UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCOS ANTONIO CHAVES FREIRE

RAÍZES DA UNIDADE

Aspectos algébricos e geométricos

Fortaleza - Ceará

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCOS ANTONIO CHAVES FREIRE

RAÍZES DA UNIDADE

Aspectos algébricos e geométricos

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery.

Fortaleza - Ceará

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho
Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544

F866r Freire, Marcos Antonio Chaves.

Raízes da unidade: aspectos algébricos e geométricos/Marcos Antonio Chaves Freire. — 2013.

CD-ROM 49f. : il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

"CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)".

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery.

1. Raízes. 2. Unidade. 3. Algébrico. 4. Geométrico. I. Título.

CDD: 510

MARCOS ANTONIO CHAVES FREIRE

RAÍZES DA UNIDADE: aspectos algébricos e geométricos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, vinculado à Universidade Estadual do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 27 de agosto de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Guilherme Ellery

Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery
Universidade Estadual do Ceará – UECE (PROFMAT), Orientador, Presidente

Fernando Antonio Amaral Pimentel

Prof. Dr. Fernando Antonio Amaral Pimentel
Universidade Federal do Ceará – UFC (PROFMAT/UECE)

Sebastião Carneiro de Almeida

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida (membro externo)
Universidade Federal do Ceará – UFC

José Alberto Duarte Maia

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (membro externo)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico este trabalho a minha esposa pelo carinho e atenção dedicada a mim e por entender a minha falta de tempo.

Dedico também ao professor Dr.GUILHERME LINCOLN AGUIAR ELLERY, pela paciência, compreensão e dedicação ao curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Gleuba, amiga e coordenadora financeira da Escola Estadual de Educação Profissional Avelino Magalhães , por me avisar, incentivar e alertar sobre o prazo de inscrição para a seleção no programa de mestrado ao qual estou terminando.

Agradeço a Daiane, minha esposa, por toda força, carinho e compreensão, tornando esta jornada mais leve e exitosa.

Agradeço aos colegas de curso que sempre me deram força quando as tarefas pareciam difíceis, e compartilharam alegrias quando tínhamos êxito.

Aos gestores e colegas professores onde trabalho que compreenderam a minha falta de tempo para algumas tarefas e entenderam a minha ausência em algum momento necessário.

Aos amigos pelo incentivo na realização do curso e por acreditarem em minha capacidade de superação.

A CAPES pelo incentivo financeiro

Ao PROFMAT pela oportunidade.

"Se não consegues entender que o céu deve estar dentro de ti, é inútil buscá-lo acima das nuvens e ao lado das estrelas. Por mais que tenhas errado e erres, para ti haverá sempre esperança, enquanto te envergonhares de teus erros".

Charles Chaplin

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar alguns aspectos algébricos e geométricos das raízes da unidade, nas suas relações com os polinômios e com os polígonos regulares. Apresentam-se, assim, algumas propriedades cíclicas das raízes da unidade, formas de trabalhar com números complexos e interpretações relacionadas às progressões geométricas periódicas. São apresentadas ainda algumas propriedades e relações geométricas importantes, aplicadas ao estudo de polígonos regulares. Apresenta-se um estudo de polinômios, no capítulo 1, como embasamento teórico necessário ao estudo das raízes da unidade, no capítulo 2. As raízes da unidade representam um caso particular no estudo de polinômios e, ao mesmo tempo, um aprofundamento neste e em outros tópicos de estudo no Ensino Médio e pode despertar o interesse e a busca por novos conhecimentos. É com esse intuito que procura-se utilizar números complexos e polinômios mostrando correlações e outras aplicações para tornar o estudo destes assuntos no Ensino Médio mais compreensível e ao mesmo tempo desafiador, apresentando ainda possibilidades de abordar as raízes da unidade ao longo desse segmento educacional.

Palavras Chave: Raízes. Unidade. Algébrico. Geométrico.

ABSTRACT

The main objective of this paper is to present some aspects algebraic and geometric of the roots of unity in its relations with polynomials and regular polygons.They appear thus some cyclical properties of the roots of the unit, ways to work with complex numbers and interpretations related to periodic geometric progression. Are also presented some properties and important geometrical relationships , applied to the study of regular polygons. The Chapter 1 presents a study of polynomials, as necessary theoretical framework for the study of the roots of unity, in Chapter 2. The roots of unity represent a special case in the study of polynomials, and at the same time, a deepening in this and other topics of study in high school and can arouse the interest and the search for new knowledge. It is with this intention that seek to use complex numbers and polynomials showing correlations and other applications to turn the study of these subjects, in high school, more understandable and challenging at the same time, still showing possibilities to teach the roots of unity throughout this educational segment.

Keywords: Roots. Unity. Algebraic. Geometric.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Observando as características das raízes de uma equação polinomial e a sua importância no desenvolvimento da álgebra, surgem curiosidades particulares, tais como: qual o comportamento algébrico das raízes da unidade, isto é, das raízes complexas da equação $z^n - 1 = 0$?; que relação há entre estas e a geometria plana? Para responder a estas e outras questões foi feito um levantamento bibliográfico sobre polinômios e teoremas importantes na obtenção das raízes de uma equação polinomial.

No primeiro capítulo do presente trabalho são apresentadas as propriedades e características dos polinômios que fazem parte da base teórica para o estudo das raízes de $z^n - 1 = 0$

O segundo capítulo é dedicado ao objeto de estudo deste trabalho, as raízes da unidade. Neste capítulo foram examinadas algumas características algébricas e geométricas das raízes da equação $z^n - 1 = 0$ e apresentados também alguns teoremas que ajudam no entendimento da relação entre as raízes e as potências complexas de base e.

Este trabalho tem como principal objetivo mostrar as relações existentes entre as raízes da unidade e suas inter-relações com números complexos e com a geometria mostrando principalmente que a matemática estudada no Ensino Médio não está fragmentada, mas que muitos assuntos se complementam ao longo dos anos seriados.

Pretende-se, ainda, chamar a atenção para as particularidades da matemática, como por exemplo, as raízes da unidade, que é um caso particular no estudo, no Ensino Médio, das raízes de uma equação polinomial, as quais existem campos ricos de conceitos e conhecimentos que podem, em muitas situações, ser explorados.

1 POLINOMIOS

Determinar os zeros de uma equação ou resolver expressões algébricas são problemas matemáticos antigos. O estudo das soluções para uma equação polinomial quadrática, equações cúbicas e quárticas instigaram por longo tempo muitos matemáticos que buscavam por fórmulas capazes de resolver equações de forma generalizada e a explicação para equações que não apresentavam raízes.

Os polinômios são parte importante no estudo da álgebra mas também tem relevante importância na geometria, quando nos possibilitam relacionar medidas de entes geométricos a representações algébricas.

Este capítulo abordará operações aritméticas dos polinômios e suas propriedades assim como a determinação dos zeros de equações polinomiais.

1.1 A FUNÇÃO POLINOMIAL

A função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e n $\in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos e $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais, é denominada função polinomial de grau n com coeficiente líder $a_n \neq 0$ e termo independente a_0.

Sendo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, chama-se valor numérico da função f correspondente a $x = w$ ao valor numérico obtido substituindo x por um número complexo w, ou seja $f(w)$

Denomina-se polinômio a expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, e representaremos por $P(x)$, em $\mathbb{C}[x]$ com $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e n $\in \mathbb{N}$.

Dado $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, um polinômio em $\mathbb{C}[x]$, onde $\mathbb{C}[x]$ é a estrutura algébrica com as operações soma e multiplicação, dos polinômios complexos de variável complexa com as propriedades aditivas e multiplicativas.

Um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é identicamente nulo se, e somente se, os seus coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ forem todos iguais a zero.

1.1.1 Grau de um Polinômio

Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, chama-se grau do polinômio ao valor de n ∈ $\mathbb{N}$, expoente máximo i de x^i, com $0 \leq i \leq n$, em que $a_i \neq 0$, e sua notação será:

$$gr(P) = n$$

1.1.2 Identidade de Polinômios

Chama-se identidade de polinômios a igualdade entre dois polinômios com seus respectivos coeficientes iguais ordenadamente, ou seja $P_1(x) = P_2(x)$, qualquer que seja x complexo.

Proposição

Dados $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ polinômios em $\mathbb{C}[x]$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são iguais para todo $x \in \mathbb{C}$ se, e somente se, seus coeficientes forem ordenadamente iguais, ou seja:

$$P_1(x) = P_2(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \forall i \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$$

Demonstração

Seja, por hipótese $P_1(x) = P_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$, logo temos:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i = 0$$

ou ainda $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) x^i + (a_0 - b_0) = 0$.

Fazendo, então, $x = 0$ nesta última expressão tem-se $a_0 - b_0 = 0$, ou seja, $a_0 = b_0$. Agora, observa-se que $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, ou ainda, $x \cdot \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x^{i-1} = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$ e, em particular, $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x^{i-1} = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, ou ainda, $\sum_{i=2}^{n}(a_i - b_i)x^{i-1} + (a_1 - b_1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Fazendo, então, $x = 0$ nesta última expressão tem-se $a_1 - b_1 = 0$, ou seja, $a_1 = b_1$.

Assim procedendo, sucessivamente, obtém-se as demais igualdades $a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$.

O que prova que se os polinômios forem iguais os seus coeficientes serão iguais ordenadamente.

Seja por hipótese $a_i = b_i$, para todo i = 0, 1, 2, ..., n.

$$a_i - b_i = 0 \Rightarrow$$

para todo $x \in \mathbb{C}$, $(a_i - b_i)x^i = 0 \Rightarrow$

para todo $x \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i = 0 \Rightarrow$

para todo $x \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \Rightarrow$

para todo $x \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Rightarrow$

para todo $x \in \mathbb{C}$, $P_1(x) = P_2(x)$.

Isto prova que se temos coeficientes ordenadamente iguais, os polinômios serão iguais.

1.1.3 Operações em $\mathbb{C}[x]$

Adição: Dados dois polinômios em $\mathbb{C}[x]$

$$P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Chama-se soma de P_1 com P_2 o polinômio em $\mathbb{C}[x]$ dado por

$$(P_1 + P_2)(x) = \sum_{i}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

Multiplicação: Dados dois polinômios em $\mathbb{C}[x]$

$$P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$P_2(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

chama-se multiplicação de P_1 com P_2 ao polinômio em $\mathbb{C}[x]$ dado por $(P_1 \cdot P_2)(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$

obtido multiplicando cada termo $a_i x^i$ de P_1 por cada termo $b_j x^j$ de P_2 segundo a regra $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

$\mathbb{C}[x]$ apresenta as propriedades:

(I) Existência do elemento neutro aditivo em $\mathbb{C}[x]$, denotado por $e_a(x) = 0$.

(II)Existência do elemento neutro multiplicativo em $\mathbb{C}[x]$, denotado por $e_m(x) = 1$

(III) Propriedade associativa das operações em $\mathbb{C}[x]$ $P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3 \ e \ P_1 \cdot (P_2 \cdot P_3) = (P_1 \cdot P_2) \cdot P_3$, quaisquer que sejam $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[x]$

(IV) Propriedade comutativa das operações em $\mathbb{C}[x]$ $P_1 + P_2 = P_2 + P_1 \ e \ P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1$, quaisquer que sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x]$

(V) Propriedade distributiva das operações em $\mathbb{C}[x]$
$P_1 \cdot (P_2 + P_3) = (P_1 \cdot P_2) + (P_1 \cdot P_3)$, quaisquer que sejam $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[x]$

Algoritmo de Euclides:

Sejam $P(x),\ g(x), q(x) e\ r(x)$ polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

Todo polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $gr(q) = gr(P) - gr(g)$ e $gr(r) < gr(g)$ ou $gr(r) = 0$.

Demonstração:

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, com $gr(P) = n$ e $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, com $gr(g) = m$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $n \geq m$. Se n < m, $q(x) = 0$ e $r(x) = P(x)$.

Se $n = 0$, temos que 0$\leq m \leq n$, logo $m = 0$, portanto, $q(x) = \frac{a_0}{b_0}$ e $r(x) = 0$

Se n > m, vamos mostrar que existem $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = g(x).q(x) + r(x)$. Seja

$$h(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.g(x)$$

logo $gr(h) < n$. Neste caso existem $t(x)$ e $s(x)$ tais que $h(x) = t(x).g(x) + s(x)$. Podemos mostrar que vale para $P(x)$ com $gr(P) = n$:

$$P(x) = h(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.g(x)$$

$$P(x) = t(x).g(x) + s(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.\text{g(x)}$$

$$P(x) = \left[t(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right].g(x) + s(x)$$

fazendo

$$q(x) = t(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \text{ e } r(x) = s(x)$$

obtem-se

$$P(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

1.1.4 Zero de um Polinômio

Dizemos que w ϵ $\mathbb{C}$ é zero de um polinômio se para $x = w$ tem-se $P(w) = 0$

1.1.5 Teorema de D'Alembert

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é o valor numérico do polinômio para $x = a$, ou seja, $r = P(a)$.

Demonstração:

Se $P(x) = g(x).q(x) + r(x)$, e $g(x) = x - a$, temos que $P(x) = (x - a).q(x) + r(x)$. Fazendo $x = a$, obtemos:

$$P(a) = (a - a).q(a) + r(a)$$

Como $gr(r) < gr(g)$, e $gr(g) = 1$, tem-se que $gr(r) = 0$, logo $r(x)$ é constante e, portanto $r(x) = r(a) = r$, sendo $r \in \mathbb{C}$. Dessa forma:

$$P(a) = 0.q(a) + r$$

$$P(a) = r$$

.

Corolário:

Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$

Demonstração:

Se $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, então $r(x) = 0$ para todo x e existe um polinômio $q(x)$ tal que:

$$P(x) = (x - a).q(x)$$

Substituindo x por a, tem-se

$$P(a) = (a - a).q(a)$$

$$P(a) = 0$$

Por outro lado, se $P(a) = 0$, e sabendo que: $P(x) = (x - a).q(x) + r(x)$, segue que $P(a) = (a - a).q(a) + r$ e, como $(a - a) = 0$ e $P(a) = 0$, tem-se $0 = 0.q(a) + r$, ou seja, $r = 0$, o que mostra que se $P(a) = 0$, então $r = 0$ e portanto $P(x)$ é divisível por $(x - a)$

1.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Toda equação do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com coeficientes complexos a_i e variável complexa x é uma equação polinomial em $\mathbb{C}$.

Muito se estudou sobre as raízes das equações cubicas e quarticas. Este estudo foi de grande importância para a álgebra da época segundo Boyer(2003)

> A resolução das equações cúbica e quártica foi talvez a maior contribuição a álgebra desde os babilônios, quase quatro milênios antes, aprenderam a completar o quadrado para equações quarticas. Nenhuma outra descoberta constitui um estímulo para o desenvolvimento da álgebra comparável a essa revelada na *Ars magna*. A resolução de equações cubicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivado por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes da matemática... (Calr B. Boyer, 2003 – pag 197)

Uma grande contribuição das descobertas publicadas em *Ars magna* (1545) foi o enorme impulso dado a pesquisa em álgebra em várias direções, conforme Boyer(2003).

1.2.1 Raízes da Equação Polinomial

Seja a equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Se ao substituirmos a variável x pelo valor numérico b obtemos $a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = 0$, então dizemos que b é raiz da equação.

Se torna necessário saber se toda equação polinomial de variável complexa tem raiz complexa e, ainda, qual o número total de raízes de uma equação polinomial.

1.2.2 Teorema Fundamental da Álgebra:

Toda equação polinomial de grau n $\geq$ 1 admite ao menos uma raiz complexa. (Este teorema está demonstrado no anexo 1)

1.2.3 Teorema da Decomposição

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio em $\mathbb{C}[x]$. Dizemos que $P(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{C}[x]$ se $P(x)$ não puder ser escrito como um produto de dois polinômios ambos não constantes. Assim todo polinômio de grau 1 é irredutível.

Proposição:

Todo polinômio em $\mathbb{C}[x]$, de grau maior ou igual a 2, pode ser expresso como produto de polinômios sobre $\mathbb{C}[x]$, não constantes.

Corolário:

Todo polinômio de grau n(n≥1) pode ser decomposto em n fatores do 1º grau.

Demonstração:

Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$. Pelo teorema fundamental da álgebra (TFA) a equação polinomial $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz x_1, e pelo teorema de D'Alembert este polinômio pode ser escrito como $P(x) = (x - x_1)q(x)$, com $q(x)$ um polinômio de grau $n - 1$. Se $n = 1$, tem-se $gr(q) = 0$, logo $q(x)$ é constante e igual ao coeficiente líder para $P(x)$, portanto $P(x) = a_n(x - x_1)$.

Se $n = 2$, tem-se $P(x) = (x - x_1).q(x)$, com $gr(q) = 1$, logo o polinômio $q(x)$ tem uma raiz, pelo TFA, e pode ser escrito como $q(x) = (x - x_2).q_2(x)$ e $gr(q_1) = 0$, logo o polinômio $q_1(x)$ é constante e igual ao coeficiente líder, portanto tem-se $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)$.

Se continuar sucessivamente tem-se que um polinômio de $gr(P) = n$ pode ser escrito como $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, em que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as raízes do polinômio.

Corolário:

Toda equação polinomial de grau $n\,(n > 0)$ admite n raízes complexas.

1.2.4 Teorema das Raízes Complexas:

Seja $z = a + bi$ um número complexo, então $\bar{z} = a - bi$ é o seu conjugado. O conjugado apresenta algumas propriedades que são:

I) Se $z = \bar{z}$, então z é real

II) $\bar{\bar{z}} = z$

III) $z.\bar{z} = |z|^2$

IV) Se $k \in \mathbb{R}$, então $\overline{k.z} = k.\bar{z}$

V) Se z e w são números complexos, então $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

VI) $\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}$

VII) Sejam $z_1, z_2, \cdots, z_n$ números complexos, temos que $\overline{z_1 . z_2 . \cdots . z_n} = \overline{z_1} . \overline{z_2} . \cdots . \overline{z_n}$. Logo $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Teorema: Se um número complexo, $z = a + bi$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$, $P(x)$ em $\mathbb{C}[x]$ com coeficientes reais, então o seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz da equação em $\mathbb{C}[x]$

Demonstração:

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ com $a_n \neq 0$ e $z = a + bi$ uma raiz da equação polinomial $P(x) = 0$, ou seja $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$. Então $\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \overline{0}$

Usando as propriedades do conjugado e o fato dos coeficientes a_i serem todos números reais, tem-se:

(I) $\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$

(II) $a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_2 \overline{z^2} + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$

(III) $a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$, logo $P(\bar{z}) = 0$

1.2.5 Raízes Reais de uma Equação Polinomial

Seja uma equação polinomial com coeficientes reais, ou ainda $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_m$ raízes reais e $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_k, \bar{z}_k$ raízes complexas não reais da equação. Segundo o teorema da decomposição podemos fatorar o polinômio $P(x)$ da seguinte forma:

$$P(x) = a_n (x - r_1) . \cdots . (x - r_m) . (x - z_1) . (x - \bar{z}_1) . \cdots . (x - z_k) . (x - \bar{z}_k)$$

Proposição

Se $q(x) = (x - z_1) . (x - \bar{z}_1) . \cdots . (x - z_k) . (x - \bar{z}_k)$, então $q(x) > 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$

Demonstração:

Como z_k é um número complexo, tem-se que $z_k = a + bi$, e $\bar{z}_k = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Fazendo o produto tem-se:

$$(x - a - bi).(x - a + bi) = x^2 - ax + xbi - ax + a^2 - abi - xbi + abi + b^2$$

$$(x - a - bi).(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

$$(x - a - bi).(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $q(x) = (x - z_1).(x - \bar{z}_1). \cdots .(x - z_k).(x - \bar{z}_k)$, então tem-se um produto de números positivos, consequentemente, $q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

1.2.6 Teorema de Bolzano

Seja $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e]a, b[um intervalo real aberto.

Teorema:

Se $P(a)$ e $P(b)$ tem o mesmo sinal, existe um número par de raízes reais ou não existe raízes reais no intervalo aberto]a, b[. Se $P(a)$ e $P(b)$ tem sinais contrários, existe um número ímpar de raízes reais da equação em]a, b[.

Demonstração:

Seja $P(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdots (x - r_m)q(x)$, onde $r_1, r_2, \cdots, r_m$ são todas as raízes reais e $q(x)$ é o polinômio formado a partir de todas as raízes não reais. Dado um intervalo aberto]a, b[, uma raiz real da equação $P(x) = 0$ pode ser interna ou externa ao intervalo.

Seja r_i uma raiz de $P(x)$ interna ao intervalo, ou seja, $a < r_i < b$, portanto $a - r_i < 0$ e $b - r_i > 0$ e desta forma $(a - r_i).(b - r_i) < 0$

Seja r_e uma raiz externa ao intervalo, ou seja, $(a - r_e).(b - r_e) > 0$
$P(a).P(b) = a_n(a - r_1). \cdots .(a - r_m)q(a).a_n(b - r_1). \cdots .(b - r_m).q(b)$

$$P(a).P(b) = {a_n}^2 q(a).q(b).(a - r_1).(b - r_1) \cdots .(a - r_m).(b - r_m)$$

Como $a_n{}^2 > 0$, e $q(a).q(b) > 0$ visto no item 1.2.5, então o sinal do produto vai depender dos fatores $(a - r_1).(b - r_1) \cdots .(a - r_m).(b - r_m)$.

Se $P(a).P(b) > 0$, então existe um número par de fatores $(a - r_i).(b - r_i) < 0$, logo tem-se um par de raízes reais no intervalo

Se $P(a).P(b) < 0$, dessa forma existe um número ímpar de fatores $(a - r_i).(b - r_i) < 0$ logo tem-se um número ímpar de raízes reais no intervalo.

2 RAÍZES DA UNIDADE

Sendo n um número natural não nulo, são denominadas raízes n-ésimas da unidade, todas as raízes da equação $z^n = 1$. Pode-se demonstrar que estão localizadas na circunferência unitária do plano complexo e que nesse plano os pontos identificados com esses números são os vértices de um polígono regular de n lados, com um vértice localizado no ponto (1, 0).

Uma raiz n-ésima da unidade é chamada de primitiva (ou seja, uma raiz primitiva n-ésima da unidade), quando ela não é também uma raiz m-ésima da unidade para m < n. Por exemplo, i é uma raiz quarta e uma raiz oitava da unidade, mas é apenas uma raiz quarta primitiva da unidade.

2.1 CONCEITO E DETERMINAÇÃO

Vimos no capítulo anterior, que uma equação polinomial de grau n $P(x) = 0$, com $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ tem exatamente n raízes complexas.

Seja $a_n x^n + a_0 = 0$ uma equação polinomial com $a_n \neq 0$. Logo:

$$a_n x^n = -a_0$$

portanto:

$$x^n = \frac{-a_0}{a_n}$$

Se $\frac{-a_0}{a_n} = 1$, tem-se a equação $x^n = 1$, ou seja $x^n - 1 = 0$.

Denomina-se, então, raízes da unidade as raízes da equação $x^n = 1$, e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esta equação de grau n tem exatamente n raízes complexas.

Se w é raiz n-ésima da unidade, então $w^n = 1$:

$$|w|^n = |w^n| = |1| = 1 \rightarrow |w| = 1$$

2.1.1 Um pouco sobre números complexos

Seja $z = a + bi$, chama-se afixo de z ao ponto no plano com as coordenadas (a, b).

Um número complexo pode ser escrito na forma trigonométrica conhecendo-se o módulo (ρ) que representa a distância do afixo a origem e o argumento (θ) que representa o ângulo formado pelo vetor orientado da origem ao afixo com o semi-eixo positivo das abscissas no plano cartesiano.

Se escreve um número complexo na forma trigonométrica como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$

Propriedade 1

Sejam w_1 e w_2 números complexos tais que $w_1 = \rho_1 cos\theta_1 + isen\theta_1$ e $w_2 = \rho_2 cos\theta_2 + isen\theta_2$, então $w_1.w_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$

Demosntração:

$$w_1.w_2 = \rho_1[cos\theta_1 + isen\theta_1].\rho_2[cos\theta_2 + isen\theta_2]$$

$$w_1.w_2 = \rho_1\rho_2[cos\theta_1.cos\theta_2 + isen\theta_2 cos\theta_1 + isen\theta_1 cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 sen\theta_2]$$

$$w_1.w_2 = \rho_1\rho_2[cos\theta_1.cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 + i(sen\theta_2 cos\theta_1 + sen\theta_1 cos\theta_2)]$$

sabendo que $cos\theta_1.cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $sen\theta_2 cos\theta_1 + sen\theta_1 cos\theta_2 = sen(\theta_1 + \theta_2)$, tem-se:

$$w_1.w_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Propriedade 2

Seja w um número complexo tal que $w = \rho[cos\theta + isen\theta]$, então $w^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$, $n \in \mathbb{Z}$

Demonstração (usando o procedimento de indução matemática)

Para n = 1 temos que $w^1 = \rho[\cos(1\theta) + isen(1\theta)] = \rho[cos\theta + isen\theta]$.

Por hipótese $w^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$, então

$$w^{n+1} = w^n.\mathrm{w}$$

$$w^{n+1} = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)].\rho[cos\theta + isen\theta]$$

Usando a **propriedade 1** tem-se:

$w^{n+1} = \rho^{n+1}\{\cos[(n+1)\theta] + isen[(n+1)\theta]\}$,

2.1.2 Relação de Euler

A função E: R → C. definida por E(x) = cos x + isen x, possui a propriedade E(x + y) = E(x).E(y), sendo portanto uma função que se comporta como exponencial. Esta observação por parte de Euler o levou a propor a seguinte definição:

$E(x) = cosx + isenx = e^{ix}$ (relação de Euler)

A relação de Euler nos permite escrever $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, e dessa forma podemos simplificar a notação de potências de números complexos, sendo $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Sabendo que as raízes da unidade w são todas as raízes complexas w da equação $z^n - 1 = 0$. Como w é um número complexo da forma $w = cos\theta + isen\theta$, então podemos escrever $w_0 = cos0 + isen0 = e^{i0} = 1$ e as demais raízes $w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, k = 1, 2, ..., n – 1. Usando a fatoração de polinômios, temos:

$$z^n - 1 = \prod_{0 \le k < n} (z - w_k)$$

Outras relações interessantes a serem observadas a partir da relação de Euler são as seguintes:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Estas relações permitem simplificar contas com funções trigonométricas.

Considere o número complexo $w_1 = \left(cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n}\right)$ e, observe que $w_1^k = w_k$, k = 1, 2, 3, ..., n – 1. Nesse caso, w é uma raiz n-ésima da unidade e todas as raízes n-ésimas da unidade são potências de w_1

Propriedade:

Uma raiz n-ésima da unidade w_k é uma raiz primitiva de ordem n se, e somente se, o mdc(k, n) = 1, com $k = 1, 2, \cdots, n-1$

2.2 ASPECTOS ALGÉBRICOS

É necessário estudar alguns aspectos importantes para o entendimento das propriedades das raízes da unidade, como por exemplo, as características cíclicas, as raízes geradoras de um grupo. As raízes da unidade apresentam respostas importantes no cálculo de raízes de números complexos diversos. Identifica-se ainda uma propriedade interessante sobre a soma das raízes complexas da unidade. Pode-se perceber também que as características algébricas podem dar origem a uma progressão geométrica periódica.

Definição de grupo

Um conjunto G de elementos, não vazio, é um grupo multiplicativo se está definida uma operação binária, denominada multiplicação e indicada por ·, tal que são satisfeitas as seguintes propriedades:

I) Para todos $a, b \in G$ tem-se $a \cdot b \in G$

II) Para todos $a, b, c \in G$ tem-se $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

III) Existe um elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.

IV) Para todo $a \in G$ existe um elemento denotado $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

O grupo é denominado comutativo ou abeliano quando é satisfeita a propriedade adicional:

V) Para todos $a, b \in G$ tem-se $a \cdot b = b \cdot a$.

2.2.1 Grupo Cíclico

Um elemento $a \in G$ é denominado gerador do grupo G se, para todo $b \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a^n$.

Um grupo G gerado por um de seus elementos é chamado cíclico e pode ser de dois tipos, os finitos e os infinitos. Se a tem ordem $n \geq 1$, então $G = \{e, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ é um grupo cíclico finito gerado por a.

A ordem do grupo G gerado por a é n e será indicado por o(a) = n.

Propriedade:

Um elemento a de um grupo multiplicativo G tem ordem finita se, e somente se, existe um número natural não nulo t tal que $a^t = e$

Demonstração:

$e, a^1, a^2, \cdots, a^k, \cdots$, se o grupo é finito, as potências de a não são todas distintas dois a dois, logo existem p e q tais que

$a^p = a^q \rightarrow a^{p-q} = e$ com $t = p - q$. Assim existe t com $a^t = e$ e seja a^n um elemento qualquer de G. Usando algoritmo de Euclides temos que n = st + r, logo:

$$a^n = a^{st+r} = (a^t)^s \cdot a^r = e^s \cdot a^r = a^r$$

O que resulta que $G = \{e, a^1, a^2, \cdots, a^{t-1}\}$

Se um elemento a ∈ G tem ordem finita, então a ordem de a é o menor número natural m não nulo tal que $a^m = e$, e ainda $a^n = e$ se e somente se m divide n.

Num grupo cíclico finito G de ordem m valem as seguintes propriedades:

I) $a^m = e$
II) G $= \{e, a^1, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$
III) $a^n = e$ se, e somente se, m divide n
IV) $a^i = a^j$ se, e somente se, $i \equiv j(mod. m)$

Se G é um grupo finito de ordem m, então um elemento a^r, com $0 \leq r \leq m$ é um gerador de G se, e somente se, r e m forem primos entre si.

Considerando, agora, o conjunto G das raízes n-ésimas da unidade, isto é, $G = \{1, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}\}$ onde $w_k = e^{2k\pi i/n}$ e k = 1, 2, ..., n – 1, é possível afirmar que $w_2 = {w_1}^2$, $w_3 = {w_1}^3$, ..., $w_{n-1} = {w_1}^{n-1}$. Neste caso, é possível concluir que $G = \{1, w_1, {w_1}^2, \cdots, {w_{n-1}}^{n-1}\}$ é um grupo cíclico de ordem n, gerado por w_1.

Por outro lado, sabe-se que:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

Se z é raiz n-ésima de 1 e z≠1, então:

$$z^n - 1 = 0 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1)$$

Logo:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$$

Conclusão, a soma de todas as raízes n-ésimas da unidade é igual a 0(zero).

Mais uma consideração pode ser aqui apresentada.

Se w^r e w^s são raízes da unidade, então $w^r.w^s$, $\frac{w^r}{w^s}$, $\frac{1}{w^s}$ também são raízes da unidade.

De fato: w^r e w^s são raízes da unidade, então $(w^r)^n = (w^s)^n = 1$

Logo: $(w^r.w^s)^n = (w^r)^n.(w^s)^n = 1$

$$\left(\frac{w^r}{w^s}\right)^n = \frac{(w^r)^n}{(w^s)^n} = 1$$

$$\left(\frac{1}{w^s}\right)^n = \frac{(1)^n}{(w^s)^n} = 1$$

Diz-se que w é raiz primitiva da unidade se w gerar todas as raízes n-ésimas da unidade. Por exemplo observando as raízes quartas da unidade, verifica-se que 1 e -1 são raízes mas não geram todas. Já i e –i geram todas as raízes quartas da unidade, dizemos que i e –i são raízes quartas primitivas da unidade.

2.2.3 Raízes da Equação $\boldsymbol{x^n - a = 0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$ e as Raízes da Unidade

A equação $x^n - a = \mathbf{0}$ pode ser reduzida a equação $z^n - 1 = \mathbf{0}$, fazendo:

$$x = z\sqrt[n]{a}$$

$$x^n - a = \left(z\sqrt[n]{a}\right)^n - a = 0$$

$$z^n a - a = 0$$

Dividindo por a, temos:

$$z^n - 1 = 0$$

Logo para se ter as raízes da equação $x^n - a = 0$, basta encontrar uma raiz n-ésima de a e multiplicar o número a por todas as ráizes n-ésimas da unidade, ou seja:

$$x = z\sqrt[n]{a}, onde\ z\ \acute{e}\ raiz\ n - \acute{e}sima\ da\ unidade$$

Exemplo:

A equação $x^{2n+1} + 1 = \mathbf{0}$ pode ser resolvida fazendo $z^{2n+1} - 1 = \mathbf{0}$ e multiplicando as (2n + 1) raízes da unidade por – 1.

Propriedade

É importante observar ainda que $w^{-1} = \overline{w}$, sendo w uma raiz da unidade e $\overline{w}$ seu conjugado.

Demonstração:

Se $w = a + bi$ e raiz da unidade, então o módulo é 1, ou seja, $a^2 + b^2 = 1$

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{1} = \overline{w}$$

2.2.4 Progressão Geométrica e as Raízes da Unidade

Entende-se por progressão geométrica uma sequência de números reais ou complexas, em que cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante denominada razão.

Considerando a_1 o primeiro termo da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ e q a razão, então, usando a definição:

$$a_{n+1} = q.a_n = a_1.q^n$$

As progressões geométricas de termos reais podem ser de quatro tipos difentes de acordo com o valor da razão:

Constantes

Quando o valor da razão é igual a 1, ou seja, q = 1. Neste caso os valores dos termos da PG são todos iguais ao primeiro termo a_1.

Crescente

Quando o valor da razão é maior que 1, ou seja q > 1. Neste caso os valores dos temos da progressão aumentam sempre ou diminuem sempre, conforme seja $a_i > 0$ ou $a_i < 0$, respectivamente.

Decrescente

Quando o valor da razão é maior que 0 e menor que 1, ou seja 0 < q < 1. Neste caso, os termos da progressão se aproximam de zero quando n cresce.

Oscilante

Quando o valor da razão é menor que 0 e $a_0 \neq 0$, ou seja q < 0. Neste caso o sinal dos termos da progressão oscila.

As progressões geométricas possuindo termos que não são números reais podem possuir uma propriedade interessante.

Periódiicas

As progressões de termos complexos, cujo o 1º termo ou a razão ou ambos são números não reais, podem ser periódicas, nas quais os termos repetem na mesma ordem. Um bom exemplo é a progressão geométrica formada pelas raízes da unidade.

Propriedade

As raízes da unidade formam uma progressão geométrica periódica.

Demonstração

Sejam $w_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}$, para $k \in \mathbb{Z}$, as raízes da unidade.

Seja a sequência formada a partir das raízes da unidade, como segue:

$$(w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}, w_n, w_{n+1}, \cdots)$$

Sabendo que $w_0 = 1$, que $w_2 = {w_1}^2$ e ainda, $w_3 = {w_1}^3$, e assim por diante, tem-se:

$$(1, w_1, {w_1}^2, {w_3}^3 \cdots, {w_1}^{n-1}, {w_1}^n, {w_1}^{n+1}, \cdots)$$

logo tem-se uma progressão geométrica cujo o primeiro termo é 1 e a razão é w_1.

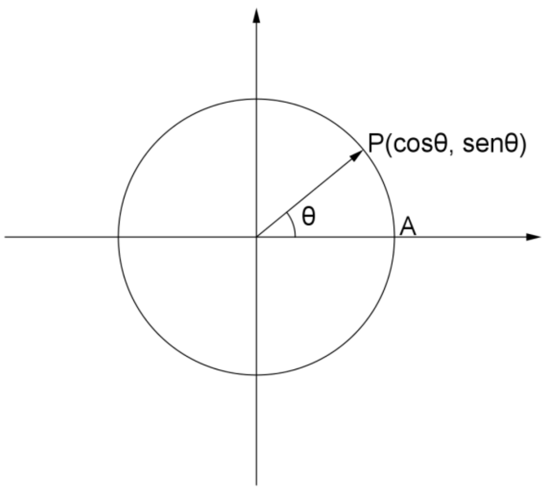
Verifica-se o caráter periódico da progressão observando que ${w_1}^n = 1$, ${w_1}^{n+1} = {w_1}^n \cdot w_1 = 1 \cdot w_1 = w_1$, e assim por diante, logo pode-se escrever:

$$(1, w_1, {w_1}^2, {w_3}^3 \cdots, {w_1}^{n-1}, 1, w_1, {w_1}^2 \cdots)$$

$$(w_0, w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n-1}, w_0, w_1, w_2, w_3, \cdots)$$

2.2.5 Par Ordenado e Número Complexo no Plano

Dado o círculo de raio 1 e os eixos cartesianos como eixos do seno e do cosseno.



(figura 1)

Se o plano representar o conjunto dos números complexos podemos escrever o número complexo localizado na circunferência unitária que é representado pelo ponto P, como:

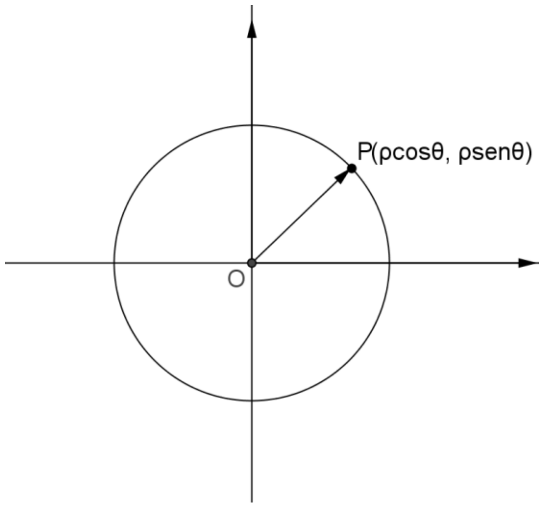
$$z = cos\theta + isen\theta$$

2.3 APECTOS GEOMÉTRICOS

As raízes da unidade podem também ser relacionadas à geometria dos polígonos regulares, pois podem ser usadas na sua construção, para obtenção dos vértices e em outros aspectos que merecem destaques.

Se faz necessário entender que para a representação geométrica deve-se representar o conjunto dos números complexos no plano real.

Sabe-se que um número complexo $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ pode ser representado no plano como um ponto P$(\rho cos\theta, \rho sen\theta)$, ou seja:



(figura 2)

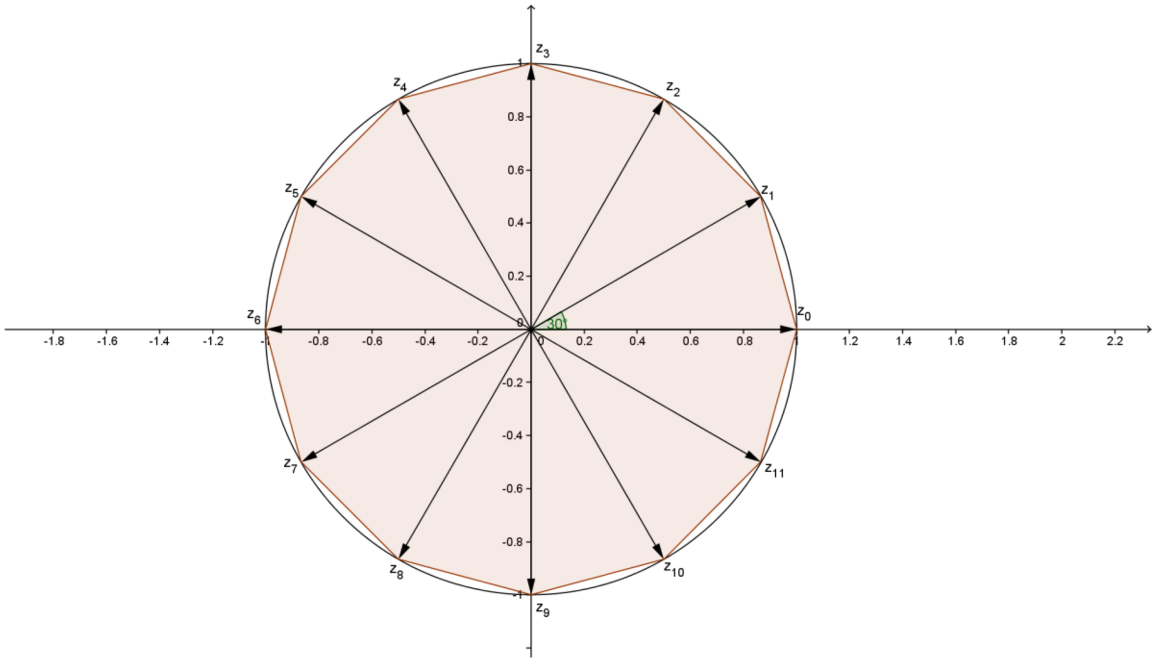
2.3.1 Polígonos Regulares e as Raízes da Unidade

No corpo dos números complexos, existem exatamente n raízes da equação $z^n - 1 = 0$ que podem ser representadas pelos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio 1.

Observando o exemplo para $z^{12} = 1$, temos um polígono de 12 lados, onde seus vértices são as raízes da unidade.

Outra curiosidade é verificar que os vetores geométricos com origem em (0, 0) e extremidade nas raízes n-ésimas da unidade, de módulo 1, estão dispostos de tal forma que a soma vetorial é nula, uma vez que

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$$



(figura 3)

Polígono regular

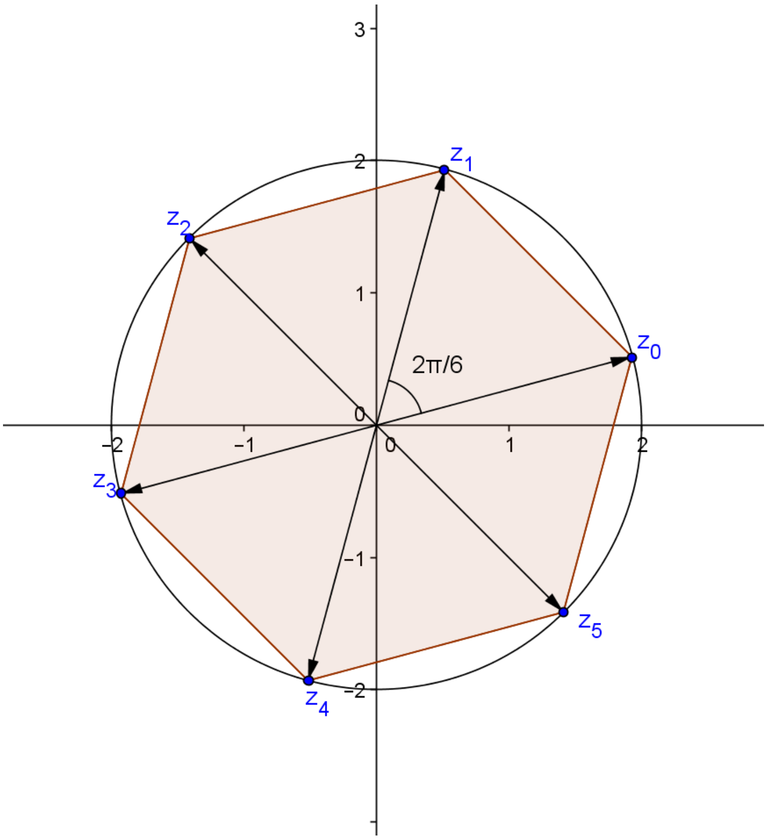
Assim, pode-se observar que para encontrar as raízes complexas de um número complexo qualquer, basta encontrar uma e rotacionar o vetor de um ângulo de $\frac{2\pi}{n}$ para a obtenção das demais raízes n-ésimas.

Como exemplo, tem-se as raízes 6ª de 64i, ou seja, $x^6 = 64i$ representadas pelos vértices z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5

$$x^6 = 64i$$

$$x = \sqrt[6]{64i}$$

Seja w_k cada uma das raízes 6ª. A partir de z_0 todos os outros pontos são construídos fazendo-se uma rotação de $\frac{2\pi}{6}$



(figura 4)

2.3.2 Relações de Semelhança e as Raízes da Unidade

As raízes da unidade podem ser utilizadas para verificar se um triângulo é equilátero, sendo dados seus vértices. Sejam os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 vértices de um triângulo. E sejam w_1, w_2 e w_3 as raízes cubicas da unidade formando um polígono regular, no caso um triângulo.

Teorema:

Os afixos dos complexos z_1, z_2 e z_3 formam um triângulo equilátero se, e somente se, $z_1 + wz_2 + w^2z_3 = 0$, onde w é uma raiz cúbica da unidade, diferente de 1

Demonstração:

Se dois triângulos são semelhantes e um deles é equilátero, então o outro também será equilátero. O triângulo formado pelas raízes cúbicas da unidade é um polígono regular e portanto um triângulo equilátero.

Sabe-se que, se os dois triângulos são semelhantes, então:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Fazendo $w_1 = 1$, $w_2 = w$ e $w_3 = w^2$ e sabendo que $1 + w + w^2 = 0$, então tem-se:

$$(z_2 - z_1).(w^2 - 1) - (z_3 - z_1).(w - 1) = 0$$

$$w^2 z_2 - z_2 - w^2 z_1 + z_1 - wz_3 + z_3 + wz_1 - z_1 = 0$$

$$(w - w^2)z_1 + (w^2 - 1)z_2 + (1 - w)z_3 = 0$$

dividindo toda a equação por $(1 – w)$, tem-se:

$$wz_1 - (w + 1)z_2 + z_3 = 0$$

Como $1 + w + w^2 = 0$, então $–(w + 1) = w^2$, logo:

$$z_1 w + z_2 w^2 + z_3 = 0$$

Multiplicando toda a equação por w^2, e sabendo que $w^3 = 1$, tem-se:

$$z_1 w^3 + z_2 w^4 + z_3 w^2 = 0$$

$$z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0$$

O que mostra o resultado.

Se a propriedade $z_1 + z_2 w + z_3 w^2 = 0$ é válida, então:

multiplicando a equação por w, segue:

$$z_1 w + z_2 w^2 + z_3 = 0$$

Como $1 + w + w^2 = 0$, então $–(w + 1) = w^2$, logo

$$wz_1 - (w + 1)z_2 + z_3 = 0$$

Multiplicando por $(1 – w)$, tem-se:

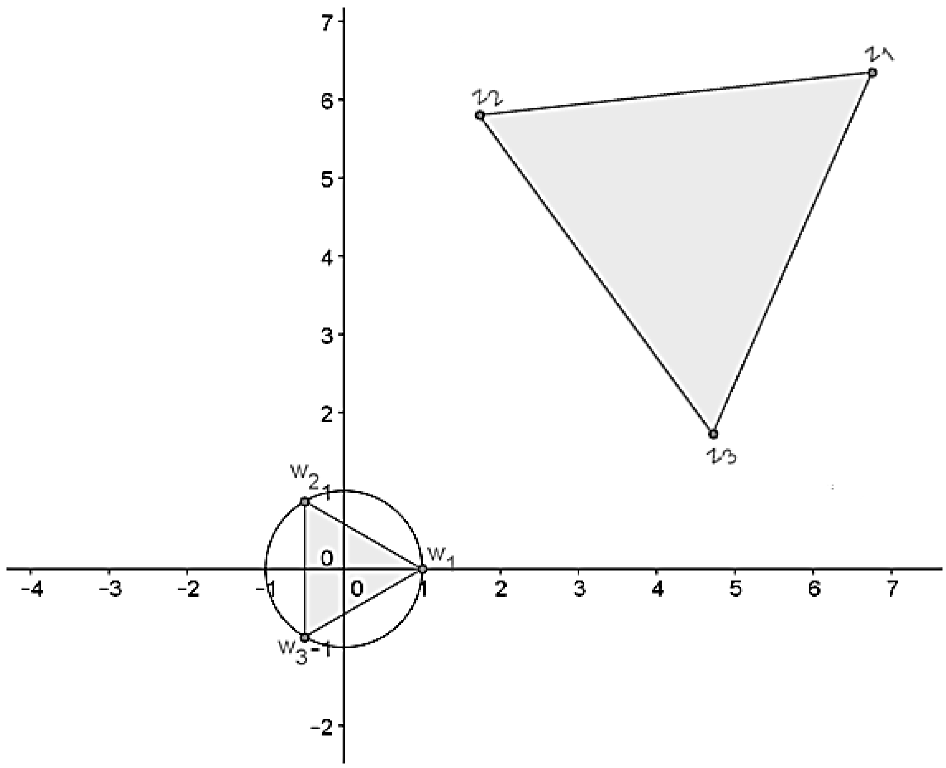
$$(w - w^2)z_1 + (w^2 - 1)z_2 + (1 - w)z_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_2 - z_1).(w^2 - 1) - (z_3 - z_1).(w - 1) = 0$$

Portanto, sendo $w_1 = 1$, $w_2 = w$ e $w_3 = w^2$ e sabendo que $1 + w + w^2 = 0$, então obtém-se:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

O que mostra que são congruentes.

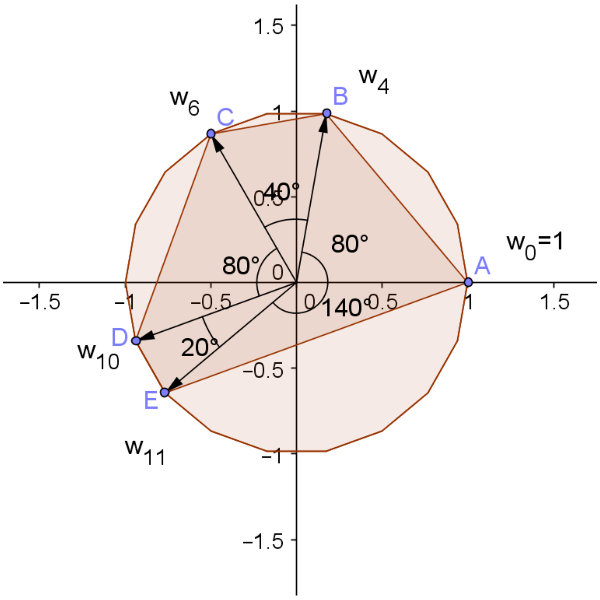


(figura 5)

Polígono qualquer inscrito

Dado um polígono qualquer inscrito num círculo de raio unitário, com ângulos centrais conhecidos ou calculáveis é possível encontrar seus vértices no plano complexo usando as raízes da unidade.

Exemplo: Como encontrar os vértices complexos de um polígono inscrito no círculo unitário com ângulos centrais de 80°, 40°, 80°, 20° e 140°?



(figura 6)

Como este não é um polígono regular, é necessário encontrar um polígono regular onde todos os vértices do pentágono apareçam entre os vértices deste novo polígono. Para isto basta tirar o MDC(80,40,20,140) = 20 e portanto dividindo 360 por 20 temos um polígono regular de 18 lados, representando as imagens das raízes da unidade na equação $z^{18} - 1 = 0$, cujas as raízes são calculáveis como foi feito em tópicos anteriores.

2.3.3 Produto de n – 1 segmentos a partir de um Vértice

Dado um polígono regular qualquer tal que seus vértices são os pontos que representam as raízes da unidade no plano complexo, verifica-se que se for construído a partir de um vértice todos os segmentos que o unem aos demais, totalizando n – 1 segmentos, o produto de suas medidas é igual a n

Demonstração:

Seja um polígono de n lados, cujos vértices são os números complexos w_k que são raízes n-ésimas da unidade.

Logo, o polígono tem como vértices os números 1, w^1, w^2, ..., w^{n-1}

Cada segmento terá medida $|1 - w_k|$ e o que se procura é o resultado de

$$\prod_{k=1}^{n-1} |1 - w_k|$$

Fazendo:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - w_k)$$

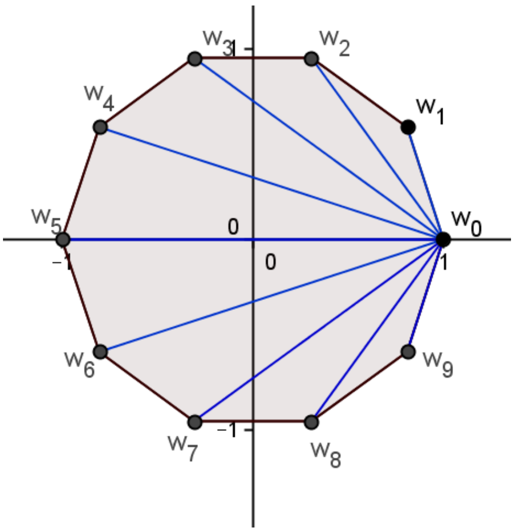
tem-se:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots z^{n-1}$$

Tomando agora o valor de z = 1, tem-se:

$$P(1) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - w_k) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots 1^{n-1} = n$$

Por exemplo, dado o polígono de 10 lados, tem-se:



(figura 7)

$$\prod_{k=1}^{9} |1 - w_9| = 10$$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema raízes da unidade é um assunto complexo, rico em detalhes que possibilitam o aprofundamento das ideias envolvendo números complexos e polinômios.

É um assunto que exige muito tempo de pesquisa, pois muitos foram os que estudaram, mas poucas são as fontes que apresentam um conjunto amplo de informações. Muito se deve dedicar para um aprofundamento satisfatório que traga junto a sensação de assunto esgotado em si, este trabalho não tem este objetivo sendo tratado aqui apenas alguns aspectos algébricos e geométricos e deixo a certeza de que muito se tem para estudar e formular.

Sobre as raízes da unidade é interessante ver que algumas operações podem ser simplificadas e que o estudo da geometria no plano complexo com as raízes da unidade pode apresentar aspectos interessantes de ser examinados e entendidos.

Observando as características algébricas e geométricas das raízes da unidade, pode-se concluir que será de grande benefício para o melhor entendimento dos estudos de números complexos, principalmente, no que diz respeito ao calculo de raízes utilizando as fórmulas de De Moivre no Ensino Médio, assim como melhor compreensão e aprofundamento de alguns conceitos sobre polinômios abordado no primeiro capítulo deste trabalho e muito estudado no Ensino Médio. Também terá relevante significado no estudo da geometria.

Ao final deste trabalho fica a certeza de que a Matemática guarda muitas surpresas que precisam ser estudadas e descobertas, como aconteceu por exemplo com as raízes da unidade, que, apesar de ser um pequeno ponto estudado no Ensino Médio dentro de um tópico sobre raízes de números complexos, se mostrou uma importante ferramenta na união de álgebra e geometria, assim como na união de assuntos estudados separadamente nos 1º 2º e 3º anos nas escolas.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ANDRADE, Antonio Aparecido de. **Códigos lineares via corpos ciclotômicos**. Dissertação para obtenção do título de mestre. Disponível em <http://www.dcce.ibilce.unesp.br/pos/webfacil/publico/File/mdl_alunos_diss_509_0.pdf>, ultimo acesso em 22/07/2013. São Paulo: Departamento de matemática, IBILCE, UNESP.

BASTOS, G. G. **Notas de Álgebra**. Fortaleza: Editora Premius – Edições Livro Técnico, 2002. 160p

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003. 496p

CANTONI, Ana Catarina Lima. Orientador: Jorge Sabatucci. **Números complexos e alguns resultados clássicos da geometria plana**. Monografia especialização. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/~pgmat/monografias/Mono007.pdf> ultimo acesso em 22/07/2013. Belo horizonte, 2008

COURANT, R. e ROBBINS, H. **¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA? – Uma exposición elemental de sus ideas y métodos**. Madrid: Aguilar, 1962. (traducción del inglês por Luis Bravo Gala)

FARIAS, S. de. **Álgebra**. 5 ed. São Paulo: Editora Globo,-----

FERNANDEZ, Cecília de Souza & SANTOS, Raphael Antunes dos. **O teorema Fundamental da Álgebra**. Trabalho apresentado na V bienal da SBM. Disponível em <http://bienalsbm.solrac.org/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC5Completo.pdf>. Paraíba: UFPB, 2010

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol 01. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004

HERSTEIN, I. N. **Tópicos de Álgebra**. Trad. Adalberto P. Bergamasco & L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Editora Polígono, 1970

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 06. 7 ed. São Paulo : Atual Editora 2005

LIMA, Matheus Dantas e. Orientadora: Shirlei Serconek. **Polinômios Ciclotômicos e Teorema de Wedderburn**. Trabalho apresentado em um Programa de iniciação científica e mestrado. Disponível em <http://eventos.ufg.br/SIEC/portalproec/sites/site5701/site/artigos/09_picme/picme.pdf>, ultimo acesso em 22/07/2013. Goias, 2012

MARQUES, Larissa Ferreira. Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani. **Zeros de Polinômios Pertubados**. Dissertação para obtenção do titulo de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional. Disponível em <http://www2.fct.unesp.br/pos/mac/dissertacoes/2013/larissa.pdf>. Último acesso em 02/09/2013. Presidente Prudente – SP, Abril de 2013.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1969.

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Uma Introdução a Teoria dos números**. Rio de Janeiro: Editora Ciencia moderna Ltda., 2008

TORRES, B. **Iniciação às estruturas algébricas**. 9 ed. São Paulo: Livraria Nobel S. A., 1978.

VOLOCH, José Felipe. **Raízes Primitivas e a Conjectura de Artin**. Disponível em <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n09_n10/n09_n10_Artigos07.pdf > ultimo acesso em 19/06/13. Rio de Janeiro: IMPA, 1989

SITES

http://www.infoescola.com/matematica/

http://www.brasilescola.com/matematica/

http://www.somatematica.com.br/

http://www.educ.fc.ul.pt/

http://www.mundoeducacao.com.br/

http://pt.wikipedia.org/

http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/

http://jkogler.wordpress.com/

http://www.gregosetroianos.mat.br/

http://www.eletrica.ufpr.br/ufpr2/professor/49/TE210/Aula%202%20complexos%20raizes.pdf

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica

http://www.paulomarques.com.br/

http://www.algosobre.com.br/matematica

http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/matematica-ef/algebra-4.php

ANEXOS

ANEXO 1 – Teorema Fundamental da Algebra

1 - O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ALGEBRA

Será apresentado uma demonstração exposta em um minicurso conduzido por Cecília de Souza Fernandez e Raphael Antunes dos Santos, e também alguns conceitos apresentados em sua obra para um melhor entendimento da demonstração do teorema.

Introdução:

O objetivo deste minicurso é apresentar uma demonstração elementar do TFA que não utiliza as técnicas usuais de análise complexa. De fato, a prova que aqui será apresentada utiliza basicamente as noções de continuidade e compacidade no plano complexo. Observamos que esta prova é conhecida. Nosso trabalho é destacar essa demonstração para professores do Ensino Médio e alunos de licenciatura em matemática, desde que tenham sido apresentados aos conceitos e teoremas básicos de compacidade e continuidade. Para esse fim, nosso texto traz uma seção sobre os números complexos e seções sobre alguns conceitos e resultados sobre compacidade e continuidade no plano complexo.

Para apresentar o enunciado e a demonstração são firmadas a seguir algumas noções básicas da topologia do plano complexo, bem como uma sequência de proposições preliminares e teoremas clássicos de topologia.

Noções básicas da topologia do plano complexo

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ e cada número real r > 0, tem-se:

$$\Delta(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$$

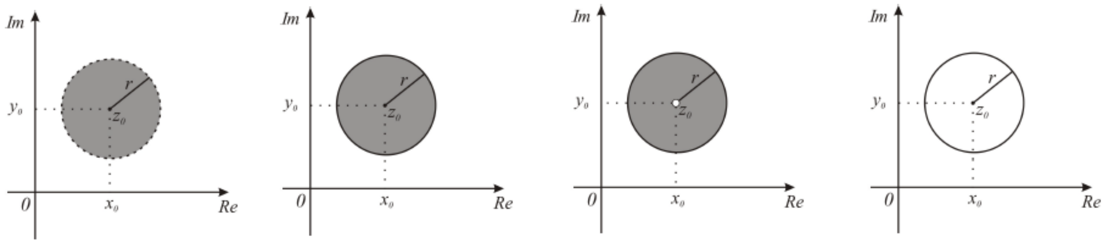
$$\bar{\Delta}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$$

$$\Delta^*(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$$

$$C(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$$

Os conjuntos $\Delta(z_0; r)$, $\bar{\Delta}(z_0; r)$, $\Delta^*(z_0; r)$ são chamados, respectivamente, de disco aberto, disco fechado e disco aberto deletado de centro z_0 e raio r. O conjunto $C(z_0; r)$ é o círculo de centro z_0 e raio r.

Notemos que, por exemplo, se considerarmos $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$, temos que $|z - z_0| < r$ equivale a $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, isto é, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, que representa o interior de um cículo no plano complexo. Analogamente obtemos as desigualdades respectivas dos outros conjuntos. Graficamente temos:



$\Delta(z_0 ; r)$ $\overline{\Delta}(z_0 ; r)$ $\Delta^*(z_0 ; r)$ $C(z_0 ; r)$

Proposição 1

Seja f(z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é raiz de f(z), então z - z_0 é um fator de f, logo existe uma função polinomial g tal que f(z) = $(z - z_0)$g(z), para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema de Weierstrass

Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito ser um conjunto compacto quando A é fechado e limitado.

Se $k \subset \mathbb{C}$ é compacto então toda função contínua $f: K \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em K, ou seja, existem a e b ∈ K tais que f(a) ≤ f(z) ≤ f(b) para todo z ∈ K.

Proposição 2

Se f(z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ é uma função polinomial em ℂ de grau n ≥ 1, então $\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)|$ = +∞

Proposição 3

Seja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função polinomial f(z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, com n ≥ 1 e $a_n \neq 0$. Se q(z) = f(z + z_0), $z \in \mathbb{C}$, então existe $1 \leq k \leq n$ tal que $q(z) = f(z_0) + z^k[a + r(z)]$, onde $a \neq 0$ e r(z) é uma função polinomial com r(0) = 0

Demonstração da proposição 3

$$f(z + z_0) = a_n(z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + \cdots + a_2(z + z_0)^2 + a_1(z + z_0) + a_0$$

$$f(z + z_0) = a_n {z_0}^n + a_{n-1} {z_0}^{n-1} + \cdots + a_2 {z_0}^2 + a_1 z_0 + a_0 + A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_2 z^2 + A_1 z$$

Onde , para cada $1 \leq j \leq n$, temos $A_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{k-j} a_k z_0^{k-j}$, logo é possível escrever:

$$f(z + z_0) = q(z) = f(z_0) + z^k(A_k + A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k})$$

Fazendo $r(z) = A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}$ e a = A_k ≠ 0, temos

$q(z) = f(z_0) + z^k[a + r(z)]$, em que r(0) = 0.

Teorema fundamental da álgebra

Toda função polinomial $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f(z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, com coeficientes complexos, de grau n ≥ 1, possui uma raiz no corpo ℂ dos números complexos.

Demonstração contida em um trabalho de Fernadez, C. S. apresentado em um minicurso na Universidade Federal da Paraíba em outubro de 2010.

Seja f(z) = $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau n ≥ 1. Se a_0 = 0, f(0) = 0. Suponhamos então a_0 = p(0) ≠ 0. Pela proposição 2 temos que para todo k > 0, existe r > 0 tal que |z| > r implica que |f(z)| > k. Assim existe r > 0 tal que |z| > r implica que |f(z)| > $|a_0|$ = |f(0)|. O disco fechado $\bar{\Delta}(0; r)$ é um conjunto compacto. Assim a função contínua $z \in \bar{\Delta}(0; r) \mapsto |f(z)| \in \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo em algum ponto z_0 de $\bar{\Delta}(0; r)$. Assim, $|z| \leq r$ implica que $|f(z)| \geq |f(z_0)|$. Como 0 ∈ $\bar{\Delta}(0; r)$, então $|f(0)| \geq |f(z_0)|$. Portanto $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, $|f|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo no ponto z_0

Mostrando-se que f(z_0) = 0. Por absurdo suponhamos que f(z_0) = c ≠ 0

$$f(z + z_0) = q(z) = f(z_0) + z^k[a + r(z)]$$

$q(z) = c + z^k[a + r(z)]$, com $a \neq 0$ e r(0) = 0

Considera-se $B = \{w \in \mathbb{C}: |w + c| < |c|\}$ o disco aberto de centro – c e raio |c|.

Toma-se agora $w \in \mathbb{C}$, tal que aw^k = - c. Note que aw^k ∈ B, pois $|aw^k + c|$ = |-c + c| = 0 < |c|, já que c ≠ 0. Consideremos a função $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por: $g(z) = zw^k$

Nota-se que g é contínua. Em particular, g é contínua em a. Assim, para $\mathcal{E} = |c| > 0$, existe δ > 0 tal que

$$g(\Delta(a; \delta)) \subset \Delta(g(a); \varepsilon)$$

Ainda verifica-se que $\Delta(g(a); \varepsilon)$ = B, observando que g(a) = aw^k = - c e $\Delta(-c; |c|) = \{w \in \mathbb{C}: |w - (-c)| < |c|\}$. Por continuidade de g, vemos que se u ∈ $\Delta(a; \delta)$, então g(u) = uw^k ∈ B. Tomemos agora a função

$$g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto r_1(z) = a + r(z)$$

Tem-se que r_1 é um polinômio e portanto uma função contínua. Em particular, r_1 é contínua em 0 e $r_1(0) = a$. Como $r_1(z) \in \Delta(a;\delta)$, tem-se que $g(r_1(z)) = w^k.(a + r(z)) \in B$. Seja $0 < t < 1$, então $r_1(tw) \in \Delta(a;\delta)$, então $g(r_1(tw)) = w^k.(a + r(tw)) \in B$ e portanto $t^k.w^k.(a + r(tw)) \in B$. logo pondo $z_1 = tw$, tem-se que

$$z_1^k[a + r(z_1)] \in B$$

Como $q(z_1) = c + z_1^k[a + r(z_1)]$, então $q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B$, o que implica que $|\, q(z_1) - c + c| < |c|$, ou seja $|\, q(z_1)| < |c|$. Daí $|f(z_1 + z_0)| < |f(z_0)|$, o que é um absurdo já que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto $f(z_0) = 0$.

ANEXO 2 – A Fórmula de Taylor

Teorema:

Seja f uma função contínua no intervalo aberto (a,b) e $f^{(n)}$ existe para todo x no intervalo (a, b), tem-se:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Fazendo b = x, temos a fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de x_0 = 0 denomina-se também polinômio de Mac-Laurin, de ordem n de f.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Usando o polinômio de Mac-Laurin para as funções $senx, cosx$ e e^x, Tem-se:

$$senx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

E ainda que:

$$isen\theta = \frac{i\theta}{1!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

A partir desta séries, observando a relação que há entre as três, podemos chegar a relação de Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$