UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA ABORDAGEM DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO

CLEVERTON DA SILVA VASCONCELOS

Instituto de Matemática

Maceió
2013

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLEVERTON DA SILVA VASCONCELOS

UMA ABORDAGEM DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO

Maceió
2013

CLEVERTON DA SILVA VASCONCELOS

UMA ABORDAGEM DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador: Professor Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

Maceió

2013

"Dedico aos amantes da Matemática e a todos que de alguma maneira me ajudaram no decorrer do curso."

.

Catalogação da fonte

Universidade Federal de Alagoas

Biblioteca Central

Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

V331a Vasconcelos, Cleverton da Silva.

Uma abordagem de curvas no ensino médio/

Cleverton da Silva Vasconcelos. – 2013.

80f. : il.

Orientador: Luiz Guilherme Martinez Maza.

Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, 2013.

Bibliografia: f.80.

Índice: f.81.

1. Elipse. 2. Parábola. 3. Hipérbole. 4. Catenária. 5. Matemática – Ensino. 6. Ensino médio. I. Título

CDU: 514.112.6:37.046.14

ABORDAGEM DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO

Cleverton da Silva Vasconcelos

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileria de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Luis Guillermo Martinez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza (Orientador - UFAL)

Prof. Dr. Hilario da Silva Alencar (UFAL)

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes (UFBA)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu incomparável amor e sua infinita graça, através da qual me proporcionou realizar este trabalho.

A minha amada esposa Valdélia Tenório Nascimento Vasconcelos.

A minha querida mãe Cicera Maria da Silva Vasconcelos e meu pai (in memoriam) Roberval Ribeiro Vasconcelos.

Ao amigo José Talvanes pelo seu insubstituível e sincero apoio.

Ao meu orientador e Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza pela orientação, paciência e dedicação.

Aos professores do PROFMAT– UFAL.

Aos colegas do PROFMAT-UFAL que passaram comigo dois anos superando muitas dificuldades.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

RESUMO

Uma Abordagem de Curvas no Ensino Médio mostra um roteiro que tem como intuito facilitar a aprendizagem do aluno, fazendo com que este relacione o conteúdo trabalhado com sua vivência. Para tal, o capítulo 1 aborda conceitos matemáticos que são pré-requisitos para a compreensão das curvas que serão expostas; o primeiro – e principal conceito – é a concepção de plano cartesiano, visto que a parte analítica das curvas desenvolve-se neste plano; em seguida é apresentada a distância entre dois pontos e a distância entre ponto e reta; logo após, tem-se o número "e" e, por fim, a teoria de cone circular reto. Já o capítulo 2, intitulado de Contexto Histórico, como o próprio nome indica, traz uma síntese da origem de cada uma das curvas tratadas (a elipse, a parábola, a hipérbole e a catenária). Os capítulos 3, 4, 5 e 6 falam destas curvas na ordem citada precedentemente. Neles são identificadas as formas das curvas em situações do dia a dia das pessoas, por exemplo: a forma de uma elipse foi destacada em objetos, em locais importantes e na natureza; enquanto a forma da parábola, além de ter sido destacada em objetos, foi também em construções e em lançamento de corpos; já a forma da hipérbole, na natureza e em sistema de navegação; e finalmente, a forma da catenária, em rede elétrica e em construções. Após isso, cada um dos capítulos trata de como obter o desenho geométrico da curva em questão, de forma simples e utilizando os seguintes recursos: lápis, régua, compasso, papel, barbante, ventosa e corda. A exceção foi o capítulo 6 que trata da catenária, a qual foi obtida por meio da brincadeira de "pula-corda". No entanto, estes 4 (quatro) últimos capítulos terminam enfocando o mesmo assunto: eles desenvolvem o conceito analítico das curvas em apreço, destacando as suas respectivas definições, seus respectivos elementos, suas equações, e aplicação para fixação da teoria exposta.

Palavras-chave: Elipse. Parábola. Hipérbole. Catenária.

ABSTRACT

An Approach of Curves in High School shows a screenplay that has as an aim to facilitate the student learning, making him/er to connect the taught content with his/er experience. For this, the chapter 1 approaches Math concepts that are prerequisites to comprehend the curves that will be exposed; the first one – and main concept – is the conception of Cartesian Plan, considering that the analytical part of the curves develops in this plan; then it is presented the distance between two points and the distance between point and straight; after that, the number "e" is given and, finally, the straight circular cone theory. In chapter 2, called Historic Context, as its own name indicates, brings us a synthesis from each related curves origin (the ellipse, the parabola, the hyperbole and the catenary). Chapters 3, 4, 5 and 6 speak of these curves in the previously mentioned order. In them, the forms of the curves are identified in people's daily routine, for example, the ellipse form was observed in some objects inside important places and in nature; whereas the parabola form, besides being seen in some objects, was also observed in constructions and body launches; yet the hyperbole form, in nature and navigation system; finally, the catenary formin electrical grid and constructions. After that, each one of the chapters mentions how to get the geometrical drawing of the respective curve, in a simple way by using the following means: pencil, ruler, compass, paper, string, cuppingglassand rope. Chapter 6 was an exception. It is about the catenary, which was demonstrated by the "jump-rope"play. However, these last 4 chapters focus on the same subject: they develop the analytical concept of the curves in study by showing their respective definitions, elements, equations and application to fix the exposed theory as well.

Keywords: Ellipse. Parabola. Hyperbola. Catenary.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A dissertação em apreço descreve um modo simples e objetivo de se tratar curvas no Ensino Médio, a qual proporciona uma direção para que se introduza o conceito de curvas na Educação Básica por outro prisma. Esse tema é de fundamental importância para o currículo do aluno, uma vez que o prepara para estudos posteriores e abre um vasto leque de conhecimentos matemáticos relacionados com o seu dia a dia. O assunto em si, bem como a forma na qual foi apresentado nas páginas posteriores, fora escolhido baseado na dificuldade do aluno em relacionar conceitos absorvidos no ambiente escolar com sua relação com o mundo prático.

Sabendo-se que o método tradicional de discorrer sobre as curvas geram dificuldades na aprendizagem dos alunos, o prisma em foco visa dar uma compreensão dos conceitos de curvas de uma maneira desprovida de símbolos matemáticos, relacionando tais conceitos a situações e a objetos que fazem parte da vida das pessoas. Tal proposta facilitará o processo de ensino-aprendizagem, visto que provocará um maior interesse por parte dos alunos pelo conteúdo ou até pela Matemática de uma forma geral, gerando assim, um decréscimo no déficit do alunado com relação a essa área das Ciências Exatas. Haja vista que o rendimento escolar poderá melhorar, trazendo satisfação para todos os envolvidos com a Educação.

Os procedimentos utilizados baseiam-se na perspectiva de fazer com que o aluno tenha uma noção satisfatória dos conceitos, sem que percebam – a princípio – os referidos conceitos. Para tanto, além de uma breve dissertação histórica a respeito das 4 (quatro) curvas tratadas, será feita uma análise de objetos e situações da natureza onde se podem encontrar formas que possuem o mesmo formato destas curvas. Em seguida, usando objetos de uso escolar, serão construídas ou desenhadas as curvas identificadas na análise feita, promovendo então uma ligação do cotidiano com algo prático e palpável. A partir disso, os conceitos matemáticos das curvas serão expostos.

Em virtude do fato de que de outra forma não seria tão viável, o primeiro capítulo explora conceitos matemáticos preliminares e indispensáveis para o desenvolvimento do aluno no que diz respeito ao tratamento de curvas no Ensino Médio, diga-se "preliminares e indispensáveis"pelo fato de que a Matemática é assimilada mediante um processo acumulativo – e gradativo – de conceitos que vão se intercalando ao longo da vida escolar, em outras palavras, cada conteúdo só será devidamente apreendido se aquilo que o precede for utilizado como ferramenta de maneira correta. No segundo capítulo, por sua vez, discorre sobre cada uma das 4 (quatro) curvas no que tange à História, as quais são: a elipse, a parábola, a hipérbole e a catenária. As 3 (três) primeiras, conhecidas como cônicas, foram desenvolvidas a partir dos matemáticos da Grécia Antiga; enquanto que a última, fora conhecida a partir da Idade Média.

Após essa explanação inicial, apresentam-se cada uma destas curvas em um capítulo específico, sendo que em cada um deles (ou seja, capítulos 3, 4, 5 e 6), fala-se sobre: o formato da curva representado em situações do cotidiano, procedimentos geométricos para a sua construção ou desenhos, e o conceito analítico (por meio de simbologia matemática). Com relação à exposição dos formatos das curvas no cotidiano, além de possibilitar a visualização de tais curvas, esta exposição abrirá espaço para a abordagem de temas transversais, desenvolvidos, por exemplo, no âmbito da Física e da Geografia. Quanto aos procedimentos geométricos, eles mudarão a rotina das aulas e proporcionarão ao aluno a noção geométrica das curvas, ao tempo que desenvolverá habilidades relacionadas ao desenho e ao equilíbrio motor. O conceito analítico, que é a parte final dos capítulos supracitados, utiliza os conteúdos do capítulo 1 como ferramentas e a partir dos conceitos que foram abordados de maneira lúdica nos processos anteriores, apresenta a Matemática propriamente dita.

1 PRELIMINARES

O desenvolvimento de conceitos matemáticos deve ocorrer de forma gradativa e contínua, levando o aluno, de maneira lógica e coerente, à aquisição do conhecimento. Para tal, é necessário que os alunos tenham algum conhecimento prévio de algumas definições e/ou teoremas que possibilitarão o avanço nos conteúdos a serem abordados. No caso das curvas que serão abordadas, existem algumas noções que são pré-requisitos fundamentais para um bom aprendizado.

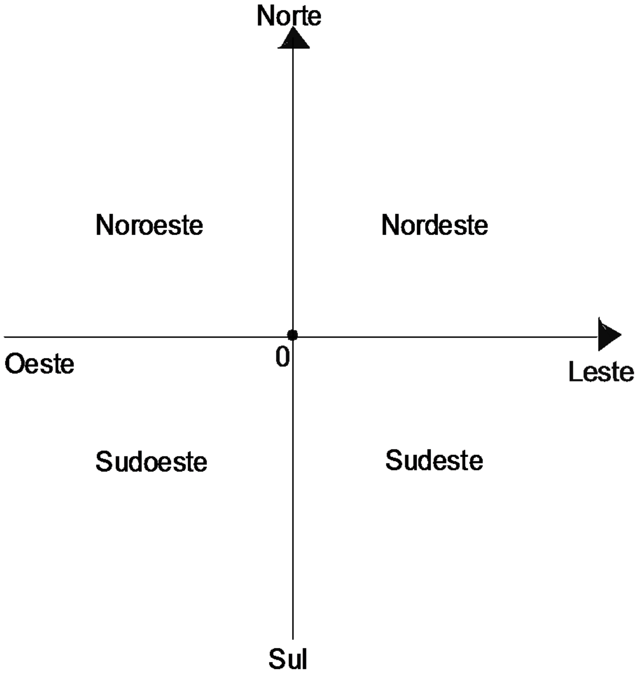
As curvas serão descritas num sistema de eixos ortogonais no plano; e neste sistema será apresentado como calcular a distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta. Além disso, será necessária uma noção do número e, e por último a compreensão de cone circular reto.

1.1 Sistema de eixos ortogonais

O objetivo do sistema de eixos ortogonais é representar pontos, os quais servirão de base para todo o desenvolvimento dos conceitos formulados, analiticamente, no decorrer de toda a abordagem de curvas neste trabalho.

Um sistema de eixos ortogonais é formado por duas retas perpendiculares entre si, chamadas de eixos, que se intersectam em um ponto O, denominado origem do sistema. Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas de quadrantes, que se numera no sentido anti-horário, começando pela região nordeste do plano, conforme a figura 1.1. O 1º quadrante localiza-se na região nordeste; o 2º quadrante, na região noroeste; o 3º quadrante, na região sudoeste e, o 4º quadrante, na região sudeste. O eixo que separa a região sudeste do plano da região nordeste será denotado por OX, enquanto que o outro eixo será denotado por OY, conforme a figura abaixo:

Figura 1.1: **Sistema de eixos ortogonais**

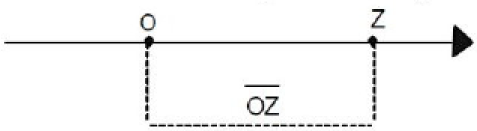


Fonte: Autor, 2013

A partir de agora, os sistemas de eixos ortogonais que serão utilizados terão seus respectivos eixos em qualquer posição, mantendo apenas a perpendicularidade entre eles. Contudo, o modelo acima servirá de referência.

Seja Z um ponto qualquer do eixo OX, por exemplo. A distância da origem O ao ponto Z é denotada $\overline{OZ}$, conforme a figura 1.2 abaixo.

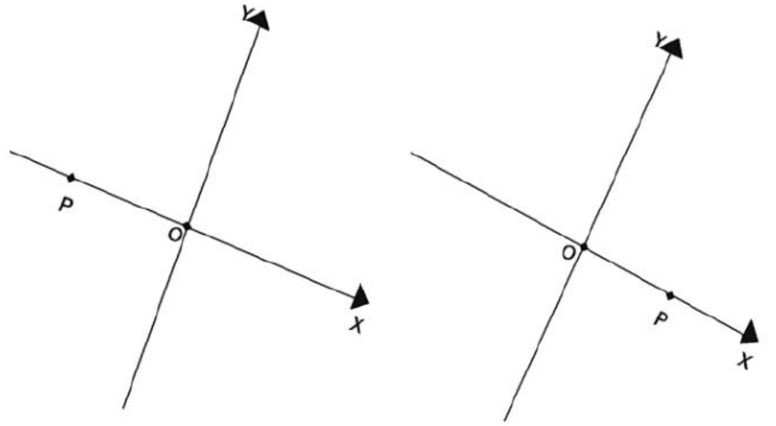
Figura 1.2: **Distância entre um ponto e a origem do sistema**



Fonte: Autor, 2013

Daí, tem-se que dado um ponto P sobre o eixo OX, acostuma-se identificar P com o número real $x_p = \overline{OP}$, se P está no semieixo que separa os quadrantes 1 e 4, e $x_p = -\overline{OP}$, caso contrário.Ver figura 1.3 abaixo.

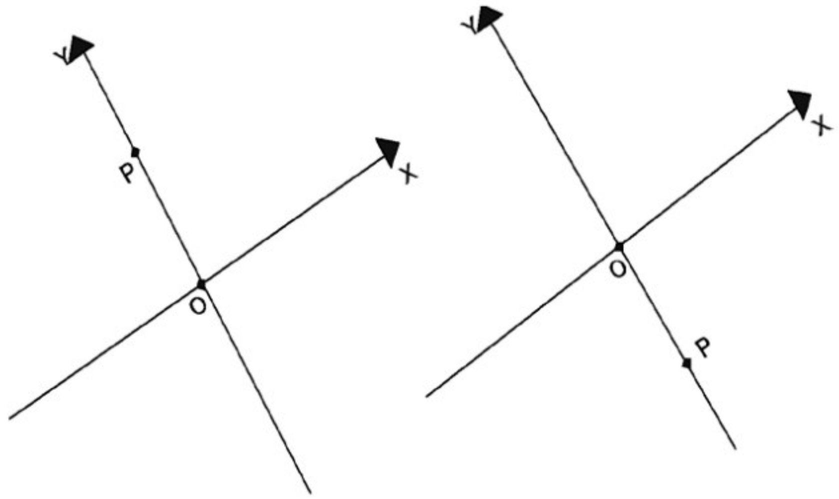
Figura 1.3: **Ponto localizado sobre o eixo OX**



Fonte: Autor, 2013

De forma análoga, tem-se que dado um ponto P sobre o eixo OY, acostuma-se identificar P com o número real $y_p = \overline{OP}$, se P está no semieixo que separa os quadrantes 1 e 2, e $y_p = -\overline{OP}$ caso contrário. Ver figura 1.4 abaixo.

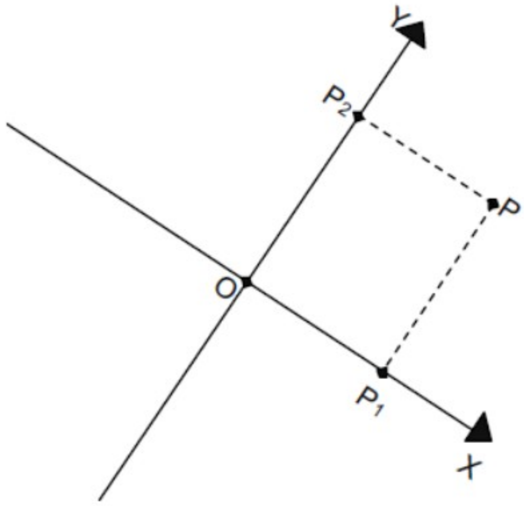
Figura 1.4: **Ponto localizado sobre o eixo OY**



Fonte: Autor, 2013

De modo geral, dado um ponto P do plano, as retas que passam por P e são perpendiculares a OX e OY, intersectam os eixos em pontos P_1 e P_2, respectivamente. Neste caso, os números x_{P_1} e y_{P_2} associados a P_1 e P_2 como acima, denotam-se por x_P e y_P e, chamam-se coordenadas de P. Neste sentido, identifica-se o ponto P com o par ordenado (x_P, y_P). Ver figura 1.5 abaixo.

Figura 1.5: **Representação de um ponto no sistema de eixos**



Fonte: Autor, 2013

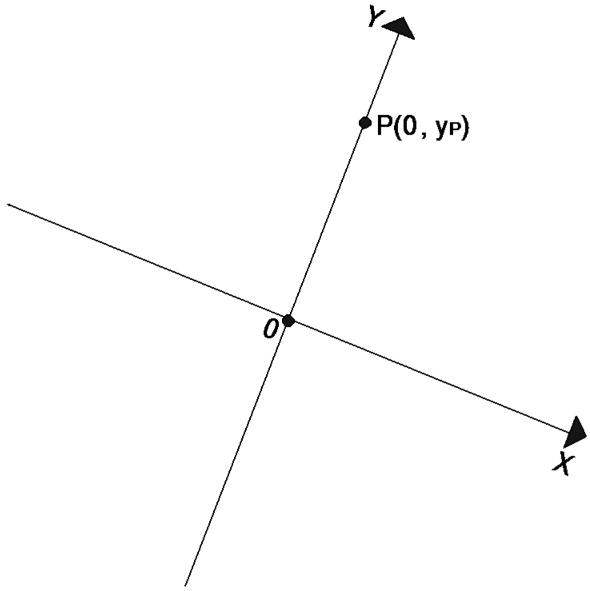
Reciprocamente, dado um par ordenado (x, y) de números reais, associa-se a x e y pontos $P_1 \in OX$ e $P_2 \in OY$, respectivamente, de modo que $|x| = OP_1$ e $|y| = OP_2$ ($x = x_{P_1}$ e $y = y_{P_2}$). Observe que a reta perpendicular a OX passando por P_1 e a reta perpendicular a OY passando por P_2 são perpendiculares entre si e, portanto, se intersectam num único ponto P. Note-se de passagem que (x, y) são as coordenadas de P.

Assim tem-se uma correspondência entre os pontos em um sistema de eixos ortogonais e o conjunto $\mathbb{R}^2$ formado por todos os pares ordenados de números reais.

Observam-se ainda no sistema de eixos ortogonais os seguintes casos:

1º) Caso um ponto P pertença ao eixo OY, então $x_P = 0$, ou seja, $p(0, y_P)$. Conforme a figura 1.6 abaixo.

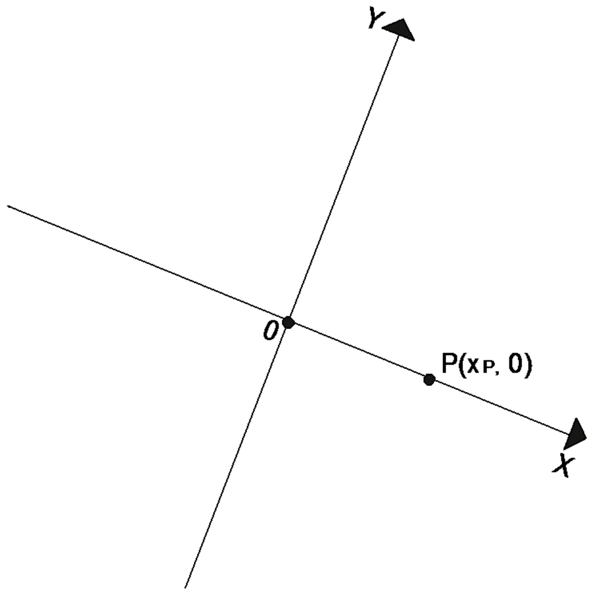
Figura 1.6: Ponto localizado sobre o eixo OY



Fonte: Autor, 2013

2º) Caso um ponto P pertença ao eixo OX, então, $y_P = 0$, ou seja, $P(x_P, 0)$. Conforme a figura 1.7 abaixo.

Figura 1.7: Ponto localizado sobre o eixo OX

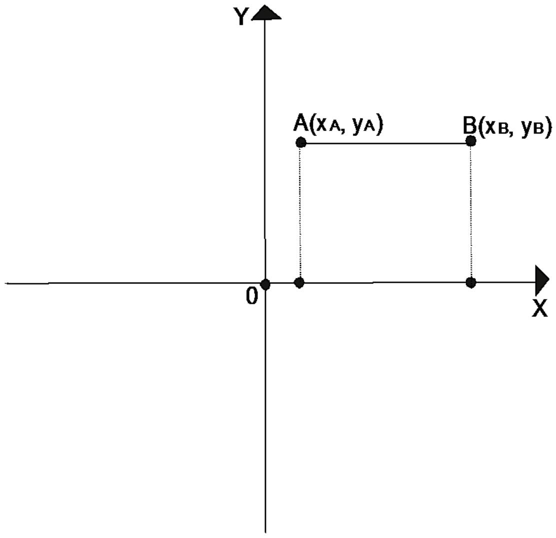


Fonte: Autor, 2013

1.2 Distância entre dois pontos

Dados os pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B) no sistema de eixos ortogonais, Conforme a figura 1.8 abaixo, tal que o segmento AB seja paralelo ao eixo OX, a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre x_B e x_A, e, será indicada por d_{AB}. Logo, tem-se que $d_{AB} = |x_B - x_A|$.

Figura 1.8: Distância entre dois pontos

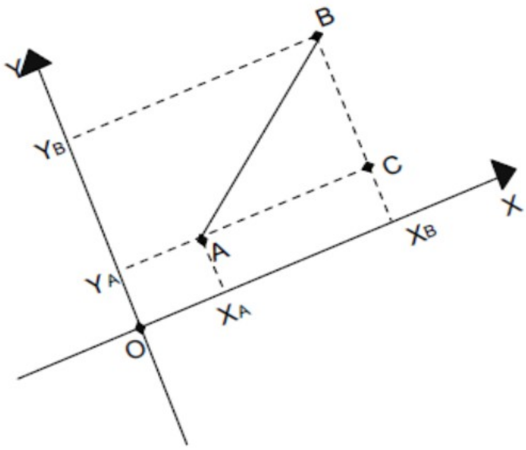


Fonte: Autor, 2013

De modo análogo, se o segmento AB for paralelo ao eixo OY, a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre y_B e y_A, ou seja, $d_{AB} = |y_B - y_A|$.

Caso sejam dados os pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B), quaisquer no sistema de eixos ortogonais, pode-se considerar o ponto C de intersecção entre as retas perpendiculares aos eixos ortogonais passando pelos pontos A e B, respectivamente. Daí, Pode-se construir o triângulo retângulo ABC, conforme a figura 1.9 abaixo.

Figura 1.9: **Distância entre dois pontos**



Fonte: Autor, 2013

Fazendo uso do teorema de Pitágoras no triângulo acima, tem-se:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AC})^2 + (d_{CB})^2 \tag{1.1}$$

Por outro lado, $d_{AC} = |x_B - x_A|$ e $d_{CB} = |y_B - y_A|$ como já foi visto, logo, substituindo os valores dessas distâncias em 1.1 tem-se:

$$(d_{AB})^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

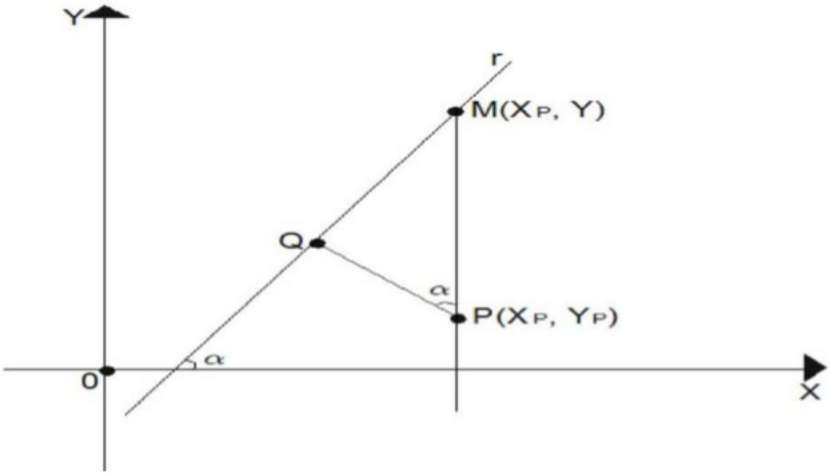
Usando a seguinte propriedade de módulo $|x|^2 = x^2$, para todo x real real, tem-se que $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$. Daí, $d_{AB} = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Mas, como só faz sentido falar de distância utilizando valores positivos, define-se que $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1.3 Distância entre ponto e reta

Sejam P(x_P, y_P) um ponto e r uma reta dada pela equação *ax + by + c = 0*, representados num sistema de eixos ortogonais quaisquer, denota-se $d_{P,r}$ a distância entre P e r, a qual define-se como sendo d_{PQ}, onde Q é o ponto de intersecção entre r e a reta que passa por P e é perpendicular à r. A reta r intersecta o eixo OX no ponto correspondente ao número $\dfrac{-c}{a}$ (caso $a \neq 0$) e ao eixo OY no ponto correspondente a $\dfrac{-c}{b}$ (caso $b \neq 0$). Observe que $a = 0$

significa que r é paralela a OX e $b = 0$ significa que r é paralela a OY.

Figura 1.10: **Distância entre ponto e reta**



Fonte: Autor, 2013

Toma-se uma reta perpendicular ao eixo OX passando por P e por r, formando o triângulo retângulo PMQ representado na figura 1.10. Nesse triângulo tem-se que $d_{p,r} = d_{PM}.|cos\alpha|$, pela trigonometria no triângulo retângulo. Obervando o gráfico tem-se também que $d_{PM} = |y - y_P|$. Então,

$$d_{p,r} = |y - y_P|.|cos\alpha|. \tag{1.2}$$

Da equação da reta r, tem-se que $tg\alpha = \frac{-a}{b}$, pois $ax+by+c = 0 \Rightarrow by = ax-c \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x-c$, sendo $(\frac{-a}{b})$ o coeficiente angular da reta. Por outro lado, tem-se da trigonometria que $cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha^2}}$. Substituindo o valor de $tg\alpha$ por $(\frac{-a}{b})$, obtém-se que:

$$|cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha^2}} \Rightarrow |cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{-a}{b})^2}}.$$

Somando os termos dentro dos radicais obtém-se:

$$|cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.3) em (1.2), tem-se que:

$$d_{p,r} = |y - y_p|.|cos\alpha| \Rightarrow d_{p,r} = |y - y_p|.\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Efetuando a multiplicação tem-se:

$$d_{p,r} = \frac{|by - by_p|}{a^2\sqrt{+ b^2}}. \tag{1.4}$$

Como o ponto M(x_p, y) pertence à reta r, temos:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax_p + by + = 0 \Rightarrow by = -ax_p - c.$$

Substituindo by por $-ax_p - c$ na expressão (1.4) obtém-se:

$$d_{p,r} = \frac{|-ax_p - by_y - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Utilizando a definição de módulo tem-se que a distância entre o ponto a reta r é:

$$d_{p,r} = \frac{|ax_p + by_y + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1.4 O número e

A base dos logaritmos naturais ou neperianos é o número **e**, também conhecido por constante de Euler, visto que o símbolo e foi usado por Euler em 1739. John Napier foi o inventor dos logaritmos no início do século XVII. No entanto na tabela de logaritmos que ele publicou em 1618, existem apenas indícios sobre o número **e**. Só a partir de 1683 que esse número ganha notoriedade com o trabalho de Jacob Bernoulli e o estudo sobre juros compostos. Tem-se a seguir uma noção intuitiva de como se aproximar do número **e**, utilizando juros compostos:

- Suponha que seja depositado 1 real por um período de um ano a juros de 100%(1 real) ao ano. No final de um ano tem-se 2 reais.

- Agora suponha que o depósito rende 50% por semestre ao fim de um ano (2 semestres), tem-se 2,25 reais. Visto que:

$50\% = 0,5 = \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} = 1,5$

Fim do 1º semestre = 1 x 1,5 = 1,5

Fim do 2º semestre = 1,5 x 1,5 = 2,25

- Fazendo agora um depósito que rende 25% por trimestre, ao fim de um ano (4 trimestres) tem-se, aproximadamente, 2,44 reais, Pois: 25%=0,25= $\frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{4} = 1,25$

Fim do 1º trimestre = 1 x 1,25 = 1,25

Fim do 2º trimestre = 1,25 x 1,25 = $1,25^2$ = 1,5625

Fim do 3º trimestre = 1,5625 x 1,25 = $1,25^3$ = 1,953125

Fim do 4º trimestre = 1,953125 x 1,25 = $1,2^4$ = 2,44140625

- E se o depósito render (1/12) por mês, quanto será o montante no final do ano?

Fim do 1º mês = 1 x $(1 + \frac{1}{12})$

Fim do 2º mês = 1 x $(1 + \frac{1}{12})^2$

Fim do 3º mês = 1 x $(1 + \frac{1}{12})^3$

Fim do 4º mês = 1 x $(1 + \frac{1}{12})^4$

(...)

Fim do 12º mês = 1 x $(1 + \frac{1}{12})^{12}$. Aproximadamente 2,61304 reais.

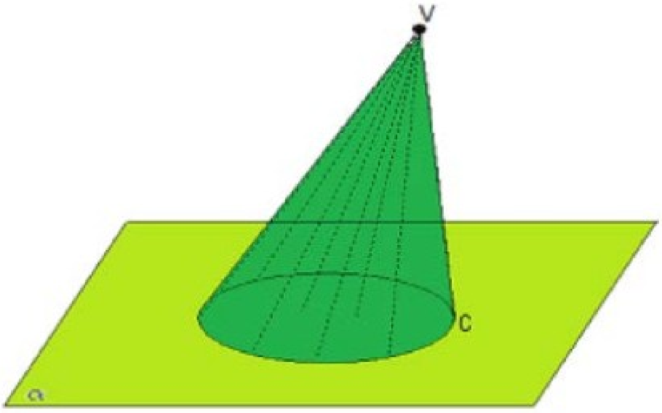
Quanto mais estreitar o período dos juros (em semana, dia, hora etc) mais o total ao fim de um ano se aproxima do valor de e. Por curiosidade tem-se que um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais exatos, é 2,718281828459.

Define-se o número e como o $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$, ou seja, quando o número de meses da noção intuitiva acima tende ao infinito, os juros compostos tende ao valor de e.

1.5 Cone circular reto

Definição 1.5.1. *Sejam C uma circuferência, com centro em O, contida em um plano α e V um ponto não pertencente a α, denomina-se cone circular o conjunto de todos os segmentos de reta com origem em C e extremidade em V. Ver figura 1.11.*

Figura 1.11: Cone circular



Fonte: Autor, 2013

1.5.1 Elementos do cone circular, conforme a figura 1.12.

- A circuferência C é chamada de base do cone;

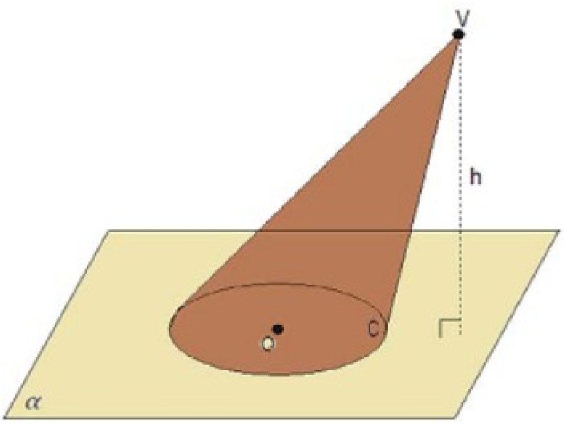
- O ponto V chama-se vértice do cone;

- O segmento OV chama-se eixo do cone;

- A distância do vértice ao plano da base é chamada de altura (h);

- O segmento de reta de extremidades em V e em um ponto qualquer da circunferência é chamado de geratriz. A reunião de todas as geratrizes é denominada área lateral.

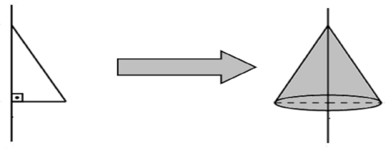
Figura 1.12: Cone circular



Fonte: Autor, 2013

Definição 1.5.2. *Cone circular reto é aquele cujo eixo é perpendicular ao plano da base, ou seja o eixo do cone forma um ângulo reto (90°) como o plano da base. O cone circular reto pode ser obtido pela revolução completa da hipotenusa e de um cateto, de um triângulo retângulo, em torno do segundo cateto, conforme a figura 1.13. O cone circular que não é reto é denominado oblíquo.*

Figura 1.13: Cone circular reto

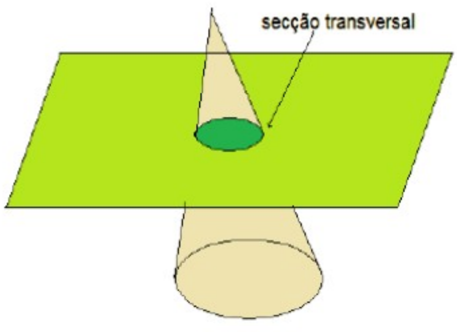


Fonte: Autor, 2013

1.5.2 Secções no cone

Definição 1.5.3. *secção transversal como sendo a intersecção não vazia de um cone com um plano paralelo a sua base. Ver figura 1.14.*

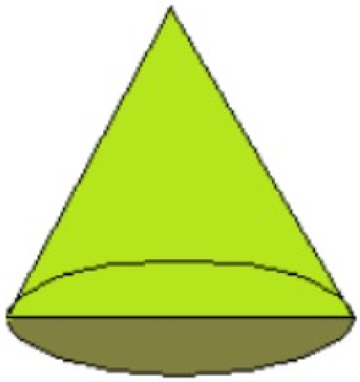
Figura 1.14: Secção transversal



Fonte: Autor, 2013

Definição 1.5.4. *secção meridiana como sendo a intersecção do cone com o plano que passa pelo vértice e pelo centro da base. Ver figura 1.15.*

Figura 1.15: Secção meridiana

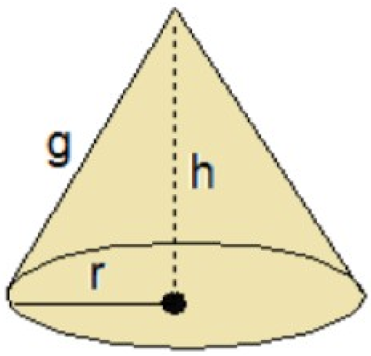


Fonte: Autor, 2013

1.5.3 Áreas do cone

Considere um cone circular reto de raio r, altura h e geratriz g como o da figura 1.16 a seguir:

Figura 1.16: Cone circular reto

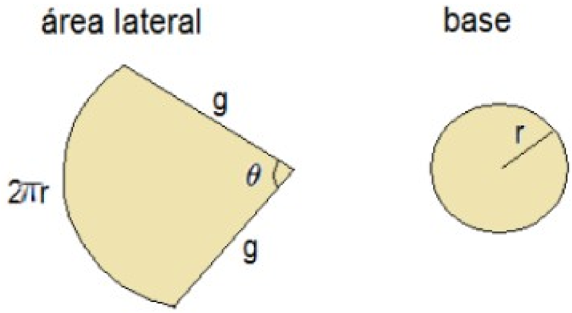


Fonte: Autor, 2013

Tem-se a seguinte relação $g^2 = h^2 + r^2$.

A representação de um cone circular num plano, de modo que toda a sua superfície se apresente como uma figura plana, resulta num setor circular e num círculo, conforme a figura 1.17.

Figura 1.17: **Planificação do cone**



Fonte: Autor, 2013

- A área da superfície lateral *(Al)* é a área do setor circular, a qual é dada por: $Al = \pi r g$

- A área da base (Ab) é a área do círculo delimitado pela circuferência da base: $Ab = \pi r^2$

- A área total (At) é dada pela soma da área da base com a área lateral: $At = \pi r g + \pi r^2$

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DAS CURVAS

Ao contemplar qualquer conteúdo matemático, não se pode abandonar ou deixar de lado os aspectos históricos que o cercam, pois tais aspectos poderão proporcionar estímulo e curiosidade, gerando, assim, um ambiente favorável para aprendizagem.

Portanto será abordado o contexto histórico das **Cônicas** (Elipse, Hipérbole e Parábola) e da **Catenária**, baseado nos historiadores Carl B Boyer, Rubens G Lintz e Howard Eves. Este contexto histórico permitirá a construção de um pano de fundo para o desenvolvimento dos conceitos das referidas curvas.

2.1 As Cônicas

O nome "cônicas"foi atribuído a um grupo de curvas planas que eram geradas por meio de secções obtidas pela intersecção de planos com de cones circulares retos.

Os tratados sobre secções cônicas são conhecidos desde o século III antes de Cristo. Elas foram estudadas por muitos matemáticos durante a história, dentre os quais se podem citar os seguintes: Menecmo, Euclides e Arquimedes (embora tenha sido, sem dúvida alguma, Apolônio de Perga, o matemático que deixara o maior legado sobre as cônicas).

Menecmo (380 a 320 a.C.) foi um matemático grego, considerado como o primeiro a representar curvas por intermédio de equações, ainda que de modo um pouco intuitivo. Ele também foi o primeiro responsável pelo estudo das Cônicas, e utilizou as seções de cones na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo. Neste estudo, pesquisando sobre a *parábola* e a *hipérbole*, Menecmo descobriu a *elipse*, pois elas ofereciam as propriedades necessárias para a solução da duplicação do cubo. Contudo, todas as soluções para o problema foram teóricas. Apenas no séc XIX, mais de 2000 anos depois da formulação do problema foi que se estabeleceu a impossibilidade da construção sob a limitação de usar apenas régua e compasso.

Euclides (século III a.C.), por sua vez, foi a figura mais soberana da Matemática de sua época, e uma das mais importantes de toda a história da Matemática. Contudo, os detalhes de sua vida são escassos, devido à falta de escritores na sua geração e à dificuldade de preservar os manuscritos.

.

Figura 2.1: **Euclides**

Fonte: Disponível em:< *http : //www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/.../matematica.htm* >. Acesso em 10.08.13

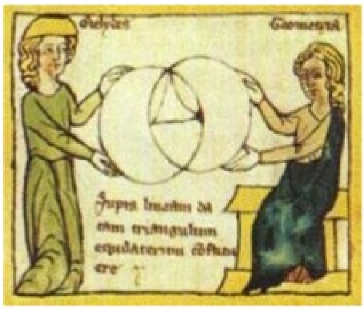
Com Euclides, a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais que não envolviam somente procedimentos de medida. A obra prima de Euclides, "Os elementos", um compêndio formado por 13 livros, representa nesse contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou não. Enquanto o seu estudo sobre cônicas, composto de 4 livros, estava entre uma das mais importantes obras do matemático; todavia, se perdeu com o passar do tempo, deixando assim, uma lacuna no que diz respeito às Cônicas, a qual viria a ser preenchida tempos depois. O trabalho deste matemático é tão vasto que muitos historiadores chegaram a pensar que não fosse obra de um homem apenas.

Vale frisar ainda, que ele possuía um amigo por nome de Aristeu, o qual era considerado um bom geômetra, e também digno de considerável crédito por ter escrito o tratado mais antigo sobre lugares geométricos. Entretanto, da mesma forma que ocorreu com os escritos de Euclides, o tratado de Aristeu sobre Cônicas também se perdeu.

Enquanto Arquimedes, nasceu no ano de 287 a.C., em Siracusa, região geograficamente privilegiada por estar entre o Império Cartaginês e o Império Romano. Ele concluiu sua educação em Alexandria, onde ficava a famosa **Biblioteca de Alexandria** a qual havia sido construída na época do nascimento dele. Haja vista que quando ele chegou à cidade, encontrou um acervo de mais de mil pergaminhos e, dentre estes, os livros de uso particular de Aristóteles.

É interessante salientar que Euclides - que como já foi dito, é um dos maiores geômetras da história - já havia dirigido a Biblioteca de Alexandria e também que sua obra prima, "Os

Figura 2.2: Euclides e Aristeu



Fonte: Disponível em:< *http* : //*www.pt.shvoong.com* > *Artes&Humanidades* >. Acesso em 10.08.13

elementos", foi base para a obra de Arquimedes. E este, indubitavelmente, estudou com muitos discípulos do geômetra.

Em Geometria, o sábio Arquimedes teve o mérito de conceber métodos gerais para calcular as áreas de figuras planas curvilíneas e os volumes de sólidos delimitados por superfícies curvas. O sábio aplicou tais sistemas a vários casos particulares: à esfera, ao círculo, ao segmento de parábola, à área compreendida entre dois raios e dois passos sucessivos de um espiral, aos segmentos esféricos, às superfícies geradas pelas revoluções em torno dos eixos principais dos retângulos (em outras palavras, os cilindros), às entidades geométricas produzidas pela revolução dos triângulos (ou seja, os cones), das parábolas (parabolóides), das hipérboles (hiperbolóides) e das elipses (elipsóides).

Figura 2.3: Arquimedes

Fonte: Disponível em:< *http* : //*romirys.blogspot.com.br*/2012/11/*arquimedes.html* >. Acesso em 10.08.13

Embora se saiba que os matemáticos citados foram fundamentais para o desenvolvimento das Cônicas, tem-se na pessoa do astrônomo e matemático grego, Apolônio, o seu maior expoente.

Nascido em Perga (que atualmente é a Turquia), na Ásia menor, por volta de 262 a.C., morreu em torno de 190 a.C., em Alexandria; ou seja, ele viveu durante os últimos anos do século III até os primeiros anos do século II. Os dados de sua vida são escassos e quase todos são provenientes de notas que aparecem nos prefácios dos seus livros. É sabido que ainda jovem deixou Perga e foi morar em Alexandria, cujo Museu e Biblioteca eram considerados o centro do saber da época. Ele teve a oportunidade de estudar com os sucessores de Euclides e, mais tarde, passou a ser professor.

Figura 2.4: **Apolônio de Perga**

Fonte: Disponível em: < *http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/brevehistoria.htm* >. Acesso em 10.08.13

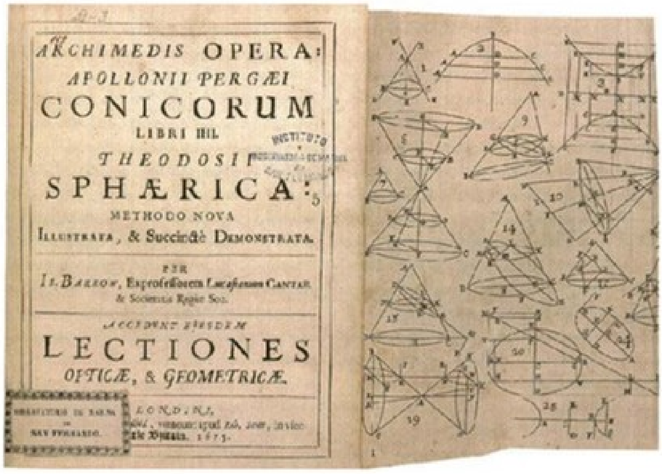
Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes e, juntamente com Euclides, formam o grupo considerado como a tríade dos maiores matemáticos gregos da Antiguidade. Dos três, Apolônio tem sido o menos conhecido ao longo da História. No entanto, é lembrado como "O Grande Geômetra"; além disso, foi, e ainda é, considerado como o sexto homem da lista dos doze mais notáveis do seu tempo. Ele também é chamado "O Pai das Cônicas", uma vez que atribuiu às cônicas as designações utilizadas ainda hoje (elipse, parábola e hipérbole), apresentando-as como seções produzidas numa mesma superfície cônica. E foi Apolônio quem apresentou, pela primeira vez, muitas das propriedades das Cônicas.

"As Cônicas", uma das principais obras de Matemática na Antiguidade, composta de 8 livros, é de autoria de Apolônio. Nessa obra ele demonstra vários teoremas, recorrendo a resultados descritos por Euclides. Abaixo, vê-se a capa da obra.

.

No prefácio geral da obra, Apolônio explica as razões que o levaram a escrevê-la:

Figura 2.5: **As Cônicas**



Fonte: Disponível em:< $http://www.fatosmatematicos.blogspot.com/2012/05/apolonio-de-perga.htm$ >. Acesso em 10.08.13

"... levei a cabo a investigação deste assunto a pedido de Neucrates, o geômetra, quando ele veio a Alexandria e ficou comigo, e, quando tinha trabalhado os oito livros, dei-lhes de imediato, apressadamente, porque ele estava de partida; não foi possível portanto revê-los. Escrevi tudo conforme me ia ocorrendo, adiando a revisão até ao fim".

(in, Thomas Heath, A History of Greek Mathematics, volume II, página 129).

O tratado de Apolônio é tão formidável que somente no século XIX, foi que surgiram novas propriedades das Cônicas. Fazendo um resumo dessa obra prima de Apolônio, tem-se que: No livro I ele mostra que de um único cone, podem ser obtidas as três espécies de seções cônicas, bastando para tal, fazer variar a inclinação do plano; no livro II, ele continua o estudo dos diâmetros conjugados e tangentes; o livro III contém muitos teoremas notáveis, úteis para a síntese de lugares sólidos e determinações de limites; o livro IV estuda o número de pontos em que uma secção de um cone pode intersectar uma curva; já no livro V ele faz o estudo das tangentes e normais a uma curva; o livro VI trata, fundamentalmente, da igualdade e semelhança de cônicas; no livro VII, ele retoma o estudo dos diâmetros conjugados, apresentando muitas proposições novas; e, por fim, no livro VIII, existem problemas semelhantes aos do livro VII.

A maior parte das obras de Apolônio desapareceu e o que existe deve-se a Pappus de Alexandria (350 a 290 a.C.), conhecido como "comentarista". Embora este fosse matemático, destacou-se por reunir uma lista de obras antigas em um compêndio intitulado por "The Copllection". Na sua reescrita, ele fez alguns acréscimos; e dentre os temas abordados, estão as Cônicas.

A obra de Apolônio influenciou e serviu de base para trabalhos de vários matemáticos durante a história, e, grande parte da Matemática atual deve-se – consideravelmente – a esse teórico. Essa influência percorreu os estudos de Ptolomeu (127-151 d.C.), Astrônomo e Geógrafo, que introduziu o sistema de latitude e longitude tal como é usado hoje em Cartografia. As Cônicas de Apolônio também tiveram forte influência nos estudos de Kleper (1571-1630 d.C.). O interesse de Kleper pelas Cônicas surgiu devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos. Tem-se ainda que, a Matemática pura de Apolônio permitiu o desenvolvimento da Lei da Gravitação de Newton. Coube, porém, a Pierre de Fermat (1601-1665 d.C.), a descoberta das equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

Por outro lado, tem-se em Hipátia, a primeira mulher da qual se tem registro a deixar uma contribuição substancial para o desenvolvimento da Matemática. Nascida em Alexandria por volta de 370 d.C., estudou sob a orientação de seu pai, o Matemático e Filósofo Teon, o qual auxiliou na escrita de comentários sobre o "Almagesto", de Ptolomeu, e na produção de uma nova versão d'Os Elementos, de Euclides, a qual se tornou base para as demais edições. Ela escreveu também comentários sobre a Aritmética, de Diofanto, e sobre as Secções Cônicas, de Apolônio. Hipátia era interessada, particularmente, no estudo dos planos formados nas intersecções de um cone e nas curvas decorrentes dessas intersecções, as chamadas secções cônicas (hipérboles, parábolas e elipses).

2.2 A Catenária

O estudo dessa curva teve início há mais de 2500 anos. Pitágoras descobriu que um tom de um som depende do comprimento da corda que o produz, e que duas cordas tracionadas com a mesma força produzem tons diferentes.

Leonardo da Vinci (1452-1519 d.C.) também dedicou seus estudos a Catenária. De qualquer forma, foram nos desenhos de Leonardo da Vinci que apareceu a primeira formulação equivocada do problema sobre a forma da Catenária. Também Galileu, em seu discurso "Sobre as duas Novas Ciências"(de 1638), especulou sobre a forma de uma corrente suspensa e concluiu erroneamente que essa fosse parabólica – em analogia com a trajetória de um projétil.

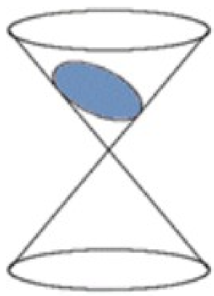
Em 1675, na mesma ata da Royal Society onde publicou sua famosa Lei da Proporcionalidade, Hooke enunciou na forma de anagrama que um arco incompreensível elivre de movimento, suportando seu próprio peso, poderia ser obtido invertendo-se a Catenária, qualquer que fosse a forma dela. Em 1690, Jakob Bernoulli desafiou o mundo científico, propondo um concurso para encontrar a forma da Catenária.

Em junho de 1691, um ano depois de Jakob Bernoulli ter proposto o seu problema, foram publicadas as três soluções corretas que foram apresentadas por Huygens, Leibniz e Johann Bernoulli. Cada um abordou o problema de forma diferente, no entanto todos chegaram a uma mesma solução. E deram à referida curva, o nome "Catenária"(nome que provém da palavra cadeia, porque a curva descreve uma cadeia fixa pelas suas duas extremidades e que não se encontra submetida a outras forças diferentes do seu próprio peso). Interessante salientar que Huygens, cientista holandês já citado, apesar de ter sido subestimado em seu papel em relação à Catenária, em 1646, com apenas dezessete anos, provou que a Catenária não podia ser uma Parábola.

3 ELIPSE

Em geometria, uma elipse é um tipo de secção cônica que se obtém pela intersecção de uma superfície cônica (ou simplesmente um cone ou dois cones justapostos) com um plano que corta todas as geratrizes desta superfície, conforme a figura 3.1. Nesse contexto a circunferência é um caso especial da elipse; É o caso em que o plano que corta o cone é paralelo à sua base.

Figura 3.1: Elipse



Fonte: Disponível em:Disponível em: < *http* : *//www.andremachado.org/artigos/*905*/secoesconicas.html* >. Acesso em 14.08.13

3.1 Elipse no cotidiano

A elipse é uma curva muito importante na Matemática, bem como na Astronomia e Engenharia (civil, elétrica e mecânica), e sua forma pode ser vista em diversos lugares. Dos lugares possíveis, verifica-se a sua presença nos 3 (três) indicados a seguir:

3.1.1 Em objetos

Mesa

É um objeto comum e pode ser encontrado em casas, escolas, etc. Tem-se na mesa abaixo um objeto bidimensional, onde o contorno que delimita a superfície da mesa possui o formato de uma elipse, como se vê na figura 3.2 abaixo:

Figura 3.2: **Mesa**

Fonte: Disponível em: $< http://www.paris7.com.br/mesa-jantar-saarinen >$. Acesso em 14.08.13

Copo com "água"inclinado

A figura mostra uma situação diária na vida das pessoas, pois quando alguém toma qualquer tipo de líquido em um copo, o formato de uma elipse é ilustrado. Ao inclinar o copo, a superfície do liquido representa uma região bidimensional, onde seu contorno apresenta a forma de uma elipse.

Expressando a situação matematicamente, tem-se que a intersecção de um cilindro circular com um plano não paralelo à base deste cilindro, gera uma região. O conjunto de pontos que delimita esta região é uma curva, a qual possui o formato de uma elipse.

Figura 3.3: **Copo**

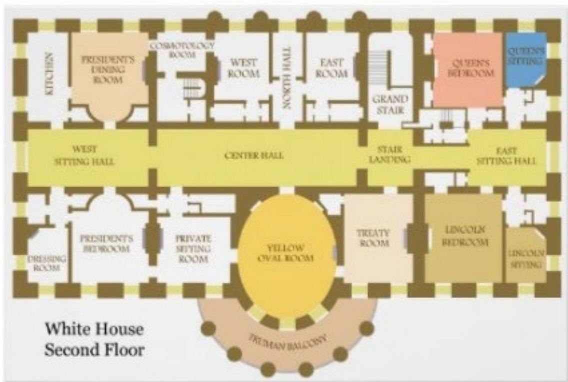
Fonte: Disponível em: $< http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfiUQAK/conicas-elipse >$. Acesso em 14.08.13

3.1.2 Em locais importantes

Salão Oval da “Casa Branca”

Um dos locais mais falados do mundo, na atualidade, é a Casa Branca: centro do poder da maior potência mundial - Os Estados Unidos da América. É nesse local que as decisões mais importantes da humanidade têm sido tomadas pelos chefes de estado das nações mais influentes. O Salão Oval (que é o compartimento principal), como o próprio nome indica, tem no seu formato uma região oval onde o contorno tem a forma de uma elipse; como representado na planta baixa da Casa Branca, ilustrada na figura abaixo.

Figura 3.4: Planta baixa da Casa Branca



Fonte: Disponível em: < *http://www.zazzle.com.br/diagrama* >. Acesso em 14.08.13

O objetivo deste formato é para que se possa usufruir da propriedade refletora da elipse, a qual afirma que a região contornada pela elipse contém dois pontos (focos), cujos raios que emanam de um deles, ricocheteiam de todos os pontos da parede para o outro. Dessa forma, duas pessoas podem ficar nos focos e suas vozes se projetarem em todas as direções, mas o teto elíptico convergirá todos os seus raios na direção do foco oposto. Portanto, é possível as pessoas cochicharem e ainda assim, comunicarem-se. Inclusive, muitos reis na Antiguidade faziam suas salas de reuniões com o formato elíptico, a fim de usarem tal recurso.

Telhado do Planetário TychoBrahe, em Copenhagem

O Planetário TychoBrahe é o centro mais avançado da Dinamarca para difusão da Astronomia. Além disso, é considerado um dos lugares mais românticos de Copenhagem, pela possibilidade de se desfrutar da visão de um belo céu estrelado. Este planetário recebeu esse nome em homenagem à TychoBrahe, um dos personagens mais fascinantes na história da Astronomia. Ele nasceu em 1546, em uma família nobre (dinamarquesa). Em 1572, Tycho observou uma estrela brilhante na constelação de Cassiopeia, a qual ficou conhecida como a "nova de Tycho". Daí ele decidiu que a Astronomia tinha de ser a sua carreira. Quando envolvido com a Astronomia, entre 1576 e 1598, ele produziu as maiores tabelas astronômicas que haviam sido realizadas até a época. No entanto, não conseguiu verificar qualquer paralaxe estelar, ou qualquer outro movimento anual que indicasse que a Terra se deslocasse ao redor do Sol. Tycho terminou a sua carreira como matemático imperial ao serviço do imperador Rudolfo II. Viria a falecer em 1601, mas não sem antes fornecer a Kepler todos os dados das suas observações, pedindo-lhe que publicasse o seu último trabalho, as "Tabelas Rudolfinas", dedicadas ao imperador. Nesse livro, foram compilados os dados observacionais de Tycho, embora a visão teórica patente no livro seja a de Kepler, que era um heliocentrista.

O telhado do PlanetárioTychoBrahe é uma superfície de $100m^2$ de área. E esta é limitada por um conjunto de pontos que possui o formato de uma elipse. Veja-se abaixo: .

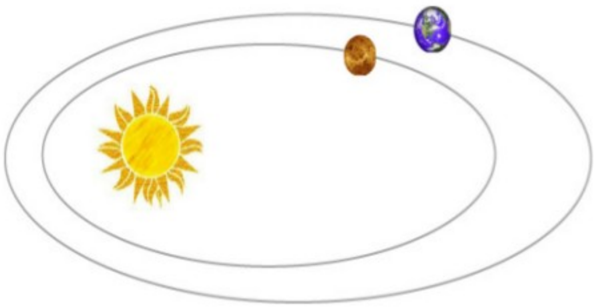
Figura 3.5: Planetário TychoBrahe

Fonte: Disponível em:< $http://copenhagen.cityseekr.com/pt/venue/57657-tycho-brahe-planetariet$ >. Acesso em 14.08.13

3.1.3 Na natureza

Nossos antepassados levaram mais de 2.000 anos para se convencerem de que a Terra gira em torno do Sol, e que a órbita descrita por ela não é circular e sim, elíptica. Quem "plantou"essa ideia foi o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Ele descobriu, em 1605, que a órbita de Marte era elíptica; e em 1609, publicou em seu livro "Astronomia Nova", duas leis básicas sobre questões que tinham mobilizado os cientistas durante séculos. A primeira trata da forma das órbitas dos planetas. Estas são elipses nas quais o Sol ocupa um dos focos. Toda essa teoria foi desenvolvida tendo por base toda a geometria grega, e em especial, a elaborada por Apolônio, nos estudos sobre as cônicas.

Figura 3.6: Órbita dos planetas



Fonte: Disponível em:< *http : //revistaescola.abril.com.br/ensino − medio − shtml* >. Acesso em 14.08.13

Nesse contexto de órbita dos planetas, podem ser abordados temas que fazem parte do âmbito da Geografia e da Física.

Na Geografia, pode-se apresentar uma discussão sobre o movimento de translação da Terra. Este movimento é aquele que a Terra realiza ao redor do Sol junto com os outros planetas. Em seu movimento de translação, ela percorre um caminho – ou órbita – que, como já foi dito, possui um formato de uma elipse.

A velocidade média da Terra, ao descrever esta órbita, é de 107.000 km por hora, e o tempo necessário para completar uma volta é de 365 dias, 5 horas e cerca de 50 minutos. Este tempo que a Terra leva para dar uma volta completa em torno do Sol é chamado de "ano". O ano civil, adotado por convenção, tem 365 dias. Como o ano sideral (ou o tempo real do movimento de translação) é de 365 dias e 6 horas, a cada quatro anos temos um ano de 366 dias, o qual é chamado de "ano bissexto".

Tratando-se da Física, pode ser abordado o conceito de distância acoplado com o conceito de velocidade. Em relação à distância, tem-se que a primeira tentativa do cálculo da distância entre a Terra e o Sol aconteceu 200 anos antes de Cristo, quando Aristarque estimou a distância entre 1.7 milhões de Km e 2.7 milhões de Km. Foi uma estimativa muito boa, considerando a capacidade técnica presente naquela época. Todavia, foi Nicolau Copérnico que demonstrou que a Terra gira em torno do Sol, criando a teoria do Heliocentrismo no século XVI. E Kepler descobriu que a Terra tinha uma trajetória elíptica em torno do Sol calculando a distância dos planetas ao Sol. Porém, foi somente no século XX que se chegou a números próximos da real distância entre a Terra e o Sol: aproximadamente entre 147,1 milhões de quilômetros e 152,1 milhões de quilômetros. Para percorrer essa distância um avião supersônico demoraria 122.549 horas, aproximadamente.

Sabendo que a distância entre eles sofre variação, tem-se que a força gravitacional é maior quando a Terra está mais próxima do Sol, pois pela Lei da Gravitação Universal de Newton, sabe-se que dois corpos atraem-se com força proporcional às suas massas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade. Daí, pelas leis de Newton, tem-se que a aceleração é diretamente proporcional à força, o que implica em uma aceleração maior da Terra quando for aplicada uma força maior. Logo, a Terra terá uma velocidade maior ao sofrer uma aceleração maior, porquanto baseado na teoria do movimento uniformemente variado, sabe-se que a velocidade e a aceleração são diretamente proporcionais. Portanto, a velocidade da Terra será maior quando ela estiver mais próxima do Sol. Por outro lado, a velocidade orbital média da Terra é de 29,8 km/s (ou 107.000 km/h).

3.2 Obtenção da elipse

Usando alguns materiais acessíveis para todos, pode-se construir – de modo preciso – a forma de uma elipse, levando em conta apenas certos procedimentos geométricos. Logo, para intuir de forma lúdica e eficaz a ideia geométrica e visual da elipse, serão desenvolvidas duas maneiras de desenhá-las, como se vê a seguir:

3.2.1 1ª Maneira

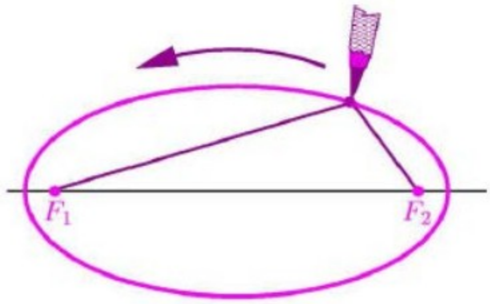
Os materiais necessários para desenvolver este primeiro procedimento serão: uma folha de papel branca; um lápis; um pedaço de barbante; uma tábua plana ou um papelão, e percevejos (preguinho de cabeça chata, para fixar papel).

Para desenhar a elipse, fixe com percevejos a folha de papel na tábua plana (ou no papelão). Em seguida, fixe dois percevejos em dois pontos quaisquer (F_1 e F_2) no papel, como mostra a figura 3.7 abaixo. Logo após, coloque um pedaço de barbante em torno destes, de modo que seu comprimento seja maior do que a distância entre os percevejos fixados em F_1 e F_2. Agora coloque a ponta do lápis em algum ponto do barbante. Por fim, desenhe uma figura, com o lápis, deixando sempre o barbante bem esticado e percorrendo um giro de 360 graus. A figura resultante desse processo é a elipse.

Observa-se que a soma das distâncias do lápis para os pontos F_1 e F_2 permanece constante, pois esta soma é exatamente o comprimento do barbante. Ainda é possível traçar diferentes elipses, mudando o comprimento do barbante ou, a distância entre os "pregos"fixados em F_1 e F_2. Mais tarde, estes pontos serão definidos como os focos da elipse.

Esta maneira de se desenhar uma elipse mostra porque os pilotos navais, saindo de porta-

Figura 3.7: Desenho da elipse



Fonte: Disponível em: < *http : //www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga1V1aula18.pdf* >. Acesso em 16.08.13

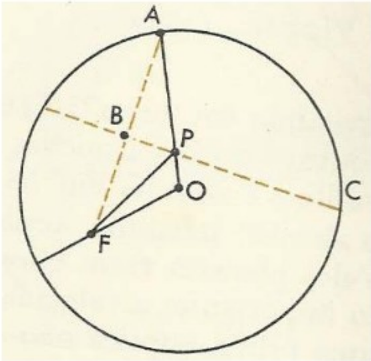
aviões, cobrem um território de forma elíptica, desde que não existam ventos. O pedaço do barbante representa o raio de atuação dos porta-aviões, o qual é limitado por uma elipse. O ponto de decolagem e o de pouso são os pontos F_1 e F_2 do raio de atuação.

3.2.2 2ª Maneira

Para desenvolver esta segunda maneira de desenhar uma elipse, serão necessários os seguintes materiais: uma folha de papel branca; um compasso; uma régua, e um lápis. De posse destes materiais, tome o compasso e desenhe sobre o papel uma circunferência de centro em O. Depois fixe um ponto F interno a esta circunferência. Em seguida, dobre o papel de forma que o ponto F caia sobre a circunferência (nesse processo, os pontos F e O são equivalentes aos pontos F_1 e F_2 descritos na 1a maneira de desenhar uma elipse). Logo após ter feito a dobra, repita essa ação de 25 a 35 vezes, fazendo com que o ponto F percorra uma boa parte da circunferência. Cada dobra realizada é uma reta tangente à elipse no ponto P.

A figura 3.8 abaixo mostra a dobra BC formada quando F é colocado sobre o ponto A da circunferência.

Figura 3.8: **Construção geométrica da elipse**

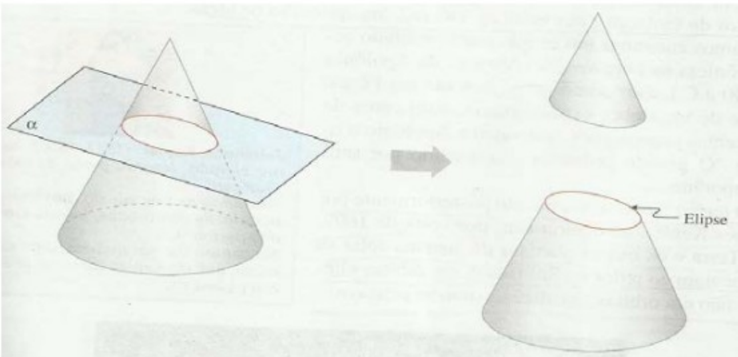


Fonte: Jonhson, 1972.

3.3 Conceito analítico da elipse

Pode-se obter uma elipse de maneira simples, utilizando conceitos da Geometria Espacial. Seccione um cone circular reto com um plano α não paralelo à base. A intersecção deste plano com a superfície do cone resulta em uma elipse, como mostra a figura 3.9 abaixo:

Figura 3.9: **Secção de um cone**



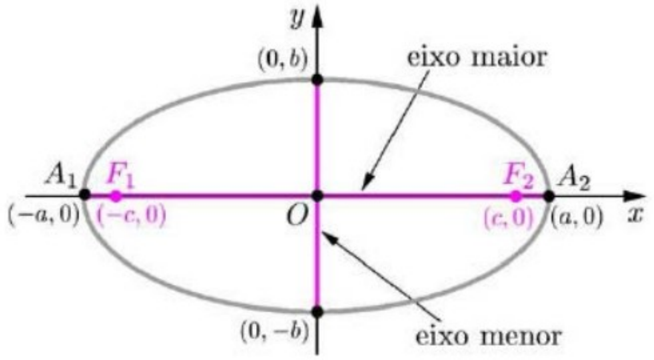
Fonte: Bucchi, 1998.

Definição 3.3.1. *Dado um plano α e dois pontos F_1 e F_2 distintos, com F_1 e F_2 pontos fixos do plano. Elipse é o conjunto dos pontos P, do plano α, tais que a soma das distâncias de PF_1 e PF_2 é constante e maior que a distância F_1F_2. Ou seja, $d_{PF_1} + d_{PF_2}$ é constante.*

3.3.1 Elementos da elipse

Toma-se um sistema de eixos ortogonais, com um eixo horizontal e outro vertical por conveniência, no plano α, de modo que a origem do sistema coincida com o centro de uma elipse, como na figura abaixo. Daí, tem-se A_1 e A_2 pontos de intersecção da elipse com o eixo OX, com coordenadas $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$. Da mesma forma se tem B_1 e B_2 pontos de intersecção da elipse com o eixo OY, de coordenadas $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$. Por outro lado, tomam-se os pontos F_1 e F_2, da definição, sobre o eixo OX, com coordenadas $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, de modo que $c < a$.

Figura 3.10: Elipse e seus elementos



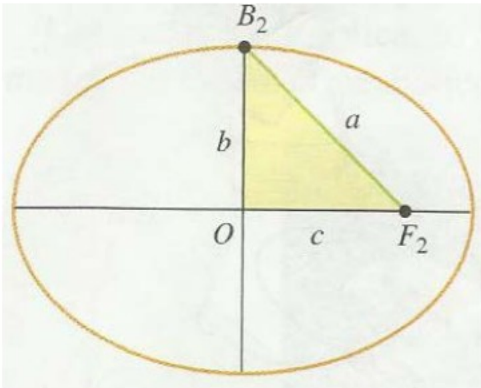
Fonte: Disponível em: < *http : //www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga1V1aula18.pdf* >. Acesso em 20.08.13

- O ponto O é chamado de centro da elipse;
- Os pontos F_1 e F_2 chamam-se focos da elipse;
- Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são chamados de vértices de elipse;
- O segmento A_1A_2 chama-se eixo maior da elipse e mede 2a, pela definição de distância entre dois pontos sobre um eixo apresentada nos preliminares;
- O segmento B_1B_2 chama-se eixo menor da elipse e mede 2b;
- A distância focal é a distância entre os focos F_1 e F_2, ou seja, 2c;
- A excentricidade é a razão e = (c/a) em que $0 < e < 1$. Quando a excentricidade se aproxima de zero, a elipse tende a uma circunferência. Ou seja, quanto menor a excentricidade, mais redonda será a elipse.

3.3.2 Relação fundamental

Tomando o triângulo B_2OF_2 e aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se a relação fundamental da elipse: $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 3.11: **Elipse e seus elementos**



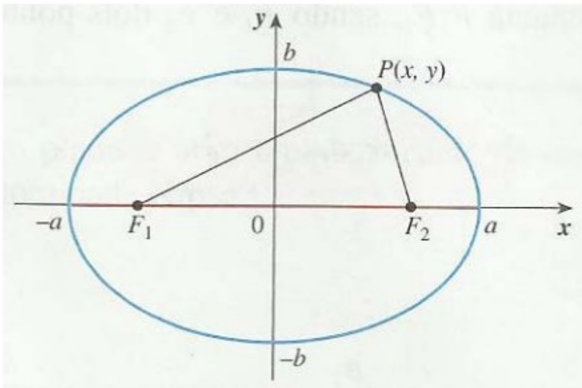
Fonte: Bucchi, 1998.

3.3.3 Equação reduzida de uma elipse

Existem quatro situações por meio das quais se representam uma elipse com o seu eixo maior paralelo a um dos eixos ortogonais.

1º) Caso: Elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo OX. Ver figura 3.12.

Figura 3.12: **Elipse no sistema de eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

.

Tomando $F_1(-c, 0)eF_2(c, 0)$, pela definição de elipse, tem-se que $d_{PF_1} + d_{PF_2} = 2a$. Daí, pela distância entre dois pontos, segue que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Subtraindo $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ nos dois membros da igualdade, tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Daí, tem-se que:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$(\sqrt{(x-c)^2)+y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2.$$

Daí, tem-se:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os trinômios desta última igualdade, obtém-se:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Fazendo a arrumação dos termos de maneira conveniente, obtém-se:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \text{ daí tem-se, } 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Dividindo ambos os membros da última igualdade por 4, obtém-se:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = (a^2-cx)^2.$$

Efetuando as potências, obtém-se:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2a^2cv + c^2x^2, \text{ o que implica em,} a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2.$$

Fazendo os agrupamentos, obtém-se:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Usando a relação fundamental $a^2 - c^2 = b^2$, obtém-se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2, obtém-se:

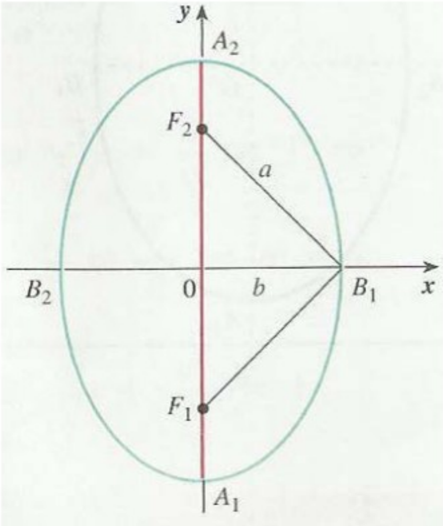
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}, \text{ o que implica em } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, a equação reduzida da Elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2º) Caso: Elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo OY. Ver figura 3.13.

Figura 3.13: **Elipse no sistema de eixos ortogonais**

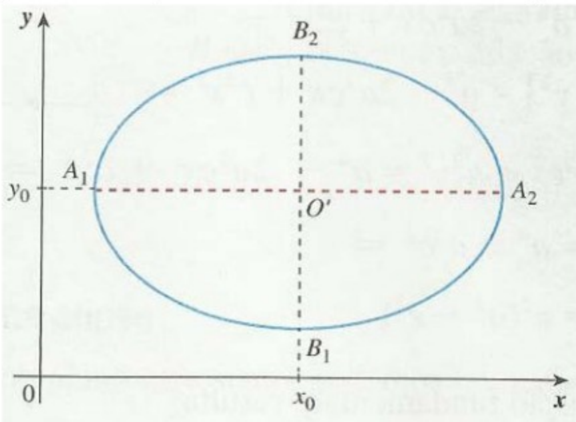


Fonte: Bucchi, 1998.

A equação reduzida é: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. A demonstração, nesse caso, é análoga ao caso anterior.

3º) Caso: Elipse centrada em um ponto $O'(x_0, y_0)$ e com eixo maior paralelo ao eixo OX. Ver figura 3.14. .

Figura 3.14: **Elipse no sistema de eixos ortogonais**

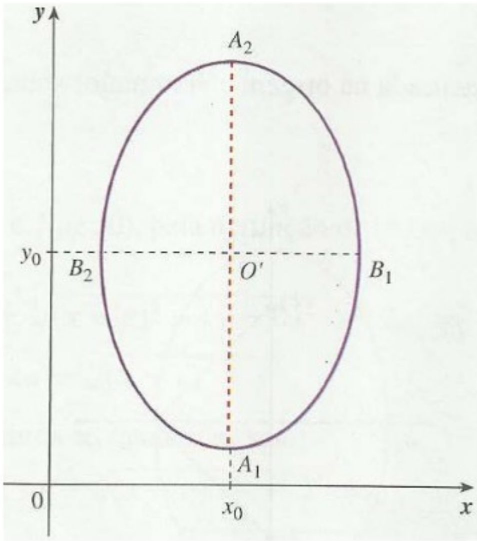


Fonte: Bucchi, 1998.

A equação reduzida é $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)2}{b^2} = 1$. A demonstração, nesse caso, é análoga ao 1º caso.

4º) Caso: Elipse centrada em um ponto $O'(x_0, y_0)$ e com eixo maior paralelo ao eixo OY. Ver figura 3.15.

Figura 3.15: **Elipse no sistema de eixos ortogonais**

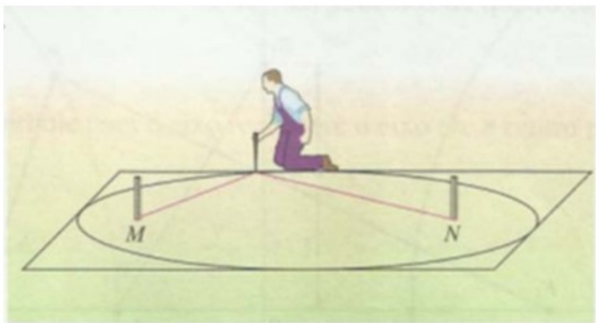


Fonte: Bucchi, 1998.

A equação reduzida é: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)2}{b^2} = 1$. A demonstração, nesse caso, é análoga ao 1º caso.

Aplicação: Para delimitar um gramado, um jardineiro traçou uma elipse inscrita num terreno retangular de 20 m por 16 m. Para isso, usou um fio esticado preso por suas extremidades M e N, como na figura 3.16.

Figura 3.16: **Elipse inscrita num retângulo**



Fonte :Disponível em: < *http : //www.asperhs.com.br* >. Acesso 19.08.13

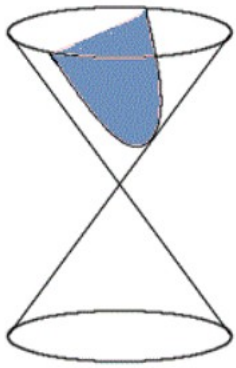
Calcule a distância entre M e N.

Resolução: Como a elipse está inscrita no retângulo, tem-se que o comprimento do retângulo é o eixo maior da elipse, logo, 2a = 20, daí, a =10.Por outro lado, a largura do retângulo é o eixo menor da elipse, logo 2b = 16 e b = 8. Daí, usando a relação fundamental segue que $c^2 = 10^2 - 8^2$, daí, $c = 6$. Pela figura 3.16, tem-se que os pontos M e N são os focos da elipse, logo a distância entre M e N é a distância focal. Daí, $d_{MN} = d_{focal} = 2c = 2.6 = 12$.

4 PARÁBOLA

Geometricamente obtém-se uma parábola ao se considerar um cone circular reto, seccionado por um plano paralelo a uma geratriz do cone, como mostra a figura 4.1 abaixo:

Figura 4.1: Parábola



Fonte: Disponível em: $< http://www.andremachado.org/artigos/905/secoes-conicas.html >$. Acesso em 10.08.13

4.1 Parábola no cotidiano

Ter uma noção de parábola é algo imprescindível quando se estudam problemas de lançamento obliquo no âmbito da Física. Além disso, as características que essa curva possui, proporcionaram alguns avanços para o aperfeiçoamento de certos objetos; como por exemplo, a construção de antena de tv com o formato parabólico. Haja vista que, pode-se encontrar - no dia a dia - exemplos de parábolas em pelo menos 3 (três) situações:

4.1.1 Em objetos

Antenas parabólicas

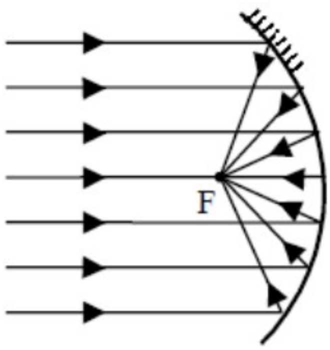
Com o avanço da tecnologia e o crescimento da procura por entretenimento ocorrendo simultaneamente, fora criada uma antena que pudesse receber, de forma eficaz, o sinal da imagem. E esta antena foi construída com um formato parabólico. Visto que a interseção de um plano qualquer com a antena, de modo que o plano passe pelo centro da antena, é uma parábola. Ainda se pode dizer que são várias parábolas com um ponto em comum. E este ponto, na antena, é justamente a base do receptor, como mostra a figura 4.2.

Figura 4.2: **Antena parabólica**

Fonte: Disponível em: < *http : //www.reompa.com.br/produto/antena − parabolica* >. 10.08.13

Essas antenas foram projetadas com a forma acima para aproveitar a propriedade refletora da parábola, a qual garante que todo raio que sai do foco reflete na parábola e sai paralelamente ao eixo. Daí, tem-se que na antena é utilizado esse princípio ao contrário, isto é, os sinais paralelos dos satélites atingem o conjunto de parábolas e em seguida convergem para o mesmo ponto, conforme a figura 4.3. Ponto este, chamado de foco.

Figura 4.3: **Propriedade refletora da parábola**



Fonte: Disponível em: < *http : //www.cp2centro.net/disciplinas/desenho/*2012/3*serie/.pdf* >. Acesso em 20.08.13

Farol de carro

O setor automobilístico vem passando por muitas transformações por causa do desenvolvimento tecnológico das últimas décadas. Entretanto, alguns princípios antigos ainda são utilizados, como por exemplo, os faróis de carro que continuam com formatos parabólicos. Observa-se isso na figura 4.4 que se segue:

Figura 4.4: **farol de carro**

Fonte: Disponível em: $< http://www.carroantigo.com >$. Acesso em 16.08.13

Pelo mesmo motivo das antenas é que os faróis possuem tal formato. Estes, em seu funcionamento, fazem uso da propriedade refletora da parábola, a qual afirma – como já foi exposto – o seguinte: todo raio que sai do foco reflete na parábola e sai paralelamente ao eixo. Esta propriedade é usada nos faróis do modo a seguir: a lâmpada está situada no foco de um espelho parabólico; embora a lâmpada projete luz em todas as direções, o espelho parabólico redireciona os raios para que saiam paralelos, o que proporciona uma melhor qualidade na iluminação por intermédio dos faróis.

4.1.2 Em construções

Ponte

A Ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como Ponte JK ou 3ª Ponte, está situada em Brasília, ligando o Lago Sul, Paranoá e São Sebastião à parte central do Plano Piloto. O nome "3ª Ponte"se refere ao fato dela ser a terceira ponte a ligar o Lago Sul ao Plano Piloto. Inaugurada em 15 de dezembro de 2002, a estrutura da ponte tem 1.200 metros de comprimento, e 24 metros de largura que se dividem em duas pistas; cada uma com três faixas de rolamento e duas passarelas nas laterais, uma para ciclistas e outra para pedestres, com

1,5 metros de largura cada. Os três arcos construídos, que embelezam a ponte e ao mesmo tempo lhe dão sustentação, possuem o formato de uma parábola. Ver figura 4.5.

Figura 4.5: **Ponte Juscelino Kubitschek**

Fonte: Disponível em: $< http : //www.commons.wikimedia.org/wiki/File : BSB_Ponte_JK_Panorama >$. Acesso em 20.08.13

Vale salientar que no mundo existem várias pontes que em suas estruturas trazem algumas formas que representam o formato de uma parábola, ver figura 4.6.

Chafariz

Chafariz é uma construção de alvenaria provida de uma ou várias bicas por onde corre água potável. Na maioria dos chafarizes, a trajetória dos jatos de água possui o formato de parábolas.

Figura 4.6: **Chafariz**

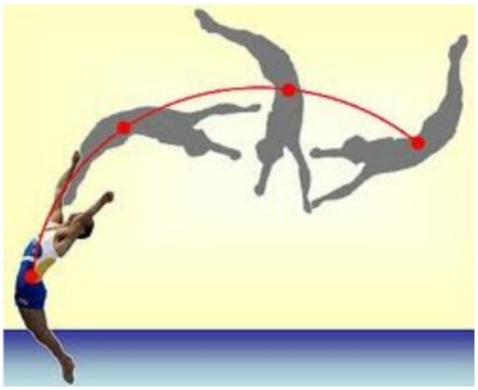
Fonte: Disponível em: $< http : // < http : //br.freepik.com/fotos-gratis/chafariz-no-meio-danoite_649071 >$. Acesso em 10.08.13

4.1.3 Em lançamentos de corpos

Salto de um atleta de ginástica

A trajetória do quadril de um atleta da ginástica artística, ao dar um salto, possui o formato de uma parábola, conforme figura 4.7.

Figura 4.7: Salto de um atleta

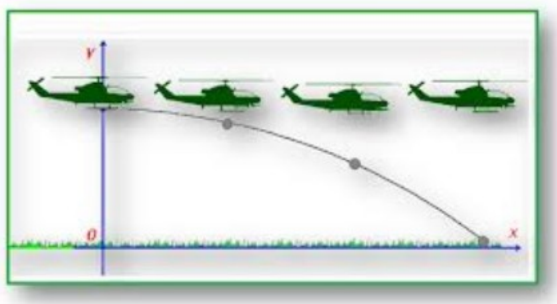


Fonte: Disponível em: < *http : //www.fisicamoderna.blog.uol.com.br/* >. Acesso em 10.08.13

Lançamento de um míssil

Um helicóptero, ao lançar um míssil em direção a alvo fixo, proporciona a visualização de uma parte da parábola na trajetória descrita pelo projétil, conforme a figura 4.8.

Figura 4.8: Lançamento de um míssil



Fonte: Disponível em:< *http : //www.grupoescolar.com/pesquisa/movimento − vertical* >. Acesso em 10.08.13

A partir essa situação descrita acima, pode-se abordar o conceito de lançamento obliquo e, com isso, tratar da aceleração da gravidade, os quais são temas de extrema relevância no contexto da Física.

4.2 Obtenção da parábola

A construção de uma parábola pode ser feita de várias maneiras, utilizando os mais diversos recursos. Segue-se, no entanto, duas maneiras simples para desenhar uma parábola, utilizando apenas recursos fáceis de serem encontrados e manipulados.

4.2.1 1ª Maneira

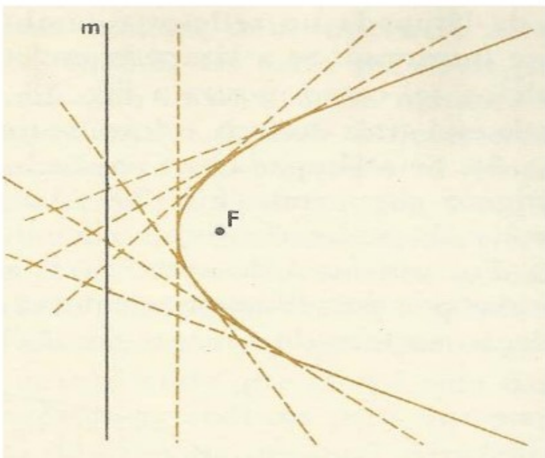
Este primeiro processo é bem simples, e, para desenvolvê-lo será necessário apenas uma folha de papel encerado e um lápis, porquanto a parábola será formada dobrando o papel encerado.

Ao dobrar o papel, suponha que o vinco formará uma linha reta, e que o papel pode ser dobrado de maneira que um ponto dado no papel, caia sobre certa reta na mesma folha.

Para formar a parábola, desenhe uma linha reta m e em seguida escolha um ponto F que não esteja sobre a linha reta m. Dobre o papel de maneira que o ponto F caia sobre a linha reta m. Repita essa operação de 15 a 25 vezes, movendo F ao longo de m, sempre no mesmo sentido.

Todas essas dobras são tangentes a uma parábola conforme a figura 4.9 abaixo. E observa-se ainda que, todos estes pontos de tangência são equidistantes do ponto F e dareta m.

Figura 4.9: Desenhando a parábola



Fonte: Johnson, 1972.

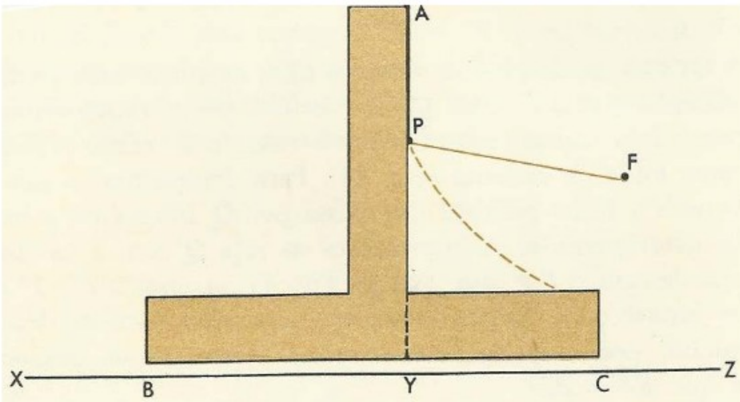
4.2.2 2ª Maneira

Neste procedimento será utilizado um pedaço de papelão ou de madeira compensada, um pedaço de barbante, uma ventosa, um giz, um quadro e a canaleta do quadro (se ele a possuir).

A parábola pode ser desenhada com o seguinte dispositivo: tome um T (ABC) feito de papelão (ou de madeira compensada), e fixe uma extremidade do barbante no ponto A; conforme a figura 4.10 que será mostrada abaixo.

Para conseguir desenhar a parábola, este T é colocado para se mover ao longo da reta XYZ, a qual poderá ser a canaleta do quadro. O comprimento do barbante deverá ser do tamanho de AY, e a extremidade livre do barbante deverá ser fixada com a ventosa. Agora, com um pedaço de giz em P, consoante a figura, mantenha o barbante esticado de forma que AP fique sobre AY. E por fim, mova o T para a esquerda ao longo de XYZ. A curva desenhada no quadro é uma parábola.

Figura 4.10: **Desenhando a parábola**



Fonte: Johnson, 1972.

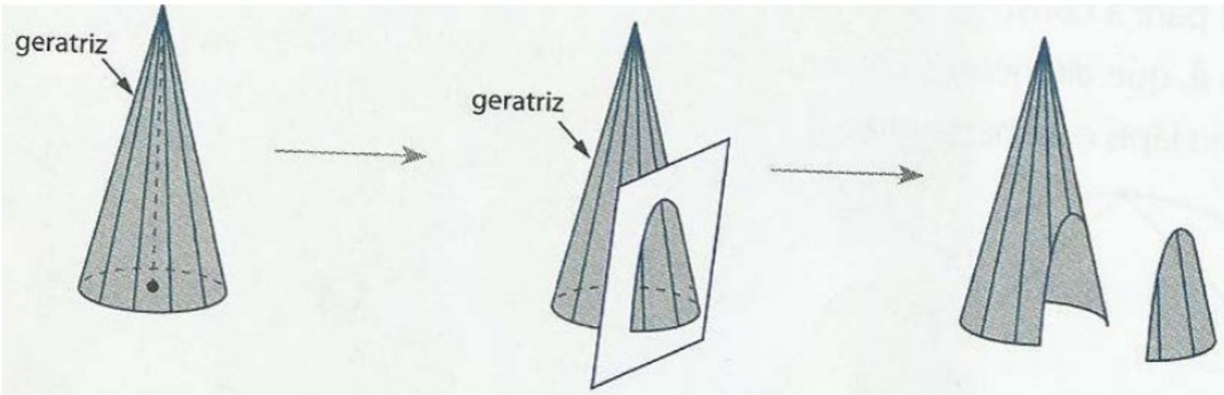
.

4.3 Conceito analítico da parábola

Obtém-se uma parábola através da intersecção da superfície de um cone circular reto com um plano paralelo a uma das geratrizes desse cone, como mostra a figura 4.11 abaixo:

Definição 4.3.1. *Parábola é o conjunto de pontos de um plano α que são equidistantes a uma reta d dada e a um ponto fixo F deste plano. Ou seja, $d_{P,F} = d_{P,d}$.*

Figura 4.11: **Secção de um cone**

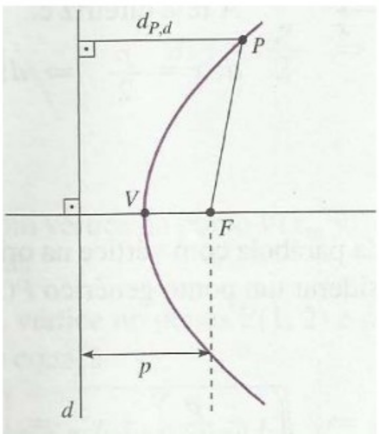


Fonte: Bucchi, 1998.

4.3.1 Elementos da parábola

Toma-se um sistema de eixos ortogonais, com um eixo horizontal e outro vertical por conveniência, num plano α qualquer. E ainda um ponto F de coordenada (c, 0) e uma reta d cuja equação é x = -c. Ver figura 4.12.

Figura 4.12: **Parábola representada no sistema de eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

- O ponto F é chamado de foco da parábola;

- O ponto V é chamado de vértice da parábola;

- A reta d é chamada de reta diretriz da parábola;

- A distância p, do foco à origem, é chamada de parâmetro da parábola;

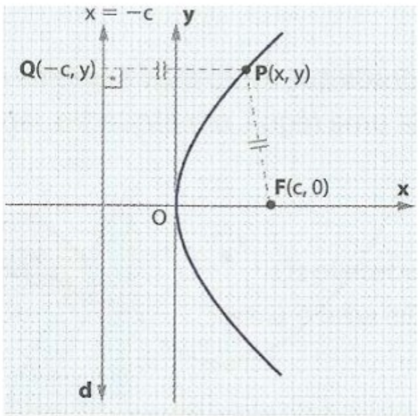
- O segmento VF é chamado de eixo de simetria da parábola e $d_{VF} = \frac{p}{2}$.

4.3.2 Equação reduzida de uma parábola

1º) Caso: Parábola com vértice na origem e foco no eixo OX.

Seja a diretriz x = -c e F(c, 0). A partir do foco F e da reta diretriz d, tem-se por definição, que a parábola é formada por todos os pontos p(x, y) do plano tais que $d_{P,F} = d_{P,d}$. Ver figura 4.13.

Figura 4.13: **Parábola representada no sistema de eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

Daí, segue-se: $d_{P,F} = d_{P,d}$, ou seja, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, obtém-se:

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (|x + c|)^2, \text{ o que implica, } (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2.$$

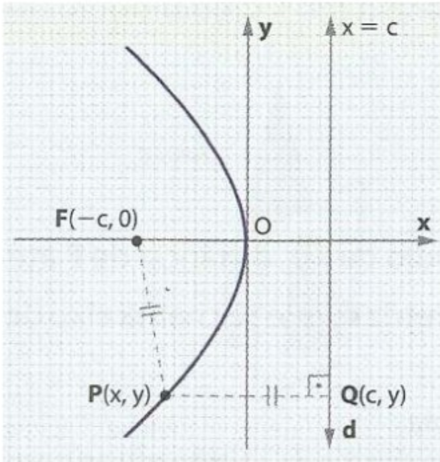
Desenvolvendo as potências, obtém-se:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2, \text{ daí, } x^2 + c^2 + y^2 - x^2 - c^2 = +2cx + 2cx.$$

Daí, chega-se que: $y^2 = 4cx$ é a equação reduzida da parábola.

Caso a reta diretriz seja x = c e F(-c, 0) o foco, então a equação da parábola será: $y^2 = -4cx$. A demonstração é análoga a anterior.

Figura 4.14: **Parábola representada no sistema de eixos ortogonais**

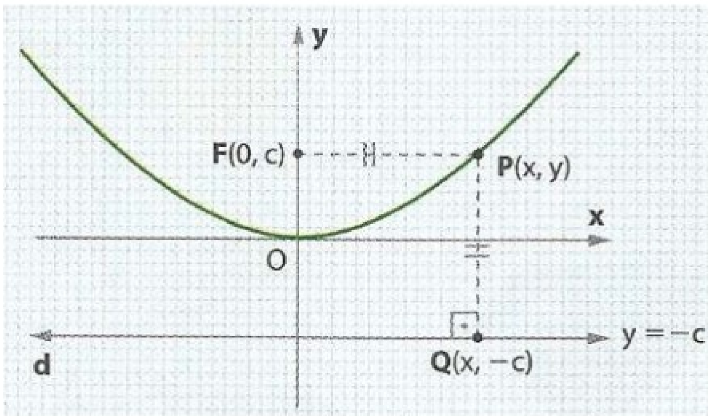


Fonte: Bucchi, 1998.

2º) Caso: Parábola com vértice na origem e foco no eixo OY.

Seja a diretriz y = -c e F(0, c). A partir do foco F e da reta diretriz d, tem-se por definição, que a parábola é formada por todos os pontos p(x, y) do plano tais que $d_{P,F} = d_{P,d}$. Ver figura 4.15.

Figura 4.15: **Parábola representada no sistema de eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

Daí, segue-se: $d_{P,F} = d_{P,d}$, ou seja, $\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = |y+c|$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, obtém-se:

$$(\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2})^2 = (|y+c|)^2, \text{ daí, } (y-c)^2+x^2 = (y+c)^2.$$

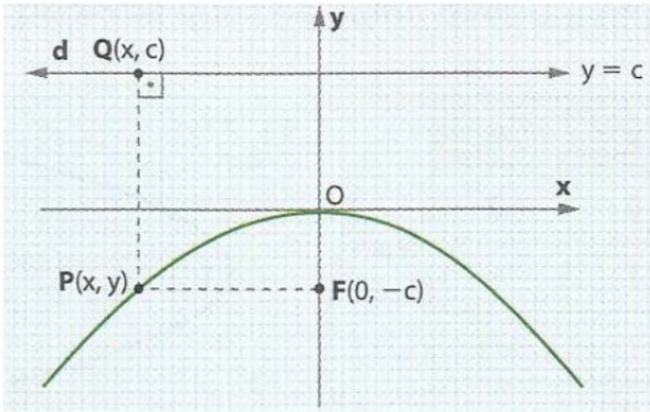
Desenvolvendo as potências, obtém-se:

$$y^2 - 2cy + c^2 + x^2 = y^2 + 2cy + c^2, \text{ daí, } y^2 + c^2 + x^2 - y^2 - c^2 = +2cy + 2cy.$$

Daí, segue-se: $x^2 = 4cy$ é a equação reduzida da parábola.

Caso a reta diretriz seja y = c e F(0,-c) o foco, então a equação da parábola será $x^2 = -4cy$. A demonstração é análoga a anterior. .

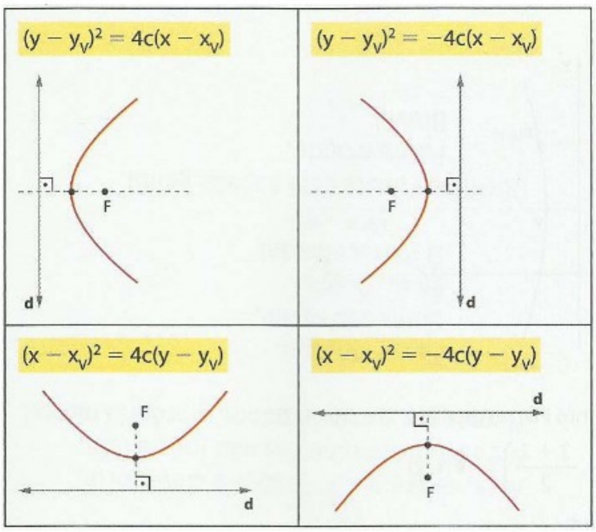
Figura 4.16: **Parábola representada no sistema de eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

Tem-se ainda parábolas com vértice em um ponto qualquer $P(x_v, y_v)$ e reta diretriz paralela a um dos eixos ortogonais. Os 4 (quatro) casos possíveis são:

Figura 4.17: **Quadro resumo**



Fonte: Bucchi, 1998.

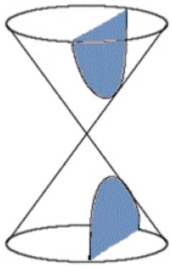
Aplicação: Determine a equação da parábola P com vértice V na origem, cujo foco é o ponto F = (3, 0).

Resolução: Tem-se P = d(V; F) = 3 e reta focal = eixo OX. Como o foco F está à direita do vértice, tem-se que a diretriz é a reta d : x = - 3 e que a equação da parábola é P : $y^2 = 12x$.

5 HIPÉRBOLE

De maneira intuitiva, resulta-se em uma hipérbole a intersecção de um plano, paralelo ao eixo do cone, com a superfície de dois cones justapostos pelo vértice de altura infinita, como mostra a figura 5.1 abaixo:

Figura 5.1: Secção do cone



Fonte: Disponível em: $< http://www.andremachado.org/artigos/905/secoes-conicas.html >$. Acesso em 20.08.13

5.1 Hipérbole no cotidiano

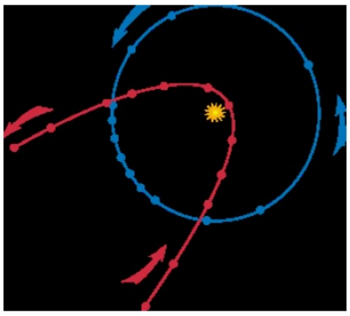
O formato da hipérbole é mais difícil de encontrar. Contudo, tem-se este formato na propagação do som provocado pelo estrondo sônico de um avião. Têm-se também as partículas subatômicas positivas que se repelem numa trajetória hiperbólica. E ainda, Uma sonda interplanetária se aproxima de um planeta praticamente em linha reta numa direção que causaria uma trajetória tangente a um círculo concêntrico. Todavia, destaca-se a formato da hipérbole em duas situações que se seguem.

5.1.1 Hipérbole na natureza

Os cometas entram no Sistema Solar em alta velocidade, voltejam ao redor do Sol e depois saem do Sistema Solar, voltando ao seu espaço, descrevendo assim, trajetórias em forma de hipérbole em torno do Sol.

Na figura 5.2 abaixo, o caminho em vermelho é a trajetória descrita pelos cometas.

Figura 5.2: **Trajetória da órbita do cometa**



Fonte: Disponível em: $< http://pt.wikipedia.org/wiki/Cometa >$. Acesso em 16.08.13

5.1.2 Em sistema de navegação

No sistema de navegação denominado LORAN (navegação de longo curso), encontra-se a forma da hipérbole. Este sistema baseia-se no uso de radar, da seguinte maneira: sendo duas estações de rádio colocadas em terra, uma estação (a estação mestra) manda um pulso para a outra (denominada escrava), que recebe-o imediatamente já que a distância entre as estações é pequena em comparação à velocidade das ondas de rádio. Logo após receber este pulso, a estação escrava emite seu próprio pulso.

O navegador de um navio, equipado com LORAN, recebe ambos os pulsos, e a diferença entre os tempos de chegada é indicada em uma tela. O receptor, automaticamente, calcula a diferença entre as distâncias percorridas pelos pulsos a 30.0000 km/s (velocidade da luz). Este cálculo permite localizar o navio em uma hipérbole, que é desenhada em um mapa (ver figura 5.3).

Figura 5.3: **Sistema de navegação**

Fonte: Johnson, 1972.

5.2 Obtenção da hipérbole

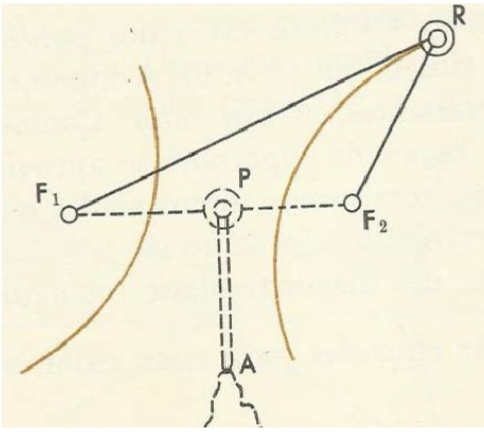
Para o desenho da hipérbole, pode-se usar dois modelos simples e eficazes, consoante os descritos abaixo:

1º Modelo

Neste primeiro modelo, a hipérbole é desenhada mediante um dispositivo, no qual um lápis é guiado por um barbante. Assim, os objetos necessários para execução do dispositivo são: uma prancheta de desenho possuindo dois orifícios, o pedaço de barbante, dois anéis e o lápis.

O desenho da hipérbole é obtido do seguinte modo: amarre um dos anéis (R) no meio do barbante, e passe uma extremidade do barbante pelo orifício F_1 e a outra pelo orifício F_2. Passe as duas extremidades do barbante pelo outro anel (P). Agora, coloque o lápis no anel R, e segure tensamente ambas as extremidades do barbante sob a prancheta, com a mão esquerda em A.

Figura 5.4: **Desenhando a hipérbole**



Fonte: Johnson, 1972.

Ao tempo que você move o lápis com a mão direita, sua mão esquerda deve se mover para cima e para baixo. Dessa forma, a mão esquerda permite que os comprimentos iguais do barbante passem através dos orifícios. Daí, a diferença, entre as distâncias do lápis aos orifícios, fica constante. À medida que o lápis se move, a hipérbole é traçada. E para desenhar o outro ramo da curva basta inverter os barbantes.

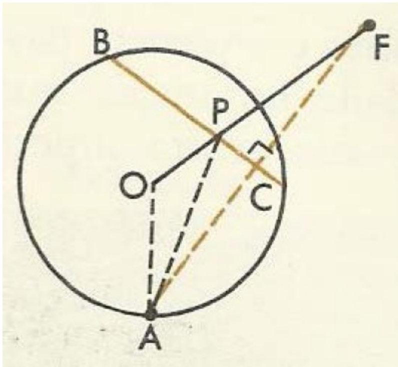
Pode-se ainda fazer uma adaptação dessa construção para o quadro negro com o auxílio de três ventosas de borracha e de anéis, através dos quais se passará o barbante.

Basta, apenas, fixar as duas ventosas em F_1 e F_2 e a terceira, a meia distância entre F_1 e F_2; e em vez de manter o barbante esticado com a mão, use um peso.

2º Modelo

Para desenvolver este segundo processo, serão necessários, apenas, um papel encerado e um lápis. A hipérbole é formada dobrando o papel encerado da seguinte forma: desenhe uma circunferência com centro O, fixe um ponto F fora do círculo, e dobre, de maneira que o ponto F caia sobre a circunferência; e repita essa operação várias vezes, fazendo o ponto F percorrer a circunferência. Cada dobra é uma tangente à hipérbole.

Figura 5.5: **Desenhando a hipérbole**



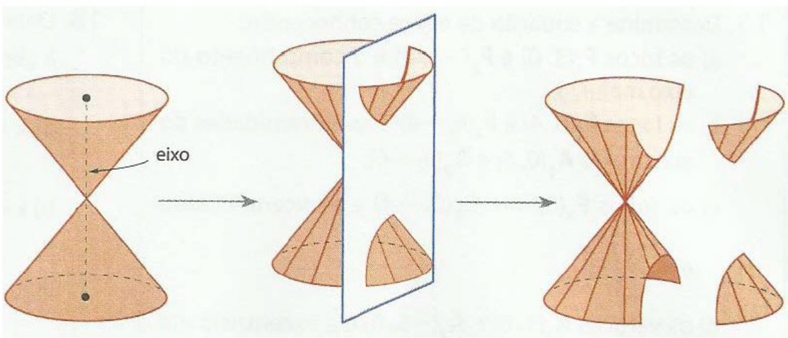
Fonte: Johnson, 1972.

Na figura acima F é dobrado sobre A. Como BC é a mediatriz de FA, FP = PA, então, FP - PO = PA - PO, que é uma constante, o raio do círculo.

5.3 Conceito analítico da hipérbole

De maneira intuitiva, resulta-se em uma hipérbole a intersecção de um plano com a superfície de dois cones justapostos pelo vértice de altura infinita, como mostra a figura 5.6 abaixo:

Figura 5.6: **Secção do cone**



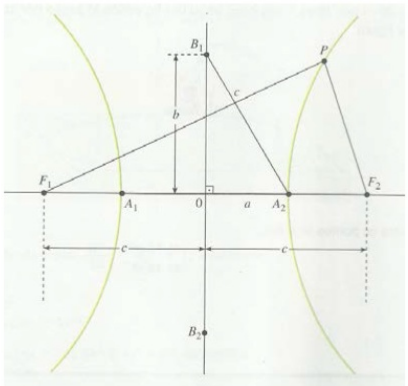
Fonte: Bucchi, 1998.

Definição 5.3.1. *Hipérbole é o conjunto dos pontos P do plano tais que a diferença, em valor absoluto, das distâncias PF_1 e PF_2 é constante e menor que a distância F_1F_2, sendo PF_1 e PF_2 dois pontos fixos do mesmo plano. Ou seja:* $|d_{PF_1} - d_{PF_1}| = 2a$.

5.3.1 Elementos da hipérbole

Toma-se um sistema de eixos ortogonais, com um eixo horizontal e outro vertical por conveniência, no plano α, de modo que a origem do sistema coincida com o centro de uma Hipérbole, como na figura abaixo. Daí, tem-se A_1 e A_2 pontos de intersecção da elipse com o eixo OX, com coordenadas $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$. Da mesma forma se tem B1 e B2 pontos sobre o eixo OY, de coordenadas $B_1(b, 0)$ e $B_2(-b, 0)$. Por outro lado, tomam-se os pontos F_1 e F_2, da definição, sobre o eixo OX, com coordenadas $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$,de modo que $c > a$.
- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole;

Figura 5.7: **Hipérbole e seus elementos**



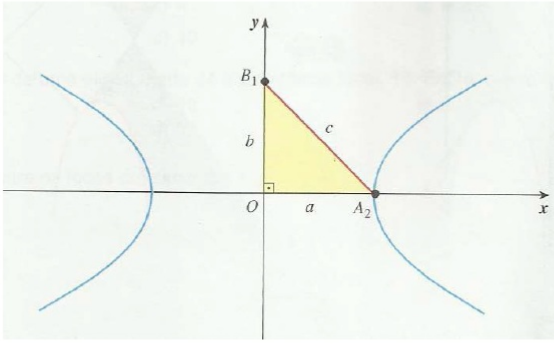
Fonte: Bucchi, 1998.

- O segmento A_1A_2 é chamado de eixo real da hipérbole e mede 2a;
- O segmento B_1B_2 é chamado de eixo imaginário da hipérbole e mede 2b;
- Distância focal é a distância entre os focos F_1 e F_2, ou seja, 2c;
- Excentricidade da hipérbole é a razão $e = (c/a)$, sendo $e > 1$, pois, $c > a$.

5.3.2 Relação fundamental

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OB_1A_2, tem-se : $c^2 = a^2 + b^2$.

Figura 5.8: **Hipérbole e seus elementos**



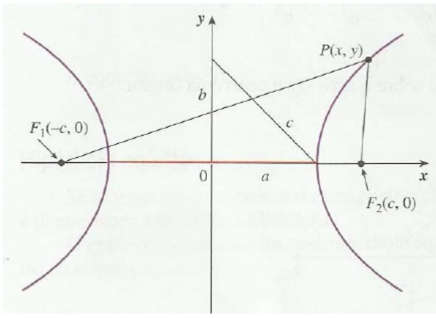
Fonte: Bucchi, 1998.

5.3.3 Equação reduzida de uma hipérbole

Existem quatro casos de hipérbole com eixo real paralelo a um dos eixos ortogonais.

1º) Caso: Hipérbole com eixo real sobre o eixo OX e centro na origem. Ver figura 5.9.

Figura 5.9: **Hipérbole sobre os eixos ortogonais**



Fonte: Bucchi, 1998.

Pela definição de hipérbole tem-se que os pontos p(x, y) tais que $|d_{PF_1} - d_{PF}| = 2a$, formam a hipérbole. Daí,

$$|d_{PF_1} - d_{PF}| = 2a, \text{ ou seja, } |\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a.$$

Usando a definição de módulo, tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = \pm 2a, \text{ daí, } \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} \pm 2a.$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade, obtém-se:

$$(x+c)^2 + (y)^2 = (x-c)^2 + (y)^2 + 4a \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}.$$

Efetuando as potências, obtém-se:

$$x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}.$$

Dai, segue-se:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}.$$

Dividindo por 4, ambos os membros da igualdade, obtém-se:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}.$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade, obtém-se:

$$(cx - a^2)^2 = (\pm a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2})^2.$$

Desenvolvendo as potências, obtém-se:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2).$$

Daí, tem-se:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Fazendo os agrupamentos, tem-se:

$$c^2x^2 - a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2, \text{ daí, } c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Essa última igualdade implica em:

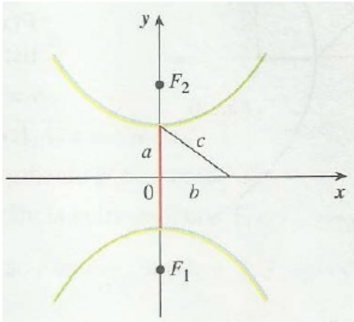
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Substituindo $c^2 - a^2$ por b^2 (relação fundamental) nos dois membros da igualdade, obtém-se que

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo por a^2b^2 ambos os membros da igualdade, obtém-se:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esta é a equação reduzida da hipérbole.

Figura 5.10: **Hipérbole sobre os eixos ortogonais**



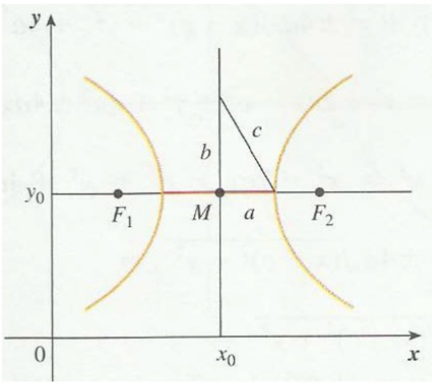
Fonte: Bucchi, 1998.

2º) Caso: Hipérbole com eixo real sobre o eixo OY e centro na origem. Ver figura 5.10.

A demonstração é análoga ao 1º caso e resulta na seguinte equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3º) Caso: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo OX e centro no ponto $M(x_0, y_0)$. Ver figura 5.11.

Figura 5.11: **Hipérbole sobre os eixos ortogonais**

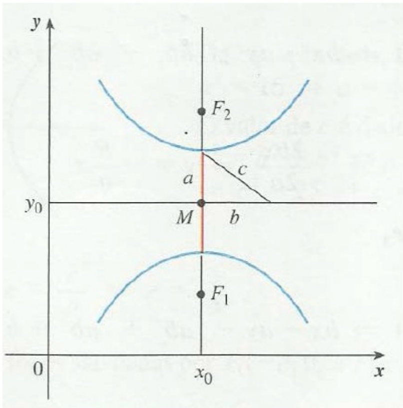


Fonte: Bucchi, 1998.

A demonstração é análoga ao 1º caso e resulta na seguinte equação: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$

4º) Caso: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo OY e centro no ponto $M(x_0, y_0)$. Ver figura 5.12.

Figura 5.12: **Hipérbole sobre os eixos ortogonais**



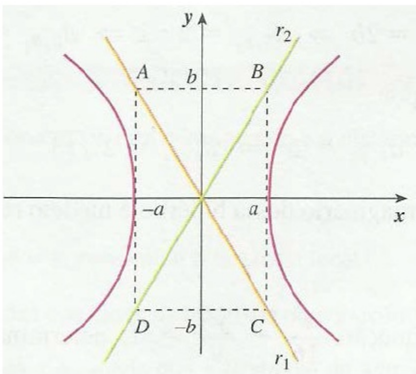
Fonte: Bucchi, 1998.

A demonstração é análoga ao 1º caso e resulta na seguinte equação: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$

5.3.4 Assíntotas de uma hipérbole

As assíntotas são as retas r_1 e r_2. Sendo que r_1 passa por A e C, enquanto que r_2 passa por B e D, conforme a figura 5.13 abaixo:

Figura 5.13: **As assíntotas da hipérbole**



Fonte: Bucchi, 1998.

A equação da assíntota r_1 é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & b & 1 \\ a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow bx + ay + ab - ab + bx + ay = 0 \rightarrow y = \frac{-b}{a}x$$

A equação da assíntota r_2 é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow bx - ay - ab + ab + bx - ay = 0 \rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Aplicação: Determine a excentricidade da hipérbole de equação $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$.

Resolução: Tem-se $25x^2 - 16y^2 = 400$. Observe que a equação da hipérbole não está na forma reduzida. Dividem-se ambos os membros por 400. Logo, $25x^2 - 16y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 16$ e $b^2 = 25$. Daí, a = 4 e b = 5. Como $c^2 = a^2 + b^2$,tem-se que $c = \sqrt{41}$. Portanto, a excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5} \cong 1,60$.

6 CATENÁRIA

É a curva de um dos problemas mais famosos e difíceis do cálculo: a curva da corrente suspensa.

Durante muito tempo, os matemáticos discutiram qual curva era representada ao suspender-se uma corrente, como se vê na figura 6.1 abaixo:

Figura 6.1: **Corrente suspensa**

Fonte: Disponível em: $< http : //www.elo7.com.br/corrente - elo - portugues/dp/264E6D >$. Acesso em 21.08.13

Leonardo da Vince e Galileu acreditavam que essa curva era uma parábola. Entretanto, o estudo preciso desta curva só começou com a pesquisa de Huygens, por volta do ano de 1600, o qual resolveu o problema utilizando métodos geométricos. Por Leibniz, a curva recebeu o nome de catenária, originada da palavra latina catena, que significa cadeia. E é importante salientar que Leibniz, juntamente com Johann Bernoulli, resolveu esse problema utilizando métodos analíticos.

A diferença da curva catenária para as outras abordadas é que a catenária não é uma cônica, ou seja, não pode ser obtida por intermédio de uma secção de cone.

6.1 Catenária no cotidiano

6.1.1 Em rede elétrica

A energia elétrica é uma das formas de energia mais utilizadas no mundo. Ela é gerada, principalmente, nas usinas hidrelétricas, usando o potencial energético da água. Porém, ela pode ser produzida também em usinas eólicas, termoelétricas, solares, nucleares, entre outras. A energia elétrica é de fundamental importância para o desenvolvimento das sociedades atuais. Ela pode ser convertida para gerar luz, gerar força que movimenta motores, e ainda fazer funcionar diversos produtos elétricos e eletrônicos que existem nas casas, como computador, geladeira, micro-ondas, chuveiro etc.

Ao olhar-se para as redes elétricas, observa-se na forma descrita pelos fios, o formato da curva denominada catenária; como na figura abaixo:

Figura 6.2: **Rede elétrica**

Fonte: Disponível em:

< *http://depositonaweb.com.br/5591/hackers-ameacam-invadir-a-rede-eletrica-dos-eua/* >. Acesso em 16.08.13

6.1.2 Em Construções

A Ponte Golden Gate está localizada no estado da Califórnia, nos Estados Unidos, e liga a cidade de São Francisco a Sausalito, na região metropolitana de São Francisco, sobre o estreito de Golden Gate. A ponte é o principal cartão postal da cidade, uma das mais conhecidas construções dos Estados Unidos, e, é considerada uma das Sete maravilhas do Mundo Moderno pela Sociedade Americana de Engenheiros Civis. Os cabos de sustentação desta ponte reproduzem também a forma da catenária.

Figura 6.3: **Ponte Golden Gate**

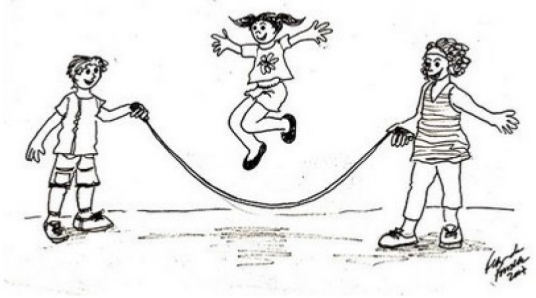
Fonte: Disponível em:< *http://labfisica.zip.net/* >. Acesso em 16.08.13

6.2 Obtenção da catenária

O texto a seguir foi extraído do capítulo XI do livro “O homem que calculava”, de Malba Tahan. Ele traz uma ilustração simples de como podemos formar uma catenária.

> Ao deixarmos o lindo palácio do poeta Iezid pouco faltava para a hora da tarde. Ao passarmos pelo marabu de Ramih ouvi o suave gorjear de pássaros entre os ramos de uma velha figueira. - Eis com certeza, um dos libertos de hoje – observei. – É um conforto ouvi-lo traduzir nas melodias do canto a alegria da liberdade conquistada! Beremiz, porém, naquele momento não se interessava pelo canto da passarada que esvoaçava entre os ramos, ao pôr-do-sol. Absorvia-lhe a atenção um grupo de meninos que se divertiam na rua a pequena distância. Dois dos pequenos suspendiam pelas extremidades, um pedaço de corda fina que devia ter quatro ou cinco côvados de comprimento. Os outros se esforçavam por transpor, de um salto, a corda colocada ora mais baixa, ora mais alta, conforme a agilidade do saltador. - Repara na corda, ó Bagdali – disse o calculista segurando-me pelo braço. - Observa a curva perfeita. Não achas o caso digno de estudo? Que caso? Que curva? – exclamei. – Não vejo nada de extraordinário naquele ingênuo e banal brinquedo de crianças que aproveitam as últimas horas do dia para um recreio inocente. - Pois, meu amigo – tornou Beremiz -, convence-te de que os teus olhos são cegos para as maiores belezas e maravilhas da natureza. Quando que apresenta a corcova de certos dromedários! Terá tal curva alguma analogia com os meninos erguem a corda, segurando-a pelas extremidades, e, deixando-a cair livremente sob a ação do próprio peso, ela forma uma curva que deve ser notável, pois surge como resultante de forças naturais. Já tive ocasião de observar essa curva – que o sábio Nô-Elin chamava maracá – nas teias e na forma as derivadas da parábola? Futuramente, se Allah quiser, os geômetras descobrirão meios de traçar essa curva, ponto por ponto, e, escudar-lhe-ão com absoluto rigor todas as propriedades. (BRASIL, 1990, p.57)

Figura 6.4: **Pula corda**



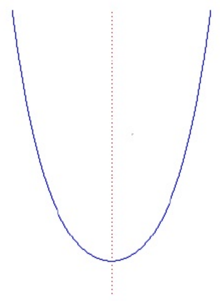
Fonte: Tahan, 1990.

Essa curva formada pela corda é a já conhecida catenária. A tradução de maracá ou maraçon, segundo o dicionarista Frei João de Souza, é corda ou cordel. E vem do verbo árabe maracá, que significa “ligar com um cordel”.

6.3 Conceito analítico da catenária

Na Matemática, a catenária descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade. Ainda pode-se dizer que é a figura de equilíbrio de um fio pesado, flexível, inextensível e homogéneo, suspenso pelos seus extremos a dois pontos fixos. A curva pode ser caracterizada pela seguinte propriedade: o comprimento do arco contado a partir do ponto mais baixo é proporcional à tangente trigonométrica do ângulo que a tangente à curva na outra extremidade do arco faz com a horizontal. Essa propriedade é traduzida sob a forma finita pela equação cartesiana: $y = \frac{a}{2}.(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$ Em que a é o parâmetro da catenária. O gráfico da catenária é:

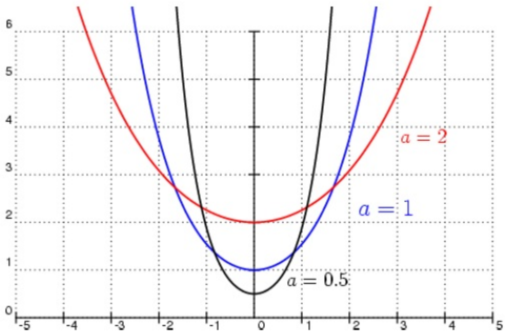
Figura 6.5: **Gráfico da catenária**



Fonte: Disponível em: $< http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/catenaria.htm >$. Acesso em 16.08.13

Tomando-se três valores para o parâmetro, vê-se como seria o gráfico da catenária.

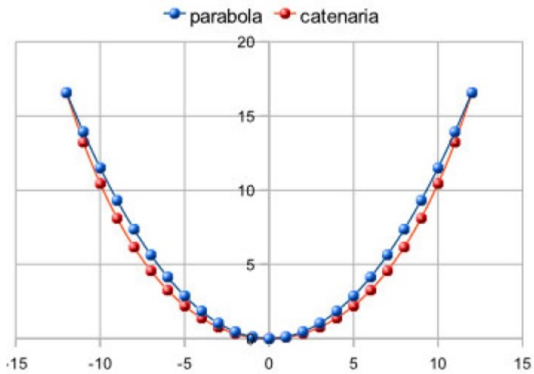
Figura 6.6: Gráfico da catenária



Fonte: Disponível em: < *http : //pt.wikipedia.org/wiki/Caten%C3%A1ria* >. Acesso 16.08.13

Observa-se nos gráficos da catenária e da parábola uma grande semelhança como se mostra no gráfico a segue:

Figura 6.7: Gráfico da catenária e da parábola



Fonte: Disponível em: < *http : //utenti.quipo.it/base5/analisi/catenaria.htm* >. Acesso em 16.08.13

As aplicações e o detalhamento dessa curva, que ao longo dos anos intrigou tantos matemáticos, serão melhores compreendidos em estudos posteriores, visto que usar-se-ão recursos do cálculo e da física que não estão disponíveis para o aluno do Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma Abordagem de Curvas no Ensino Médio constitui-se – pela forma com que foi redigido – numa “inovação”no que diz respeito à explanação presente nos livros didáticos de Ensino Médio, visto que nestes a temática é usualmente desenvolvida a partir de breves contextualizações que não permitem ao aluno estabelecer um vínculo consistente com as situações as quais vivencia, resultando numa considerável separação da teoria com a prática. Além disso, é sabido que alguns conteúdos são apresentados ao aluno sem que se façam algumas abordagens de tópicos os quais, por sua vez, são pré-requisitos indispensáveis ao avanço do discente no processo de ensino-aprendizagem.

Partindo desse raciocínio, o capítulo 1, intitulado “Preliminares”, evidenciou conceitos prévios que são fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento de curvas. Abordou-se a definição e as propriedades do plano cartesiano, a demonstração da fórmula com a qual se calcula a distância entre dois pontos bem como a fórmula que calcula a distância entre ponto e reta e, também, abordou–se sobre o número “e”; por fim, abordaram-se a definição de cone circular reto, seus elementos e as fórmulas das áreas. Em seguida, o capítulo 2 apresentou, dentre outros fatos históricos, a diferença – em termos de tempo – que separou o estudo da elipse, da parábola e da hipérbole, do estudo da catenária.

Nos 4 (quatro) capítulos seguintes, sobre cada uma das curvas se fez alusão a vários objetos, tais como: mesa, copo com água, antena parabólica, caminhão-tanque e farol de carro, os quais possuem formas que se assemelham às curvas em foco. Além de serem percebidas nos objetos, estas formas também foram vistas em pontes, na rede elétrica, em lançamentos oblíquos, em construções, em locais importantes, na natureza e no Sistema Solar. À medida que cada formato de curva ia sendo visualizado, algumas construções geométricas destas referidas curvas foram apresentadas, colocando – de maneira lúdica – as suas respectivas definições e os seus respectivos elementos. E no final de cada um destes 4 capítulos, foi apresentado, de maneira analítica, as definições das curvas, os seus elementos e as equações algébricas que as representam.

Nesta dissertação, no tocante às definições e demonstrações, não foram utilizados recursos matemáticos mais sofisticados, em virtude do fato de que a finalidade desta foi alcançar os alunos do Ensino Médio. Também não houve embasamento teórico de pedagogos, os quais norteariam a sequência lógica da abordagem. Por conseguinte, a maneira escolhida para desenvolver o trabalho foi baseando-o nas experiências de sala de aula e no rol de conhecimento dos discentes. E por assim dizer, espera-se que os dois maiores resultados obtidos por essa composição escrita seja promover um caminho pelo qual o aluno venha a ser bem sucedido no processo ensino-aprendizagem no que diz respeito às curvas e, por outro lado, despertar no professor o cuidado de relacionar o teórico com o prático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONJORNO, Regina Azenha; Bonjorno, José Roberto; Bonjorno Valter; Clinton Marcico Ramos. *Física Completa, volume único*, 1. ed., Rio de Janeiro: FTD, 2001.

BOYER, Carl B. História da Matemática, 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

BUCCHI, Paulo. *Curso Prático de Matemática, Volume 3*, 1. ed., São Paulo: Moderna, 1998.

COSTA, Ana Rita F. et al. *Orientações Metodológicas*. 8º ed., Maceió: EDUFAL, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, Contexto e Aplicações, Volume 3. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. 1 ed. São Paulo:Editora UNICAMP, 2008.

JOHNSON, Donavan A. *Curvas no Espaço, Volume 1*, 1. ed., São Paulo: José Olympio, 1972.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cézar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*, 6. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos, 4. ed., Rio de Janeiro: *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2010.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cézar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*, 9. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINTZ, Rubens G. *História da Matemática, volume 1*, 1. ed., Santa Catarina: FURB, 1999.

REIS, Genésiuo Lima; Silva, Valdir Vilmar. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Editora S.A.,1984.

SMITH, Percey F; GALE, Arthur Sullivan. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: LT, 1957.

TAHAN, Malba. *O Homem que Calculava*, 35. ed., Rio de Janeiro: RECORD, 1990.

YAMAMOTO, Kazuhito; FUKE, Luiz F. Física, volume1. 1 ed. , São Paulo: Saraiva, 2008.

XAVIER, Cláudio; BARRETO, Benigno. Física. 1 ed., São Paulo: FTD, 2010.

ÍNDICE REMESSIVO