, the most noteworthy and old are undoubtedly the incenter, centroid, circumcenter and orthocenter, but are not the only ones. To help you better understand the properties and relationships between these and other centers of the triangle, inputting Coordinates Trilinear occupies a very important role. Thereafter, there is room for the study of the geometric coordinates of the triangles being the focus of this study monograph barycentric coordinate of such figures.

Keywords: Barycentric Coordinates, Triangle, Analytic Geometry

Sumário

1	Cevianas e Pontos Notáveis do Triângulos	1
1.1	Definição e elementos do triângulo	1
1.1.1	Convenção de escrita	2
1.2	Cevianas	2
1.3	Pontos Notáveis de um Triângulo	5
1.3.1	Baricentro	5
1.3.2	Incentro	6
1.3.3	Ortocentro	7
1.3.4	Circuncentro	8
2	Coordenadas Baricêntricas de um Triângulo	10
2.1	Möbius: o criador das Coordenadas Baricêntricas	10
2.2	Coordenadas baricêntricas	12
2.3	Relação entre coordenadas baricêntricas e área com sinal	15
2.4	Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas	24
2.5	Coordenadas Baricêntricas do Incentro	24
2.6	Coordenadas Baricêntricas do circuncentro	25
2.7	Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro	27
2.8	A fórmula de Conway	30
2.8.1	Notação	30

2.8.2	Fórmula de Conway	33
2.9	O teorema do co-lado	35
2.9.1	Teorema de Ceva	38
2.10	Cálculo de áreas de triângulos e a relação com as coordenadas baricêntricas	42
2.11	Uma fórmula simples para as Coordenadas Baricêntricas	43
2.12	Aplicações das coordenadas baricêntricas	46
	Referências Bibliográficas	50

Introdução

A geometria é, juntamente à teoria de números, uma dos ramos mais antigos da Matemática. Se por um momento se restringe o termo para referir-se ao que os antigos gregos entendiam como tal, poder-se-á afirmar que seu objeto de estudo está intimamente enraizado em nossa forma de conceber a realidade. Toda a informação que se recebe do mundo que nos cerca, tudo o que se poderá ver, ouvir ou tocar, será processado primeiramente em termos geométricos.

A figura geométrica triângulo no estudo da geometria é uma das mais importantes. É utilizado em diversos ramos, podemos destacar a construção civil. Em Geometria Analítica, estudamos o triângulo através das coordenadas de seus vértices. Assim podemos determinar suas classificações quanto aos lados e quanto aos ângulos, seus pontos médios, sua área e quais as coordenadas de seu baricentro.

Abordar a geometria dos triângulos significa, obrigatoriamente, tratar dos diversos centros ou pontos notáveis do triângulo. Dentre eles, os mais destacáveis e antigos são indubitavelmente o incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro, mas não são os únicos. Para ajudar a compreender melhor as propriedades e relações entre estes e outros centros do triângulo, a introdução das coordenadas trilineares ocupa um papel muito importante.

Vamos definir inicialmente o que é o Baricentro. Segundo o Dicionário, o Baricentro é um ponto em torno do qual existe um equilíbrio de forças. Nos triângulos é o encontro de suas medianas. No ensino fundamental e médio, quando estamos

estudando os triângulos aprendemos que existem outros pontos que não variam, isto é, independem da posição e do formato do triângulo. Como já vimos, um destes pontos é o baricentro. Podemos destacar outros pontos notáveis: o incentro (encontro das bissetrizes internas), o circuncentro (encontro das mediatrizes) e o ortocentro (intersecção das alturas) são conhecidos desde a Grécia Antiga.

O estudo da geometria do triângulo é muito vasta. Ao longo dos tempos vários outros pontos de destaque foram identificados. Kimberlig fez a catalogação de mais de 3000 centros especiais em triângulos. Cada centro destes é descrito através de suas Coordenadas Baricêntricas. Quem inicialmente apresentou estas coordenadas foi o matemático alemão August Ferdinand Mobius em 1827.

As Coordenadas baricêntricas estão diretamente associadas ao conceito de área. É possível criar uma série de sistemas de axiomas usando o conceito de área. O estudo de área é muito antigo e uma das demonstrações que podemos destacar é a demonstração proposta por Euclides para demonstrar o Teorema de Pitágoras, onde se usa a ideia de áreas de quadrados construídos nos lados do triângulo retângulo.

Este costume de usar áreas para demonstrações geométricas não é exclusividade dos matemáticos ocidentais. Têm-se notícias que os chineses já utilizavam estes métodos. Em muitas situações usamos como ferramentas para demonstrações as congruências e semelhança dos triângulos. Só que isto não é um artifício que podemos utilizar em todas as situações quando estamos estudando geometria. É bastante comum e natural depararmos com situações em que os triângulos não são congruentes ou semelhantes. É comum termos triângulos com lados em comum e assim, podemos fazer o uso intuitivo de retas auxiliares nas demonstrações de Teoremas.

Neste estudo, iremos considerar as fórmulas mais utilizadas no estudo da geometria analítica no que diz respeito às coordenadas cartesianas do ponto médio M_{AB} de um segmento de reta AB , as coordenadas cartesianas do baricentro G de um triângulo ABC e a área S convencional deste triângulo.

A partir daí, abre-se espaço para o estudo das coordenadas geométricas dos triângulos, sendo o enfoque deste trabalho monográfico o estudo das coordenadas baricêntricas de tais figuras.

Este trabalho está baseado nas notas dos professores da Universidade Federal Fluminense - UFF, Humberto Bortolossi e José Osório, cujo título é *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo*.

Capítulo 1

Cevianas e Pontos Notáveis do Triângulos

1.1 Definição e elementos do triângulo

Um triângulo, em Geometria, é um polígono determinado por três retas que se cortam, duas a duas, em três pontos, que não se encontram alinhados, isto é, não são colineares. Os pontos de intersecção das retas são os vértices e os segmentos de reta determinados são os lados do triângulo. Dois lados adjacentes formam um dos ângulos interiores do triângulo.

Portanto, um triângulo tem três ângulos interiores, três ângulos exteriores, três lados e três vértices. Se estiver contido em uma superfície plana, é denominado triângulo, ou trígono, um nome menos comum para este tipo de polígonos. Caso esteja contido em uma superfície esférica, denomina-se triângulo esférico. Representado, em cartografia, sobre a superfície terrestre, chama-se triângulo geodésico.

1.1.1 Convenção de escrita

Os pontos principais de uma figura geométrica, como os vértices de um polígono, costumam ser designados por letras latinas maiúsculas, por exemplo: A, B, C . Um triângulo é nomeado então como qualquer outro polígono, designando sucessivamente seus vértices, por exemplo, ABC . No caso do triângulo, os vértices podem ser situados em qualquer ordem, porque qualquer das 6 maneiras possíveis ($ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$), corresponde a um percurso de seu perímetro. Contudo, tal ação já não é verdadeira para polígonos com mais vértices.

Os lados do triângulo se denotam, como todos os segmentos, por seus extremos: $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} . Para nomear a longitude de um lado, geralmente se utiliza o nome do vértice oposto, convertido a minúscula latina: a para \overline{BC} , b para \overline{AC} e c para \overline{AB} . A notação geral para o ângulo entre dois segmentos \overline{OP} e \overline{OQ} que compartilham o extremo O é: $P\hat{O}Q$.

Também é possível utilizar uma letra minúscula, habitualmente uma letra grega, coroada por um acento circunflexo. A rigor, os ângulos devem ser designados por letras maiúsculas e sua medida por minúsculas, mas com frequência se utilizam os mesmos nomes para os dois com o fim de simplificar a notação. No caso de um triângulo, o ângulo entre dois lados ainda pode, por tolerância e na ausência de ambiguidade, ser designado pelo nome do vértice comum, coroado por um acento circunflexo. Em resumo, no exemplo se podem observar os ângulos:

$$\begin{cases} \alpha = \hat{a} = \hat{A} = B\hat{A}C \\ \beta = \hat{b} = \hat{B} = A\hat{B}C \\ \gamma = \hat{c} = \hat{C} = A\hat{C}B \end{cases}$$

1.2 Cevianas

Vamos abordar, agora, quais são os pontos notáveis dos triângulos, que são: o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro. Para que haja uma melhor

compreensão, faremos inicialmente um estudo sobre as Cevianas, apresentando alguns conceitos iniciais.

As Cevianas que serão abordadas neste estudo são as medianas, bissetrizes internas e as alturas dos triângulos. Podemos definir as Cevianas como um segmento de reta que une um vértice de um triângulo a um ponto da reta suporte do lado oposto a este vértice.

A denominação de Ceviana foi dada a estes segmentos em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648 – 1734), que desenvolveu o Teorema de Ceva, demonstrando, assim, que as três Cevianas concorrem em um mesmo ponto.

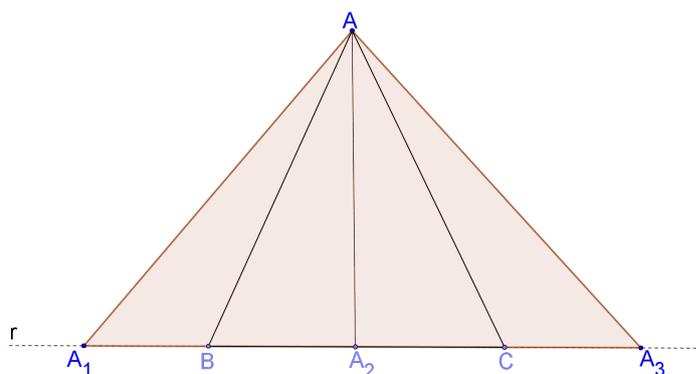


Figura 1.1: Cevianas do triângulo $\triangle ABC$.

Na figura 1.1, temos a reta r suporte do lado \overline{BC} . De acordo com a definição, a Ceviana tem uma de suas extremidades em um dos vértices no triângulo. A seguinte extremidade da Ceviana, que podemos denominar de pé, fica localizada na reta r .

Assim, na figura podemos destacar os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ e $\overline{AA_3}$ como Cevianas do triângulo ABC , relativas ao vértice A .

É importante destacar que por cada vértice de um triângulo, podem ser traçadas infinitas Cevianas, tanto interna ou externamente. Dentre essas infinitas Cevianas, são três que merecem destaque: a mediana, a bissetriz e a altura. Outro fato que merece destaque é que a mediatriz não é considerada como uma Ceviana, por não

passar pelo vértice, raro em algumas exceções, contraria a definição de Ceviana.

Mediana: é toda ceviana que tem uma das extremidades no ponto médio de um lado do triângulo.

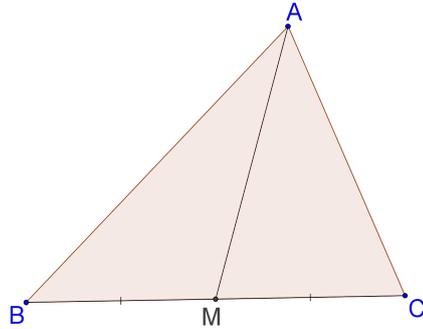


Figura 1.2: Mediana \overline{AM} do triângulo $\triangle ABC$.

Bissetriz Interna: é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes.

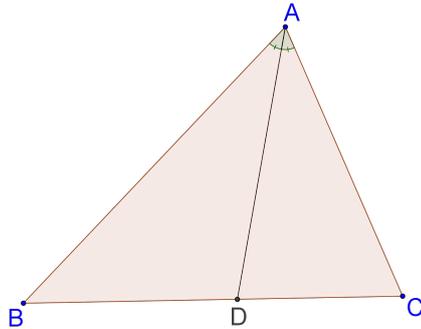


Figura 1.3: Bissetriz do triângulo $\triangle ABC$ em relação ao vértice A .

Altura: é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte.

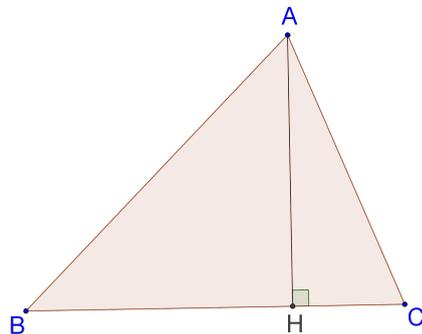


Figura 1.4: Altura do triângulo $\triangle ABC$ relativo ao vértice A .

1.3 Pontos Notáveis de um Triângulo

Para os triângulos, podemos destacar as seguintes propriedades:

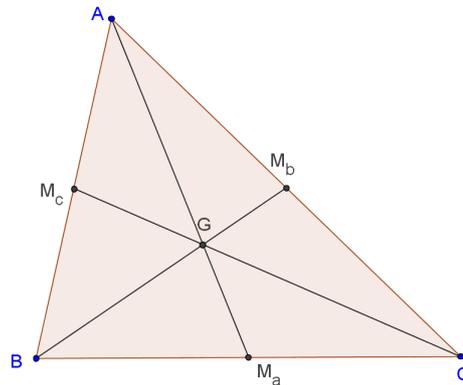
- I As três medianas concorrem num mesmo ponto;
- II As três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto;
- III As retas suportes das três alturas concorrem num mesmo ponto;
- IV As mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto.

Os pontos de encontro das cevianas notáveis e das mediatrizes são denominadas pontos notáveis.

1.3.1 Baricentro

Definição 1 *Baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das medianas desse triângulo.*

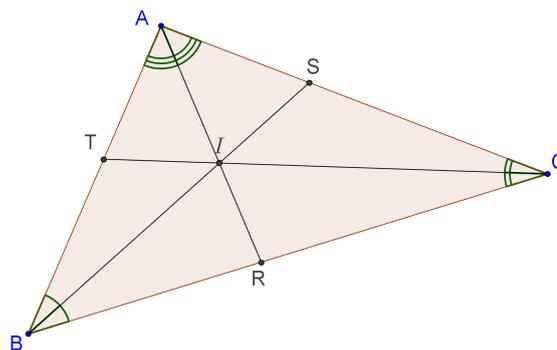
No triângulo ABC da figura 1.5, $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$ são as medianas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. O ponto G (encontro das medianas) é o baricentro do triângulo ABC .

Figura 1.5: Baricentro do triângulo $\triangle ABC$.

A palavra baricentro é de origem grega, onde bari, que quer dizer peso e designa o centro dos pesos. Podemos então, identificá-lo como o centro de gravidade ou ponto de equilíbrio dos triângulos.

1.3.2 Incentro

Definição 2 O Incentro de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo.

Figura 1.6: Incentro do triângulo $\triangle ABC$.

No triângulo $\triangle ABC$ da figura 1.6, \overline{AR} , \overline{BS} e \overline{CT} são as bissetrizes internas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

O nome deriva da expressão *in e centru*, que quer dizer reto centro. O ponto I é o incentro do triângulo $\triangle ABC$, este ponto é o centro do círculo inscrito ao triângulo $\triangle ABC$.

1.3.3 Ortocentro

Definição 3 O ortocentro é o ponto onde se intersectam as três alturas relativas de um triângulo, isto é, as perpendiculares traçadas desde os vértices até aos lados opostos ou seus prolongamentos. O nome deriva da expressão grega orto, que quer dizer reto, referindo-se ao ângulo formado entre as bases e as alturas.

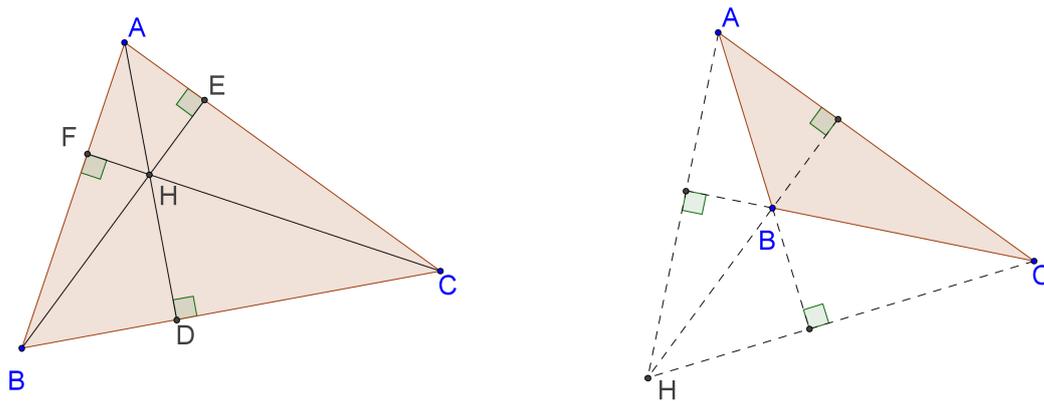


Figura 1.7: A esquerda, ortocentro interno no triângulo $\triangle ABC$. A direita, ortocentro externo.

O ortocentro encontra-se na região interna do triângulo se este é acutângulo, coincide com o vértice do ângulo reto se for retângulo e encontra-se fora do triângulo no caso deste ser obtusângulo.

No triângulo $\triangle ABC$ da figura 1.7, \overline{AH} , \overline{BH} , e \overline{CH} são as retas suportes das alturas \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} , respectivamente, relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. O ponto H é o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$.

1.3.4 Circuncentro

Definição 4 *O circuncentro é o ponto intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo.*

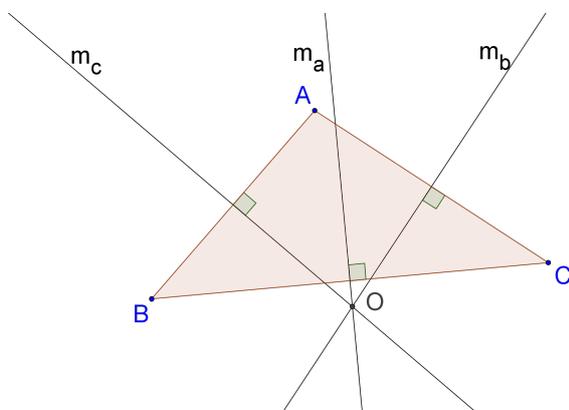


Figura 1.8: Circuncentro do triângulo $\triangle ABC$.

Esta denominação vem do latim *circum*, que pode ser traduzido com "ao redor de".

Este ponto é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, que irá tangenciar os seus vértices. Sendo assim, é um ponto que é equidistante dos vértices do triângulo.

No triângulo $\triangle ABC$ da figura 1.8, m_a , m_b e m_c são as mediatrizes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

O ponto O é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$.

Diferentemente dos quadrados e dos círculos, os triângulos têm muitos centros. Os antigos gregos encontraram quatro: incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro. Os pontos que atualmente são acreditados como centro da circunferência dos

nove pontos, simediano, ponto de Gergonne, pontos de Fermat ou ponto de Feuerbach, de forma a nomear somente alguns, foram adicionados à bibliografia existente. Nos anos 80, observou-se que estes pontos especiais compartilham algumas propriedades gerais que agora formam a base de uma definição formal de centros de um triângulo.

Capítulo 2

Coordenadas Baricêntricas de um Triângulo

2.1 Möbius: o criador das Coordenadas Baricêntricas

August Ferdinand Möbius nasceu em Schulpforta, em 17 de novembro de 1790 e faleceu em Leipzig, no dia 26 de setembro de 1868. Foi um matemático e astrônomo alemão. Ele fez contribuições a matemática e astronomia, onde podemos destacar algumas de suas criações: a fita de Möbius, a função de Möbius, as transformações de Möbius, a fórmula de inversão de Möbius e a rede de Möbius.

Inicialmente Möbius ingressa na Faculdade de Direito, mas em pouco tempo, dirige seus estudos para a matemática e astronomia. Em 1816 inicia sua carreira de professor na Universidade de Leipzig. A sua carreira como docente não foi fácil. Na época, os professores da sua categoria cobravam uma taxa aos alunos pelas aulas que leccionavam. A fraca frequência às suas aulas obrigavam-no por vezes a anunciar a respectiva gratuitidade. Möbius apenas conseguiu obter a cátedra de astronomia em 1844 e quatro anos mais tarde tornou-se o diretor do observatório astronômico

de Leipzig. Möbius dedicou mais de 50 anos de sua vida a docência.



Figura 2.1: August Ferdinand Möbius

Como Möbius interessou-se por Astronomia, escreveu vários livros sobre o assunto e estudou com Gauss no Observatório de Göttingen. No campo da Matemática, em sua obra *Der barycentrische Calcul* (Cálculo do Centro de Gravidade), de 1827, apresentou suas coordenadas baricêntricas, adotou as novas notações de Bobillier, realçou o significado dos elementos ideais de Poncelet, classificou transformações geométricas (congruências, semelhanças, afins e colineações) e sugeriu o estudo de invariantes; deu às coordenadas um sentido puramente aritmético e não mais geométrico. Möbius é mais conhecido pela "superfície de um só lado" (faixa de Möbius), figura construída que, ao se unirem as extremidades de uma tira flexível, após ter sido torcida numa meia volta, apresenta apenas uma extremidade e um lado, o que o tornou pioneiro da Topologia, ramo da Geometria que trata das propriedades das figuras que não se alteram com deformações sem solução de continuidade.

2.2 Coordenadas baricêntricas

Definição 5 *Sejam A, B e C vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e P um ponto qualquer do plano. Dizemos que u, v e w são as coordenadas baricêntricas de P em relação ao triângulo $\triangle ABC$ se*

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} \quad (2.1)$$

onde $u + v + w \neq 0$, desta forma podemos escrever as coordenadas baricêntricas do seguinte modo

$$P = (u : v : w). \quad (2.2)$$

Observação: Usando argumentos da Geometria Analítica podemos ver que todo ponto do plano escreve-se pela fórmula 2.1, com efeito, como A, B e C são vértices de um triângulo $\triangle ABC$, então os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} formam uma base do plano, então, dado qualquer ponto do plano \mathcal{P} podemos escrever \overrightarrow{AP} como uma combinação linear de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} isto é,

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}, \quad (2.3)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Introduzindo o ponto O (origem do sistema), temos que

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \alpha(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \beta(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$

assim,

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC}$$

tomando $u = 1 - \alpha - \beta$, $v = \alpha$, $w = \beta$, $u + v + w = 1$ e usando a identificação de ponto com vetor, temos

$$P = (1 - \alpha - \beta)A + \alpha B + \beta C.$$

Em particular, observe que se P é ponto médio de \overline{AB} , então

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC},$$

logo as coordenadas baricêntricas de P seriam

$$P = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0\right).$$

A proposição a seguir mostra que as coordenadas baricêntricas não são únicas. De fato, se $P = (u : v : w)$ e $Q = (ku : kv : kw)$ com $k \neq 0$, então $P = Q$.

$$Q = \frac{(uk)A + (vk)B + (wk)C}{uk + vk + wk} = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = P$$

Proposição 1 *Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P_1 e P_2 em relação a um triângulo $\triangle ABC$. Logo, $P_1 = P_2$ se, e somente se, existe um número real não nulo k tal que $u_2 = ku_1$, $v_2 = kv_1$ e $w_2 = kw_1$.*

Demonstração: Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P_1 e P_2 em relação a um triângulo de referência $\triangle ABC$ e $P = (u : v : w)$ as coordenadas baricêntricas de um ponto qualquer do plano. Com essas hipóteses podemos escrever

$$\begin{aligned}(u + v + w) \cdot P &= uA + vB + wC, \\(u_1 + v_1 + w_1) \cdot P_1 &= u_1A + v_1B + w_1C \text{ e} \\(u_2 + v_2 + w_2) \cdot P_2 &= u_2A + v_2B + w_2C,\end{aligned}$$

onde

$$u + v + w \neq 0, \quad u_1 + v_1 + w_1 \neq 0 \text{ e } u_2 + v_2 + w_2 \neq 0.$$

(\Rightarrow) Suponhamos $P_1 = P_2$, onde $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$, $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Desta hipótese temos que a área do triângulo

$\Delta PP_1P_2 = 0$, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{ux_A+vx_B+wx_C}{u+v+w} & \frac{uy_A+vy_B+wy_C}{u+v+w} & 1 \\ \frac{u_1x_A+v_1x_B+w_1x_C}{u_1+v_1+w_1} & \frac{u_1y_A+v_1y_B+w_1y_C}{u_1+v_1+w_1} & 1 \\ \frac{u_2x_A+v_2x_B+w_2x_C}{u_2+v_2+w_2} & \frac{u_2y_A+v_2y_B+w_2y_C}{u_2+v_2+w_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando-se as linhas por $u + v + w$, $u_1 + v_1 + w_1$ e $u_2 + v_2 + w_2$, temos

$$\begin{vmatrix} ux_A + vx_B + wx_C & uy_A + vy_B + wy_C & u + v + w \\ u_1x_A + v_1x_B + w_1x_C & u_1y_A + v_1y_B + w_1y_C & u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2x_A + v_2x_B + w_2x_C & u_2y_A + v_2y_B + w_2y_C & u_2 + v_2 + w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

logo,

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

Como o determinante acima se anula para quaisquer valores de u, v e w (primeira linha), temos que a terceira linha é múltipla da segunda, ou seja, existe um número real não-nulo k tal que

$$u_2 = ku_1, v_2 = kv_1, w_2 = kw_1$$

(\Leftarrow) Suponha que existe um número real não nulo k tal que $u_2 = ku_1, v_2 = kv_1$ e $w_2 = kw_1$. Dessa hipótese e da definição de coordenadas baricêntricas, temos que

$$P_2 = \frac{u_2A + v_2B + w_2C}{u_2 + v_2 + w_2} = \frac{ku_1A + kv_1B + kw_1C}{ku_1 + kv_1 + kw_1} = \frac{u_1A + v_1B + w_1C}{u_1 + v_1 + w_1} = P_1$$

■

2.3 Relação entre coordenadas baricêntricas e área com sinal

Convencionalmente, calculamos a área de um triângulo $\triangle ABC$ formado por três pontos A, B e C não-colineares pela fórmula:

$$\nabla ABC = \frac{a \cdot h}{2}$$

onde h representa a medida de uma altura relativa a uma base de medida a do triângulo e ∇ABC representa a área convencional (euclidiana) de um triângulo $\triangle ABC$.

Definição 6 *Sejam A, B e C três pontos do plano. Se A, B e C forem colineares, definimos área com sinal S_{ABC} do triângulo $\triangle ABC$ como sendo 0 (triângulo degenerado). Mas se tivermos três pontos do plano A, B e C não-colineares, então definimos:*

1. $S_{ABC} > 0$ se A, B e C estão dispostos no sentido anti-horário;
2. $S_{ABC} < 0$ se A, B e C estão dispostos no sentido horário;

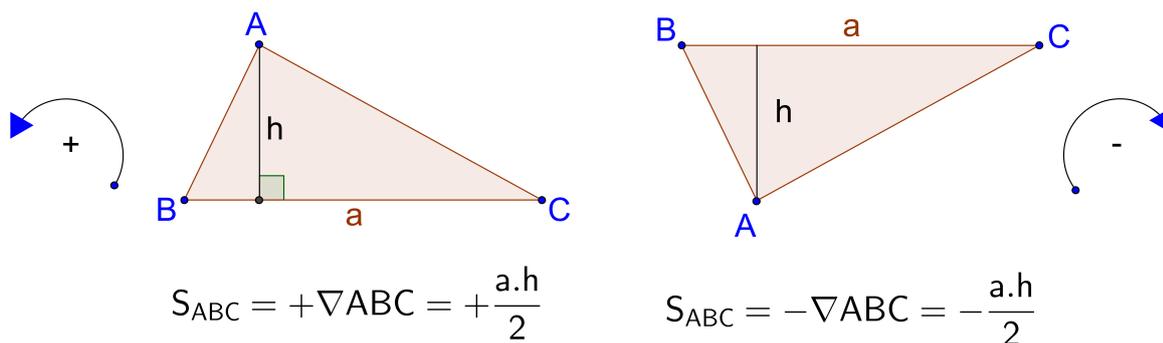


Figura 2.2: Área do triângulo ABC com sinais

A área com sinal, conforme destacado anteriormente, possui duas propriedades importantes:

1. (Propriedade da permutação) Segue-se da definição que

$$S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB} = -S_{ACB} = -S_{CBA} = -S_{BAC}.$$

2. (Propriedade da decomposição) Sendo $\triangle ABC$ um triângulo, um ponto P pertencente a um plano, determina outros três sub-triângulos $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ e $\triangle PAB$.

Dado um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P do plano, este ponto determina outros três triângulos: $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ e $\triangle PCA$. Com os conhecimentos de áreas com sinal, podemos relacionar as áreas destes quatro triângulos de acordo com a seguinte expressão:

$$S_{ABC} = S_{PAD} + S_{PBC} + S_{PCA}.$$

Em geral, usando as áreas convencionais dos triângulos temos as seguintes sete relações possíveis dependendo da posição do ponto P , como indicam as figuras 2.3 e 2.4.

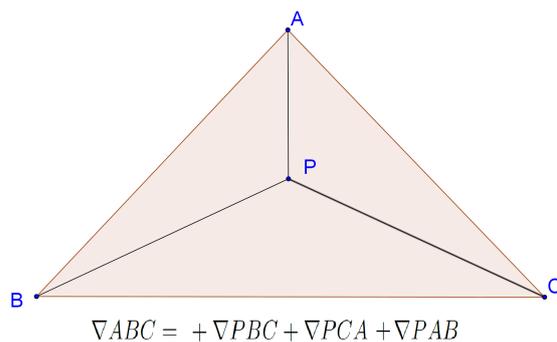


Figura 2.3: Posição do ponto P interno em relação ao triângulo $\triangle ABC$.

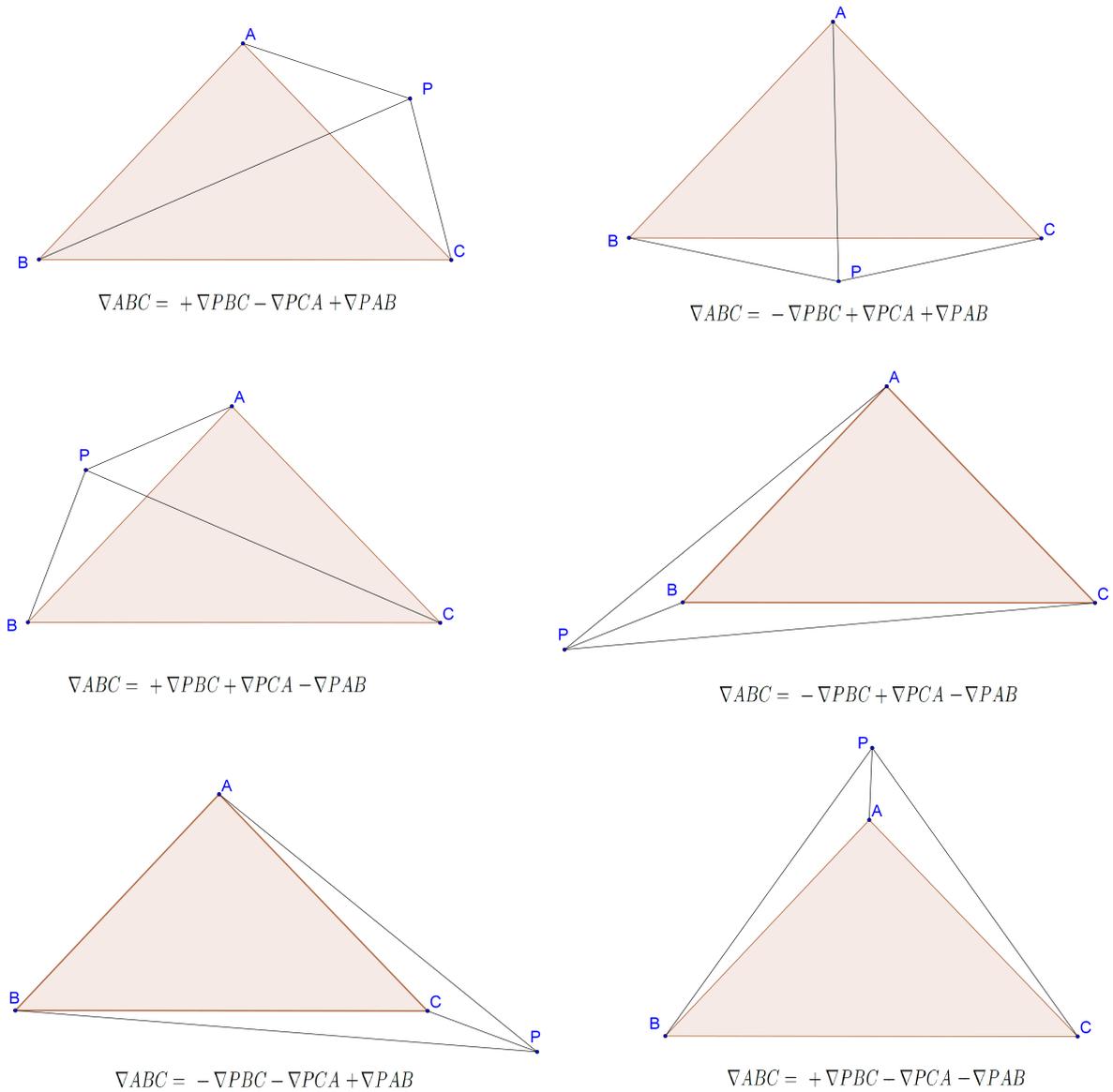


Figura 2.4: Posição do ponto P externo em relação ao triângulo $\triangle ABC$.

Olhando as figuras 2.3 e 2.4 e os sinais das áreas, temos a seguinte combinação de sinais:

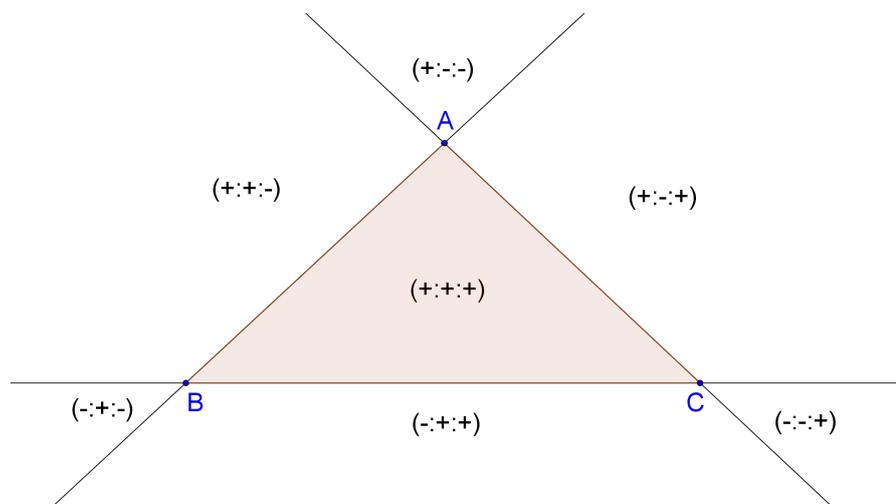


Figura 2.5: Regiões e áreas com sinais.

Observemos que quando $P \in \overleftrightarrow{AB}$, a reta que passa pelos vértices A e B , então a coordenada $w = 0$, de fato,

$$P = \frac{uA + vB}{u + v},$$

com $u + v \neq 0$.

Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ pontos do plano, então a área com sinal S_{ABC} é dado por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}D$$

onde

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Primeiramente provaremos os seguintes resultados:

Lema 6.1 *Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas cartesianas dos vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$ e $R = (x_R, y_R)$ as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo $\triangle PQR$ obtido por uma rotação seguida de uma translação dos vértices A, B e C . Sejam também*

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ e } D_f = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

1. $D_f = D$.
2. $|D| = 2 \cdot \nabla ABC$.
3. Se A, B e C são colineares, então $D = 0$.
4. Se A, B e C estão dispostos no sentido anti-horário, então $D > 0$.
5. Se A, B e C estão dispostos no sentido horário, então $D < 0$.

Demonstração: (1) Sabemos que as rotações do plano são dadas pela matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

onde θ é o ângulo de rotação, e as translações são simplesmente

$$T_{(h,k)}(x, y) = (x + h, y + k)$$

h, k constantes. Assim, temos as seguintes relações

$$P = T_{(h,k)} \circ R_\theta(A) = (\cos\theta x_A - \text{sen}\theta y_A + h, \text{sen}\theta x_A + \cos\theta y_A + k)$$

$$Q = T_{(h,k)} \circ R_\theta(B) = (\cos\theta x_B - \text{sen}\theta y_B + h, \text{sen}\theta x_B + \cos\theta y_B + k)$$

$$R = T_{(h,k)} \circ R_\theta(C) = (\cos\theta x_C - \text{sen}\theta y_C + h, \text{sen}\theta x_C + \cos\theta y_C + k)$$

então, usando propriedades de determinante segue-se que $D_f = D$.

(2) Fazendo rotações seguidas de translações convenientes dos vértices de $\triangle ABC$, podemos supor que as coordenadas do novo triângulo podem ser dadas por $(0, 0)$, $(a, 0)$, com $a > 0$, e (\bar{x}, \bar{y}) . Veja a figura 2.6.

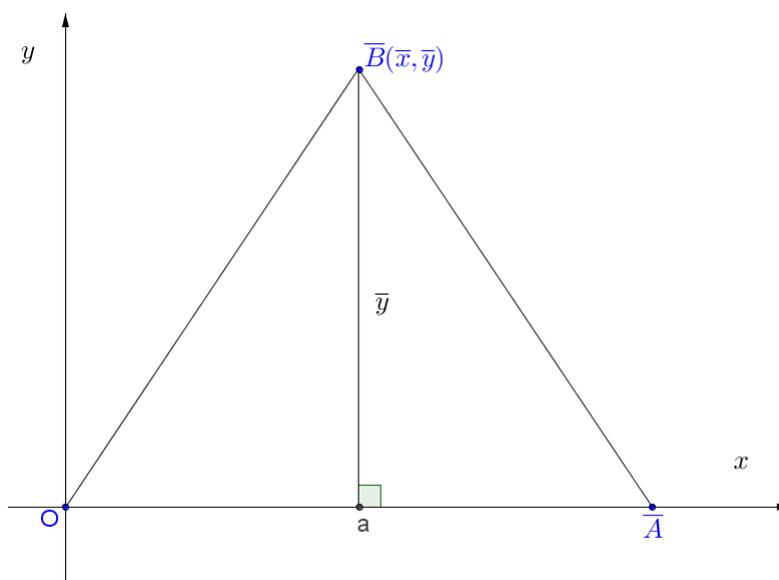


Figura 2.6: Triângulo $\triangle ABC$ transladado e rotacionado.

então, de (1) temos que

$$|D| = |D_f| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ \bar{x} & \bar{y} & 0 \end{vmatrix} = |a\bar{y}| = 2 \cdot \nabla ABC$$

(3) Perceba que, quando A, B e C são colineares, temos $h = 0$ o que acarreta $D = 0$.

(4) Perceba que, quando A está no semiplano hachurado, A, B e C ficam dispostos no sentido anti-horário e, neste caso, temos $P = (x_P, h)$ o que acarreta $D > 0$.

(5) Perceba que, caso tomássemos o vértice A no semiplano oposto, A, B e C ficariam dispostos no sentido horário e, neste caso, teríamos $P = (x_P, -h)$ o que acarretaria $D < 0$.

■

Proposição 2 *Sejam $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas*

cartesianas de três pontos no plano. Então a área com sinal S_{ABC} é dada por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{bmatrix}$$

Demonstração: Para a demonstração, vamos considerar casos.

(1) Para A, B e C colineares, temos pela definição de área com sinal que $S_{ABC} = 0$ e pelo Lema 10.1 (3), $D = 0$. Neste caso, vale que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot D.$$

(2) Para A, B e C dispostos no sentido anti-horário, temos pela definição de área com sinal e pelo Lema 10.1 (2) que $S_{ABC} = +\nabla ABC = |D|/2$ e pelo Lema 10.1 (4), $D > 0$. Neste caso, como $|D| = D$, vale que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot D.$$

(3) Para A, B e C dispostos no sentido horário, temos pela definição de área com sinal e pelo Lema 10.1 (2) que $S_{ABC} = -\nabla ABC = -|D|/2$ e pelo Lema 10.1 (5), $D < 0$. Neste caso, como $|D| = -D$, vale que

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} \cdot (-D) = \frac{1}{2} \cdot D.$$

De (1), (2) e (3), quaisquer que sejam A, B e C , temos

$$\frac{1}{2} \cdot D.$$

■

A proposição a seguir mostra que as coordenadas baricêntricas de um ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$ podem ser dadas pelas áreas orientadas S_{PBC} , S_{PCA} e S_{PAB} .

Proposição 3 (*Coordenadas baricêntricas e área com sinal*) *Sejam A, B e C vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P qualquer do plano. Então, as coordenadas baricêntricas de P podem ser dadas por:*

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$$

Demonstração: Sejam $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ e $P = (x_P, y_P)$ as coordenadas cartesianas de um ponto do plano. Então, temos que:

$$\begin{vmatrix} x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a primeira coluna é igual à segunda coluna da matriz acima. Logo, desenvolvendo o determinante usando a primeira coluna, obtemos:

$$x_P \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_P \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} - x_C \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é,

$$x_P(2 \cdot S_{ABC}) - x_A(2 \cdot S_{PBC}) - x_B(2 \cdot S_{PCA}) - x_C(2 \cdot S_{PAB}),$$

logo,

$$S_{ABC} \cdot x_P = S_{PBC} \cdot x_A + S_{PCA} \cdot x_B + S_{PAB} \cdot x_C$$

Analogamente, procedemos na determinação em relação as ordenadas:

$$\begin{vmatrix} y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$S_{ABC} \cdot y_P = S_{PBC} \cdot y_A + S_{PCA} \cdot y_B + S_{PAB} \cdot y_C$$

Deste modo, obtemos:

$$S_{ABC} \cdot P = S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C$$

que implica

$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C}{S_{ABC}}$$

como

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$$

então

$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C}{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}$$

Assim, mostramos que $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$. ■

Podemos ver que as coordenadas baricêntricas do ponto P podem ser dadas por:

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}).$$

isto é, as coordenadas baricêntricas de um ponto são proporcionais às áreas com sinal dos sub-triângulos que esse ponto P forma com os vértices A, B e C do triângulo de referência ABC ou ainda, sendo $P = (u : v : w)$, então

$$u : v : w = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}.$$

2.4 Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas

Seja P um ponto tal que $S_{PBC} = 5, S_{PCA} = 3$ e $S_{PAB} = 1$. Neste caso, pela propriedade da decomposição da área com sinal, a área do triângulo de referência é

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = 5 + 3 + 1 = 9$$

e podemos ainda escrever que

$$\begin{aligned} P &= (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}) \\ &= (5 : 3 : 1) \\ &= (-5 : -3 : -1) \\ &= (5\pi : 3\pi : \pi) \\ &= \left(\frac{5}{9} : \frac{3}{9} : \frac{1}{9}\right) = \dots \end{aligned}$$

e observar que, entre todas as possibilidades de representação das coordenadas baricêntricas deste ponto P , o terno ordenado $(5 : 3 : 1)$ é o único que possui as três componentes iguais às áreas com sinal dos sub-triângulos e o terno ordenado $\left(\frac{5}{9} : \frac{3}{9} : \frac{1}{9}\right)$ é o único cuja soma das componentes é igual a 1.

Definição 7 *Sejam A, B e C os vértices do triângulo de referência $\triangle ABC$. Se P é um ponto de coordenadas baricêntricas $P = (u : v : w)$, suas coordenadas baricêntricas serão denominadas*

1. Exatas, quando $u = S_{PBC}, v = S_{PCA}$ e $w = S_{PAB}$. Neste caso, pela propriedade da decomposição da área com sinal, teremos que $u + v + w = S_{ABC}$.
2. Homogêneas, quando $u + v + w = 1$.

2.5 Coordenadas Baricêntricas do Incentro

Observando o triângulo da figura 2.7, onde a, b e c são as medidas euclidianas dos lados e r é o raio do círculo inscrito no triângulo ABC , temos:

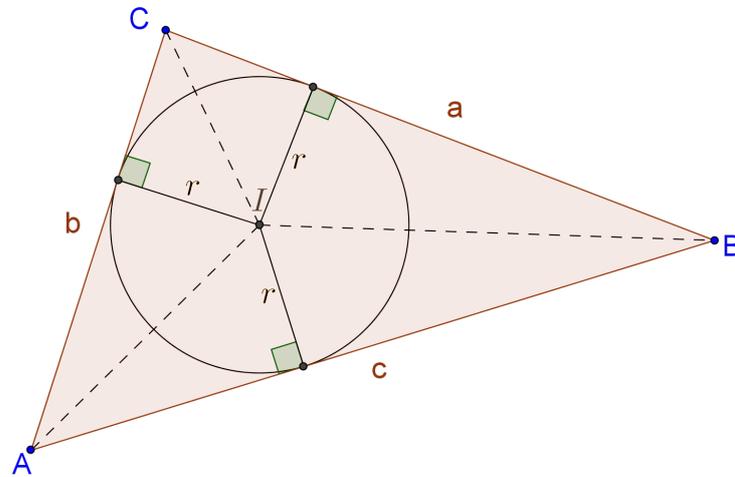


Figura 2.7: Incentro do triângulo $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned}
 S_{IBC} &= +\frac{a \cdot r}{2} \\
 S_{ICA} &= +\frac{b \cdot r}{2} \\
 S_{IAB} &= +\frac{c \cdot r}{2}
 \end{aligned}$$

que implica

$$\begin{aligned}
 I &= (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) \\
 &= (a : b : c)
 \end{aligned}$$

2.6 Coordenadas Baricêntricas do circuncentro

Observe o triângulo na figura 2.8, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$.

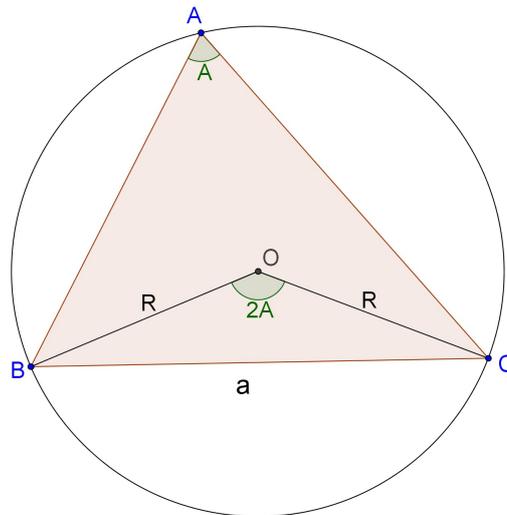


Figura 2.8: Circuncentro do triângulo $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned} S_{OBC} &= \frac{R^2 \cdot \text{sen}(2A)}{2} \\ &= \frac{R^2 \cdot 2\text{sen}A \cdot \text{cos}A}{2} \\ &= R^2 \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos:

$$S_{OCA} = R^2 \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B \text{ e } S_{OAB} = R^2 \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} O &= (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) \\ &= (R^2 \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : R^2 \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : R^2 \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C) \\ &= (R \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : R \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : R \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C) \\ &= (2 \cdot R \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : 2 \cdot R \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : 2 \cdot R \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C) \end{aligned}$$

Pela lei dos Senos e a lei dos Cossenos, temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2R\text{sen}A = a \\ 2R\text{sen}B = b \\ 2R\text{sen}C = c \\ \cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{array} \right.$$

assim,

$$O = \left(a \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right) : b \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \right) : c \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \right)$$

$$O = \left(\frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{2abc} : \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{2abc} : \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} \right)$$

daí, temos

$$O = \left(a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2) \right)$$

Observação: A soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro é dada por $16(\nabla ABC)^2$

2.7 Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro

Para o cálculo das coordenadas baricêntricas do ortocentro H , temos que levar em conta se o triângulo é retângulo ou não.

Em se tratando de triângulos não retângulos, o cálculo das coordenadas baricêntricas é feito em função das tangentes dos ângulos internos e em função dos lados do triângulo de referência $\triangle ABC$.

Quando o triângulo de referência $\triangle ABC$ é retângulo, quando são traçadas as três alturas, elas se interceptam no ângulo reto. Neste caso:

a) se o triângulo é retângulo em A , as coordenadas baricêntricas do ortocentro são:

$$H = A = (1 : 0 : 0),$$

b) se o triângulo é retângulo em B , as coordenadas baricêntricas do ortocentro são:

$$H = B = (0 : 1 : 0),$$

c) se o triângulo é retângulo em C , as coordenadas baricêntricas do ortocentro são:

$$H = C = (0 : 0 : 1).$$

As coordenadas baricêntricas do ortocentro de um triângulo não retângulo são calculadas em função das tangentes dos ângulos internos. Aplicando a definição da tangente, obtemos:

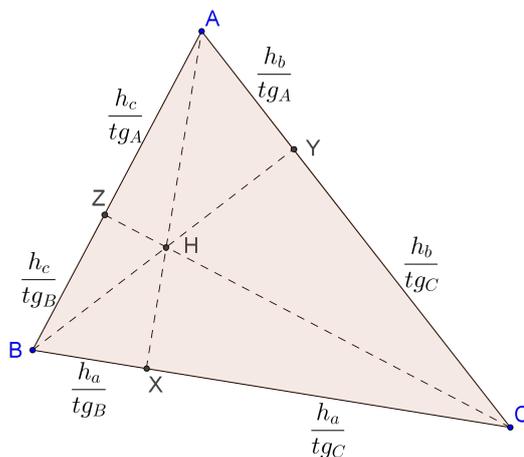


Figura 2.9: Ortocentro do triângulo $\triangle ABC$.

$$\begin{cases} X = \left(0 : \frac{h_a}{tgC} : \frac{h_a}{tgB} \right) = (0 : tgB : tgC) \\ Y = \left(\frac{h_b}{tgC} : 0 : \frac{h_b}{tgA} \right) = (tgA : 0 : tgC) \\ Z = \left(\frac{h_c}{tgB} : \frac{h_c}{tgA} : 0 \right) = (tgA : tgB : 0) \end{cases}$$

Usando o teorema de Ceva, 10, página 38, para as coordenadas baricêntricas, então:

$$H = (tgA : tgB : tgC)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, aos triângulos retângulos $\triangle XCA$ e $\triangle XAB$, obtemos

$$\begin{cases} b^2 = (ha)^2 + |XC|^2 \\ c^2 = (ha)^2 + (a - |XC|)^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 - 2a|XC| \Rightarrow |XC| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Daí e como $|BX| + |XC| = a$, temos que

$$|BX| = a - |XC| = a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

e, de modo análogo, obtemos os demais dados da figura 2.10.

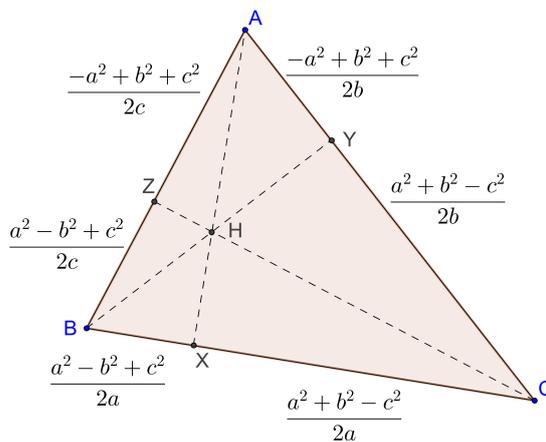


Figura 2.10: Ortocentro do triângulo $\triangle ABC$.

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left(0 : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) \\ Y = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : 0 : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \right) \\ Z = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} : 0 \right) \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left(0 : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \\ Y = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : 0 : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \\ Z = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : 0 \right) \end{array} \right.$$

Novamente, aplicando o teorema de Ceva, temos

$$H = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right)$$

2.8 A fórmula de Conway

2.8.1 Notação

Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo $\triangle ABC$ conforme figura 2.11.

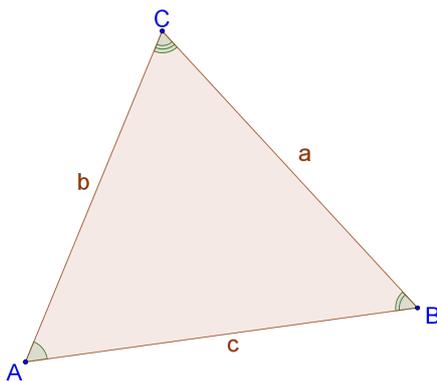


Figura 2.11: Triângulo $\triangle ABC$ com os lados a, b e c .

Se θ é um ângulo qualquer e S é o dobro da área do triângulo $\triangle ABC$, torna-se possível definir

$$S_\theta = S \cdot \cot\theta.$$

Como exemplo específico visando ampliar a compreensão:

$$\begin{aligned} S_A &= S \cdot \cot\widehat{A} \\ &= b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} \cdot \frac{\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \\ &= b \cdot c \cdot \cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

Pela lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\widehat{A}$$

que implica

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

logo

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Por pensamento análogo chegaremos a:

$$S_B = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2}$$

e

$$S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

Para dois ângulos θ e φ , define-se

$$S_{\theta\varphi} = S_\theta \cdot S_\varphi.$$

Com esta notação, inferem-se as relações abaixo:

- $S_B + S_C = a^2$, $S_C + S_A = b^2$, $S_A + S_B = c^2$

- $S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2$

A primeira relação é óbvia. Para demonstrar a segunda, torna-se necessário demonstrar a identidade:

$$S \cdot \cotg \hat{A} \cdot S \cdot \cotg \hat{B} + S \cdot \cotg \hat{B} \cdot S \cdot \cotg \hat{C} + S \cdot \cotg \hat{C} \cdot S \cdot \cotg \hat{A} = S^2$$

que implica

$$\cotg \hat{A} \cdot \cotg \hat{B} + \cotg \hat{B} \cdot \cotg \hat{C} + \cotg \hat{C} \cdot \cotg \hat{A} = 1$$

De maneira a ser possível tal demonstração:

$$\begin{aligned} \cotg \hat{A} \cdot (\cotg \hat{B} + \cotg \hat{C}) + \cotg \hat{B} \cdot \cotg \hat{C} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{A}}{\sen \hat{A}} \left(\frac{\cos \hat{B}}{\sen \hat{B}} + \frac{\cos \hat{C}}{\sen \hat{C}} \right) + \frac{\cos \hat{B}}{\sen \hat{B}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{A}}{\sen \hat{A}} \cdot \frac{\sen \hat{C} \cdot \cos \hat{B} + \sen \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} + \frac{\cos \hat{B}}{\sen \hat{B}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{A}}{\sen \hat{A}} \cdot \frac{\sen(\hat{B} + \hat{C})}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} + \frac{\cos \hat{B}}{\sen \hat{B}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{A}}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} + \frac{\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} - \cos(\hat{B} + \hat{C})}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} - \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} &= 1 \\ \frac{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}}{\sen \hat{B} \cdot \sen \hat{C}} &= 1 \end{aligned}$$

De maneira a exemplificar tal parâmetro tem-se que um ortocentro apresenta as seguintes coordenadas:

$$\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB})$$

e o circuncentro apresenta as seguintes coordenadas:

$$(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = \left(S_A(S_B + S_C) : S_B(S_C + S_A) : S_C(S_A + S_B) \right)$$

Deste modo, a soma das coordenadas é:

$$2(S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = 2S^2)$$

2.8.2 Fórmula de Conway

Um ponto P pode ser definido pelos ângulos que forma com dois vértices de um triângulo referência. Dado um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P , o ângulo de rolagem de P sobre o segmento AB é o ângulo orientado \widehat{CBP} , que representaremos por θ , tomado como positivo, se e apenas se o ponto P está no lado oposto a A . Da mesma forma, o ângulo de rolagem P com respeito ao segmento AC é o ângulo orientado \widehat{BCP} , que representaremos por ϕ , tomado como positivo se e somente se P está no lado oposto a A . Ângulos de rolagem variam nos intervalos: $(-\pi/2 \leq \theta, \phi \leq \pi/2)$.

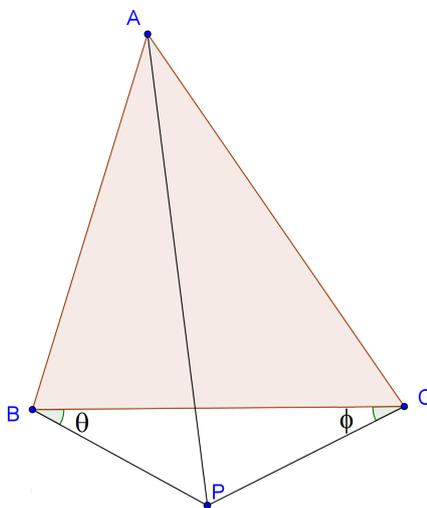


Figura 2.12: Triângulo $\triangle ABC$ com ponto P qualquer e ângulos de rolagem ϕ e θ .

A Fórmula de Conway das coordenadas baricêntricas de um ponto P a partir dos seus ângulos de rolagem θ e ϕ :

$$P = (-a^2 : S_B + S_\phi : S_B + S_\theta)$$

De fato, aplicando a Lei dos senos no triângulo $\triangle PCB$, temos:

$$\frac{PB}{\text{sen}\phi} = \frac{CP}{\text{sen}\theta} = \frac{a}{\text{sen}(\theta + \phi)} \implies BP = \frac{a \cdot \text{sen}\phi}{\text{sen}(\theta + \phi)}, CP = \frac{a \cdot \text{sen}\theta}{\text{sen}(\theta + \phi)}$$

A área do triângulo é:

$$S_{PCB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BP} \cdot \text{sen}\theta = \frac{a^2 \text{sen}\theta}{2 \cdot \text{sen}(\theta + \phi)}$$

As áreas dos triângulos são $\triangle APC$ e $\triangle PAB$ se desenvolvem de maneira análoga, resultando:

$$\begin{aligned} S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB} &= \left(-\frac{a^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi}{2 \cdot \text{sen}(\theta + \phi)} : \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}(\phi + \widehat{C})}{2 \cdot \text{sen}(\theta + \phi)} : \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\phi \cdot \text{sen}(\theta + \widehat{B})}{2 \cdot \text{sen}(\theta + \phi)} \right) \\ &= \left(-a^2 : \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}(\phi + \widehat{C})}{\text{sen}\phi} : \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\phi \cdot \text{sen}(\theta + \widehat{B})}{\text{sen}\theta} \right) \\ &= \left(-a^2 : a \cdot b \cdot \cos\widehat{C} + a \cdot b \cdot \text{sen}\widehat{C} \cdot \text{cotg}\phi : a \cdot c \cdot \cos\widehat{B} + a \cdot c \cdot \text{sen}\widehat{B} \cdot \text{cotg}\theta \right) \\ &= (-a^2 : S_C + S_\phi : S_B + S_\theta). \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação da Fórmula de Conway

Construir um quadrado sobre um lado BC de um triângulo $\triangle ABC$ dado e determinar as coordenadas baricêntricas do ponto médio de suas diagonais.

Considere o quadrado $BCC_A B_A$ construído externamente a partir do segmento BC do triângulo $\triangle ABC$ conforme a figura 2.13. Para o ponto B_A , temos $\theta = 90^\circ$ e $\phi = 45^\circ$, desta forma, temos: $\text{cotg}90^\circ = 0$ e $\text{cotg}45^\circ = 1$.

$$B_A = (-a^2 : S_C + S_\phi : S_B + S_\theta) = (-a^2 : S_C + S : S_B)$$

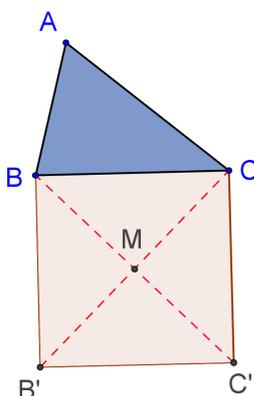


Figura 2.13: Exemplo da fórmula de Conway

Podemos calcular o ponto médio da diagonal do quadrado calculando o ponto médio do segmento de vértices BA e C , onde $C = (0 : 0 : S)$. Assim, obtemos:

$$M_A = (-a^2 : S_C + S : S_B + S).$$

2.9 O teorema do co-lado

Como as coordenadas baricêntricas podem ser dadas em função das áreas orientadas, então os seguintes resultados serão importantes para o nosso desenvolvimento do trabalho.

Aqui nesta seção \overline{AB} representa o segmento orientado e denominaremos o comprimento orientado pelo símbolo \overline{AB} .

Teorema 8 *Triângulos com alturas iguais tem áreas com sinal proporcionais às medidas das bases dos triângulos.*

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

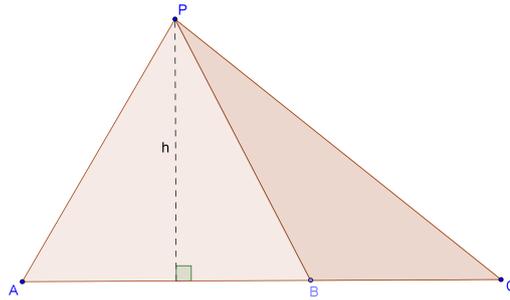


Figura 2.14: Triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PBC$

Demonstração: Considere o caso particular da Figura 2.14 com B entre A e C e os triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PBC$ orientados no sentido anti-horário. Tomando $|AB|$ e $|BC|$ como bases, os triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PBC$ têm a mesma altura h . Logo,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\nabla PAB}{\nabla PBC} = \frac{\frac{1}{2}|\overline{AB}| \cdot h}{\frac{1}{2}|\overline{BC}| \cdot h} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

■

Teorema 9 (O TEOREMA DO CO-LADO) Se o ponto $X \neq P$ é a interseção das retas \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{BC} , então

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{AX}{PX}$$

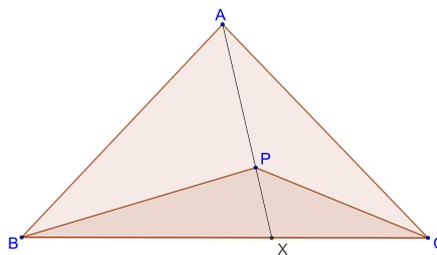


Figura 2.15: Triângulos $\triangle BPA$ e $\triangle CPA$.

Demonstração: Pelo teorema 8, temos

(a) B, X e C são colineares e A não pertence à reta \overleftrightarrow{BC} , logo

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}.$$

(b) A, P e X são colineares e B não pertence á reta \overleftrightarrow{AP} , logo

$$\frac{S_{ABX}}{S_{PBX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}.$$

(c) B, X e C são colineares e P não pertence à reta \overleftrightarrow{BC} , logo

$$\frac{S_{PBX}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}.$$

Daí,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABX}} \cdot \frac{S_{ABX}}{S_{PBX}} \cdot \frac{S_{PBX}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}$$

■

Corolário 3.1 *Se um ponto P não pertence a qualquer dos lados de um triângulo $\triangle ABC$ e a reta \overleftrightarrow{AP} corta a reta \overleftrightarrow{BC} em X , então*

$$\frac{S_{PAB}}{S_{CPA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$$

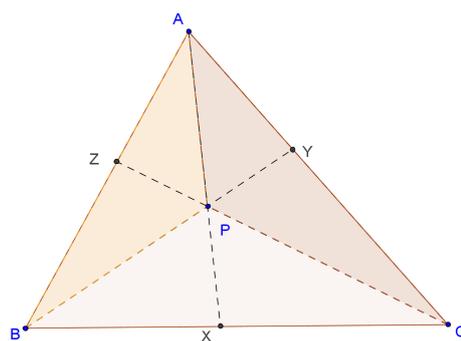


Figura 2.16: Corolário do teorema do Co-lado.

Demonstração: Na figura 2.16, os triângulos $\triangle BPA$ e $\triangle CPA$ têm o lado \overline{PA} em comum. Como X é diferente de C e X é a intersecção de \overline{BC} e \overline{AP} , temos pelo Teorema do co-lado, temos:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBX}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PX}} = \frac{S_{APC}}{S_{PXC}},$$

então,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBX}} = \frac{S_{APC}}{S_{PXC}}.$$

Daí, concluímos que

$$\frac{S_{PBX}}{S_{PXC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}}.$$

■

2.9.1 Teorema de Ceva

É um teorema que foi demonstrado pelo matemático Giovanni Ceva. Com este teorema, pode-se unificar resultados como a intersecção das medianas, bissetrizes e alturas de um triângulo, que são classificadas como cevianas. O Teorema de Ceva nos traz para que as cevianas concorram em um único ponto.

Teorema 10 *Sejam X, Y e Z pontos pertencentes aos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} , respectivamente, de um triângulo $\triangle ABC$. As cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Demonstração: (\Rightarrow) Observando as retas $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BY}$ e \overleftrightarrow{CZ} na figura 2.16 concorrentes em P , e pelo Teorema do co-lado:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}},$$

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}},$$

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PCB}}$$

↓

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PCB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} = 1$$

. (\Leftarrow) Admita que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

e suponha, para uma contradição, que \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} não são concorrentes. Tomando Z' sobre \overleftrightarrow{AB} tal que $\overleftrightarrow{CZ'}$ passa por $P = \overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BY}$, podemos aplicar o resultado que demonstramos em (\Rightarrow) para garantir que

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Daí e da hipótese, temos

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \Rightarrow \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}},$$

de onde podemos afirmar que Z' e Z dividem \overline{AB} na mesma razão. Daí e da unicidade do ponto divisor, concluimos que $Z' = Z$ e como $\overline{CZ'}$ passa pelo ponto P , então \overline{CZ} passa por P , o que caracteriza uma contradição por negar a hipótese, mostrando assim que \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes.

■

Lema 10.1 *Sejam X, Y e Z os traços de um ponto P , respectivamente, sobre os lados BC , \overline{CA} e \overline{AB} do triângulo de referência $\triangle ABC$.*

1. Se P divide \overline{XA} na razão k , então $P = k(\overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX})$.
2. Se P divide \overline{YB} na razão k , então $P = (\overline{CY} : k \cdot \overline{CA} : \overline{YA})$.
3. Se P divide \overline{ZC} na razão k , então $P = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : k \cdot \overline{AB})$.

Demonstração: Suponha que o ponto P divida a ceviana \overline{XA} na razão k , ou seja, $\frac{XP}{PA} = k$. Para demonstrar o Lema 10.1, basta provar que $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX} = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}$ e, para tal, basta mostrar que $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} = S_{PBC} : S_{PCA}$, pois pelo Corolário 3.1, página 37, já temos $\overline{XC} : \overline{BX} = S_{PCA} : S_{PAB}$. Do Corolário 3.1 e da Proposição 8, 35, temos que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}, \quad \frac{XP}{PA} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \text{ e } \frac{XP}{PA} = \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}}$$

Daí e também do fato que

$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{XP}{PA} \cdot \frac{(\overline{BX} + \overline{XC})}{\overline{XC}} = \frac{XP \cdot \overline{BX} + XP \cdot \overline{XC}}{PA \cdot \overline{XC}} = \frac{XP}{PA} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} + \frac{XP}{PA}$$

podemos afirmar que

$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX} + S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}},$$

ou seja, $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} = S_{PBC} : S_{PCA}$, o que mostra o resultado. As demonstrações dos Lemas 10.1 (2) e (3) são análogas à anterior. ■

Teorema 11 (*Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas*) Três pontos X, Y e Z são os traços do ponto $P = (x : y : z)$ se, e somente se, X, Y e Z são da forma: $X = (0 : y : z)$, $Y = (x : 0 : z)$, $Z = (x : y : 0)$, para algum x, y e z .

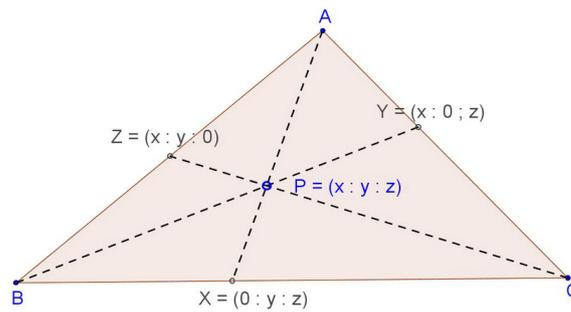


Figura 2.17: Teorema de Ceva para as coordenadas baricêntricas.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponhamos que X, Y e Z são os traços de $P = (x : y : z)$. Fazendo-se $k = \frac{XP}{PA}$, temos do Lema 10.1 que

$$P = (x : y : z) = (k \cdot BC : XC : BX)$$

e, então,

$$\overline{XC} : \overline{BX} = y : z.$$

Daí e como X está sobre o lado \overline{BC} , temos

$$X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}) = (0 : y : z).$$

Analogamente, temos que $Y = (x : 0 : z)$ e $Z = (x : y : 0)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que X, Y e Z são da forma

$$X = (0 : y : z), Y = (x : 0 : z) \text{ e } Z = (x : y : 0),$$

para algum x, y, z . Dessas hipóteses e do fato dos traços X, Y e Z pertencerem aos lados do triângulo de referência $\triangle ABC$, temos que

$$\begin{aligned} X = (0 : y : z) &= (0 : \overline{XC} : \overline{BX}) \Rightarrow \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{z}{y}. \\ Y = (x : 0 : z) &= (\overline{CY} : 0 : \overline{YA}) \Rightarrow \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{x}{z}. \\ Z = (x : y : 0) &= (\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0) \Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Ceva ao triângulo $\triangle ABC$, temos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1,$$

garantindo $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} concorrentes. Logo, X, Y e Z são os traços do ponto $P = (x : y : z)$. ■

2.10 Cálculo de áreas de triângulos e a relação com as coordenadas baricêntricas

Se $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$ são três pontos do plano, então a área do triângulo PQR é dada por:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Se as coordenadas baricêntricas dos pontos P, Q e R relativas ao triângulo $\triangle ABC$ são

$$P = (u_1 : v_1 : w_1), Q = (u_2 : v_2 : w_2), R = (u_3 : v_3 : w_3),$$

então:

$$(u_1 + v_1 + w_1)P = u_1A + v_1B + w_1C$$

$$(u_2 + v_2 + w_2)Q = u_2A + v_2B + w_2C$$

$$(u_3 + v_3 + w_3)R = u_3A + v_3B + w_3C$$

Considerando os vértices do triângulo: $A = (r_1, s_1)$, $B = (r_2, s_2)$ e $C = (r_3, s_3)$, estas igualdades podem ser escritas na forma:

$$(u_1 + v_1 + w_1)x_1 = u_1r_1 + v_1r_2 + w_1r_3$$

$$(u_1 + v_1 + w_1)y_1 = u_1s_1 + v_1s_2 + w_1s_3$$

$$(u_2 + v_2 + w_2)x_2 = u_2r_1 + v_2r_2 + w_2r_3$$

$$(u_2 + v_2 + w_2)y_2 = u_2s_1 + v_2s_2 + w_2s_3$$

$$(u_3 + v_3 + w_3)x_3 = u_3r_1 + v_3r_2 + w_3r_3$$

$$(u_3 + v_3 + w_3)y_3 = u_3s_1 + v_3s_2 + w_3s_3$$

Assim, temos então:

$$\begin{aligned}
 S_{PQR} &= (u_1 + v_1 + w_1)(u_2 + v_2 + w_2)(u_3 + v_3 + w_3) \\
 S_{PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 + v_1 + w_1 & u_2 + v_2 + w_2 & u_3 + v_3 + w_3 \\ (u_1 + v_1 + w_1)x_1 & (u_2 + v_2 + w_2)x_2 & (u_3 + v_3 + w_3)x_3 \\ (u_1 + v_1 + w_1)y_1 & (u_2 + v_2 + w_2)y_2 & (u_3 + v_3 + w_3)y_3 \end{vmatrix} \\
 S_{PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 + v_1 + w_1 & u_2 + v_2 + w_2 & u_3 + v_3 + w_3 \\ u_1r_1 + v_1r_2 + w_1r_3 & u_2r_1 + v_2r_2 + w_2r_3 & u_3r_1 + v_3r_2 + w_3r_3 \\ u_1s_1 + v_1s_2 + w_1s_3 & u_2s_1 + v_2s_2 + w_2s_3 & u_3s_1 + v_3s_2 + w_3s_3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & r_1 & s_1 \\ 1 & r_2 & s_2 \\ 1 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot S_{ABC}
 \end{aligned}$$

Quando as coordenadas homogêneas de P, Q e R estejam normalizadas, teremos:

$$S_{PQR} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot S_{ABC}$$

2.11 Uma fórmula simples para as Coordenadas Baricêntricas

Neste momento iremos estabelecer uma fórmula simples para as coordenadas baricêntricas com relação a um determinado triângulo ABC de um ponto P especificada pelos ângulos orientados $B\hat{P}C, C\hat{P}A$ e $A\hat{P}B$. Diversas aplicações são dadas. Vamos fundamentar uma fórmula para as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto em relação a um dado triângulo.

Teorema 12 *Com referência a um dado um triângulo $\triangle ABC$, um ponto P especificado pelos ângulos orientados: $x = B\hat{P}C, y = C\hat{P}A$ e $z = A\hat{P}B$ e com as seguintes coordenadas baricêntricas homogêneas:*

$$\left(\frac{1}{\cotg A - \cotg x} : \frac{1}{\cotg B - \cotg y} : \frac{1}{\cotg C - \cotg z} \right) \tag{2.4}$$

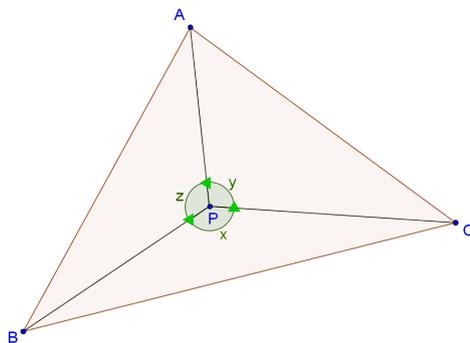


Figura 2.18: Triângulo $\triangle ABC$ com ângulos centrais x, y e z

Demonstração: Construa o círculo através de B, P, C , e com intersecção com a linha em AP até A' . Claramente, os ângulos

$$A'\widehat{BC} = A'\widehat{PC} = \pi - C\widehat{PA} = \pi - y$$

e, analogamente, $A'\widehat{CB} = \pi - z$. Isso surge a partir da fórmula de Conway em que as coordenadas baricêntricas são:

$$A' = (-a^2 : S_C + S_{\pi-z} : S_B + S_{\pi-y}) = (-a^2 : S_C - S_z : S_B - S_y).$$

$$A' = \left(\frac{-a^2}{(S_B - S_y)(S_C - S_z)} : \frac{S_C - S_z}{(S_B - S_y)(S_C - S_z)} : \frac{S_B - S_y}{(S_B - S_y)(S_C - S_z)} \right).$$

$$A' = \left(-\frac{a^2}{(S_B - S_y)(S_C - S_z)} : \frac{1}{(S_B - S_y)} : \frac{1}{(S_C - S_z)} \right)$$

Da mesma forma, as linhas \overleftrightarrow{BP} intercepta o círculo CPA em um ponto B' e \overleftrightarrow{CP} intercepta o círculo APB em C' , cujas coordenadas podem ser facilmente definidas.

Podemos reorganizar do seguinte modo:

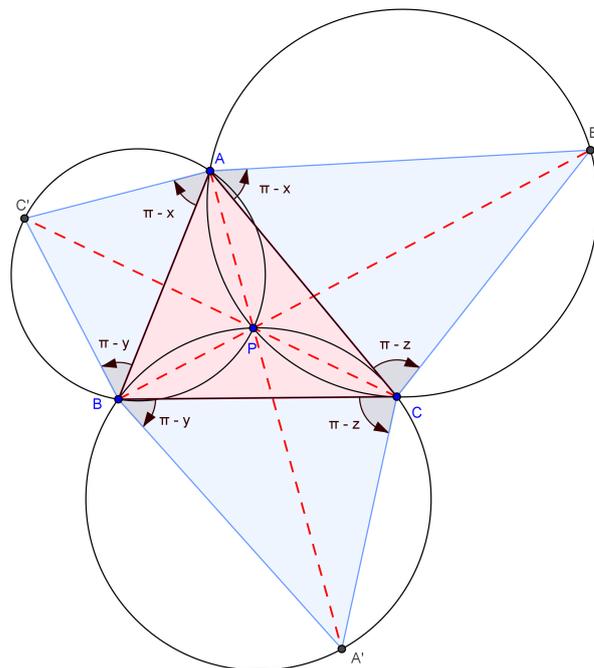


Figura 2.19: Demonstração gráfica da fórmula simples

$$A' = \left(-\frac{a^2}{(S_B - S_y)(S_C - S_z)} : \frac{1}{(S_B - S_y)} : \frac{1}{(S_C - S_z)} \right)$$

$$B' = \left(\frac{1}{(S_A - S_x)} : -\frac{b^2}{(S_C - S_z)(S_A - S_x)} : \frac{1}{(S_C - S_z)} \right)$$

$$C' = \left(\frac{1}{(S_A - S_x)} : \frac{1}{(S_B - S_y)} : -\frac{c^2}{(S_A - S_x)(S_B - S_y)} \right).$$

De acordo com o enunciado do Teorema de Ceva, as linhas AA' , BB' , CC' se interceptam em um ponto, que é claramente P , cujas coordenadas são:

$$P = \left(\frac{1}{S_A - S_x} : \frac{1}{S_B - S_y} : \frac{1}{S_C - S_z} \right).$$

Como por definição, $S_\theta = S \cdot \cot g\theta$, esta fórmula é claramente equivalente a (2.4).

■

2.12 Aplicações das coordenadas baricêntricas

Uma aplicação curiosa e bem simples das coordenadas baricêntricas é a resolução do problema dos três vasos. Problema bem conhecido e enunciado da seguinte forma:

Dado três vasos A, B e C , cujas capacidades são 8 litros, 5 litros e 3 litros, respectivamente, dos quais o primeiro é cheio de água e os outros dois vazios. O desafio é dividir os 8 litros de água em duas partes iguais, utilizando apenas os vasos que estão disponíveis, sem haver desperdício do líquido.

Os ternos ordenados $(x : y : z)$ formados por números inteiros não negativos cuja soma é constante e igual a S . Esses ternos podem ser representados pelos nós (no interior de um triângulo ABC) formado uma malha, dividindo cada um dos lados de forma igual e traçando retas paralelas aos lados de cada um dos pontos divisão. No caso particular do problema proposto, temos $x + y + z = 8$, temos a malha, representada pela figura 2.20:

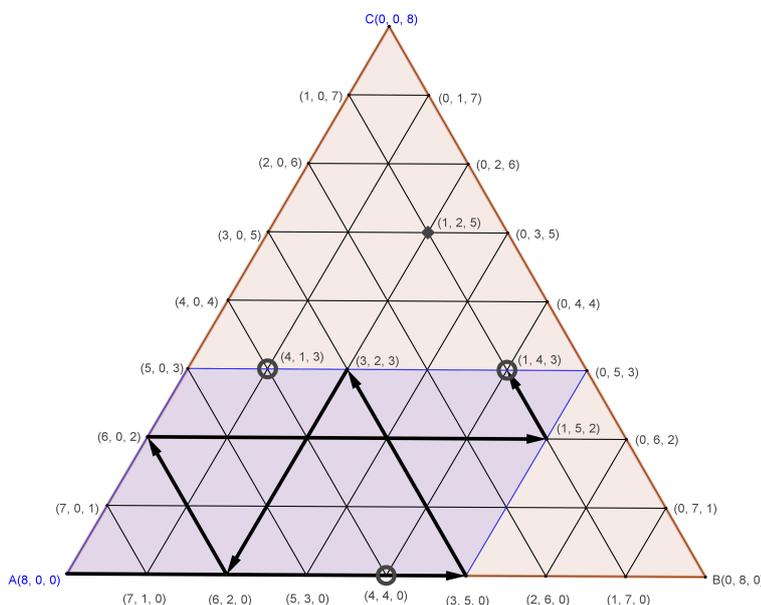


Figura 2.20: Malha de coordenadas baricêntricas.

As coordenadas dos vértices $A(8 : 0 : 0)$, $B(0 : 8 : 0)$, $C(0 : 0 : 8)$ e, por exemplo, o ponto marcado com um quadrado pequeno tem coordenadas $(1 : 2 : 5)$, representando a capacidade dos vasos, a posição expressa pelas coordenadas desse ponto, não pode ocorrer de fato, os únicos pontos que poderiam representar a distribuição de água no recipiente são aquele na extremidade ou no interior do paralelogramo marcado, o vértice $A(8 : 0 : 0)$ representa a situação inicial.

Despejar a água de um vidro em outro significa movimentar-se de um nó ao outro ao longo de uma das linhas da malha (a quantidade de água que permanece no recipiente não se altera). Uma maneira de verificar se a quantidade de líquido em cada vaso é observar a seguinte condição: cada terno ordenado deve ter um 0, daí por diante, temos que observar ou 8 no primeiro termo, ou 5 no segundo, ou 3 no terceiro. Portanto, só podemos mover sobre a borda do paralelogramo destacado.

Inicialmente, o primeiro vaso está cheio, por isso, partimos do vértice $A(8 : 0 : 0)$, a partir deste ponto inicial, é possíveis dois movimentos ao longo da linha em que $z = 0$, até o nó $(3 : 5 : 0)$, ou ao longo do lado $y = 0$ até o nó $(5 : 0 : 3)$. Resolver este problema é semelhante a jogar sinuca em uma placa triangular. Há exatamente três nós (marcados com um círculo, nos lados do paralelogramo) cujas coordenadas contêm, pelo menos um 4, que são:

$$(4 : 4 : 0), (4 : 1 : 3)(1 : 4 : 3).$$

O problema será resolvido quando a bola chega a um dos três pontos. Na figura acima mostra um possível caminho:

$$\begin{aligned} (8 : 0 : 0) &\rightarrow (3 : 5 : 0) \rightarrow (3 : 2 : 3) \rightarrow (6 : 2 : 0) \\ &\rightarrow (6 : 0 : 2) \rightarrow (1 : 5 : 2) \rightarrow (1 : 4 : 3) \end{aligned}$$

Procedemos da seguinte maneira: em primeiro lugar, encher o segundo vaso, usando o primeiro; enche-se o terceiro a partir do segundo e nessas trocas de líquidos podemos então através das coordenadas baricêntricas do triângulo encontrar uma solução

para este problema. As coordenadas baricêntricas são muito utilizadas em aplicações de computação gráfica para generalizar um conjunto de determinados valores de dados. Tradicionalmente, as coordenadas são necessárias para satisfazer uma série de propriedades. Uma das aplicações é dar movimento e desenhos animados através de uma malha semelhante à vista no problema dos vasos, que através de uma malha com coordenadas, com uma série de pontos destacados na figura 2.21, podemos movimentar desenhos.

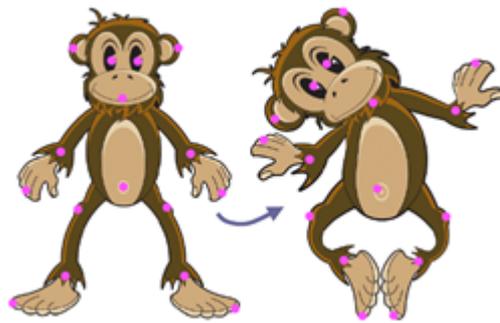


Figura 2.21: Coordenadas baricêntricas em desenho animado.

Vamos considerar agora o seguinte problema: Dado uma região poligonal qualquer \mathcal{P} , verificar se um ponto P do plano pertence ou não a esta região.

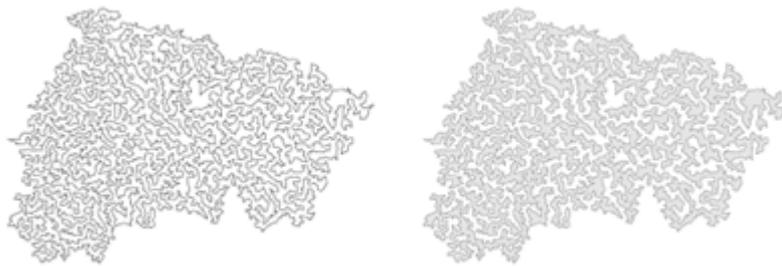


Figura 2.22: Localização de pontos em uma região.

Uma solução para esse mesmo problema é usar as coordenadas baricêntricas.

Essa técnica também é útil em outros contextos e, portanto, vamos apresentá-la em detalhes.

As coordenadas baricêntricas, como foi explanado no início deste trabalho, é o resultado de uma combinação linear.

Sejam A, B e C pontos não colineares do plano R^2 . Então todo ponto P do plano pode ser escrito de modo único como combinação de u, v e w , isto é, na forma:

$$P = u.A + v.B + w.C$$

onde u, v e w são números reais satisfazendo $u + v + w = 1$.

A prova desse fato é bem simples. Basta observar que os ternos $(u; v; w)$ satisfazendo as condições dadas são as soluções do seguinte sistema linear de três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} u.x_1 + v.x_2 + w.x_3 = x \\ u.y_1 + v.y_2 + w.y_3 = y \\ u + v + w = 1 \end{cases}$$

onde $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ e $AB \times AC \neq 0$, já que os pontos A, B e C não são colineares. Portanto, o sistema dado tem solução única $(u; v; w)$ para cada $P \in R^2$.

Os coeficientes u, v e w dados acima são denominados as coordenadas baricêntricas de P em relação a A, B e C . Esse nome vem da seguinte observação: se massas iguais a u, v e w são colocadas em A, B e C , então o baricentro dessa configuração é o ponto $P = u.A + v.B + w.C$.

Os valores de u, v e w podem ser facilmente obtidos do sistema anterior utilizando a regra de Cramer. Obtendo os sinais de u, v e w , podemos então definir se o ponto está no interior ou não da região considerada, de acordo com a figura 2.5, página 18. Isso é muito utilizado em Engenharia Cartográfica.

Referências Bibliográficas

- [1] BORTOLOSSI, H. J. E FIGUEIREDO, J. O. DE, *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo*- V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - Universidade Federal da Paraíba, 2010.
- [2] BORTOLOSSI, H. J., *Demonstrações Legíveis Geradas por Computador em Geometria Euclidiana Plana. O Método da Área* II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - Universidade Federal da Bahia, 2004.
- [3] CAPITÁN, F. J. G. *Coordenadas Baricêntricas* - disponível em <http://garcia capitán.99on.com/baricentricas/>
- [4] CARVALHO, P. C. P., FIGUEIREDO, L. H. de, *Introdução à Geometria Computacional*. 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1991
- [5] DERGIADES, n. *A Simple Barycentric Coordinates Formula*. Forum Geometricorum, vol.9
- [6] GOMES, J., VELHO, L., *Fundamentos da Computação Gráfica*. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [7] KOBLBAUER, C. *Barycentric Coordinates*. Waterloo, 2012

- [8] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio* Volume 3. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [9] MENDES, M., THIAGO, C., (GRUPO TEOREMA DE MATEMÁTICA), *Áreas Para Achar Razão de Segmentos*. Rio de Janeiro, S.B.M - EUREKA! 25, Maio, 2007.
- [10] MORGADO, J. M., WAGNER, A. C., *Geometria - I, Uma Métrica Plana*. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, 1973.
- [11] MORGADO, J. M., WAGNER, A. C., *Geometria - II, Uma Métrica Plana*. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, 1973.
- [12] ROSA, C. A. de P. *História da Ciência: da Antiguidade ao Renascimento Científico*. Brasília : Fundação Alexandre de Gusmão, 2010.
- [13] SIGUR, S., *Where are the conjugates?*. Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, Forum Geometricorum. Volume 5, 2005.
- [14] WEBER, O. , Ben-Chen, M. , Gotsman, C. *Complex Barycentric Coordinates with Applications to Planar Shape Deformation*. Technion ? Israel Institute of Technology
- [15] WEISSTEIN, E. W., *Triangle Center Function*. From MathWorld?A Wolfram Web Re- source.
- [16] WEISSTEIN, E. W., Mathworld: *the web?s most extensive mathematical re- source* [online]. 2003.
- [17] YIU, P., *Introduction to the Geometry of the Triangle*. Department of Mathematics Florida Atlantic University, Version 2.0402, 2002.