UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Recorrências: Conceitos e Aplicações

por

Diêgo Ayllo da Silva Simões

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Recorrências: Conceitos e Aplicações †

por

Diêgo Ayllo da Silva Simões

sob orientação da

Profª Drª Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2014
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Recorrências: Conceitos e Aplicações

por

Diêgo Ayllo da Silva Simões

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a Dr^a Elisandra de Fátima Gloss de Moraes -UFPB
(Orientadora)

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

Tarciana M^a S Silva

Prof^a Dr^a Tarciana Maria Santos da Silva - UFRPE

Fevereiro/2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha avó Adélia Alice da Silva que faleceu pouco antes da conclusão desse trabalho, por cuidar de mim enquanto meus pais saíam para trabalhar todos os dias e por me dar todo amor e carinho necessário para um bom desenvolvimento cognitivo de uma criança.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Dimas Simões dos Santos e Maria Crináuria da Silva Simões, que sempre fizeram de tudo pela minha educação, tanto na hora de sacrificar parte da renda para pagar bons colégios, quanto na cobrança para que eu estudasse em casa.

Agradeço a minha esposa Sara Regina e ao meu filho Pierre, que nasceu enquanto digito esse trabalho, por me proporcionarem vontade de acordar todos os dias com determinação para fazer sempre o melhor que eu puder.

Sou grato também a todos os meus professores, que durante toda a minha vida, compartilharam seus conhecimentos comigo, mesmo nas horas em que eu não demonstrava interesse em aprender, em especial, agradeço a minha orientadora Elisandra de Fátima Gloss de Moraes, por me ajudar com esse trabalho todo tempo que precisei.

Gostaria de agradecer ainda a todos os colegas da turma 2011.1 do PROFMAT na UFPB, que juntos criaram uma turma dedicada que mesmo nas horas difíceis caminhou firme, com muita dedicação, compartilhando seus conhecimentos e dividindo ensinamentos, ajudando uns aos outros na busca pelo aprendizado. Em especial aos amigos Aldeck Menezes de Oliveira, Alysson Espedito de Melo, Francisco do Nascimento Lima, Marcelo Rodrigues Nunes Dantas e Ronaldo da Silva Pontes.

Agradeço a coordenação do PROFMAT, do IMPA e da UFPB que nos proporcionou esse curso visando melhorar o conhecimento dos professores e atingir melhores resultados no ensino de Matemática nas escolas públicas e particulares, em especial agradeço ao professor Elon Lages Lima, um dos principais idealizadores desse programa.

Agradeço por fim a CAPES pela bolsa que ajudou nas despesas durante todo esse período de curso.

Dedicatória

A minha avó, que mesmo não estando mais entre nós, deixou na memória um infinito de amor e carinho. E a meu filho que chegou para me proporcionar uma alegria sem igual.

Resumo

Nesta dissertação, veremos teorias e problemas de recorrências lineares. Começamos com recorrências de primeira e segunda ordem, algumas aplicações e depois vemos algumas generalizações para ordem superior. Estudamos também operadores e funções geradoras para representar as recursões, bem como aplicações das recorrências à Aritmética.

Palavras-chave: Matemática, Recorrências, Sequências, Ensino Básico.

Abstract

In this thesis, we will see theories and problems of linear recurrences. We start with recurrences of first and second order, some applications and then we see some generalizations to higher order. We also studied operators and generators functions to represent recursion and applications of the Arithmetic recurrences.

Keywords: Mathematics, Recurrences, Sequences, Basic Education.

Sumário

Introdução **xi**

1 Resultados Preliminares **1**
1.1 Sequências Numéricas 1
1.2 Progressões Aritméticas 4
1.3 Progressões Geométricas 7
1.4 Somatórios 10
1.5 Produtórios 13

2 Recorrências **16**
2.1 Lei de Recorrência 16
2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem 17
2.2.1 A Torre de Hanói 18
2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem 22
2.3.1 A Sequência de Fibonacci 25
2.3.2 Dominós 32
2.4 Recorrências Lineares de k-ésima Ordem 34
2.5 Recorrências Lineares de Terceira Ordem 35
2.5.1 Problema dos Caminhos 37

3 Aplicações de Recorrências na Combinatória e na Aritmética **41**
3.1 Problemas de Contagem 41
3.1.1 Posição dos Parênteses 41
3.1.2 O jogo de Olavo 44
3.1.3 Sequências Binárias e Ternárias 44
3.1.4 Cavaleiros da távola redonda 46
3.1.5 Extinção da Torcida 47
3.1.6 A estratégia de sobrevivência (O problema de Josefo) 48
3.2 Equações de Diferenças e Funções Geradoras 50
3.2.1 Equações de diferenças com soluções polinomiais 54
3.2.2 Recorrências e Polinômios 55

3.2.3 Recorrências e Funções Geradoras 56
3.3 Recorrências e Divisibilidade 57
3.3.1 Aplicações 59
3.3.2 Recorrências e números primos entre si 59
3.3.3 Um resultado sobre primos entre si 60

Referências Bibliográficas **63**

Introdução

Segundo um dos principais idealizadores do PROFMAT, professor Elon Lages Lima, o ensino da Matemática na educação básica brasileira deve fazer com que os estudantes pensem mais para resolver problemas matemáticos, ao invés de simplesmente resolverem exercícios de forma mecânica. Em uma das aulas do PAPMEM, o professor Augusto César Morgado, hoje não mais entre nós, defendia a ideia de implantar o raciocínio recursivo junto ao estudo das recorrências no ensino básico, justificando tal desejo pelo fato do conteúdo ajudar a resolver diversos problemas de contagem de forma inteligente, problemas esses que por sua vez não são facilmente resolvidos pelas ferramentas estudadas em combinatória. Pensando nisso, esse trabalho cria uma fonte de pesquisa para alunos e professores do ensino básico, com o intuito de ajudá-los a aumentar seus conhecimentos e introduzir além da teoria, vários problemas resolvidos bem como uma linguagem matemática muito elegante.

No primeiro capítulo, vamos estudar um apanhado de resultados preliminares sobre sequências, progressões aritméticas e geométricas, bem como somatórios e produtórios que servirão de base para o desenvolvimento desta dissertação.

No segundo capítulo do trabalho, veremos teorias e aplicações das recorrências lineares de primeira, segunda e terceira ordem, mostrando de forma muito clara ao leitor como raciocinar recursivamente. Veremos que é necessário entender o que acontece em casos inicias específicos de um problema para podermos tirar conclusões de como o problema será resolvido de forma geral. Essa ideia será vista nos exemplos da Torre de Hanói, da Sequência de Fibonacci e no Problema dos Caminhos, que aparecem como aplicações das recorrências lineares de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente. O leitor perceberá que todas as aplicações são de fácil entendimento até para alunos do Ensino Básico, mesmo que não tenham conhecimento a respeito do tema. A maior parte das teorias para resoluções de recorrências lineares estão no livro *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, que foi o livro texto da disciplina de MA12 do PROFMAT.

No terceiro capítulo, teremos muitos problemas resolvidos, boa parte deles, retirados de *A Matemática do Ensino Médio, Volume 4: Enunciados e Soluções dos Exercícios* e também de *Concrete Mathematics: a foundation for computer science.* Nesse momento o leitor entenderá que o estudo das recorrências é de fundamental importância, pois completa os conhecimentos de combinatória com o intuito de resolver problemas de contagem que não são facilmente resolvidos apenas com as ferramentas da combinatória vistos no Ensino Básico. Após essa bateria de problemas interessantes, o leitor irá se deparar com uma linguagem mais refinada da Matemática, as recorrências serão escritas por meio de operadores e funções geradoras. Será apresentada uma breve teoria de recorrências aplicada a aritmética, alguns teoremas e aplicações das recorrências à divisibilidade e, para finalizar, usando os conhecimentos adquiridos, vamos mostrar que não existe uma função polinomial de domínio natural que possa gerar todos os números primos em sequência.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo traremos alguns resultados básicos que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação. Trataremos de sequências de números reais, progressões aritméticas e geométricas além de somatórios e produtórios.

1.1 Sequências Numéricas

Definição 1.1 *Uma sequência numérica é uma função de domínio natural e contradomínio real, ou seja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *que associa a cada número natural* n, *um número real* $f(n)$. *Denotamos* $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, ... *e a sequência por* $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$, *onde chamamos* x_n *de* n*-ésimo termo da sequência.*

Denotaremos uma sequência simplesmente por (x_n) para indicar que quando $n = 1$, x_1 é o primeiro termo da sequência, quando $n = 2$, x_2 é o segundo termo da sequência e assim por diante.

Nesta dissertação, estaremos interessados em saber quando uma dada sequência converge. Usaremos estes conceitos e resultados, por exemplo, para mostrarmos propriedades acerca da Sequência de Fibonacci da qual trataremos no segundo capítulo.

Definição 1.2 *Dizemos que uma sequência* (x_n) *converge para um número* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - x_0| < \varepsilon$, *sempre que* $n \geq n_0$. *Neste caso, dizemos que a sequência* (x_n) *é convergente e tem limite* x_0. *Denotamos isto por* $x_n \to x_0$.

A definição acima nos diz que uma sequência (x_n) converge para x_0 se dado qualquer intervalo aberto contendo x_0, a partir de um certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$, todos os termos da sequência estão dentro deste intervalo. Quando não existe o limite de uma sequência (x_n) dizemos que esta é **divergente**.

Vejamos alguns exemplos de sequências convergentes.

Exemplo 1 *A sequência* $(1/n)$ *converge para* 0.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Tomando $n_0 > 1/\varepsilon$, temos que se $n \geq n_0$, então $n > 1/\varepsilon$, donde

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Isto prova que $1/n$ tende a zero.

Exemplo 2 *Se* q *é um número real cujo módulo está entre* 0 *e* 1*, temos que* $q^n \to 0$.

Para mostrar este resultado usaremos a conhecida desigualdade de Bernoulli. Esta desigualdade garante que

$$(1+r)^n \geq 1 + nr \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

qualquer que seja o número real $r > -1$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que como $0 < |q| < 1$ temos $(1/|q|) > 1$ e então existe $r > 0$ tal que $(1/|q|) = 1 + r$. Devido à inequação acima obtemos

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+r)^n \geq 1 + nr.$$

Escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > (\varepsilon^{-1} - 1)/r$ temos $1 + n_0 \cdot r > \varepsilon^{-1}$ e assim

$$\frac{1}{|q^n|} \geq 1 + n \cdot r \geq 1 + n_0 \cdot r > \varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$

o que equivale a

$$|q^n - 0| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Portanto temos que $q^n \to 0$.

Vamos dar agora algumas definições que usaremos mais tarde.

Definição 1.3 *Dizemos que uma sequência* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *é* **limitada** *quando existe* $C > 0$ *tal que* $|x_n| \leq C$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, a sequência $1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, é limitada, pois todos os seus termos pertencem ao intervalo $[-1, 1]$.

Definição 1.4 *Uma sequência* (x_n) *é denominada:*

i) crescente *se* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$*, isto é,*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots .$$

ii) decrescente *se* $x_n > x_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$*.*

iii) não decrescente *se* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$*.*

iv) não crescente *se* $x_n \geq x_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Em qualquer um destes casos a sequência é dita **monótona**.

O resultado a seguir também será utilizado no Capítulo 2, quando se trata da sequência de Fibonacci.

Teorema 1.5 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

O leitor interessado na demonstração deste teorema pode consultar [14, Teorema 12, página 648].

Definição 1.6 *Seja* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma sequência de números reais com* $x(n) = x_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Uma subsequência de* (x_n) *é também uma função definida a partir de* x *restringindo* x *a um subconjunto infinito* $N_1 \subset \mathbb{N}$*.*

Para $N_1 = \{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$ denotamos a subsequência de (x_n) por (x_{n_k}) ou $(x_k)_{k \in N_1}$. Por exemplo tomemos $x_n = (-1)^n$. Esta sequência é

$$(-1, 1, -1, 1, \cdots).$$

Considerando $N_1 = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos pares e $N_2 = \{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos ímpares, temos as subsequências de (x_n) dadas por

$$(x_k)_{k \in N_1} = (1, 1, 1, 1, \cdots) \quad \text{e} \quad (x_k)_{k \in N_2} = (-1, -1, -1, -1, \cdots).$$

Observação: Se (x_n) é uma sequência tal que as subsequências formadas pela restrição aos pares e aos ímpares converge para o mesmo limite então a sequência converge. Ou seja, se

$$x_{2k} \to x_0 \quad \text{e} \quad x_{2k-1} \to x_0$$

então $x_n \to x_0$. A justificativa para este resultado é simples. Dado qualquer intervalo aberto I contendo x_0, já que $x_{2k} \to x_0$ existe n_1 tal que $x_{2k} \in I$ para todo $2k > n_1$. Da mesma forma, já que $x_{2k-1} \to x_0$ existe n_2 tal que $x_{2k-1} \in I$ para todo $2k-1 > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos $x_n \in I$ para todo $n \geq n_0$.

1.2 Progressões Aritméticas

Veremos agora os resultados básicos sobre Progressões Aritméticas.

Definição 1.7 *Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se uma constante ao termo anterior. Essa constante é chamada razão da P.A. e é indicada por r.*

Em outras palavras, P.A. é toda sequência de números na qual a diferença entre dois termos consecutivos é constante, ou seja

$$r = a_{n+1} - a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ uma P.A., temos

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_5 &= a_4 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando-se e cancelando os termos iguais presentes em lados opostos obtemos

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Para $1 \leqslant k \leqslant n$ temos ainda

$$\begin{aligned} a_k + (n-k) \cdot r &= [a_1 + (k-1) \cdot r] + n \cdot r - k \cdot r \\ &= a_1 + (n-1) \cdot r = a_n \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r,$$

não precisando assim iniciar do primeiro termo da sequência, podendo ter início em qualquer valor k.

Outra fórmula bastante usada no estudo das Progressões Aritméticas é a da soma dos n primeiros termos, dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Para chegarmos à fórmula vamos usar o mesmo raciocínio que se afirma ter sido deduzido por Gauss quando ele tinha menos 10 anos de idade e que hoje pode ser encontrado em praticamente todos os livros do Ensino Médio. (Veja figura em: http://www.geometras.com.br/?$p = 645$ e biografia em http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl-Friedrich-Gauss)

Figura 1.1: Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Johann Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. Alguns o referem como princeps mathematicorum (em latim, "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos") e um "grande matemático desde a antiguidade", Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele referia-se à matemática como "a rainha das ciências".

A história conta que em um dia normal, em que possivelmente o professor de Gauss estivesse zangado com a turma, decidiu passar uma atividade de classe para os alunos. Essa atividade consistia em somar todos os números naturais de 1 até 100. Isso mesmo, determinar

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

Pouco tempo depois do professor ter anunciado o trabalho, Gauss levantou o braço pedindo permissão para falar e disse "professor, já terminei". Não acreditando que fosse verdade, o professor se dirigiu a carteira do menino e verificou que o mesmo teria criado um raciocínio surpreendente para solucionar o problema. Além da soma de 1 até 100, Gauss escreveu a soma de 100 até 1 logo abaixo da soma anterior, percebendo que $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, e assim por diante, acontecendo tal soma exatamente 100 vezes, lembrando ainda que a soma desejada pelo professor foi efetuada duas vezes. Ou seja,

$$\begin{array}{c} 1+2+3+\cdots+98+99+100 \\ 100+99+98+\cdots+3+2+1 \\ \hline (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(98+3)+(99+2)+(100+1) \\ \Downarrow \\ \underbrace{101+101+101+\cdots 101+101+101}_{100 \; vezes} \\ \Downarrow \\ \dfrac{101\cdot 100}{2} = 101\cdot 50 = 5050. \end{array}$$

Vamos agora generalizar o raciocínio para qualquer Progressão Aritmética.

Proposição 1.1 *Seja* $(a_1, \cdots, a_q, \ldots, a_k, \cdots, a_n, \cdots)$ *uma P.A.. Se* $1+n=q+k$ *então* $a_1+a_n=a_q+a_k$.

Prova: Seja r a razão da P.A.. Se $r=0$, não há o que fazer pois $a_k=a_n$ para todo $k,n\in\mathbb{N}$. Caso $r\neq 0$, usando a fórmula do termo geral $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ teremos

$$a_1+a_n=a_q+a_k \Leftrightarrow a_1+a_1+(n-1)\cdot r = a_1+(q-1)\cdot r+a_1+(k-1)\cdot r$$

$$\Leftrightarrow (n-1)=(q-1)+(k-1) \Leftrightarrow 1+n=q+k,$$

como desejado. ■

Exemplo 3 *Considere a P.A.* $(1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\cdots)$. *Podemos observar que* $1+25=4+22=7+19=10+16=13+13$ *conforme a proposição anterior.*

Ainda mais interessante é o fato que se a P.A. tem um número ímpar de termos, o dobro do termo central é também igual a soma dos termos extremos. Em fim, para determinar a soma dos n primeiros termos de uma P.A. faremos

$$\begin{array}{c} S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \\ S_n = a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1 \\ \hline 2\cdot S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1) \end{array}$$

o que implica que

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

e consequentemente

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

ou seja, a soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

como afirmamos anteriormente.

1.3 Progressões Geométricas

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre as Progressões Geómetricas.

Definição 1.8 *Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se uma constante ao termo anterior. Essa constante é chamada razão da P.G. e é indicada por q.*

Em outras palavras, P.G. é toda sequência de números na qual o quociente entre dois termos consecutivos é constante, ou seja

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ \forall\ n \geqslant 1.$$

Também podemos observar um raciocínio dedutivo para determinar o Termo Geral da P.G.. Note que se $a_1 = 0$ ou $q = 0$ então $a_n = 0$ para todo $n > 1$. Caso $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, já que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

multiplicando os termos do mesmo lado da igualdade e cancelando termos iguais em lados opostos obtemos

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, \ \forall\ n > 1.$$

A partir daí obtemos

$$a_k \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_n$$

ou seja,

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Vamos determinar a seguir a soma dos termos de uma P.G..

Proposição 1.2 *Considere* $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$ *uma P.G. com razão* $q \neq 1$. *Então a soma dos primeiros* n *termos desta P.G. é dada por*

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Prova: Seja

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Se multiplicarmos a equação por q, obtemos

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n.$$

Como $a_n = qa_{n-1}$, temos que

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo as equações e cancelando os termos comuns teremos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

de modo que

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n = a_1 \cdot (1 - q^n).$$

Portanto, como $q \neq 1$, ficamos com

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

como desejado. ■

Note que quando a razão é igual a 1 temos uma P.G. constante. Teremos então todos termos iguais, consequentemente temos um multiplicação do a_1 pelo número de termos que queremos somar, n, logo

$$S_n = a_1 \cdot n, \quad \text{quando} \quad q = 1.$$

Podemos nos perguntar a respeito da soma infinita

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Quando $-1 < q < 1$ teremos uma soma infinita de parcelas decrescentes que podemos calcular por

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, \quad -1 < q < 1.$$

De fato, sabemos que a_1 e q são constantes, sendo assim, $a_1/(1-q)$ também é constante, então

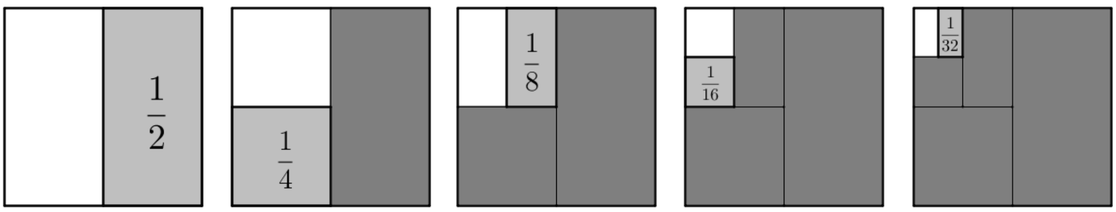
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 q^n}{1-q}.$$

Uma vez que $-1 < q < 1$, como vimos no Exemplo 2 temos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Daí

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = \frac{a_1}{1-q}.$$

O fato de alguns alunos do Ensino Médio terem dificuldades para compreender este raciocínio não deve ser surpresa para os professores. A ideia de tender ao infinito não é muito intuitiva e o questionamento mais comum é “Como uma soma de infinitos termos pode dar um número inteiro?”. O exemplo a seguir mostra de forma bastante simples com o auxílio da geometria.

Exemplo 4 *Considere um quadrado de lado* 1. *Vamos calcular a área desse quadrado de uma forma bem peculiar. Claro que já sabemos o seu valor,* $A = 1^2 = 1$. *Mas, imagine que queremos apenas a metade, ou seja,* $\frac{1}{2}$, *em seguida vamos somar à área já calculada a metade da metade que ainda não usamos, e assim por diante como mostra a figura a seguir.*



Ou seja, criamos a sequência

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

que é uma P.G. de razão $1/2$ *e queremos somar todos os seus termos, porém o raciocínio continua infinitamente, então temos uma soma infinita.*

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots.$$

Quando calcularmos essa soma infinita encontraremos a área do quadrado, que é 1, ou seja,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

e usando a fórmula já demonstrada ficamos com

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

como desejado.

1.4 Somatórios

Consideremos a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

Existe uma forma abreviada de representar esta soma, recorrendo a um símbolo, que designamos por símbolo de somatório $\sum$. Assim, a soma anterior passa a poder representar-se por

$$\sum_{k=1}^{10} k^2,$$

que se lê: somatório desde $k = 1$ até 10, de k^2. A letra k diz-se o índice da soma (ou do somatório) e pode ser substituída por qualquer outra (que não intervenha na soma), como por exemplo: i, j, l, m, n, p, *etc.* Diz-se assim que k é um índice mudo. O simbolo $\sum$ é a letra sigma maiúsculo do alfabeto grego, e corresponde a letra **S** do nosso alfabeto, é também a primeira letra da palavra SOMA, em grego ΣΩMA.

Mais geralmente, a soma $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$, pode representar-se abreviadamente por $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i$. Diz-se que p é o limite inferior e n o limite superior do somatório.

Exemplos:

1. $\sum\limits_{i=2}^{5} 2^i = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

2. $\sum\limits_{i=-1}^{4} k = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4.$

Vejamos algumas propriedades.

P1. Propriedade Aditiva

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Prova: A demonstração dessa propriedade baseia-se nas propriedades comutativa e associativa da adição. Assim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)\\ &= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \cdots + a_n + b_n\\ &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n\\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.\end{aligned}$$

■

P2. Propriedade Homogênea

$$\sum_{i=m}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Prova:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(c \cdot a_i) &= ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n\\ &= c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)\\ &= c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i.\end{aligned}$$

■

P3. Propriedade Telescópica

$$\sum_{i=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

Prova: Desenvolvendo o somatório

$$\sum_{i=m}^{n}(a_k - a_{k+1}),$$

obtemos a soma

$$(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}).$$

Associando os termos de uma forma diferente, obtemos,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) &= a_m + (-a_{m+1} + a_{m+1}) + (-a_{m+2} + a_{m+2}) + \cdots + (-a_n + a_n) - a_{n+1} \\ &= a_m - a_{n+1}\end{aligned}$$

como queríamos. ■

P4. Somatório de Constantes

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk, \text{ sendo } k \text{ uma constante.}$$

Prova: Temos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

fazendo $f(i) = k$ temos

$$f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = k$$

daí

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n \ vezes} = nk$$

como desejado. ■

Essa propriedade pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser necessariamente 1, ou seja

$$\sum_{i=m}^{n} k = (n - m + 1)k, \text{ sendo } k \text{ uma constante.}$$

A prova é análoga a anterior.

P5. Somatório Duplo

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(i)g(j) = \sum_{i=1}^{m} f(i)\sum_{j=1}^{n} g(j)$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(i)g(j) &= \sum_{i=1}^{m} [f(i)g(1) + f(i)g(2) + \cdots + f(i)g(n)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} f(i)\,[g(1) + g(2) + \cdots g(n)] \\
&= [f(1) + f(2) + \cdots f(m)]\,[g(1) + g(2) + \cdots g(n)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} f(i)\sum_{j=1}^{n} g(j).
\end{aligned}$$

■

1.5 Produtórios

Analogamente ao que foi visto no somatório, o qual representa a soma de termos, pode se fazer necessária a representação do produto de termos de uma sequência. Temos

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

O símbolo Π é a letra grega pi maiúscula, corresponde ao nosso **P**, sendo esta a primeira letra da palavra PRODUTO, em grego ΠΡΟΪΟΝ.

Uma definição mais formal de produtório pode ser escrita como

$$\prod_{i=m}^{n} f(i) = f(m) \cdot f(m+1) \cdot f(m+2) \cdot \ldots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$$

onde $f(i)$ é uma função de variável i, m e n são números inteiros, sendo $m \leq n$, e i varia de um em um, desde o valor m até o valor n.

Exemplos

1. $\prod_{i=1}^{20} 2i = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 40$

2. $\prod_{i=-10}^{71} i = (-10) \cdot (-9) \cdot (-8) \cdot \cdots \cdot 70 \cdot 71$

Vejamos algumas Propriedades dos produtórios.

P1.

$$\prod_{i=1}^{n} kf(i) = k^n \prod_{i=1}^{n} f(i), \text{ sendo } k \text{ uma constante.}$$

Prova:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} kf(i) &= kf(1) \cdot kf(2) \cdot \ldots \cdot kf(n) \\ &= k^n \left[f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)\right] \\ &= k^n \prod_{i=1}^{n} f(i).\end{aligned}$$

■

Esta propriedade pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser necessariamente 1, ou seja

$$\prod_{i=m}^{n} kf(i) = k^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} f(i), \text{ sendo } k \text{ constante,}$$

cuja prova é análoga a anterior.

P2.

$$\prod_{i=1}^{n} k = k^n, \text{ sendo } k \text{ uma constante.}$$

Prova: Temos que

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

fazendo $f(i) = k$ obtemos $f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = k$ e daí

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) = \prod_{i=1}^{n} k = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ vezes}} = k^n.$$

■

Esta propriedade também pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser 1, ou seja

$$\prod_{i=m}^{n} k = k^{n-m+1}, \text{ sendo } k \text{ uma constante,}$$

cuja prova é análoga a anterior.
P3.

$$\prod_{i=1}^{n}[f(i)\cdot g(i)]=\left[\prod_{i=1}^{n}f(i)\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}g(i)\right]$$

Prova:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}[f(i)\cdot g(i)] &= f(1)\cdot g(1)\cdot f(2)\cdot g(2)\cdot\ldots\cdot f(n)\cdot g(n)\\ &= [f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)]\cdot[g(1)\cdot g(2)\cdot\ldots\cdot g(n)]\\ &= \left[\prod_{i=1}^{n}f(i)\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}g(i)\right].\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Recorrências

Neste capítulo estudaremos teorias e aplicações que vão desde definições e teoremas acerca de sequências e recorrências até o estudo das recorrências lineares de primeira, segunda e terceira ordens.

2.1 Lei de Recorrência

Lei de Recorrência (ou Sequência Recorrente) é uma função f que permite determinar cada termo a_n de uma sequência numérica a partir de seus anteriores $(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1)$ dada uma regra para definir o primeiro termo (ou os primeiros termos, de acordo com a necessidade), ou seja,

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1)$$

ou ainda, uma *sequência recorrente de ordem k* pode ser representada por

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \cdots, a_{n+1}, a_n).$$

Quando nos referimos a ordem de uma sequência recorrente, estamos simplesmente dizendo quantos termos anteriores são necessários para determinar o próximo termo.

Exemplo 5 *A sequência*

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\right)$$

pode ser definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ a_n = 2a_{n-1}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Dessa forma sabemos que o primeiro termo é $1/4$ *e que para encontrar os próximos termos, a partir do segundo, basta multiplicar o termo anterior por* 2*, como já vimos no capítulo anterior, essa sequência é uma Progressão Geométrica. Dizemos que essa é uma sequência recorrente de primeira ordem.*

Exemplo 6 *A sequência* $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots)$ *também pode ser definida recursivamente. Podemos determinar um termo, a partir do terceiro, pela soma dos dois termos imediatamente anteriores, ou seja*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \end{cases}$$

essa sequência é conhecida como ***Sequência de Fibonacci*** *e é uma sequência recorrente de segunda ordem.*

Quando a função f é linear, dizemos que a sequência recorrente também é linear, ou seja, existem constantes $c_1, c_2, \cdots, c_k$ tais que

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n.$$

Em alguns trabalhos sobre recorrência, como por exemplo em [3] e [10], encontramos recorrências lineares de primeira ordem escritas por $a_n = a_{n-1} + r$. Por outro lado, em [8], essa equação é considerada uma recorrência linear de segunda ordem. A justificativa deve-se ao fato de que recorrências do tipo $a_n = a_{n-1} + r$ são Progressões Aritméticas, logo, sabemos que a razão r pode ser obtida pela diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência, em especial por $r = a_{n-1} - a_{n-2}$ e substituindo na equação anterior teremos $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2}$ ou ainda

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},$$

que é uma recorrência linear de segunda ordem. Enquanto que as Progressões Aritméticas são recorrências lineares de segunda ordem, por sua vez as Progressões Geométricas são recorrências lineares de primeira ordem, pois $a_n = q \cdot a_{n-1}$, que depende apenas do termo imediatamente anterior.

Nesse trabalho vamos considerar que recorrências do tipo $a_n = a_{n-1} + r$ são recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem, ou ainda, quando da forma $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, recorrências lineares homogêneas de segunda ordem.

2.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Veremos nessa seção algumas aplicações de recorrências lineares de primeira ordem em forma de problemas, bem como suas respectivas soluções juntamente a alguns comentários. Antes disso, vejamos o teorema que usaremos para resolver essas recorrências.

Teorema 2.1 *Se x_n é uma solução não-nula de $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$, então a substituição $a_n = x_n \cdot b_n$ transforma a recorrência $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n)$ em*

$$b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{f(n) \cdot x_n}.$$

Prova: A substituição $a_n = x_n \cdot b_n$ transforma $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n + g(n)$ em

$$x_{n+1} \cdot b_{n+1} = f(n) \cdot x_n \cdot b_n + g(n).$$

Mas $x_{n+1} = f(n) \cdot x_n$, pois x_n é solução de $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$. Portanto a equação se transforma em

$$f(n) \cdot x_n \cdot b_{n+1} = f(n) \cdot x_n \cdot b_n + g(n),$$

ou seja,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{f(n) \cdot x_n},$$

como desejado. ■

2.2.1 A Torre de Hanói

François Édouard Anatole Lucas nasceu em Amiens, França, onde frequentou a Ecole Normale Supérieure. Depois de servir como um oficial de artilharia na Guerra Franco-Prussiana, tornou-se professor de matemática em Paris. Lucas introduziu o quebra-cabeça, A Torre de Hanói, em 1883, em uma de suas publicações matemática-recreação. Ele também desenvolveu métodos para testar a primalidade de números. Em 1857, aos 15 anos, Lucas começou a testar a primalidade de $2^{127} - 1$ à mão. Em 1876, após 19 anos de testes, finalmente provou que $2^{127} - 1$ é primo, o que continuaria a ser o maior conhecido Mersenne por três quartos de século. Isso pode ficar para sempre como o maior número primo comprovado pela mão.

Figura 2.1: François Édouard Anatole Lucas (1842 - 1891)

(Veja figura em: http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lucas.html e biografia em http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Lucas.html)

A Torre de Hanói é um "quebra-cabeça" matemático muito conhecido no mundo todo. Consiste em n discos de tamanhos diferentes que são colocados em três pinos verticais. Inicialmente todos os discos são dispostos em ordem decrescente (de tamanho) de baixo para cima. O objetivo é transferir toda a torre para um dos outros pinos de modo que cada movimento seja feito somente com um disco e que nunca um disco maior fique sobre um menor.

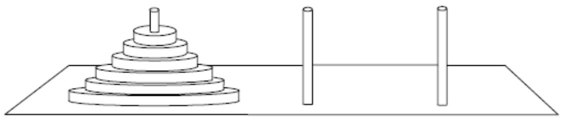
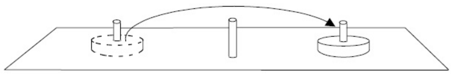
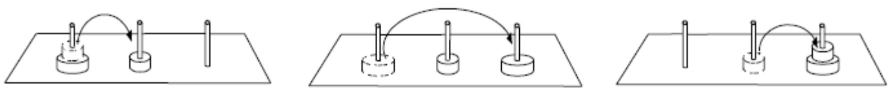


Figura 2.2: Torre de Hanói

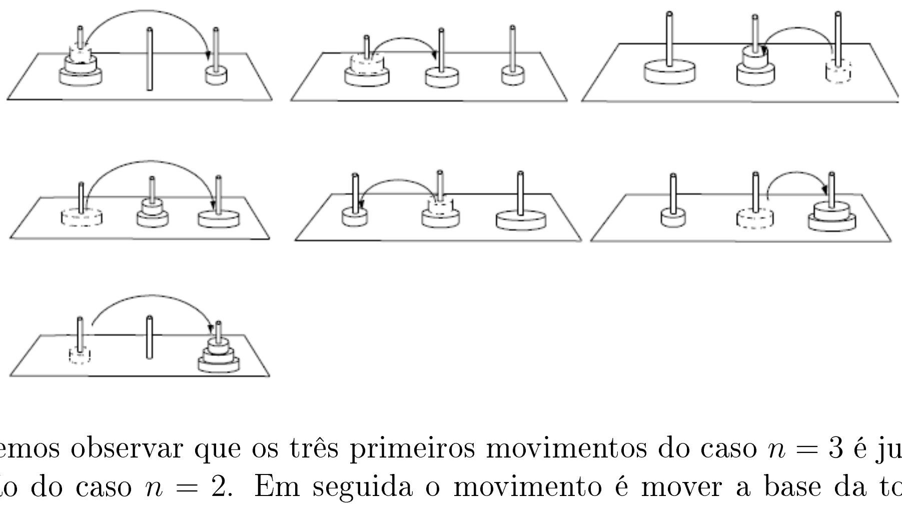
O problema matemático que será resolvido a seguir é saber qual o número mínimo de movimentos necessários para resolver uma Torre de Hanói com n discos usando o conhecimento recorrente. Vejamos alguns movimentos para valores iniciais de n que nos ajudaram a tirar conclusões por observação.
Para $n = 1$ teremos apenas um movimento.



Para $n = 2$ teremos três movimentos.

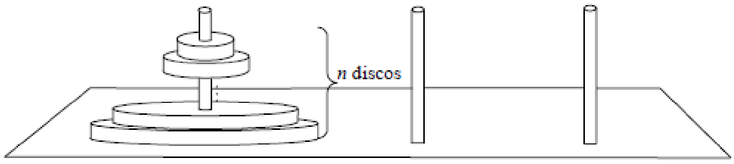


Para $n = 3$ teremos um total de sete movimentos.

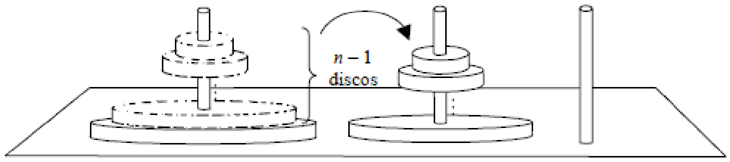


Podemos observar que os três primeiros movimentos do caso $n = 3$ é justamente a solução do caso $n = 2$. Em seguida o movimento é mover a base da torre, para que a partir daí possamos usar mais uma vez o caso $n = 2$ para concluir o problema com três discos. A ideia é generalizar o raciocínio para uma quantidade maior de discos.

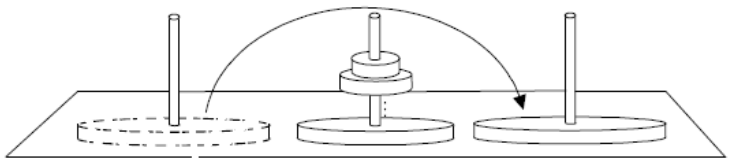
Vamos pensar agora em uma torre com n discos.



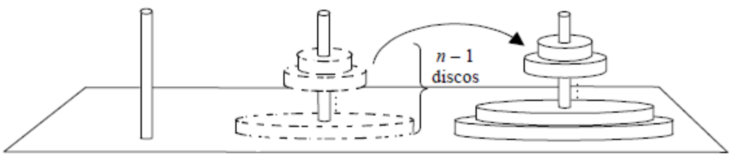
Vamos admitir também que já sabemos resolver o problema para $n - 1$ discos.



Em seguida movemos o disco maior.



E novamente fazemos uso do caso $n - 1$ para chegar a solução do problema.



Vejamos como resolver esse problema algebricamente. Seja a_1 o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema com 1 disco, a_2 o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema com 2 discos e assim por diante.

Pelo raciocínio que acabamos de fazer utilizando as figuras acima temos que $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$, ou ainda

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Mesmo tendo encontrado uma expressão de recorrência que descreve todos os termos de uma sequência em função do anterior, não é esse o nosso objetivo final. Vejamos como resolver essa equação recorrente.

Primeiramente vamos resolver a recorrência sem o termo independente de a_n, isto é, a recorrência homogênea $x_n = 2x_{n-1}$ com $a_1 = 1$. Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações obtemos

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots x_n = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 \ldots 2x_{n-1}$$

e fazendo o cancelamento dos termos iguais que aparecem nos dois membros, temos

$$x_n = 2^{n-1} \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x_n = 2^{n-1}.$$

Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1} \cdot b_n$, graças ao Teorema 2.1 obtemos $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2^n}$. Então temos

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \frac{1}{2^1} \\ b_3 &= b_2 + \frac{1}{2^2} \\ b_4 &= b_3 + \frac{1}{2^3} \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos coincidentes nos dois membros, temos

$$b_n = b_1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $a_n = 2^{n-1} \cdot b_n$ e $a_1 = 1$ temos que $b_1 = 1$. Usando a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (veja Proposição 1.2 no Capítulo 1) ficaremos com

$$b_n = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

Portanto

$$a_n = 2^{n-1} \cdot b_n = 2^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2^n - 1.$$

Concluímos então que para n discos serão necessários no mínimo $2^n - 1$ movimentos para deslocar a torre respeitando as regras sugeridas.

2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Trataremos sobre as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e com coeficientes constantes, que são recorrências da forma $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$. Vamos admitir que $q \neq 0$, pois se $q = 0$ teremos uma recorrência linear de primeira ordem.

Podemos associar cada uma dessas recorrências a uma equação do segundo grau, do tipo $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica. É importante observar que se $q \neq 0$ então 0 não pode ser raiz da nossa equação característica.

Teorema 2.2 *Se as raízes de $r^2+pr+q = 0$ são r_1 e r_2, então $b_n = c_1(r_1)^n+c_2(r_2)^n$ é solução da recorrência $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.*

Prova: Substituindo $b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ e organizando como nos convém, obtemos,

$$c_1(r_1)^n((r_1)^2 + pr_1 + q) + c_2(r_2)^n((r_2)^2 + pr_2 + q) = c_1(r_1)^n 0 + c_2(r_2)^n 0 = 0,$$

como desejado. ∎

Teorema 2.3 *Se as raízes de $r^2+pr+q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, com c_1 e c_2 constantes complexas (reais ou não).*

Prova: Seja x_n uma solução qualquer da recorrência $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$. Como $r_1 \neq r_2$ e são raízes não nulas já que $q \neq 0$, podemos determinar constantes c_1 e c_2 soluções do sistema

$$\begin{cases} c_1r_1 + c_2r_2 = x_1, \\ c_1(r_1)^2 + c_2(r_2)^2 = x_2, \end{cases}$$

por substituição, vamos isolar c_1 na primeira equação ficando com

$$c_1 = \frac{x_1 - c_2 r_2}{r_1},$$

e vamos substituir na segunda equação, ficando com

$$\frac{x_1 - c_2 r_2}{r_1}(r_1)^2 + c_2 (r_2)^2 = x_2,$$

que implica em

$$(x_1 - c_2 r_2) r_1 + c_2 (r_2)^2 = x_2,$$

logo

$$x_1 r_1 - c_2 r_1 r_2 + c_2 (r_2)^2 = x_2.$$

Daí

$$c_2 \left((r_2)^2 - r_1 r_2 \right) = x_2 - x_1 r_1.$$

Portando

$$c_2 = \frac{x_2 - x_1 r_1}{(r_2)^2 - r_1 r_2},$$

ou ainda

$$c_2 = \frac{x_2 - x_1 r_1}{r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Substituindo esse resultado na equação $c_1 = \dfrac{x_1 - c_2 r_2}{r_1}$, teremos

$$c_1 = \frac{x_1 - \dfrac{x_2 - x_1 r_1}{r_2 (r_2 - r_1)} r_2}{r_1}$$

que implica em

$$c_1 = \frac{x_1 - \dfrac{x_2 - x_1 r_1}{r_2 - r_1}}{r_1}.$$

Logo

$$c_1 = \frac{x_1 (r_2 - r_1) - (x_2 - x_1 r_1)}{r_1 (r_2 - r_1)}.$$

Daí

$$c_1 = \frac{x_1 r_2 - x_1 r_1 - x_2 + x_1 r_1}{r_1 (r_2 - r_1)},$$

ou seja

$$c_1 = \frac{x_1 r_2 - x_2}{r_1 (r_2 - r_1)}.$$

Para provar o teorema mostraremos que $x_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para $y_n = x_n - c_1(r_1)^n - c_2(r_2)^n$, basta mostrar que $y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\begin{aligned} &y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n \\ &= (x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) - c_1(r_1)^n\left[(r_1)^2 + pr_1 + q\right] - c_2(r_2)^n\left[(r_2)^2 + pr_2 + q\right]. \end{aligned}$$

No segundo termo dessa equação, a primeira parcela é igual a 0 pois x_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ e as duas últimas parcelas são iguais a 0 pois r_1 e r_2 são raízes da equação

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Portanto $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$. Além disso, como

$$c_1r_1 + c_2r_2 = x_1 \quad \text{e} \quad c_1(r_1)^2 + c_2(r_2)^2 = x_2,$$

temos $y_1 = y_2 = 0$. Mas, sendo

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2 = 0$$

então $y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Observação 1 *Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução* $b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$*, com* c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Basta colocar as raízes na forma trigonométrica, que teremos:*

$$\begin{aligned} &r_1 = \rho(cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta), \quad r_2 = \rho(cos\ \theta - i \cdot sen\ \theta) \\ &(r_1)^n = \rho(cos\ n\theta + i \cdot sen\ n\theta), \quad (r_2)^n = \rho(cos\ n\theta - i \cdot sen\ n\theta) \\ &c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n = \rho^n\left[(c_1 + c_2)cos\ n\theta + i(c_1 - c_2)sen\ n\theta\right]. \end{aligned}$$

Como $c_1 + c_2$ *e* $i(c_1 - c_2)$ *são novas constantes arbitrárias, a solução pode ser escrita como*

$$b_n = \rho^n\left[k_1cos\ n\theta + k_2sen\ n\theta\right].$$

Teorema 2.4 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$*, então* $b_n = c_1r^n + c_2nr^n$ *é solução da recorrência* $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$*, quaisquer que sejam os valores das constantes* c_1 *e* c_2*.*

Prova: Se as raízes são iguais então $r = -p/2$. Substituindo $b_n = c_1r^n + c_2nr^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ e organizando como nos convém, obtemos,

$$\begin{aligned} &c_1r^n(r^2 + pr + q) + c_2nr^n(r^2 + pr + q) + c_2r_nr(2r + p) \\ &= c_1r^n0 + c_2nr^n0 + c_2r^nr0 = 0, \end{aligned}$$

como desejado. ■

Teorema 2.5 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $b_n = c_1r^n + c_2nr^n$, com c_1 e c_2 constantes.*

Prova: Seja x_n uma solução qualquer da recorrência $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$. Como $r \neq 0$, podemos determinar constantes c_1 e c_2 soluções do sistema

$$\begin{cases} c_1r + c_2r = x_1 \\ c_1r^2 + 2c_2r^2 = x_2 \end{cases},$$

e após resolver o sistema, teremos

$$c_1 = 2\frac{x_1}{r} - \frac{x_2}{r^2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{x_2 - rx_1}{r^2}.$$

Para provar o teorema precisamos mostrar que $x_n = c_1r^n + c_2nr^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou quivalentemente que $y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $y_n = x_n - c_1r^n - c_2nr^n$. Temos

$$\begin{aligned} y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n &= (x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n) - c_1r^n\left(r^2 + pr + q\right) \\ &\quad -c_2nr^n\left(r^2 + pr + q\right) - c_2r^nr(2r + p). \end{aligned}$$

O primeiro parêntese é igual a 0, pois x_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. Já o segundo e o terceiro são iguais a 0, pois r é raiz da equação $r^2+pr+q = 0$ e o quarto parêntese é igual a 0, pois $r_1 = r_2 = r$, $r = -p/2$. Portanto $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$. Além disso, como $c_1r + c_2r = x_1$ e $c_1r^2 + 2c_2r^2 = x_2$, temos $y_1 = y_2 = 0$. Mas, se $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$ e $y_1 = y_2 = 0$ então $y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

2.3.1 A Sequência de Fibonacci

Figura 2.3: Leonardo Fibonacci (1170 - 1250)

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido por usar como exemplo, o que seria posteriormente conhecida por Sequência de Fibonacci, no Liber Abaci, a primeira obra importante sobre matemática desde Eratóstenes, isto é, mais de mil anos antes. O Liber Abaci introduziu os numerais hindu-arábicos na Europa, além de discutir muitos problemas matemáticos. (Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm)

Um problema interessante e bastante conhecido pelos matemáticos do mundo inteiro é o "Problema da Reprodução dos Coelho", que se refere ao número de casais em uma população de coelhos após doze meses, considerando-se que:
1) No primeiro mês tem-se apenas um casal;
2) Casais reproduzem-se somente após o segundo mês de vida;
3) Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
4) Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
5) Os coelhos nunca morrem.
Tal problema questiona: Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir de um par de coelhos em um ano?

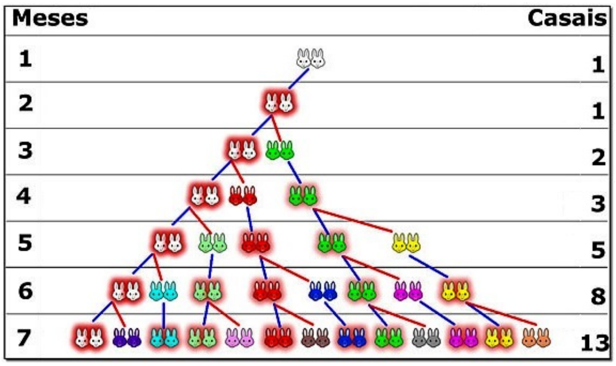


Figura 2.4: Disponível em: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070108.htm

Ao fixar como mês um o início do processo, tem-se, no início do primeiro mês, um único casal jovem. Já no segundo mês, esse casal será adulto. Considerando-se que um par adulto produz um novo par a cada mês, no início do terceiro mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par adulto e outro recém-nascido.

No início do quarto mês o par adulto produzirá mais um par, enquanto que o outro par completará um mês de vida e ainda não estará apto a reproduzir. Assim, existirão três pares de coelhos, sendo um par adulto, um par com um mês de idade e mais um par recém-nascido.

No início do quinto mês existirão dois pares adultos, sendo que cada um já reproduziu um novo par e mais um par que completou um mês de vida. Logo, existirão cinco pares.

No início do sexto mês existirão três pares adultos, sendo que cada um já produziu um novo par e mais dois pares que completam um mês de vida. Logo, existirão oito pares. Seguindo-se o mesmo raciocínio para os outros meses, obtém-se a famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ \ldots.$$

Denotando por a_n o número de casais de coelhos obtidos em n meses, para $n \geq 3$ vemos que para obter a_n temos os a_{n-1} casais de coelhos do mês anterior, já que estes não morrem, e dentre estes temos a_{n-2} casais que existiam no mês $(n-2)$ e que estão aptos para reproduzir, fornecendo mais a_{n-2} casais. Assim, vemos que cada termo da sequência acima é dado recursivamente pela expressão já vista anteriormente

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geqslant 3, \end{cases}$$

em que n é o número de meses.

A seguir veremos algumas propriedades dessa sequência. Para iniciar vejamos como achar uma fórmula explícita (ou termo geral) para a_n em função de n. A recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ tem equação característica $r^2 = r + 1$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Precisamos ainda recordar os Teoremas 2.2 e 2.3 para chegarmos a conclusão da fórmula explícita. Para facilitar os cálculos vamos considerar

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vamos substituir as raízes r_1 e r_2 em $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$. Uma vez que esta é uma solução da nossa recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, teremos,

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar c_1 e c_2 basta substituir $a_0 = a_1 = 1$ e resolver o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}.$$

Logo,

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

de modo que,

$$a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ou ainda,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Vejamos agora alguns resultados acerca da Sequência de Fibonacci.

Proposição 2.1 *A soma dos n primeiros termos da Sequência de Fibonacci, com $n > 1$, é dada pela expressão*

$$S_n = a_{n+2} - 1.$$

Prova: Queremos determinar

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Observe que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ a_3 &= a_5 - a_4 \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= a_n - a_{n-1} \\ a_{n-1} &= a_{n+1} - a_n \\ a_n &= a_{n+2} - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_n &= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= a_{n+2} - a_2 \end{aligned}$$

e como o segundo termo da Sequência de Fibinacci é $a_2 = 1$ teremos

$$S_n = a_{n+2} - 1,$$

como desejado. ■

Proposição 2.2 *A soma dos quadrados dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada pela expressão*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}.$$

Prova: Queremos determinar

$$S = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \ldots + (a_{n-2})^2 + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2.$$

Observe que, como $a_1 = a_2 = 1$, temos $(a_1)^2 = a_1 a_2$. Para $n > 1$ temos

$$a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = (a_n)^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(a_1)^2 &= a_1 a_2 \\
(a_2)^2 &= a_2 a_3 - a_1 a_2 \\
(a_3)^2 &= a_3 a_4 - a_2 a_3 \\
&\vdots \\
(a_{n-2})^2 &= a_{n-2} a_{n-1} - a_{n-3} a_{n-2} \\
(a_{n-1})^2 &= a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1} \\
(a_n)^2 &= a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n.
\end{aligned}$$

Portanto

$$S = a_1 a_2 + a_2 a_3 - a_1 a_2 + \ldots + a_{n-1} a_n - a_{n-2} a_{n-1} + a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = a_n a_{n+1}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Proposição 2.3 *Quaisquer dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si, ou seja, para todo $n \geq 1$ temos*

$$mdc(a_n,\ a_{n+1}) = 1.$$

Prova: Dados a_n e a_{n+1}, termos da Sequência de Fibonacci, observe que:
- se $d \mid a_n$ e $d \mid a_{n+1}$ então $d \mid (a_{n+1} - a_n)$ ou seja, $d \mid= a_{n-1}$;

- se $d \mid a_n$ e $d \mid a_{n-1}$ então $d \mid (a_n - a_{n-1})$ ou seja, $d \mid= a_{n-2}$;

$\vdots$

- se $d \mid a_1$ então $d \mid 1$.

Portanto $mdc(a_n,\ a_{n+1}) = 1$ para todo $n \geq 1$ como afirmamos. ∎

Proposição 2.4 *A razão entre termos consecutivos a_{n+1}/a_n da Sequência de Fibonacci converge para o Número de Ouro representado pela letra grega Phi minúscula (ϕ)*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749895\ldots.$$

Prova: Considere a recorrência $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ temos que

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}},$$

ou seja, para todo $n \geq 2$ teremos

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Sendo $a_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, para todo $n > 1$ temos

$$r_1 = 1 \quad \text{e} \quad 2 \geq r_n \geq 1, \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Para mostrar que a sequência converge, observe que com $n \geq 3$, temos que

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2}+1}.$$

Considere ainda as subsequências (r_{2n}) e (r_{2n-1}). Por indução, vejamos que (r_{2n}) é decrescente. Precisamos mostrar que

$$r_2 > r_4 > r_6 > \cdots > r_{2n} > r_{2n+2} > \cdots$$

Temos
(i) $r_2 = 2 > r_4 = 5/3$;
(ii) Suponhamos que $r_{2k} > r_{2(k+1)}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.
(iii) Provemos para $k+1$. Segue de (ii) que

$$\frac{1}{r_{2k+2}+1} > \frac{1}{r_{2k}+1}$$

e daí

$$r_{2k+4} = 2 - \frac{1}{r_{2k+2}+1} < 2 - \frac{1}{r_{2k}+1} = r_{2k+2}.$$

Sendo assim a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto a sequência (r_{2n}) é decrescente. De modo análogo, demonstra-se que (r_{2n-1}) é crescente. Sendo monótonas e limitadas essas sequências são convergentes (Veja Teorema 1.5 no

Capítulo 1 e a observação que o segue). Sejam $a = \lim r_{2n}$ e $b = \lim r_{2n-1}$. Uma vez que

$$r_{2n} = 2 - \frac{1}{r_{2n-2} + 1}$$

passando o limite obtemos $a = 2 - \dfrac{1}{a+1}$ e daí $a^2 - a - 1 = 0$ o que nos dá

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

O mesmo ocorre para (r_{2n-1}), fornecendo $b^2 - b - 1 = 0$ e

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Uma vez que $r_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que os limites das subsequências são não negativos. Portanto

$$a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749895\ldots$$

o que garante que a sequência (r_n) converge para o número de ouro, ϕ. ■

Proposição 2.5 *Sendo a_k um termo da Sequência de Fibonacci para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $a_{m+n} = a_m a_{n-1} + a_{m+1} a_n$ para todo $m,\ n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Sejam $b_m = a_{m+n}$ e $c_m = a_m a_{n-1} + a_{m+1} a_n$. Temos que (b_m) e (c_m) satisfazem a recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, considerando $a_0 = 0$ temos $b_0 = a_n$ e $b_1 = a_{n+1}$, $c_0 = 0 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_n = a_n = b_0$ e $c_1 = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_n = a_{n+1} = b_1$, e portanto, como queríamos demonstrar, $b_n = c_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 2.6 *Para todos $m,\ n \in \mathbb{N}$ temos $mdc(a_m, a_n) = a_{mdc(m,\ n)}$.*

Prova: Mostraremos esse resultado por indução em m. Uma vez que $a_1 = 1$ é claro que $mdc(a_1, a_n) = 1 = a_{mdc(1,\ n)}$ para todo número natural n. Suponha que a afirmação do enunciado seja válida para todo $m < k$ (onde $k \geq 2$ é um inteiro dado) e para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que a afirmação é válida para $m = k$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $mdc(a_k,\ a_n) = a_{mdc(k,\ n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que:
(i) Se $n < k$, temos pela hipótese de indução que

$$mdc(a_n,\ a_k) = a_{mdc(n,\ k)}.$$

(ii) Se $n = k$, temos

$$mdc(a_n, a_k) = mdc(a_k, a_k) = a_k = a_{mdc(k,k)}.$$

(iii) Se $n > k$, temos, pela Proposição 2.5, que

$$a_n = a_{(n-k)+k} = a_{n-k}a_{k-1} + a_{n-k+1}a_k$$

logo,

$$mdc(a_k,\ a_n) = mdc(a_k,\ a_{n-k}a_{k-1} + a_{n-k+1}a_k) = mdc(a_k,\ a_{n-k}a_{k-1}).$$

Como já vimos na Proposição 2.3, a_j e a_{j+1} são primos entre si para todo número natural j de modo que $mdc(a_k,\ a_{k-1}) = 1$. Daí

$$mdc(a_k,\ a_n) = mdc(a_k,\ a_{n-k}a_{k-1}) = mdc(a_k,\ a_{n-k}).$$

Escrevamos $n = pk + q$ com $p,\ q \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q \leq k$. Temos $1 \leq n - pk = q \leq k$ e segue dos ítens (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} mdc(a_k,\ a_n) &= mdc(a_k,\ a_{n-k}) = mdc(a_k,\ a_{n-2k}) \\ &= mdc(a_k,\ a_{n-3k}) = \cdots = mdc(a_k,\ a_{n-pk}) \\ &= mdc(a_k,\ a_q) = a_{mdc(k,q)}. \end{aligned}$$

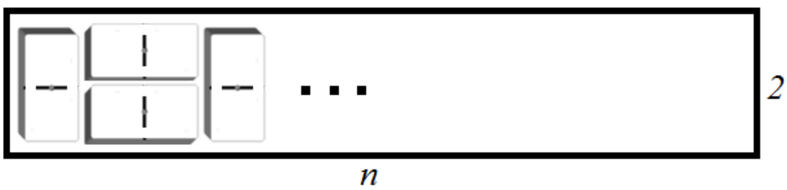
Além disso, uma vez que $mdc(k, n - pk) = mdc(k, n)$ temos $a_{mdc(k,\ q)} = a_{mdc(k,\ n)}$. Daí segue que

$$mdc(a_k,\ a_n) = a_{mdc(k,\ n)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos mostrar. ■

2.3.2 Dominós

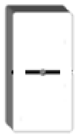
Vejamos como criar uma atividade na sala de aula envolvendo a Sequência de Fibonacci. Podemos iniciar com um problema proposto que induza os alunos a pensar na solução, e não necessariamente “apenas pensar”, mas também utilizar material concreto para ajudar a desenvolver o raciocínio. Levar alguns jogos de dominós seria perfeito para fazê-los pensar no seguinte problema. *De quantas maneiras podemos guardar n dominós* 2×1 *em uma caixa* $2 \times n$?



A primeira pergunta a fazer é: Será que esse problema se relaciona de alguma forma com a Sequência de Fibonacci?

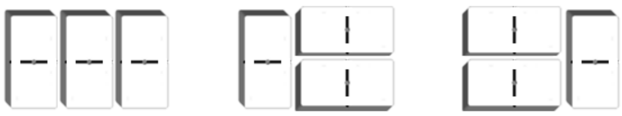
Podemos pedir aos alunos para que tentem fazer a solução para valores iniciais de n, para $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$, até o momento em que eles sintam dificuldade de encontrar todas as possibilidades. Ou seja, com uma peça do dominó (que pode ser disposta como 2×1 ou 1×2) os alunos devem verificar so existe uma única possibilidade de coloca-la em uma caixa 2×1, e assim por diante como mostram as figuras a seguir.

Para $n = 1$

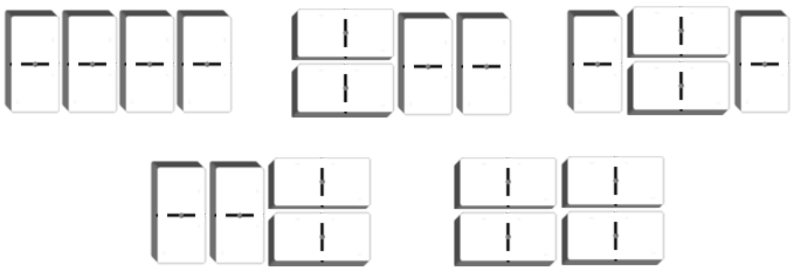


Para $n = 2$

Para $n = 3$



Para $n = 4$

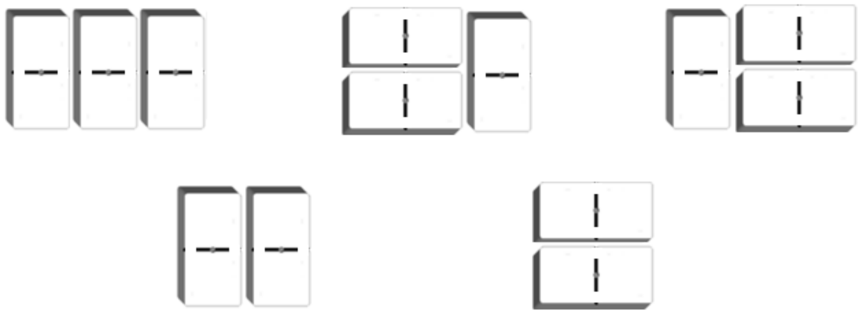


Até esse momento a sequência criada foi $(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots)$ que percebemos já ser diferente da Sequência de Fibonacci, pois os dois primeiros não são iguais a 1. Porém, o primeiro termo dessa sequência poderia ser o segundo da Sequência de Fibonacci, o segundo termo seria igual ou terceiro e assim por diante. Portanto, teríamos uma sequência definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \end{cases}$$

que possui as mesmas propriedades da Sequência de Fibonacci.

Lembrando que a ideia em recursão é obter cada valor em função dos anteriores, vejamos o que ocorre quando tiramos a última parte do caso $n = 4$:



Observe que ao tirarmos a última peça (ou as duas últimas, quando estiverem “deitadas”) de cada possibilidade, obtemos um número menor de possibilidades. Como esses finais têm tamanho 1 ou 2, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $x_4 = x_3 + x_2$. Será que isso continuará ocorrendo?

Por fim, o professor pode mostrar aos alunos que o problema resulta em uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, exatamente a mesma Sequência de Fibonacci, e pode mostrar toda a resolução mostrada nesse trabalho.

2.4 Recorrências Lineares de k-ésima Ordem

As equações de recorrências lineares são da forma

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_0 a_n = 0,$$

em que $c_1,\ c_2,\ \ldots c_k$ são constantes independentes de n e os valores de a_i são conhecidos para $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Supondo que essa equação de recorrência admita solução do tipo $a_n = r^n$ e substituindo na equação, temos

$$c_k r^{n+k} + c_{k-1} r^{n+k-1} + \ldots + c_0 r^n = 0.$$

Admitindo que $r \neq 0$ podemos determinar a *equação característica* da equação de recorrência,

$$c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \ldots + c_0 = 0.$$

Se a equação possui raízes complexas $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m$ de multiplicidade, respectivamente, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, então as soluções da equação de recorrência são da forma $a_n = g_1(n)r_1^n + g_2(n)r_2^n + \ldots + g_m(n)r_m^n$, onde $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m$ são polinômios com grau $(g_i) < \alpha_i,\ 1 < i < r$. No caso em que r_i é uma raiz simples, então g_i é uma constante.

Devido a esta dificuldade na generalização, ficaremos com essa ideia definida apenas para as recorrências lineares homogêneas de segunda ordem.

Vajamos a seguir uma aplicação das recorrências lineares homogêneas de terceira ordem, cujas soluções da equação característica são todas distintas.

2.5 Recorrências Lineares de Terceira Ordem

As equações de recorrência lineares de terceira ordem, são da forma

$$c_1a_{n+3} + c_2a_{n+2} + c_3a_{n+1} + c_4a_n = 0$$

e suas equações características são do tipo

$$c_1r^3 + c_2r^2 + c_3r + c_4 = 0.$$

Quando as recorrências lineares são de segunda ordem, fica fácil resolver as equações características, porém a partir das equações de terceira ordem, sentimos uma certa dificuldade para encontrar as raízes. Vejamos então uma expressão que permite encontrar uma solução, bem como os matemáticos que ajudaram a desenvolvê-la. (Veja http://www.mathematik-online.de/F110.htm.)

Figura 2.5: Niccolò Tartaglia (1500 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576)

Niccolò Fontana apelidado de Tartaglia por seus amigos, justificado pelo fato de ser gago (significado da palavra), nasceu muito pobre e teve que aprender a ler e escrever sozinho, tornando-se posteriormente professor. Na Matemática ajudou a desenvolver a fórmula para calcular raízes de equações do 3º grau do tipo $x^3+px = q$, que anteriormente eram resolvidas por Del Ferro com p e q positivos.

Girolamo Cardano foi um estudioso das ciências naturais (com grandes trabalhos na Medicina), da Matemática e da Física. Desenvolveu o método para transformar equações do 3º grau da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para a forma $x^3 + px + q = 0$. Esse estudo das soluções de equações cúbicas foi o que impulsionou posteriormente os estudos dos números complexos.

Considerando $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, a forma canônica da equação do terceiro grau, com $a \neq 0$, e fazendo a substituição $x = t - (b/3a)$ encontraremos a equação $t^3 + pt + q = 0$ onde $p = (c/a) - (b^2/3a^2)$ e $q = (2b^3/27a^3) - (bc/3a^2) + (d/a)$. O descriminante será $\Delta = q^2 + (4p^3/27)$ e a solução será dada por

$$t_1 = \left[(-q + \sqrt{\Delta})/2\right]^{1/3} + \left[(-q - \sqrt{\Delta})/2\right]^{1/3},$$

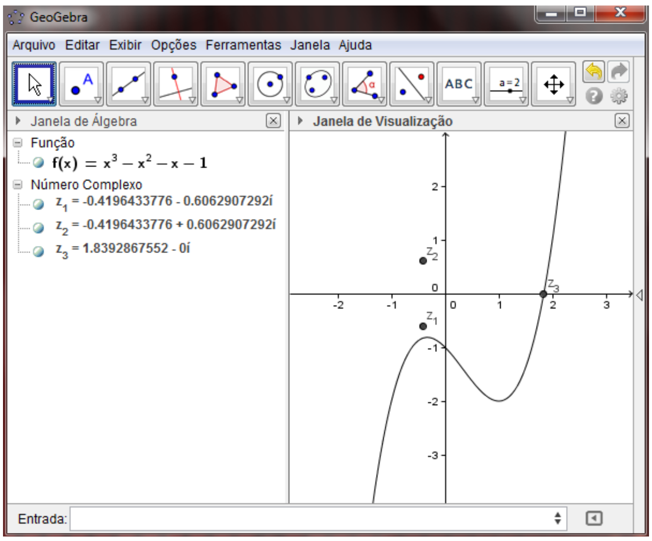
ou ainda

$$t_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}.$$

Encontrando essa primeira raiz, podemos fazer uso do dispositivo prático ou algorítimo de Briot-Ruffini para determinar as outras duas raízes.

O problema é que nem sempre encontraremos resultados que nos proporcionem conforto em relação aos cálculos. Por exemplo, ao tentar resolver a equação característica da recorrência $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$, que seria $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$, verificamos que uma das raízes é irracional e as outras duas são complexas. Essa recorrência é resultado do problema que resolveremos em seguida (2.5.1).

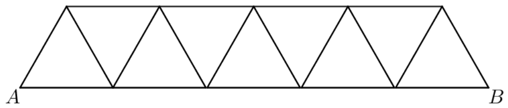
Uma boa ideia nesses casos é fazer uso da tecnologia para encontrar as raízes, um software de Matemática dinâmica bastante conhecido no mundo todo é o GeoGebra (www.geogebra.org). Com a ajuda dele podemos construir a curva que representa o gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ e através de comandos muito simples encontrar as raízes complexas (reais ou não).



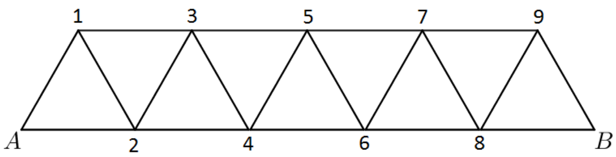
2.5.1 Problema dos Caminhos

Esse problema foi proposto em uma lista de exercícios preparatórios para olimpíadas de Matemática do professor Márcio Cohen do colégio Ponto de Ensino.

Caminhando pelos segmentos unitários da figura abaixo, determine quantas são as maneiras de ir de A até B sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.



Solução: Vamos numerar os pontos da esquerda para a direita apenas por questão de orientação.

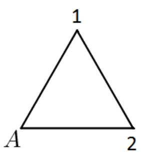


Sejam n a posição em que queremos chegar (os vértices dos triângulos, considerando apenas os segmentos a esquerda da posição) e x_n o número de caminhos distintos que podemos tomar para sair de A até B sem passar duas vezes por um mesmo ponto. Note que o ponto B estará na posição 10 na figura acima. Vamos encontrar valores iniciais para x_n fazendo $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$. Para $n = 1$, temos

apenas um caminho possível, direto de A para 1. Vamos representar essa possibilidade por

$$A1\}\ x_1 = 1.$$

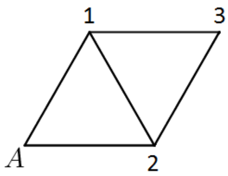
Para $n = 2$, temos



duas possibilidades

$$\left.\begin{array}{c} A12 \\ A2 \end{array}\right\} x_2 = 2.$$

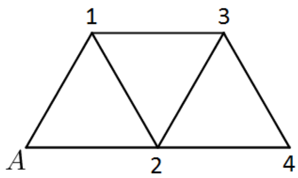
Para $n = 3$, temos



quatro possibilidades

$$\left.\begin{array}{c} A123 \\ A23 \\ A13 \\ A213 \end{array}\right\} x_3 = 4.$$

Para $n = 4$, temos



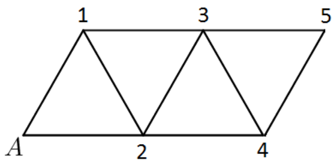
sete possibilidades

$$\left.\begin{array}{c} A1234 \\ A234 \\ A134 \\ A2134 \\ A124 \\ A24 \\ A1324 \end{array}\right\} x_4 = 7.$$

Para $n = 4$, o número de caminhos depende justamente dos três casos anteriores. Observe que os quatro primeiros caminhos é o caso $n = 3$ acrescentando apenas o 4 ao final. O quinto e o sexto cominho é o caso $n = 2$ acrescentando também o 4 ao final. E o último caminho é o caso $n = 1$ acrescentando 324 ao final. Ou seja, podemos escrever $x_4 = x_3 + x_2 + x_1$

Observe ainda que o mesmo raciocínio pode ser usado para contar os caminhos para os próximos pontos.

Para $n = 5$, temos que



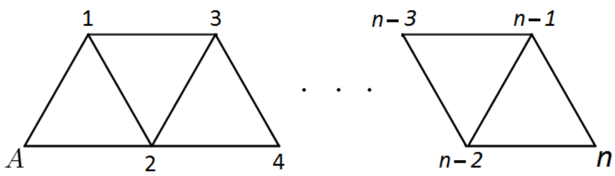
o número de caminhos pode ser descrito como

$$\left.\begin{matrix} A1234 \\ A234 \\ A134 \\ A2134 \\ A124 \\ A24 \\ A1324 \end{matrix}\right\} + (5)$$

$$\left.\begin{matrix} A123 \\ A23 \\ A13 \\ A213 \end{matrix}\right\} + (5)$$

$$\left.\begin{matrix} A12 \\ A2 \end{matrix}\right\} + (435)$$

ou seja, $x_5 = x_4 + x_3 + x_2$ e generalizando, temos



$$x_{n-1}\} \ + (n)$$

$$x_{n-2}\} \ + (n)$$

$$x_{n-3}\} \ + (n-1 \ n-2 \ \ n)$$

ou seja $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$.

Portanto, para resolver o problema proposto, basta fazer as interações até a décima posição.

$x_4 = x_3 + x_2 + x_1 = 4 + 2 + 1 = 7$
$x_5 = x_4 + x_3 + x_2 = 7 + 4 + 2 = 13$
$x_6 = x_5 + x_4 + x_3 = 13 + 7 + 4 = 24$
$x_7 = x_6 + x_5 + x_4 = 24 + 13 + 7 = 44$
$x_8 = x_7 + x_6 + x_5 = 44 + 24 + 13 = 81$
$x_9 = x_8 + x_7 + x_6 = 81 + 44 + 24 = 149$
$x_{10} = x_9 + x_8 + x_7 = 149 + 81 + 44 = 274.$

Ou seja, existem 274 caminhos diferentes que podemos tomar para sairmos do ponto A e chegarmos no ponto B.

Capítulo 3

Aplicações de Recorrências na Combinatória e na Aritmética

Nesse capítulo estudaremos várias aplicações do conteúdo de recorrência à Combinatória, bem como vamos introduzir uma linguagem mais requintada escrevendo as equações de recorrência como equações de diferença por meio de operadores lineares. A teoria e os teoremas da nova linguagem nos levarão a aplicações das recorrências à Aritmética.

3.1 Problemas de Contagem

3.1.1 Posição dos Parênteses

De quantas maneiras podemos ordenar n pares de parênteses, se só pode fechar um parêntese que foi aberto sabendo que todo parêntese aberto deve ser fechado? Por exemplo, as sequências $((())())$ e $()()(()())$ são permitidas, mas $())(()$ e $)($ não são permitidas, pois fecham parênteses que não foram abertos.

Solução: Primeiramente vejamos alguns casos para valores iniciais de n. Para $n = 0$, temos uma maneira, a vazia. Para $n = 1$, temos uma maneira, $()$. Para $n = 2$, temos duas maneiras, $()()$ e $(())$. Para $n = 3$, cinco maneiras, $()()()$, $()(())$, $(())()$, $(()())$ e $((()))$.

Para obter a recursão, pensamos no último par de parênteses. Vimos o que está dentro dele e o que está à esquerda dele. Para $n = 3$, temos

$$()()(\emptyset),\ \ ()(()),\ \ (())(\emptyset),\ \ \emptyset(()())\ \text{ e }\ \emptyset((())).$$

Note que pode haver o conjunto vazio, um par ou dois pares de parênteses dentro do último par. Nesses casos, há dois, um e zero pares de parênteses à esquerda, respectivamente, de modo que $a_3 = a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0$. Podemos generalizar, obtendo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \cdots + a_{n-1} a_0. \end{cases}$$

Recursões desse tipo são chamadas *convoluções.*

Para resolver essa recursão utilizaremos uma *função geratriz.* Considere a função f da forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Precisamos determinar os coeficientes (a_n) dessa soma. Uma vez que

$$(f(x))^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0)x^2 + (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0)x^3 + \cdots$$

e a sequência (a_n) satisfaz a recorrência acima, temos

$$(f(x))^2 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots .$$

Multiplicando por x teremos

$$x(f(x))^2 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots = f(x) - a_0.$$

Lembrando que $a_0 = 1$, obtemos a “equação do segundo grau”

$$x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0$$

cuja solução é dada por

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Se considerarmos o sinal positivo, vemos que os valores de $f(x)$ crescem arbitrariamente quando x se aproxima de 0. Por outro lado, se tormarmos o sinal negativo, teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \times \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} = \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} \\ &= \frac{4x}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \frac{2}{(1+\sqrt{1-4x})}. \end{aligned}$$

Assim os valores de f se aproximam de

$$\frac{2}{(1+\sqrt{1-4\times 0})} = \frac{2}{(1+\sqrt{1})} = 1$$

quando x tende a 0. Pela definição de f temos $f(0) = a_0 = 1$ que coincide com o limite acima. Consideramos então

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Considere ainda o binômio de Newton generalizado, ou seja,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k, \text{ para } x, y > 0,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tomando $\alpha = 1/2$, teremos

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{k!} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2k-3)(2k-2)}{k!\cdot 2\cdot 4\cdots(2k-2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{k!\cdot 2^{k-1}(k-1)!} \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} 1^{\frac{1}{2}-k}(-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1} \binom{2k-2}{k-1}(-4x)^k$$

$$= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

Então

$$f(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{1-\left(1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k\right)}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1}$$

ou ainda

$$f(x) = \frac{1}{1}\binom{0}{0} + \frac{1}{2}\binom{2}{1}x + \frac{1}{3}\binom{4}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n + \cdots.$$

Concluímos assim que

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

3.1.2 O jogo de Olavo

Em um jogo, em cada etapa Olavo pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar n pontos?

Solução: Seja x_n o número de modos de obter n pontos. Para obter $n+2$ pontos, Olavo pode obter 1 ou 2 pontos na primeira etapa. No primeiro caso, ele tem que obter $n+1$ pontos nas etapas seguintes; no segundo caso, ele tem que obter n pontos a seguir. Logo, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Como já vimos, essa é a recorrência que define a sequência de Fibonacci. Logo,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \text{para todo } n \geq 1.$$

3.1.3 Sequências Binárias e Ternárias

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,\ 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Solução: Seja x_n o número de sequências de n termos 0 ou 1 com quantidade ímpar de termos iguais a 0. O número de sequências de $n+1$ termos 0 ou 1 com um número ímpar de termos iguais a 0 é igual ao número de sequências começadas por 1, seguido de uma sequência de n termos com número ímpar de zeros somado ao número de sequências começadas por 0, seguido de uma sequência de n termos com um número par de zeros.

Portanto, $x_{n+1} = x_n + (2^n - x_n) = 2^n$ (para a segunda parcela, note que 2^n é o número total de sequências formadas por 0 ou 1). Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$x_n = 2^{n-1}.$$

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,\ 1,\ 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Solução: Sequências de $n+1$ termos, 0, 1 ou 2 com um número ímpar de termos iguais a 0 podem ser de dois tipos: as que começam com 1 ou 2, seguido por uma sequência de n termos com um número ímpar de zeros e as que começam com 0, seguido de uma sequência de n termos com um número par de zeros.

Daí, temos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n)$, ou seja, $x_{n+1} = x_n + 3^n$, com $x_1 = 1$. Temos:

$$x_1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 3^1\\
x_3 &= x_2 + 3^2\\
&\vdots\\
x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

somando e cancelando os termos iguais em lados opostos da igualdade obtemos

$$x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

Lembrando da soma dos termos de uma PG (veja proposição 1.2 no Capítulo 1), obtemos

$$x_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,\ 1,\ 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução: Seja x_n o número de sequências formadas por n termos iguais a 0, 1 ou 2 sem dois termos consecutivos iguais a zero. As sequências de $n+2$ termos que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero podem começar por 0, 1 ou 2. As que começam por 0 tem o próximo elemento igual a 1 ou 2, seguida de uma sequência de n termos sem zeros consecutivos. Logo, há $2x_n$ tais sequências. As que começam por 1 ou 2 têm, a seguir, uma sequência de $n+1$ termos sem zeros consecutivos. Logo, há $2x_{n+1}$ sequências desse tipo. Assim, x_n satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 2x_n + 2x_{n+1}$, ou seja, $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ (todas as três sequências de comprimento 1 cumprem o requisito e todas as $3^2 = 9$ de comprimento 2, exceto a 00, também cumprem a condição).

As raízes da equação característica $r^2 - 2r - 2 = 0$, são $r_1 = 1+\sqrt{3}$ e $r_2 = 1-\sqrt{3}$. Segue dos Teoremas 2.2 e 2.3 que a solução geral para a recorrência é dada por $x_n = c_1\left(1+\sqrt{3}\right)^n + c_2\left(1-\sqrt{3}\right)^n$ para a recorrência. Substituindo $n=1$ e $n=2$, obtemos

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{3}\right)c_1 + \left(1-\sqrt{3}\right)c_2 = 3\\ \left(3+2\sqrt{3}\right)c_1 + \left(3-2\sqrt{3}\right)c_2 = 8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $c_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$ e $c_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$. Logo, o número de sequências de n termos iguais a 0, 1 ou 2 sem dois zeros consecutivos é

$$x_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

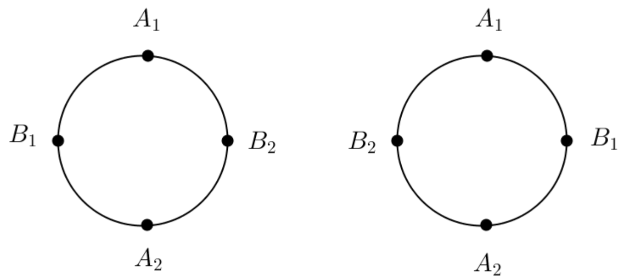
3.1.4 Cavaleiros da távola redonda

Doze cavaleiros do rei Arthur foram convocados para uma reunião no castelo para desenvolverem juntos um plano de combate. Estes doze cavaleiros podem ser divididos em seis pares de cavaleiros que são mutuamente hostis. O rei não participará da reunião, de modo que o mordomo chefe do rei deve ser especialmente cuidadoso na alocação dos cavaleiros em seus assentos, no sentido de evitar brigas. Ele decidiu então alocar os cavaleiros em torno da Távola redonda, de tal maneira que nenhum par de cavaleiros mutuamente hostis sente em lugares adjacentes. Quantas alocações deste tipo existem?

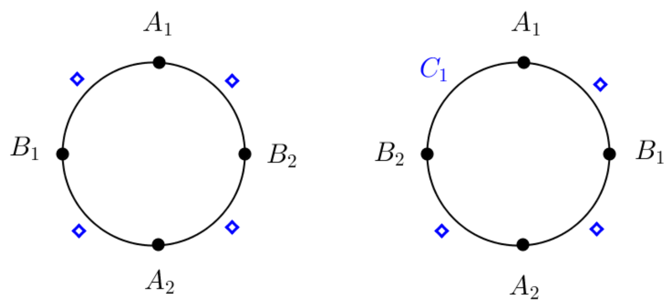
Solução: Sejam n o número de pares de cavaleiros hostis e x_n o número de maneiras que podemos sentá-los em uma mesa circular de $2n$ lugares, sem que haja brigas.

Consideramos na permutação circular que as cadeiras não são numeradas. Podemos observar que $n \geq 2$, pois com apenas um par e duas cadeiras os cavaleiros estariam adjacentes um ao outro.

Para $n = 2$, temos apenas dois casos, de modo que $x_2 = 2$.



Para cada um dos casos anteriores, quando formos colocar mais um par de cavaleiros em duas novas cadeiras, teremos quatro possibilidades de sentar o primeiro e, escolhida uma posição para este, teremos três opções para o segundo, ou seja, para $n = 3$, temos



de modo que, $x_3 = x_2 \cdot 4 \cdot 3$.

Observe ainda que o mesmo raciocínio pode ser usado para encontrar os próximos termos, uma vez conhecendo o número de maneiras de sentar os n pares de cavaleiros, temos $2n$ possibilidades de sentar o primeiro do $(n+1)$-ésimo par, e escolhido a posição deste, temos $2n-1$ possibilidades para o segundo. Portando $x_{n+1} = x_n \cdot (2n) \cdot (2n-1)$.

Vamos encontrar a lei de formação para x_n.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ x_3 &= x_2 \cdot 4 \cdot 3 \\ x_4 &= x_3 \cdot 6 \cdot 5 \\ x_5 &= x_4 \cdot 8 \cdot 7 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} \cdot 2(n-2) \cdot [2(n-2)-1] \\ x_n &= x_{n-1} \cdot 2(n-1) \cdot [2(n-1)-1]. \end{aligned}$$

Multiplicando todas as equações e fazendo os cancelamentos, temos,

$$x_n = (2n-2)!.$$

Resolvendo o nosso problema para $n = 6$ temos,

$$x_6 = (2 \cdot 6 - 2)! = 10! \Rightarrow x_6 = 3.628.800 \text{ possibilidades.}$$

3.1.5 Extinção da Torcida

A torcida do Fluminense tem hoje p_0 membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de torcer pelo Fluminense. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada a extinção?

Solução: O número de torcedores daqui a $n+1$ anos é $p_{n+1} = p_n(1+i-j) - R$. Uma solução da recorrência homogênea $p_{n+1} = p_n(1+i-j)$ é $a_n = (1+i-j)^{n-1}$. Substituindo $p_n = a_n y_n$ e fazendo $r = 1+i-j$, temos $r^n y_{n+1} = r^n y_n - R$, ou seja, $y_{n+1} = y_n - R/r^n$, com $y_0 = p_0/a_0 = p_0 r$, logo,

$$\begin{aligned} y_0 &= p_0 r \\ y_1 &= y_0 - R \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{R}{r}$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} - \frac{R}{r^{n-1}}.$$

Somando todas as equações e cancelando os termos comuns as dois membros, teremos

$$y_n = p_0 r - R\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) = p_0 r - R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}.$$

Portanto,

$$p_n = a_n y_n = p_0 r^n - R\frac{r^n - 1}{r-1} = \left(p_0 - \frac{R}{r-1}\right) r^n + \frac{R}{r-1}$$

finalmente,

$$p_n = \left(p_0 - \frac{R}{i-j}\right)(1+i-j)^n + \frac{R}{i-j}.$$

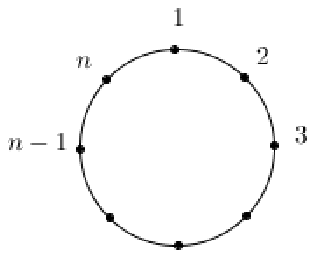
A torcida se extingue quando o coeficiente $\left(p_0 - \frac{R}{i-j}\right)$ de r^n é negativo, ou seja, quando

$$R > p_0(i-j).$$

3.1.6 A estratégia de sobrevivência (O problema de Josefo)

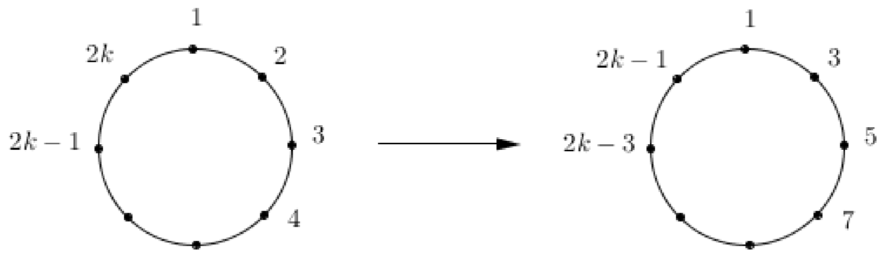
O historiador judeu Flávio Josefo (37 - 100) participou da revolta contra Roma no ano 66 e escapou do massacre após a captura da fortaleza de Josapata. Diz a lenda, que 41 rebeldes foram cercados por tropas romanas e, antes de serem capturados, eles escolheram o suicídio em massa. Josefo e outro companheiro não pareciam muito convencidos da utilidade do sacrifício, então ele propôs o seguinte: sentados em uma mesa circular, a partir de um certo escolhido, a terceira pessoa seria eliminado, até que apenas dois sobrevivessem. Josefo calculou as posições para que ele e seu parceiro sobrevivessem ao processo.

Veremos a seguir o que talvez seja um dos primeiros problemas combinatórios da história, uma variação sobre o problema original de Josefo. Temos n pessoas sentadas em uma mesa circular e eliminamos a segunda pessoa que encontramos na direção dos ponteiros do relógio (que começa a contar a partir da primeira posição), até que apenas um sobreviva. O desafio, claro, é calcular a posição inicial, que chamamos de $J(n)$, que uma pessoa deve tomar se quiser sobreviver. Calculando os primeiros casos, teremos



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	$\cdots$

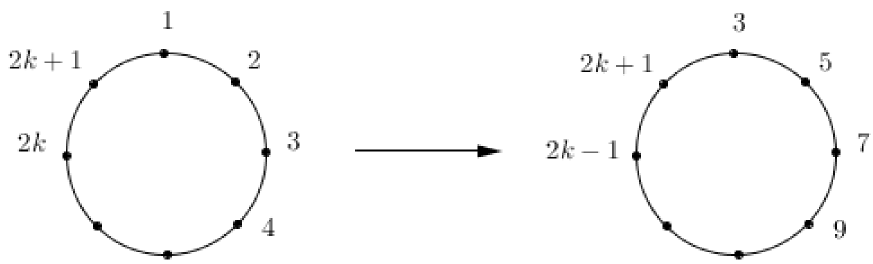
Note que todas as "posições de sobrevivência" na primeira volta são ímpares (ou ainda, a primeira volta elimina todas as posições pares). Vamos iniciar com o caso em que o número de pessoas é par, ou seja, com $n = 2k$ pessoas. Queremos calcular $J(2k)$, em que todas as pessoas das posições pares serão eliminadas.



Observe que agora na posição 2 se encontra a pessoa que inicialmente estava na posição 3, o que está na posição 3 estava na posição 5, a da 4 estava na 7, a da 5 estava na 9, e assim por diante. Em outras palavras, estamos dobrando o número da posição e subtraindo uma unidade. Se $J(k)$ é a posição de sobrevivência, teremos que

$$J(2k) = 2J(k) - 1, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Vejamos agora, quando o número inicial de pessoas for ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$. Agora na primeira volta teremos k sobreviventes. Observe também que a próxima vítima será a que se encontra na posição 1.



Analogamente ao caso anterior, podemos afirmar, para todo $k \geq 1$, que

$$J(2k+1) = 2J(k) + 1.$$

As regras dos dois casos vistos, juntas ao fato de que $J(1) = 1$ nos permite criar uma sequência $(J(n))$. Em geral, com simples interações dessas duas expressões não conseguimos encontrar a fórmula explicita, pois em cada passo devemos verificar a paridade da quantidade de sobreviventes. No entanto, se por exemplo, n for uma potência de 2, digamos 2^m, então poderíamos comprovar com simples interações que $J(2^m) = 1$.

Para fazer com que a sequência vire uma potência de dois vamos escrever n em números binários. Considere $n = (a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0)_2$ onde todo $a_i \in \{0,\ 1\}$ e $a_k = 1$.

Se n é par, ou seja, se $a_0 = 0$, a relação $J(2k) = 2J(k) - 1$ calcula o número de Josefo para $\frac{n}{2}$, bastando saber o último dígito da expansão binária, ou seja, $(a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1)_2$. Por outro lado, se n é ímpar, $J(2k+1) = 2J(k)+1$ calcula para $\frac{n-1}{2}$, e cuja expansão binária também é $(a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1)_2$. Nessas novas condições, e adicionando ± 1 dependendo do valor de a_0, a relação de recorrência fica bastante simplificada:

$$J((a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0)_2) = 2J((a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1)_2) + (-1)^{a_0+1}$$

Fazendo a interação dessa regra e usando $a_k = 1$, temos que

$$J((a_k,\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1)_2) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{a_i+1} 2^i.$$

3.2 Equações de Diferenças e Funções Geradoras

O objetivo dessa seção é além de introduzir uma linguagem matemática mais refinada, implementar conhecimentos acerca do conteúdo de recorrências com aplicações na Aritmética. Antes de tais aplicações se fazem necessárias várias definições, teoremas e proposições importantes para o desenvolvimento da teoria.

Essa seção foi inspirada pelas anotações feitas pelo professor Rodrigo Carlos Silva de Lima da Universidade Federal Fluminense (UFF-RJ), veja [5] e [6] nas referências.

Definamos o operador E^k, para $k \in \mathbb{N}$, por $E^k f(x) = f(x+k)$ para toda função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Observe que E^k é um operador linear, isto é, $E^k(f+tg) = E^k(f)+tE^k(g)$

para quaisquer funções f e g e qualquer $t \in \mathbb{R}$. A partir daqui vamos chamar de equação de recorrência linear homogênea (ou equação de diferença), toda equação da forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot E^k f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot f(x+k) = 0.$$

Podemos representar esta equação por

$$\left(c_0 \cdot E^0 + c_1 \cdot E^1 + \cdots + c_n \cdot E^n\right) f(x) = 0$$

ou ainda

$$c_0 \cdot f(x) + c_1 \cdot f(x+1) + \cdots + c_n \cdot f(x+n) = 0.$$

Essas recorrências são chamadas equações de diferenças, pois podemos escrevê-las por meio de um operador Δ, onde $\Delta = E - 1$, como segue

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (1+\Delta)^k f(x) = 0.$$

Exemplo 7 *Vamos escrever $f(n+2) = f(n+1)$ por meio do operador Δ.*

$$E^2 f(n) = Ef(n) \Leftrightarrow E^2 f(n) - Ef(n) = 0 \Leftrightarrow \left(E^2 - E\right) f(n) = 0$$

$$(E)(E-1) f(n) = 0 \Leftrightarrow (\Delta+1)(\Delta) f(n) = 0 \Leftrightarrow \left(\Delta^2 + \Delta\right) f(n) = 0$$

$$\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 0$$

como desejado.

Podemos transformar funções em recorrências através de um operador T chamado de aniquilador da função. Dizemos que T aniquila (ou absorve) f em A se para todo $x \in A$ vale

$$Tf(x) = 0.$$

Teorema 3.1 *Considere a função*

$$f(n) = \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot (x_j)^n = c_0 \cdot (x_0)^n + c_1 \cdot (x_1)^n + \cdots + c_k \cdot (x_k)^n,$$

onde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. O operador

$$T = \prod_{j=0}^{k} (E - x_j)$$

satisfaz

$$Tf(n) = 0, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova: Observe que

$$Tf(n) = \prod_{j=0}^{k} (E - x_j) \left[\sum_{i=0}^{k} c_i \cdot (x_i)^n \right] = \sum_{i=0}^{k} c_i \left[\prod_{j=0}^{k} (E - x_j)\,(x_i)^n \right].$$

Uma vez que

$$\prod_{j=0}^{k} (E - x_j)\,(x_i)^n = \left[\prod_{j=0,\ j\neq i}^{k} (E - x_j) \right] \cdot (E - x_i) \cdot (x_i)^n$$

e

$$(E - x_i)\,(x_i)^n = E\,(x_i)^n - x_i\,(x_i)^n = (x_i)^{n+1} - x_i\,(x_i)^n = 0,$$

temos

$$Tf(n) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot 0 = 0$$

como queríamos provar. ■

Exemplo 8 *Vamos encontrar a recorrência linear homogênea que a função*

$$f(n) = 2^n + 3 \cdot 4^n$$

satisfaz. Para isso, usaremos o teorema anteior. Temos que o operador $T = (E - 2)(E - 4)$ *aniquila* f*, ou seja,*

$$0 = (E-2)(E-4)f(n) = \left(E^2 - 6E + 8\right) f(n) = f(n+2) - 6f(n+1) + 8f(n) \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo f *satisfaz a recorrência*

$$f(n+2) = 6f(n+1) - 8f(n),$$

como desejado. Observe que a equação característica dessa recorrência é $x^2 = 6x - 8$ *ou ainda* $x^2 - 6x + 8 = 0$*, cujas raízes são justamente* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = 4$*.*

Definição 3.2 *Uma recorrência da forma*

$$f(n+p) - \sum_{k=0}^{p-1} c_k f(n+k) = 0$$

possui um polinômio característico associado da forma

$$P(x) = x^p - \sum_{k=0}^{p-1} c_k x^k.$$

Portanto, uma recorrência de ordem p possui um polinômio característico de grau p. Se $r_1, r_2, \cdots, r_p$ são as raízes do polinômio característico então sequências do tipo

$$f(n) = \sum_{k=1}^{p} b_k r_k^n$$

satisfazem a recorrência. Este resultado é uma generalização do Teorema 2.2 e possui demonstração análoga. A proposição a seguir generaliza o Teorema 2.3.

Proposição 3.1 *Para $p > 1$, considere a recorrência*

$$f(n+p) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k f(n+k) \tag{3.1}$$

com polinômio característico de raízes diferentes e condições iniciais dadas. Então existe uma única solução da forma

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p} c_k r_k^n$$

que satisfaz a recorrência.

Prova: Considere $f(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} c_k r_k^n$ uma solução da recorrência (3.1). Graças ao Teorema 16 temos que o operador $T = \displaystyle\prod_{j=0}^{p} (E - r_j)$ aniquila f. Assim vale

$$\prod_{k=0}^{p} (E - r_k) f(n) = 0.$$

Podemos aplicar o operador

$$\prod_{j=0,\ j\neq t}^{p} (E - r_j),$$

que irá absorver cada c_k com exceção de c_t, daí, ficamos com

$$\prod_{j=0,\ j\neq t}^{p} (E - r_j) f(n) = c_t r_t^n \prod_{j=0,\ j\neq t}^{p} (r_t - r_j)$$

e fazendo $n = 0$ temos

$$c_t = \frac{\prod_{j=0,\ j\neq t}^{p} (E - r_j) f(0)}{\prod_{j=0,\ j\neq t}^{p} (r_t - r_j)}.$$

Portanto, a solução da recorrência é dada por

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\prod\limits_{j=0,\ j\neq t}^{p} (E - r_j)\, f(0)}{\prod\limits_{j=0,\ j\neq t}^{p} (r_t - r_j)} r_k^n.$$

■

3.2.1 Equações de diferenças com soluções polinomiais

O teorema a seguir nos ajudará a resolver o problema final desse trabalho, que trata da possibilidade de uma função polinomial poder ou não gerar todos os números primos em sequência.

Teorema 3.3 *Seja* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k$ *um polinômio de grau* n*. Então*

$$\Delta^n f(x) = C$$

onde C *é uma constante que pode depender de* n*.*

Prova: Denotemos $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, \cdots, f_n(x) = x^n, \cdots$. Provaremos

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{n} c_k f_k \right)(x) = c_n \cdot n!$$

para todo n. Primeiramente, usando indução, vamos mostrar que $\Delta^n f_k = 0$ para $0 \leq k < n$ e $\Delta^n f_n = n!$.

- Para $n = 0$, temos $\Delta^0 f_0(x) = f_0(x) = 1 = 0!$.
- Para $n = 1$, temos

$$\Delta^1 f_1(x) = (E-1)f_1(x) = f_1(x+1) - f_1(x) = (x+1) - x = 1 = 1!$$

e

$$\Delta^1 f_0(x) = (E-1)f_0(x) = f_0(x+1) - f_0(x) = 1 - 1 = 0.$$

Observe que se $g \equiv c$ para qualquer constante, tem-se

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x) = c - c = 0.$$

Suponha que o resultado vale para n. Vejamos que vale para $(n+1)$. Por hipótese de indução temos:

- Para $0 \leq k < n$, $\Delta^{n+1} f_k(x) = \Delta(\Delta^n f_k)(x) = \Delta 0 = 0$ pois $g(x) \equiv 0$ é constante.

• Para $k = n$, $\Delta^{n+1} f_n(x) = \Delta(\Delta^n f_n)(x) = \Delta n! = 0$, pois $g(x) \equiv n!$ é constante.
• Ainda

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f_{n+1}(x) &= (E-1)\Delta^n f_{n+1}(x) \\
&= \Delta^n f_{n+1}(x+1) - \Delta^n f_{n+1}(x) \\
&= \Delta^n \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f_i(x) \right) - \Delta^n f_{n+1}(x) \\
&= \Delta^n f_{n+1}(x) + \binom{n+1}{n} \underbrace{\Delta^n f_n(x)}_{=n!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \underbrace{\Delta^n f_i(x)}_{=0} - \Delta^n f_{n+1}(x) \\
&= (n+1) \cdot n! \ = \ (n+1)!.
\end{aligned}$$

Portanto o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que Δ é um operador linear segue que

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{n} c_k f_k \right)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \Delta^n f_k \right)(x) = c_n \cdot n!$$

■

3.2.2 Recorrências e Polinômios

Considere $f(n)$ um polinômio de grau p. Pelo Teorema 3.3 temos $\Delta^p f(n) = k$, em que k é uma constante não nula. Se aplicarmos o operador Δ mais uma vez, ficamos com $\Delta^{p+1} f(n) = 0$. Lembrando que $\Delta = E - 1$, temos

$$\Delta^{p+1} f(n) = (E-1)^{p+1} f(n) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} E^k f(n) = 0$$

desenvolvendo apenas o último termo,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} f(n+k) + \binom{p+1}{p+1} (-1)^{p+1-p-1} f(n+p+1) = 0$$

logo,

$$f(n+p+1) = -\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} f(n+k)$$

ou ainda,

$$f(n+p+1) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p-k} f(n+k).$$

3.2.3 Recorrências e Funções Geradoras

Considere uma recorrência linear homogênea de ordem p, da forma

$$\sum_{k=0}^{p} a_k f(n+k) = a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \cdots + a_p f(n+p) = 0,$$

multiplicando por x^n, temos

$$\sum_{k=0}^{p} a_k f(n+k) x^n = 0,$$

façamos também o somatório com n variando de zero a infinito em ambos os termos da equação,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} a_k f(n+k) x^n = 0.$$

Considere ainda a função

$$G(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$$

como sendo a função geradora de $f(n)$, uma vez que $f(n)$ é o coeficiente de x^n, daí, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} f(n+k) x^{n+k} = 0,$$

invertendo a ordem dos somatórios, teremos

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) x^{n+k} = 0,$$

fazendo uma mudança de variável no segundo somatório, somando k aos limites, ficamos com

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} \sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n = 0,$$

e usando a propriedade de abertura dos somatórios, teremos

$$G(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \sum_{n=0}^{k-1} f(n) x^n + \sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n,$$

logo,

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n = G(f) - \sum_{n=0}^{k-1} f(n) x^n,$$

substituindo na equação $\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} \sum_{n=k}^{\infty} f(n)x^n = 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} G(f) - \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{x^k} \sum_{n=0}^{k-1} f(n)x^n = 0,$$

multiplicando a equação por x^p,

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k} G(f) - \sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k} \sum_{n=0}^{k-1} f(n)x^n = 0,$$

portanto,

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k} G(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k} \sum_{n=0}^{k-1} f(n)x^n,$$

e finalmente

$$G(f) = \frac{\sum_{k=0}^{p} \sum_{n=0}^{k-1} a_k f(n) x^{n+p-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k}}.$$

Lembrando que apenas com as p condições iniciais, observando que k varia de 0 até $p-1$, é que podemos definir uma recorrência linear de ordem p.

3.3 Recorrências e Divisibilidade

Considere uma sequência (a_n) que satisfaz uma recorrência linear homogênea

$$a_{(n+p)} = c_{p-1}a_{(n+p-1)} + \ldots + c_0 a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com p fixo também natural e com os coeficientes c_k todos inteiros.

Se a_k é divisível por m para todo $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, ou seja, as p condições iniciais, então a_n é divisível por m para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para provar essa afirmação, basta perceber que a recorrência escreve todos os termos da sequência como combinações lineares das p condições iniciais, que são todas divisíveis por m, com coeficientes inteiros c_k.

Proposição 3.2 *Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, e $x, y \in \mathbb{N}$ são tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb + yc)$; e se $xb \geq yc$, então $a|(xb - yc)$.*

Prova: Note que $a|b$ e $a|c$ implicam que existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $b = ap$ e $c = aq$. Logo,

$$xb \pm yc = x(ap) \pm y(aq) = a(xp \pm yq),$$

o que prova o resultado, pois nas condições dadas $xp \pm yq \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 3.3 *Um polinômio* $f(a) = \sum_{k=0}^{p} c_k a^k$ *de grau* p*, com coeficientes inteiros, é divisível por* k *para todo* $a \in \mathbb{N}$ *se e somente se* $f(0),\ f(1),\ \cdots, f(p)$ *são divisíveis por* k*.*

Prova: É claro que se $f(a)$ é divisível por k para todo $a \in \mathbb{N}$ então $f(0),\ f(1),\ \cdots, f(p)$ são divisíveis por k. Reciprocamente, suponhamos que o polinômio

$$f(a) = \sum_{k=0}^{p} c_k a^k$$

de grau p tem $f(0),\ f(1),\ \cdots, f(p)$ divisíveis por k. Graças ao Teorema 3.3 temos

$$\Delta^{p+1} f(a) = 0.$$

Como vimos na Seção 3.2.2, f satisfaz a recorrência

$$f(a+p+1) = -\sum_{s=0}^{p} \binom{p+1}{s} (-1)^{p+1-s} f(a+s).$$

Em particular, quando $a = 0$, temos

$$f(p+1) = -\sum_{s=0}^{p} \binom{p+1}{s} (-1)^{p+1-s} f(s)$$

uma recorrência de ordem $p+1$. Já que $f(0),\ f(1),\ \cdots\ f(p)$, que são as $p+1$ condições iniciais, são divisíveis por k, observando a recorrência como combinação linear das condições iniciais, graças à Proposição 3.2 vemos que o polinômio apresenta apenas números divisíveis por k quando avaliado em números naturais . ∎

Observe que, considerando também que a recorrência quando expandida, tenha coeficientes inteiros, uma função do tipo

$$f(n) = \sum_{k=1}^{p} c_k (a_k)^n$$

com os valores de a_k distintos entre si, sua recorrência será uma da forma

$$\prod_{k=1}^{p} (E - a_k) f(n) = 0,$$

de grau p, precisamos de p condições iniciais. Se elas todas forem divisíveis por k, temos que a função $f(n)$ divisível por k para todo n.

3.3.1 Aplicações

Usando um computador é possível demonstrar teoremas de divisibilidade de funções, pois para uma recorrência de grau p, basta verificar se p números são divisíveis por um número k, para que a função em $\mathbb{N}$ seja divisível por k. Podemos ainda escrever infinitas funções que sejam sempre divisíveis por um número natural qualquer, criando assim, várias possibilidades de exemplos de problemas com divisibilidade.

Generalizando, se conhecemos que todas as condições iniciais de uma recorrência homogênea de coeficientes inteiros são divisíveis por k, então a função que satisfaz essa recorrência é divisível por k para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 9 *Vamos mostrar que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Basta verificar os 4 primeiros termos pela função ser do grau 3

$$f(0) = 0,\ f(1) = 3,\ f(2) = 12 \text{ e } f(3) = 33,$$

como todos 4 primeiros são divisíveis por 3, então a função assume valores divisíveis por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 10 *Mostre que $n^3 + 5n$ é divisível por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Novamente vamos verificar as 4 condições iniciais

$$f(0) = 0,\ f(1) = 6,\ f(2) = 18 \text{ e } f(3) = 42,$$

portanto $6|(n^3 + 2n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 11 *Prove que $f(n) = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$ assume apenas valores inteiros.*

Observe que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 5 \text{ e } f(3) = 14,$$

logo, a função sempre assume valores inteiros.

3.3.2 Recorrências e números primos entre si

Vejamos ainda mais dois teoremas que nos ajudarão a resolver o último problema proposto pelo trabalho. Teoremas esses que mostram a possibilidade de encontrar recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com condições iniciais sendo primas entre si que possuam quaisquer dois termos consecutivos também primos entre si. Lembrando que um exemplo da aplicação desses Teoremas foi visto na sessão que trata das propriedades da Sequência de Fibonacci.

Teorema 3.4 *Seja uma recorrência do tipo $f(n+2) = cf(n+1) + f(n)$, com $c \in \mathbb{Z}$, se as condições iniciais $f(0)$ e $f(1)$ são primas entre si, então $f(n)$ e $f(n+1)$ são primos entre si, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Por indução. Os dois primeiros números já são primos entre si, vamos considerar agora que $f(n)$ e $f(n+1)$ sejam primos entre si e provar que $f(n+1)$ e $f(n+2)$ também são primos entre si. Como $f(n)$ e $f(n+1)$ são primos entre si, então existem a e b inteiros, tais que

$$af(n+1) + bf(n) = 1.$$

Devemos determinar constantes a' e b' tais que

$$b'f(n+2) + a'f(n+1) = 1.$$

Tomando $b' = b$ e $a' = a - bc$ e lembrando que $f(n+2) = cf(n+1) + f(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} bf(n+2) + a'f(n+1) &= bf(n+2) + af(n+1) - bcf(n+1) = bcf(n+1) + bf(n) + af(n+1) - bc \\ &= af(n+1) + bf(n) = 1 \end{aligned}$$

pela hipótese da indução. Portanto, o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.5 *Seja uma recorrência do tipo $f(n+2) = cf(n+1) - f(n)$, com c um número inteiro, se as condições iniciais $f(0)$ e $f(1)$ são primos entre si, então $f(n)$ e $f(n+1)$ são primos entre si, para todo n natural.*

Prova: A demonstração é exatamente a mesma do teorema anterior apenas considerando-se $b' = -b$ e $a' = a + bc$. ■

3.3.3 Um resultado sobre primos entre si

Esta seção visa responder a principal pergunta desta dissertação, a qual é:

Existe uma função polinomial $p(x)$ de domínio natural que gere todos os números primos em sequência?

Precisamos justificar a existência ou não existência de uma função polinomial f tal que que $f(0) = 2, f(1) = 3, \cdots, f(n) = p(n+1), \cdots$ onde $p(n)$ é o n-ésimo primo. Vamos começar então com um lema que vai nos ajudar na resposta.

Lema 3.1 $\binom{2n}{n}$ *é par, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Pela relação de Stiefel temos

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}.$$

Como

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n-1}{n-1}$$

temos

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}.$$

Sabendo que $\binom{2n-1}{n}$ é um número inteiro, então $\binom{2n}{n}$ é múltiplo de 2. ■

Teorema 3.6 *Se f é um polinômio de grau p tal que $f(0)$ é um número par e $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(p)$ são números ímpares então $f(p+1)$ é um número par.*

Prova: Consideremos agora um polinômio $f(x)$ de grau $p > 0$. Conforme vimos na Seção 3.2.2, tem-se

$$f(p+1) = -\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} f(k) = -\sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} f(k) - (-1)^{p+1} f(0).$$

Uma vez que $f(0)$ é par, temos $f(0) = 2q$ para algum inteiro q. Daí

$$f(p+1) = -\sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} (-1)^{p+1-k} f(k) - (-1)^{p+1} 2q.$$

Se $p+1$ é ímpar temos que p é um número par. Desenvolvendo o somatório teremos um número par, p, de termos multiplicados pelos coeficientes binomiais, pois k varia de 1 até p. Usando o fato de que números binomiais complementares são iguais, isto é,

$$\binom{p+1}{k} = \binom{p+1}{p+1-k} = \frac{(p+1)!}{(p+1-k)!k!},$$

obtemos

$$\begin{aligned} f(p+1) \;=\; & -\binom{p+1}{1} \left[(-1)^p f(1) + (-1)^1 f(p)\right] \\ & -\binom{p+1}{2} \left[(-1)^{p-1} f(2) + (-1)^2 f(p-1)\right] \\ & - \cdots - \binom{p+1}{p/2} \left[(-1)^{p/2+1} f(p/2) + (-1)^{p/2} f(p/2+1)\right] - (-1)^{p+1} 2q. \end{aligned}$$

Como $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(p-1)$ e $f(p)$ são ímpares, qualquer desses números entre colchetes é par pois a soma ou a diferença de ímpares sempre é um número par. Além disso, já que $\binom{p+1}{k}$ é inteiro, todos os termos do lado direito desta última equação são números inteiros e múltiplos de 2, portanto $f(p+1)$ é par.

Caso $p+1$ seja par, temos que p é um número ímpar. Teremos então um somatório da forma

$$\begin{aligned} f(p+1) \quad = \quad & -\binom{p+1}{1}\left[(-1)^p f(1) + (-1)^1 f(p)\right] \\ & -\binom{p+1}{2}\left[(-1)^{p-1} f(2) + (-1)^2 f(p-1)\right] \\ & -\cdots-\binom{p+1}{(p+1)/2}(-1)^{(p+1)/2} f((p+1)/2) - (-1)^{p+1} 2q. \end{aligned}$$

Pelo lema anterior temos que $\binom{p+1}{(p+1)/2}$ é um número par. Portanto, sendo soma de números pares temos que $f(p+1)$ é par. ■

Corolário 1 *Não existe uma função polinomial f, com domínio e $\mathbb{N}$ coeficientes inteiros, que gere todos os números primos em sequência.*

Caso uma função polinomial gerasse todos os números primos, deveríamos ter $f(0) = 2$ e $f(k)$ ímpar para todo $k \geq 1$ já que 2 é o único número primo que é par. No entanto, como vimos no Teorema 3.6, se grau de f é p tem-se $f(p+1)$ par, logo não é primo.

Referências Bibliográficas

[1] GRAHAM, R. L; KNUTH, D. E; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: a foundation for computer science.* United States of America, copyright Addison-Wesley Publishing Company, sixth printing, 1990.

[2] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética.* Coleção Textos Universitários. Ed. SBM: 2. ed. - Rio de Janeiro, 2011.

[3] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2.* Coleção do Professor de Matemática. Ed. SBM: 6. ed. - Rio de Janeiro, 2006.

[4] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 4: Enunciados e Soluções dos Exercícios.* Coleção do Professor de Matemática. Ed. SBM: Rio de Janeiro, 2007.

[5] LIMA, R. C. S. *Anotações sobre equações de diferença-Recorrências.* Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ, 2009.

[6] LIMA, R. C. S. *Anotações sobre recorrências e somatórios aplicados a divisibilidade.* Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ, 2009.

[7] MARKUSHÉVICH, A. I. *Lecciones popolares de matemática: Sucesiones Recurrentes.* Editorial Mir - Moscú, tercera edición, 1986.

[8] MOREIRA, C. G. T. A. . *Seqüências Recorrentes.* Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4 - pp. 53-69, 2007 (Artigo de divulgação).

[9] PEREIRA, L. C; FERREIRA, M. V. *Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e relações com a Razão Áurea.* Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

[10] POLLMAN, H. S. *Equações de Recorrência.* Rio de Janeiro: SBM, EUREKA! n. 9, p. 33-40, 2000.

[11] OLIVEIRA, M, R; CARNEIRO, M. L. *Elementos da Matemática, Volume 3.* Ed. VestSeller: 3 ed. - Fortaleza, 2010.

[12] SHINE, C. Y. *21 Aulas de Matemática Olímpica.* Coleção Olímpiadas de Matemática. Ed. SBM: Rio de Janeiro, 2009.

[13] SHINE, C. Y. *Curso de Combinatória - Nível 3, Aula 4.* Programa Olímpico de Treinamento - POT 2012.

[14] STEWART, James. *Cálculo, Volume 2.* Tradução da 6ª edição norte-americana. Ed. Cengage Learning: 2. ed. - São Paulo, 2012.