FUNÇÕES RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO

THIAGO MARQUES ZANON JACOMINO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY
RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MARÇO - 2013

FUNÇÕES RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO

THIAGO MARQUES ZANON JACOMINO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MARÇO - 2013

FUNÇÕES RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO

THIAGO MARQUES ZANON JACOMINO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 22 de Março de 2013.

Comissão Examinadora:

Profª. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc. - UENF

Prof. Nilson Sergio Peres Stahl, D.Sc. - UENF

Prof. Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya, D.Sc. - UFF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esta dissertação aos meus familiares, aos meus amigos de curso do programa PROFMAT-UENF e a todos os professores, que participaram e se dedicaram a este projeto inovador.

Agradecimentos

Agradeço a Deus acima de tudo. Aos meus pais, por todo suporte. A minha esposa Andressa, companheira e amiga para todas as horas. Aos amigos de curso, pelos sábados incríveis que passamos juntos. E a todos os professores do programa PROFMAT-UENF, por se dedicaram intensamente e contribuírem para minha formação.

"Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

RESUMO

Neste trabalho, propomos a inserção do estudo das funções racionais, com um tratamento algébrico e gráfico, na matriz curricular de matemática no Ensino Médio. Essa introdução torna-se viável, na medida em que os alunos já possuem as ferramentas necessárias ao trabalhar com as funções polinomiais, pois o assunto já faz parte de seu programa de estudo. A abordagem das funções polinomiais costuma ter um tratamento puramente algébrico e suas operações fundamentais são tratadas de forma metódica. Ao estudar funções polinomiais, os alunos terão conhecimento que a soma, a diferença ou o produto de duas funções é ainda uma função polinomial, mas o quociente de duas funções não é, geralmente, uma polinomial. Essa observação motiva a definição de funções racionais, bem como a introdução ao seu estudo. O tratamento gráfico das funções racionais gira em torno da obtenção de suas assíntotas e a partir da análise de sua lei de formação. De forma a tornar o assunto mais interessante e atrativo para os alunos, propomos, ainda, que a segunda parte da atividade seja desenvolvida no laboratório de informática da escola, onde os mesmos poderão fazer as constatações e confirmar os resultados obtidos em sala de aula, utilizando-se para tal softwares matemáticos que possibilitam a construção de gráficos de funções.

Palavras-chave: Educação Matemática; Funções Racionais; Assíntotas; Informática na Educação.

ABSTRACT

In this paper, we propose the inclusion of the study of rational functions, with an algebraic and graphical treatment, on curriculum in Math on High School. This introduction becomes practicable, according as the students have already had the necessary tools to work with polynomial functions, because it is already part of their program of study. The approach of polynomial functions usually has a purely algebraic treatment and their fundamental operations are handled in a methodical way. Studying polynomial functions, students will have knowledge that the sum, the difference or the product of two functions is still a polynomial function, but the quotient of two functions is not usually a polynomial. This observation motivates the definition of rational functions, as well as the introduction to its study. The graphic treatment of rational functions revolves around obtaining their asymptotes and the analysis of its formation law. In order to make the subject more interesting and attractive to students, we propose further that the second part of the activity is developed in the computer lab at school, where they may make findings and confirm the results obtained in the classroom, using such software to enable mathematical graphing functions.

Keywords: Mathematics Education; Rational Functions; Asymptotes; Computers in Education.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Dentre os conteúdos da matemática, no Ensino Médio, consideramos que a formação de conceitos do campo de funções desempenha um papel fundamental na formação básica do cidadão. Falar em formação básica para a cidadania significa falar da inserção das pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, no âmbito da sociedade brasileira. Para isso, sem dúvida, metodologias que favoreçam um bom domínio de conteúdos de funções, principalmente a habilidade de construção, análise de gráficos e tabelas, precisam ser estudadas e desenvolvidas.

A noção de função foi-se construindo e se aperfeiçoando ao longo de vários séculos. O estudo de função não é restrito apenas aos interesses da matemática, elas fazem parte do nosso cotidiano e estão presentes na realização das coisas mais elementares que fazemos. Muitos problemas interessantes, que aparecem na natureza, recaem em uma modelagem de funções racionais e a construção e análise gráfica dessa função é uma ferramenta poderosa na interpretação e na compreensão do fenômeno em questão. Contudo, observamos que o tema funções racionais geralmente não é comentado nos livros didáticos de grandes autores brasileiros, que são amplamente adotados em nossas escolas.

Alguns assuntos são encontrados em raríssimas exceções em nossos livros didáticos. Em Portugal, por exemplo (em Saraiva et al. (2010)), o tratamento de funções racionais é feito na educação básica de forma bastante aprofundada, inclusive com uma abordagem de limites para os estudos de assíntotas, conteúdo pouco encontrado em livros didáticos de Ensino Médio no Brasil.

Segundo o artigo 22 da LDB (2011), a educação básica tem por finalidade "desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho em estudos posteriores". Devemos nos lembrar de que tais conteúdos são tratados em disciplinas de Cálculo I nas universidades, nos mais diversos cursos, e que contam com altos índices de reprovação, muitas vezes pela falta de base ou mesmo de noções intuitivas sobre os conteúdos citados acima.

Ao estudar funções polinomiais, os alunos têm conhecimento de que a soma, a diferença ou o produto de duas funções polinomiais é ainda uma função polinomial, mas o quociente de duas funções polinomiais não é, geralmente, uma polinomial. Esta observação motiva a definição de funções racionais, bem como a introdução ao seu estudo.

O presente trabalho, de cunho bibliográfico, busca discutir a integração do estudo das funções racionais na matriz curricular da matemática no Ensino Médio, mais precisamente após o estudo de polinômios e equações algébricas, que, geralmente, é abordado na série final desse nível de escolaridade. Esse ponto estabelecido para a introdução do estudo das funções racionais deve-se ao fato dos alunos já possuírem os pré-requisitos, ou seja, as ferramentas necessárias para a realização do trabalho, como por exemplo a divisão e a fatoração de polinômios. Esperamos, com esta proposta, evidenciar a importância do tratamento de funções racionais no Ensino Médio, bem como motivar a introdução de novos métodos de ensino em sala de aula, que valorizem o tratamento formal da matemática e também a compreensão eficaz dos alunos sobre temas importantes da disciplina. Buscaremos, assim, contribuir para a reflexão dos professores e, por consequência, para a aprendizagem efetiva dos alunos. Para melhor compreensão, apresentamos abaixo a estrutura do trabalho.

No Capítulo 2, faremos um breve tratamento histórico, desde o nascimento da álgebra até o surgimento do conceito de função. Nesse momento, levantaremos fatos interessantes que ocorreram na história da matemática e citaremos os nomes de grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dessa disciplina.

No Capítulo 3, iniciaremos com um tratamento formal de funções polinomiais, tema que faz parte da matriz curricular do ensino de matemática. Em seguida, discutiremos, de maneira análoga, as funções racionais, assunto que não é tratado no Ensino Médio. Faremos, ainda, uma abordagem algébrica dessas funções, dando maior enfoque às construções e interpretações gráficas, a partir da obtenção das assíntotas.

No Capítulo 4, apontaremos para a necessidade de se abordar as funções racionais no Ensino Médio, haja visto ser continuidade do estudo de funções polinomiais. Apresentaremos exemplos de atividades e uma maneira de se reescrever as funções racionais que, com o auxílio do professor, ajudarão os alunos a intuir o conceito de limite e identificar as assíntotas. Proporemos uma lista de exercícios que visa ampliar a compreensão dos alunos sobre o assunto. Discutiremos, ainda, de que forma os softwares educativos ou a informática pode ser um método/caminho para levar à aprendizagem do tema abordado.

Por fim, no Capítulo 5, buscaremos expor nossas considerações finais acerca do tema desenvolvido.

Capítulo 2

Do Nascimento da Álgebra às Funções

Neste capítulo, fazemos um levantamento histórico sobre temas matemáticos, do nascimento da álgebra até aplicações modernas do conceito de função.

2.1 Um Breve Histórico Sobre o Desenvolvimento da Álgebra

Os polinômios possuem um tratamento estritamente algébrico, tanto que muitos autores os chamam de equações algébricas ou polinomiais. Em se tratando de definição, os polinômios são expressões algébricas cuja forma canônica é: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$ (n natural e $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $0 \leq i \leq n$), também definido como função racional inteira da variável. O maior expoente n da incógnita de uma expressão algébrica em sua forma canônica é dito grau do polinômio.

No desenvolvimento histórico da álgebra, considera-se, em geral, que podem ser reconhecidos três estágios: o primitivo ou retórico, em que tudo era completamente escrito em palavras; um intermédio ou sincopado, em que foram adotadas algumas abreviaturas e convenções; e um final ou simbólico, em que são usados somente símbolos.

Os primeiros registros encontrados sobre equações datam de aproximadamente 1700 a.C. e pertencem a civilizações antigas, como a dos sumérios, egípcios e babilônios. Tratava-se do primeiro estágio da álgebra.

Segundo Eves (1995), os babilônios registravam seus conhecimentos em tabletas de argila cozida de tamanho variável, em escrita e notação sexagesimal cuneiformes. Descobriu-se cerca de meio milhão de tabletas, sendo que 400 foram identificadas como estritamente matemáticas. Os babilônios eram extremamente hábeis em cálculos e muito bons algebristas, por meio de procedimentos verbais desenvolveram processos algorítmicos, como a extração da raiz quadrada.

É no século III d.C., no livro *Aritmética*, de Diofanto de Alexandria, considerado o maior algebrista grego, que encontramos pela primeira vez o uso de uma letra para representar a incógnita de uma equação, essa o autor chamava *o número do problema*. A *Aritmética* de Diofanto deve ser colocada no segundo estágio do desenvolvimento histórico da álgebra, nos seus seis livros há um uso sistemático de abreviaturas para potências de números e para relações e operações.

Segundo Baumgart (1992), o termo *álgebra* advém da palavra árabe *al-jabr*, empregada no livro *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, por volta do ano 825, escrito em Bagdá, pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. Em Pitombeira e Roque (2012) encontramos a seguinte passagem: "A palavra *al-jabr*, era utilizada para designar *restauração*. [...] A palavra *al-muqabala* queria dizer algo como *balanceamento*".

Os primeiros passos para a introdução do conceito de polinômio e seu uso para a formulação de problemas de resolução de equações foram dados por Simon Stevin (1548-1620). No seu livro, *L' Arithmetique*, publicado em 1585, ele introduz uma notação exponencial semelhante para denotar as várias potências de uma variável.

François Viète viveu de 1540 até 1603 e passou pela história como o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da matemática. Dedicou-se ao estudo da matemática e, em particular, aos trabalhos de Diofanto, Cardano, Tartaglia, Bombelli e Stevin. Da leitura destes trabalhos ele teve a ideia de utilizar letras para representar quantidades. Isso já tinha sido feito no passado, até por autores como Euclides e Aristóteles, mas seu uso era pouco frequente.

Sua principal contribuição para a Álgebra aparece no seu livro *In Artem Analyticam Isagoge*, de 1591, em que trata das equações algébricas com um novo ponto de vista. Ele fez importantes progressos na notação e seu verdadeiro mérito está em ter usado letras não somente para representar a incógnita, mas também para representar os coeficientes ou quantidades conhecidas. Ele usava consoantes para representar quantidades conhecidas e reservava as vogais para representar as incógnitas. A convenção em que as letras do início do alfabeto representam quantidades conhecidas enquanto as letras do final do alfabeto representam quantidades desconhecidas foi introduzida mais tarde por René Descartes (1596-1650), grande matemático e filósofo francês, em *La Géométrie*. E assim é utilizado até hoje, muitas vezes sem que as pessoas percebam de que a convenção está sendo usada.

Além de Viète, outros matemáticos da mesma época deram suas contribuições para o aperfeiçoamento da álgebra. Entre eles, o inglês Robert Recorde (1510-1558), que em 1557 publicou o primeiro texto de álgebra da Inglaterra, *The Whetstone of Witte*. Ali ele introduz o símbolo (=) para a expressão (igual a). Esse sinal foi usado por Thomas Harriot (1560-1621), outro matemático inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viète.

A passagem para uma álgebra completamente simbólica foi obra de Descartes, que introduziu as seguintes inovações para aperfeiçoar a álgebra de Viète:

1. Criou o símbolo ($\cdot$) para a operação de multiplicação;
2. Criou a notação que usamos hoje para os expoentes de uma potenciação;
3. Passou a usar as primeiras letras do alfabeto para os coeficientes da incógnita e os termos independentes (se literais) e as últimas letras para representar as incógnitas.

Com o passar do tempo, a medida que se tentava resolver equações algébricas, a necessidade de se introduzir os números complexos foi sendo detectada. Os números complexos possuem uma história que corre paralelamente a dos números reais. O interessante é que a fundamentação atual dos números complexos antecedeu a dos números reais, no sentido que havia sido construída uma teoria que permitia entender totalmente os números complexos a partir do entendimento vigente dos números reais.

Vejamos como as equações algébricas relacionam-se com a origem dos números complexos.

2.2 Equações Algébricas e a Origem dos Números Complexos

A história dos números complexos ilustra bem como um conceito matemático pode demorar muito para ser compreendido e aceito. É uma história longa e envolta por desconfiança de grandes matemáticos, que mesmo quando os usavam resistiam em admitir sua existência.

As raízes quadradas de números negativos já eram mencionadas desde a Antiguidade, mas foi apenas no século XVI, com matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente, com a criação de um método para resolver equações cúbicas.

As primeiras ideias de números complexos começaram a surgir com uma disputa entre Gerônimo Cardano (1501-1576) e Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557) pela resolução de equações cúbicas. Percebeu-se, então, que os números reais não eram suficientes para escrever as soluções das mesmas.

Segundo Boyer (2010), o mérito de encontrar uma forma geral para se resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ deve-se ao matemático Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526), cujo nome mal é lembrado hoje. Como Ferro fez sua descoberta não se sabe, ele não chegou a publicar sua solução, mas antes de morrer teria revelado-a para um estudante, Antonio Maria Fior. Esse, buscando notoriedade, desafiou Tartaglia, um nome que começava a se destacar na época. O desafio inspirou Tartaglia a achar um método de resolver a equação cúbica por si só. Por volta de 1541, ele aprendeu a resolver os tipos de equações cúbicas propostas por Fior e, em uma competição matemática entre os dois, Fior saiu humilhado, sem conseguir resolver nenhuma das questões propostas pelo desafiado. Enquanto Fior só sabia resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, Tartaglia não só havia deduzido a resolução para esse caso, como também resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$.

A notícia do triunfo de Tartaglia chegou até Cardano e esse pediu-lhe que revelasse a solução geral da equação do terceiro grau. Tartaglia, inicialmente, teria se negado, mas após muita conversa, insistência e jurando não revelar tal descoberta, Cardano conseguiu convencer Tartaglia a lhe revelar sua solução.

Em 1543, Cardano descobriu, ao tomar conhecimento do trabalho de Scipione del

Ferro, que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver equações cúbicas, isso, na sua concepção, o desobrigava de seu juramento. Quebrando o juramento de silêncio feito a Tartaglia, Cardano publicou, em 1545, a obra intitulada *Ars Magma* (Arte Maior), em que apresentou a fórmula descoberta por Tartaglia, como verificamos em Boyer (2010).

Tartaglia nunca chegou a publicar sua obra e, apesar da fórmula que resolve equações cúbicas ser chamada em muitos países de *Fórmula de Cardano-Tartaglia*, até hoje muitos a conhecem como *Fórmula de Cardano*.

Cardano aplicou a fórmula na resolução da equação $x^3 - 15x = 4$, chegando à solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Nela, aparece a raiz quadrada de um número negativo, o que era inexistente na época. Porém, Cardano já sabia que $x = 4$ era uma solução de tal equação. Isso fez com que surgisse um impasse, pois Cardano não conseguiu compreender como aplicar a fórmula nesse caso. Tentou ainda trabalhar com raízes quadradas de números negativos para resolver o problema de determinar dois números cuja soma vale 10 e cujo produto vale 40. Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - 10x + 40 = 0$, em que as regras usuais da álgebra levavam às respostas $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.

De acordo com Cardano: "Deixando de lado toda a tortura mental envolvida, multiplica $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$. O produto é $25 - (-15) = 40$ (...). Assim progride a sutileza aritmética cujo objetivo é tão refinado quanto inútil". Ele se referia a essas raízes quadradas de números negativos como *sofísticas*, que de acordo com Houaiss e Villar (2009) é "um argumento ou raciocínio concebido com o objetivo de produzir a ilusão da verdade, que, embora simule um acordo com as regras da lógica, apresenta, na realidade, uma estrutura interna inconsistente, incorreta e deliberadamente enganosa".

Dessa maneira, o encontro dos matemáticos com os números complexos era inevitável no estudo da equação do terceiro grau. No caso em que a equação possui três raízes reais, o emprego do método de Cardano acarreta obrigatoriamente o manejo de números complexos, embora as soluções da equação sejam reais.

Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573) prosseguiu com a solução encontrada por Cardano e começou a estudar esses números por volta de 1550 , usando aquilo que chamou de *ideia louca*. Considerou $\sqrt{-1}$ um número "imaginário" e desenvolveu regras operatórias para trabalhar com esse tipo de número, operando livremente com eles. Em sua álgebra, deduziu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$.

Bombelli escreveu os resultados desses estudos por volta de 1560, mas só foi publicado em 1572 no livro *L'Algebra*, cerca de um ano antes de sua morte. Com suas regras, a fórmula de Cardano-Tartaglia funcionava perfeitamente em qualquer caso, o que o deixava seguro de seus resultados. Foi o primeiro a dar alguma importância aos números complexos.

Vemos assim que no século XVI os matemáticos começaram a usar os números complexos, aplicando-lhes às regras usuais de cálculo com números reais, embora escandalizados e dando declarações veementes de que eles "não existiam" ou eram "inúteis". Ao longo dos anos, cada matemático que tratava a questão o fazia de um modo diferente.

Coube ao suíço Leonhard Euler (1707-1783), num trabalho de 1777, publicado em 1794, definir $\sqrt{-1}$ como i, de forma que $i^2 = -1$, como ele mesmo escreveu. O fato de chamar $\sqrt{-1}$ de i ajudou a desfazer sofismas que surgiam ao atribuir, incorretamente, a esse número, propriedades similares dos números reais, no que tange a operação de radiciação.

Em 1749, Euler, que já havia usado i para uma quantidade imaginária, mas sem definir seu significado, e até então só trabalhava com $\sqrt{-1}$, mostrou que, se $a+b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, $a-b\sqrt{-1}$ também será. Mesmo assim, como a maioria até então, Euler era ainda reticente ao trabalhar com os números complexos.

Essa mesma notação definida por Euler foi depois usada pelo alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1801, e, dada sua autoridade, essa notação acabou tornando-se padrão. A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, em que Gauss batiza esses números de *números complexos*. Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Gauss já visualizava os números complexos dessa forma desde 1811.

Antes dele, matemáticos como o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam escrito sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém, a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade merecida na época.

Finalmente, em 1837, o irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

O talento e a genialidade de Gauss levaram a um dos resultados mais profundos da Matemática, o Teorema Fundamental da Álgebra. Esse afirma que toda equação polinomial possui solução no corpo dos números complexos. Além desse resultado importantíssimo, a álgebra dos números complexos originou uma nova área de investigação - a Análise Complexa - que tem um papel fundamental no desenvolvimento da Álgebra e da Teoria dos Números. Os números complexos representam uma das estruturas mais importantes da Ciência.

Atualmente, é impossível imaginar a Engenharia Elétrica (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), a Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), a Geometria Fractal ou os Sistemas Dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia) sem os números complexos. A Mecânica Quântica faz uso dos números complexos e, na Teoria da Relatividade de Einstein, o espaço tridimensional é visto como real e a dimensão relativa ao tempo como imaginário.

2.3 Um Pouco Mais de Equações Algébricas

Desde o século XVI são conhecidas fórmulas para a determinação de soluções de equações de até quarto grau. A do segundo grau já existia há bastante tempo, desde os babilônios, entretanto todos os problemas tiveram respostas que eram números positivos pelo fato de representar um comprimento.

Os matemáticos hindus estudaram os métodos babilônios, entre eles Brahmagupta (598-670), que popularizou o conceito do zero e definiu regras para a aritmética com números negativos e com o zero, que são próximas ao entendimento atual da matemática moderna. Desenvolveu a primeira solução geral da equação quadrática, que descende em parte o método moderno, no qual se admite quantidades negativas.

Os árabes não souberam sobre os avanços dos hindus. Assim eles não tiveram nem quantidades negativas, nem abreviaturas para as incógnitas. Entretanto, Al-Khowarizmi

(790-850) deu uma classificação numérica a tipos diferentes de equações quadráticas.

A fórmula resolutiva de equação do segundo grau é conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara, pois foi Bháskara (1114-1185) quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta dando uma solução ao problema da divisão por zero. Bháskara, em seu tratado conhecido como *Livati*, compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias e novas.

Das equações de terceiro grau nascem os números complexos. Depois que Tartaglia mostrou a Cardano como resolver equações cúbicas, ele encorajou seu aluno Lodovico Ferrari (1522-1565) a examinar equações de quarto grau. Ferrari conseguiu resolver essas equações com, talvez, o mais elegante de todos os métodos que foram achados para resolver este tipo de problema. Cardano publicou os casos de equações de grau quatro em *Ars Magna*.

Anos depois da publicação de *Ars Magna*, de Cardano, muitos matemáticos contribuíram para a solução de equações cúbicas e quárticas. François Viète (1540-1603), Thomas Harriot (1560-1621), Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708), Leonhard Euler (1707-1783), Étienne Bezout (1730-1783) e René Descartes (1596-1650), todos inventaram diversos métodos. Gottfried Leibniz (1646-1716) fez muitas contribuições à compreensão de equações cúbicas, talvez o mais impressionante é uma verificação direta da fórmula de Cardano-Tartaglia. Leibniz fez reconstrução da equação cúbica e de suas três raízes. Ninguém antes de Leibniz parece ter pensado neste método direto de verificação, era a primeira verdadeira prova algébrica da fórmula, sendo que as provas anteriores eram estritamente de natureza geométrica.

A procura de uma fórmula que determinasse as raízes de uma equação polinomial de grau maior que quatro, que dependesse apenas de seus coeficientes e envolvesse as seis operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) só terminou em 1799, quando Paolo Ruffini (1765-1822) publicou uma obra sobre a teoria das equações, na qual mostra que a solução algébrica de equações de grau maior do que quatro é impossível.

O estudo dos polinômios foi tão amplamente explorado pelos matemáticos que existem muitos outros envolvidos em seu desenvolvimento, além dos já citados até aqui. Os aprofundamentos algébricos possibilitaram o aparecimento de áreas muito avançadas de cálculo, entre elas a Análise Matemática, preparando o campo para grandes avanços na pesquisa científica.

2.4 O Nascimento das Funções

Para alguns pesquisadores, a noção de dependência teve início há cerca de 6000 anos, porém foi somente nos três últimos séculos que houve o desenvolvimento do conceito formal de função, com estreita ligação com problemas relacionados ao Cálculo e à Análise Matemática.

A origem da noção de função confunde-se, assim, com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Foi Isaac Newton (1642-1727) quem se aproximou muito do sentido moderno de função, utilizando variável dependente e designando quantidades obtidas a partir de outras, por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Gottfried Leibniz (1646-1716) foi o primeiro a empregar a palavra função, em 1673, com um significado puramente geométrico. Ele a compreendia como sendo quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.

Com o decorrer do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Com esse intuito, a palavra função foi usada em uma correspondência entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748), o qual publicara mais tarde um artigo de grande divulgação, definindo função de certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes.

Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Leonhard Euler, antigo aluno de Johann Bernoulli, que definiu funções no sentido analítico e também introduziu o símbolo $f(x)$. No segundo volume de *Introduction in Analysin Infinitorum*, Euler diferenciou as funções contínuas e descontínuas, levando em consideração a lei de formação de cada função.

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que iria vigorar pelos séculos XVIII e XIX. O conceito de função que hoje nos parece simples é resultado de uma evolução histórica, conduzindo sempre à abstração e que, só no século XIX, teve o seu final, mais precisamente em 1837, com o matemático alemão Johann Dirichlet (1805-1859). Esse apresentou a ideia de variável como símbolo indistinto a qualquer elemento de um conjunto numérico. Logo após, caracterizou o conceito central: "Uma variável y se diz função de uma variável x, se, para todo o valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente."

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial, entre outros), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na matemática atual. No Ensino Médio, o estudo de funções inicia-se por meio da noção de conjuntos. Dá-se ênfase ao estudo das funções afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas e polinomiais, sendo essa última praticamente sem tratamento gráfico.

Modernamente, as funções racionais assumem toda a sua importância como as únicas funções holomorfas na esfera de Riemann. As generalizações são encontradas na Geometria Algébrica, um ramo da Matemática muito ativo, que combina técnicas de álgebra abstrata, especialmente de álgebra comutativa, com a linguagem e os problemas da geometria.

Capítulo 3

Funções Racionais - Uma Abordagem Formal

No presente capítulo, buscamos, formalmente, conceituar funções polinomiais e racionais, priorizando o tratamento gáfico das funções racionais, a partir da obtenção de suas assíntotas.

3.1 Funções Polinomiais

Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser definida como

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

tal que $a_k = 0$, $\forall k > m$, para um certo m; $a_k \in \mathbb{R}$ são os coeficientes; x é a variável independente; e $f(x)$ é a variável dependente.

Os polinômios são expressões algébricas cuja forma canônica é:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

com n natural e $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $0 \leq i \leq n$.

A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão algébrica) e, reciprocamente, a cada polinômio está associada uma única função. Em Carvalho et al. (2006a) encontramos a seguinte passagem: "Esta correspondência (polinômio) $\to$ (função polinomial) [...] trata-se de uma correspondência biunívoca". Diante disso, inferimos que não há necessidade de fazer distinção entre polinômio e função polinomial.

Escrevendo na forma de somatório, podemos definir facilmente a soma e o produto dos polinômios, como podemos encontrar em Neto (2012).

Definição 3.1 *Dados os polinômios reais*

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k,$$

onde $a_k = 0$, $\forall k > n$ *e* $b_k = 0$, $\forall k > m$, *com* $k, m, n \in \mathbb{N}$, *a soma e o produto de* f *e* g, *denotadas respectivamente por* $f + g$ *e* $f \cdot g$, *são os polinômios*

$$(f+g)(x) = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) x^k \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k,$$

onde $c_k = \sum\limits_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j=k}} a_i b_j$.

A fórmula para o coeficiente c_k é necessária para que valha a propriedade distributiva do produto em relação a soma.

Definição 3.2 *A diferença* $f - g$ *entre* f *e* g *é definida por* $f - g = f + (-g)$. *Logo, dado* f, *existe um único polinômio* g *tal que* $f + g = g + f = 0$.

De fato, sendo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, *é imediato que* $g(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - ... - a_nx^n$ *é esse único polinômio, que podemos denotar por* $-f$.

Em se tratando de divisão de polinômios, consideremos dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, com $g(x) \neq 0$.

Definição 3.3 *Dividir* $f(x)$ *por* $g(x)$ *consiste em determinar dois outros polinômios,* $q(x)$ *(quociente) e* $r(x)$ *(resto), que verifiquem as seguintes condições:*

1. $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$

2. *O grau de* $r(x)$ *é menor do que o grau de* $g(x)$ *ou* $r(x) = 0$

Teorema 3.1 *O quociente e o resto da divisão de um polinômio* f *por um polinômio* g *(não identicamente nulo) existem e são únicos.*

A demonstração do Teorema 3.1 será omitida e pode ser encontrada de forma detalhada em Carvalho et al. (2006b).

3.2 Funções Racionais

Como já comentamos, o estudo das funções racionais é motivado pelo fato de que o quociente de funções polinomiais não é, geralmente, uma função polinomial. Iniciamos o estudo de funções racionais com uma definição formal da mesma.

Definição 3.4 *A função f definida pela equação $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais e $q(x) \neq 0$, é denominada* ***função racional****.*

A função racional diz-se própria se o grau de $p(x)$ é estritamente menor do que o grau de $q(x)$ e diz-se imprópria caso contrário.

Podemos observar que as funções polinomiais são casos particulares de funções racionais, bastando para isso fazer $q(x) = 1$ na definição acima. Alguns exemplos de funções racionais:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
3. $h(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$
4. $p(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

Temos ainda que se f e g são funções racionais, então a soma, o produto, a diferença e o quociente de f e g são funções racionais. Entretanto, se extrairmos a raiz quadrada de uma função racional, pode-se encontrar uma função que não seja racional. Este fato conduz à definição de funções algébricas, que foge à finalidade deste trabalho.

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento de uma função racional em torno dos seus pontos críticos - pontos em que a função racional não está definida - e também o seu comportamento no infinito, em busca de uma representação gráfica para tal função.

Quando pensamos em representação gráfica de funções racionais, é imprescindível a determinação de suas assíntotas. De uma maneira geral, podemos definir a assíntota de uma função como a reta ou a curva que limita o gráfico da mesma. Ou seja, a distância entre a assíntota e um ponto do gráfico se torna infinitamente pequena, na medida em que esse ponto se afasta indefinidamente da origem.

As assíntotas podem ser verticais, horizontais, oblíquas, curvilíneas e servem como importante instrumento de auxílio para a construção do gráfico de funções racionais.

Neste capítulo, veremos ainda como determinar as assíntotas verticais e horizontais de uma função racional e voltaremos também nossa atenção para as assíntotas oblíquas, que são pouco discutidas em livros de Cálculo.

3.3 Assíntota Vertical

Determinar as assíntotas verticais de uma função racional depende basicamente de conhecer o domínio dessa função. Através de seu domínio, conhecemos seus pontos críticos, que como já definimos, tratam-se dos pontos para os quais a função racional não está definida. É importante frisar que os pontos críticos serão apenas candidatos às assíntotas verticais, ou seja, um ponto crítico de uma função racional não necessariamente será uma assíntota vertical dessa função. Isso acontece, pois uma raiz do denominador de uma função racional (ponto crítico) pode também ser raiz do numerador dessa função, ocasionando uma simplificação da função. Veremos isso com mais detalhes nos exemplos adiante.

Podemos enunciar a definição de assíntota vertical de uma função racional da seguinte maneira.

Definição 3.5 *A linha reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:*

(i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 3.1 *Determinar as assíntotas verticais da função:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Observe que podemos fatorar o denominador e escrever a função da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1).(x-1)}$$

Nossa função não é definida para os valores de $x = 1$ *e* $x = -1$*. Essas retas são nossas candidatas a assíntotas verticais. Vamos verificar, inicialmente, para* $x = 1$*.*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$$

Logo, pela Definição 3.5, já podemos afirmar que $x = 1$ *é uma assíntota vertical de* f*. Observe também que:*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$$

Verifiquemos agora para $x = -1$*.*

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty \quad \textit{e} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$$

Concluímos que tanto $x = 1$ *quanto* $x = -1$ *são assíntotas verticais de* f*, como podemos observar na Figura 3.1.*

É importante lembrar que os valores em que a função não é definida serão apenas candidatos a assíntotas, mas não serão necessariamente assíntotas verticais. Podemos verificar isso com o exemplo abaixo.

Exemplo 3.2 *Determinar as assíntotas verticais da função:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

Observe inicialmente que $f(x)$ *está definida em* $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$*. Embora* $x = 1$ *e* $x = -1$ *anulem o denominador da função acima, a reta* $x = -1$ *é assíntota vertical ao gráfico de* f*, mas o mesmo não ocorre com a reta* $x = 1$*. De fato, temos:*

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

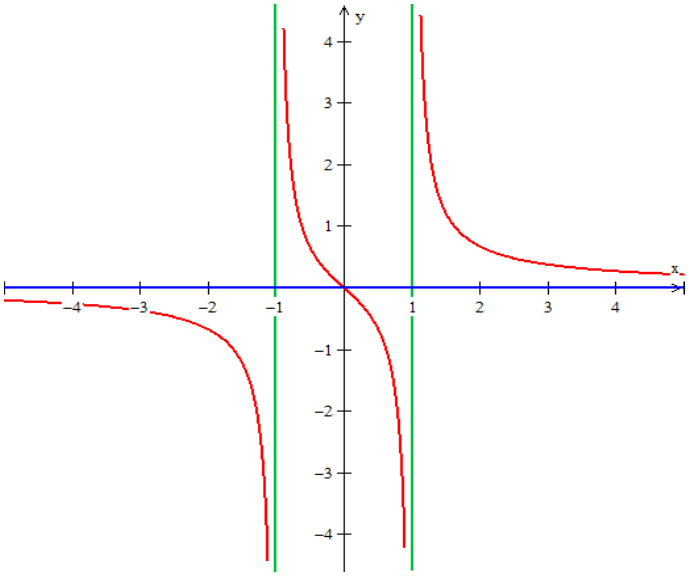

Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Esse limite já garante que a reta $x = -1$ é assíntota vertical da função. Note agora que a reta $x = 1$ anula tanto o numerador quanto o denominador da nossa função, portanto temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(2x+1)}{(x-1).(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

Assim, além da reta $x = 1$ não ser assíntota vertical, f possui uma descontinuidade nesse ponto, por não estar definida no mesmo, como mostra a Figura 3.2.

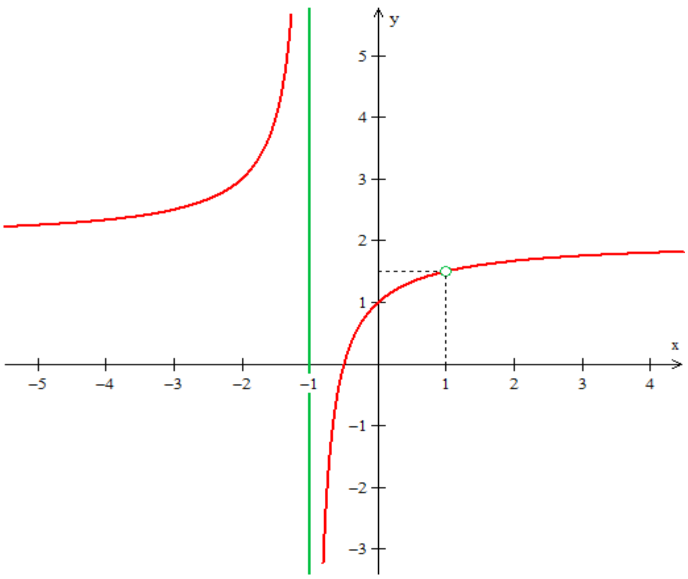

Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

Observe que escrever os polinômios que compõem o numerador e o denominador da função racional, na forma fatorada, nos ajuda a estabelecer o domínio da função e facilita o trabalho de se calcular e identificar as assíntotas verticais.

3.4 Assíntota Horizontal

As assíntotas verticais envolvem limites infinitos, enquanto assíntotas horizontais envolvem limites no infinito. Uma outra diferença importante, e ao mesmo tempo interessante, é que uma função racional pode possuir inúmeras assíntotas verticais, dependendo de seus pontos críticos, enquanto possuirá apenas uma assíntota horizontal, como segue a definição.

Definição 3.6 *A linha reta horizontal $y = b$ é chamada de assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

De uma forma geral, consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

onde m e n são inteiros positivos, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$, definida em $\mathbb{R} - D$, onde D é o conjunto das raízes do denominador de f. Vamos estudar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos

$$f(x) = \frac{a_m x^m . \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right)}{b_n x^n . \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{x} + ... + \frac{b_1}{b_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n}\frac{1}{x^n}\right)}$$

Como,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right) = 1$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{x} + ... + \frac{b_1}{b_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n}\frac{1}{x^n}\right) = 1$$

segue que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}.$$

Temos assim três casos a considerar:

- 1º caso: $m > n$.

  Neste caso, $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ é um polinômio de grau $m - n \geq 1$, e recaímos nas situações segundo $\frac{a_m}{b_n}$ é positivo ou negativo. Ou seja:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = +\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} > 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = -\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} < 0$.

  Se $m - n$ é um inteiro positivo par, então

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = +\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} > 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = -\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} < 0$.

  Se $m - n$ é um inteiro positivo ímpar, então

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = -\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} > 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = +\infty$ se $\frac{a_m}{b_n} < 0$.

- 2º caso: $m = n$.

  Neste caso, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_m}{b^n}$.

- 3º caso: $m < n$.

  Neste caso, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b^n} x^{m-n} = 0$.

  Portanto, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Concluímos, então, que uma função racional só possuirá assíntota horizontal se o grau do polinômio do numerador for menor ou igual ao grau do polinômio do denominador. Agora, podemos calcular a assíntota horizontal sem maiores dificuldades.

Exemplo 3.3 *Determinar a assíntota horizontal da função do Exemplo 3.1.*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Pela Definição 3.6, devemos calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Uma vez que o polinômio do denominador tende ao infinito muito mais rápido do que o polinômio do numerador.

Assim, $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Como podemos verificar na Figura 3.1, em que o eixo Ox (reta na cor azul) é a assíntota horizontal da função.

Exemplo 3.4 *Determinar a assíntota horizontal da função do Exemplo 3.2.*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

Pela Definição 3.6, devemos calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Colocando o termo x^2 em evidência, tanto no numerador quanto no denominador, podemos facilmente calcular os limites.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2.\left(2 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2.\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(2 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = 2$$

Assim, $y = 2$ é uma assíntota horizontal, como pode-se observar na Figura 3.3.

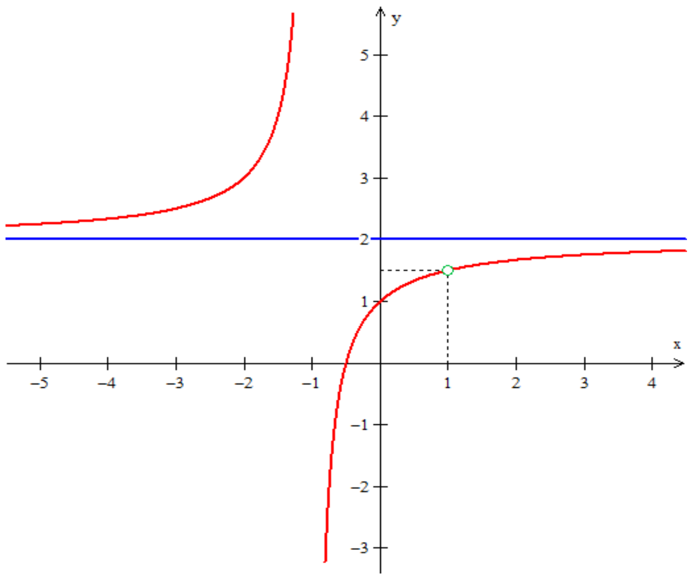

Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

3.5 Assíntota Oblíqua

As assíntotas oblíquas ocorrem em funções racionais cujo grau do polinômio do numerador excede em uma unidade o grau do polinômio do denominador, além de ser única, fato que justificaremos posteriormente.

Definição 3.7 *A reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f se, e somente se, $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.*

Observe que as assíntotas horizontais são nada mais do que assíntotas oblíquas quando $a = 0$. Sendo assim, teríamos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - b] = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \lim_{x \to \pm\infty} b = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Vamos mostrar duas maneiras de se determinar a assíntota oblíqua. Na primeira maneira, vamos usar a Definição 3.7:

$$y = ax + b \text{ é uma assíntota oblíqua} \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Sendo assim, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x. \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Como o limite deve ser zero, devemos ter $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0$, pois, caso contrário, o limite do produto simplesmente não existiria.

Segue então que $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0$. Dessa forma, temos que $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conhecendo o coeficiente a e usando a equação da definição, obtemos que $b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$. Logo, temos a reta $y = ax + b$, que é uma assíntota oblíqua do gráfico de f. A determinação da assíntota é feita de maneira análoga para x tendendo a menos infinito. Uma observação importante é que o gráfico de f pode ter somente uma assíntota oblíqua e no caso de funções algébricas, no máximo, duas assíntotas oblíquas (ou horizontais), pois, caso contrário, teríamos dois resultados diferentes, por exemplo, para x tendendo a mais infinito, o que é absurdo.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.5 *Determinar a assíntota oblíqua da função:*

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

Comecemos com a determinação do coeficiente a da reta $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\frac{x^2 - x - 1}{x - 2}}{x} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

Vamos agora determinar o coeficiente b da reta.

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x - 1}{x - 2} \right] = 1$$

Logo, como podemos constatar na Figura 3.4, temos que a reta $y = x + 1$ é assíntota oblíqua da função dada.

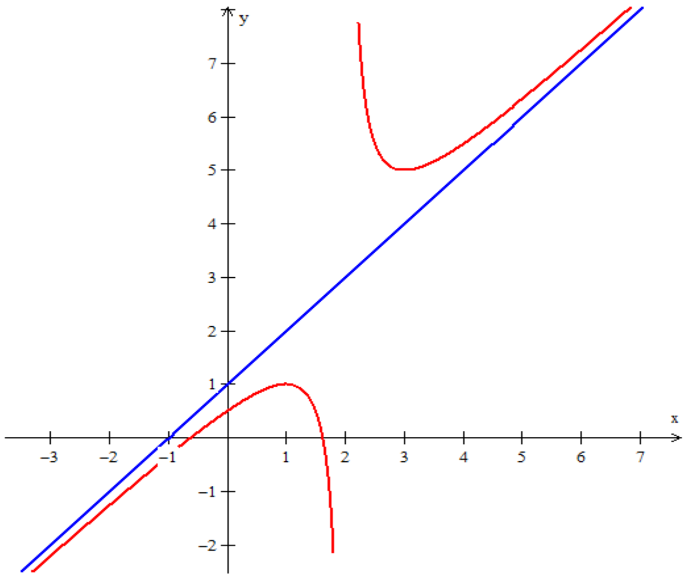

Figura 3.4: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

Observe que, se refizermos os cálculos para x tendendo a menos infinito, obteremos os mesmos valores para os coeficientes a e b. Esse fato ocorre, pois, funções racionais possuem apenas uma assíntota oblíqua. Deve-se ficar atento, porque existem funções que possuem duas assíntotas oblíquas, que podem ser obtidas fazendo x tender a mais infinito e x tender a menos infinito. Como exemplo, pode-se tomar a função algébrica definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, que possui as retas $y = x + 1$ e $y = -x - 1$ como suas assíntotas oblíquas. Vamos fazer a verificação das assíntotas dessa função.

Exemplo 3.6 *Determinar as assíntotas oblíquas da função algébrica:*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$$

Utilizando-se do mesmo método do Exemplo 3.5, iniciamos com a determinação do coeficiente a da reta $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{|\, x \,| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x}\right]$$

Devido a definição de $|\, x \,|$, temos dois casos a considerar:

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x}\right] = 1$$

e

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x}\right] = -1$$

Vamos agora determinar o coeficiente b da reta.

Para $a_1 = 1$, temos que:

$$b_1 = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\pm\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x]$$

Para calcular esse limite vamos utilizar a racionalização de frações. Sendo assim, temos:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} =$$

$$\frac{x^2 + 2x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x}$$

Portanto:

$$b_1 = \lim_{x\to\pm\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{x\left(\frac{|\, x \,|}{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)}$$

$$b_1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{5}{x}}{\dfrac{|\,x\,|}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}$$

Dessa forma, para x tendendo a mais infinito, temos que $b_1 = 1$ e para x tendendo a menos infinito, temos o denominador igual a zero, logo não existe b_1. Portanto, a reta $y = x+1$ é uma das assíntotas oblíquas da função.

Para $a_2 = -1$, temos que:

$$b_2 = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt{x^2+2x+5}+x]$$

Utilizando-se da racionalização de frações, temos:

$$\sqrt{x^2+2x+5}+x = \frac{(\sqrt{x^2+2x+5}+x)\cdot(\sqrt{x^2+2x+5}-x)}{\sqrt{x^2+2x+5}-x} =$$

$$\frac{x^2+2x+5-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}-x} = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}-x}$$

Portanto:

$$b_2 = \lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt{x^2+2x+5}+x] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\left(2+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(\dfrac{|\,x\,|}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1\right)}$$

$$b_2 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{5}{x}}{\dfrac{|\,x\,|}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}$$

Agora, para x tendendo a mais infinito temos o denominador igual a zero, logo não existe b_2 e, para x tendendo a menos infinito, temos que $b_2 = -1$. Portanto, a reta $y = -x-1$ é a outra assíntota oblíqua da função.

Concluímos, então, que a função algébrica definida por $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$, possui as retas $y = x+1$ e $y = -x-1$ como suas assíntotas oblíquas, como podemos verificar na Figura 3.5.

Vejamos agora a segunda maneira de se determinar a assíntota oblíqua de uma função racional.

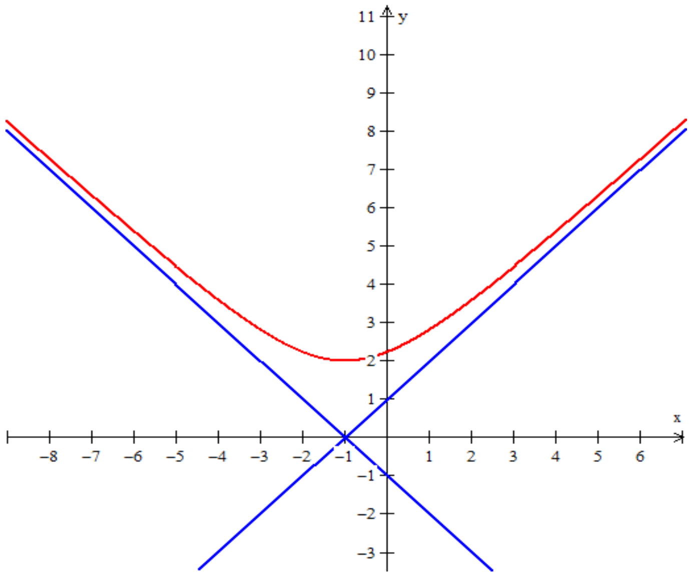

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

Se uma função racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é tal que o grau do numerador excede o grau do denominador em uma unidade, então o gráfico de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ terá uma assíntota oblíqua.

Fazendo a divisão de $p(x)$ por $q(x)$ temos: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = ax + b + \dfrac{r(x)}{q(x)}$, onde $ax + b$ é o quociente e $r(x)$ é o resto da divisão e pelo Teorema 3.1, $ax + b$ é único, justificando a afirmação feita de que a assíntota oblíqua de uma função racional é única.

Assim:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left[ax + b + \frac{r(x)}{q(x)}\right] = \lim_{x\to+\infty} (ax + b) + \lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{q(x)}$$

Como $r(x)$ tem o grau menor do que $q(x)$, tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r(x)}{q(x)} = 0$.

Desta forma,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} (ax + b)$$

Logo, quando x tende a mais infinito, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ vai se aproximando de $ax + b$. Analogamente, para x tendendo a menos infinito. Vamos exemplificar utilizando a mesma função do Exemplo 3.5.

Exemplo 3.7 *Determinar a assíntota oblíqua da função:*

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

Efetuando a divisão, temos que:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = (x + 1) + \frac{1}{x - 2}$$

Logo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \left[(x + 1) + \frac{1}{x - 2} \right] = \lim_{x \to +\infty} (x + 1)$$

Pois sabemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$*.*

Assim, a reta $y = x + 1$ *é assíntota oblíqua do gráfico de* f*. Observe a Figura 3.4.*

Se na função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, o grau de $p(x)$ exceder em duas ou mais unidades o grau de $q(x)$, então temos uma assíntota curvilínea. Como, por exemplo, a função $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8}{x - 1}$, que possui assíntota curvilínea $f(x) = x^2$. Como mostra a Figura 3.6.

De fato, efetuando a divisão do numerador pelo denominador da função em questão, obtemos:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8}{x - 1} = x^2 - \frac{8}{x - 1}$$

Logo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x^2 - \frac{8}{x - 1} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} x^2$$

Dessa maneira, na medida em que os valores de x tendem a mais infinito e a menos infinito, o gráfico de $f(x)$ se aproxima da curva x^2. Observe ainda que $x = 1$ é assíntota vertical da função. Para estudarmos o comportamento da função em torno desse ponto, basta analisar o termo $-\frac{8}{x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1^+} \left[-\frac{8}{x - 1} \right] = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} \left[-\frac{8}{x - 1} \right] = +\infty$$

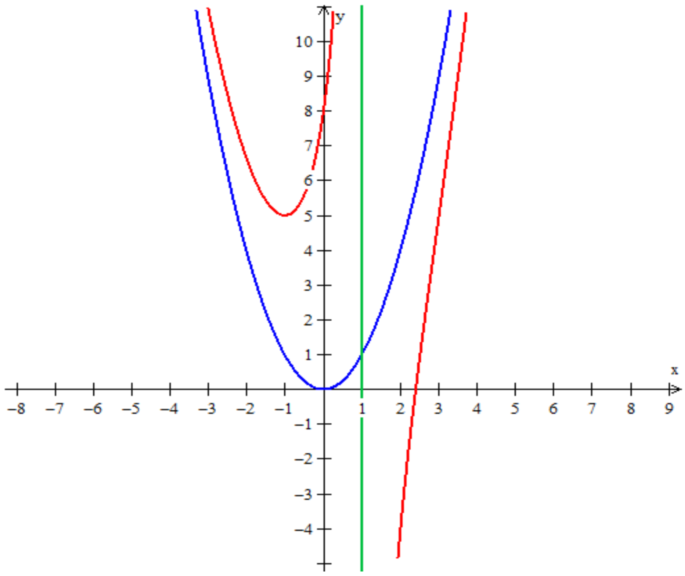

Figura 3.6: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 8}{x - 1}$

Capítulo 4

Funções Racionais: Aplicações no Ensino Médio

Neste capítulo, buscamos propor a inserção do estudo das funções racionais no Ensino Médio. A viabilidade se dá, uma vez que, para o tratamento das funções racionais, os alunos necessitam apenas de noções de polinômios e equações polinomiais, assunto que já é tratado na matriz curricular dessa modalidade de ensino. Tratamos também da importância da utilização de uma metodologia diferenciada de ensino-aprendizagem por parte do professor. Novas estratégias de ensino podem e devem ser investigadas, desenvolvidas e adotadas, com o objetivo de transformar a ação pedagógica do docente, de modo a ministrar uma aula muito mais atrativa ao aluno, despertando seu interesse, o gosto pela matemática e, por consequência, a melhora do rendimento acadêmico dos mesmos.

4.1 Funções Racionais no Ensino Médio

O único contato que os alunos têm com as funções racionais e algébricas é feito no primeiro ano do Ensino Médio, ainda que o nome de tais funções sequer seja comentado. Esse contato acontece no estudo da função real de variável real, contudo a abordagem se restringe à obtenção do domínio e imagem de tais funções. Para encontrar o domínio é analisada a lei de associação da função, obtendo as restrições da variável x para que a função exista. Para essas restrições dá-se o nome de condição de existência.

Uma informação importante para a construção do gráfico de funções racionais é a obtenção das assíntotas, sejam verticais, horizontais ou oblíquas. Só para termos uma noção de como as assíntotas são abordadas no Ensino Médio, citamos a seguir dois livros didáticos de importantes autores. Em Dante (2010), a palavra assíntota aparece no estudo da hipérbole, no entanto, não há uma definição, nem uma noção intuitiva do que essa palavra significa. Já Almeida et al. (2010) sequer comenta sobre assíntotas no desenvolvimento do estudo das hipérboles. Esses autores são considerados, no meio didático, os mais completos, em termos de abordagem e definições matemáticas. Uma vez que o estudo de assíntotas dos mesmos é bastante superficial ou inexistente, confirma-se nosso argumento de que o assunto é pouco explorado nas salas de aula.

Com o estudo das funções racionais, as assíntotas vão deixar de ser um objeto desconhecido aos olhos dos alunos e vão ajudar no melhor entendimento e na construção de gráficos mais fiéis das hipérboles, visto que as assíntotas estão diretamente ligadas à excentricidade e curvatura das mesmas.

Como já comentamos, o estudo das funções racionais é motivado pelo estudo dos polinômios, que acontece na terceira série do Ensino Médio, e pelo fato de que nas operações com polinômios, o quociente de funções polinomiais não é, geralmente, uma função polinomial. Dessa forma, propomos que o trabalho sobre funções racionais seja iniciado com os discentes a partir da apresentação da definição de funções racionais e de toda uma teoria relevante sobre o assunto (ver Seção 3.2).

A partir do desenvolvimento teórico, incluindo definição e exemplos iniciais, podemos propor uma primeira atividade a ser realizada pelos alunos com a supervisão do professor.

Atividade 4.1 *Com os conhecimentos já adquiridos sobre funções, esboce o gráfico da função racional* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Iniciamos o problema com o que os alunos, teoricamente, já estão habituados a fazer, determinar a condição de existência e escrever o domínio da função em questão.

As restrições para os valores de x *em funções racionais sempre estarão no denominador. Devemos ter o denominador diferente de zero, portanto,* x *deve ser diferente de zero, ou seja,* $x \neq 0$*. Com isso, podemos escrever o domínio da função racional* $D = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\}$*. Como* x *não pode assumir o zero como valor, logo não teremos uma ordenada* $y = f(x)$ *correspondente a zero. Mas, o que acontece quando tomamos valores, tanto positivo quanto negativo, para* x *cada vez mais próximos de zero? Observe* *que aqui deve ficar claro para o aluno o que significa cada vez mais próximo de zero, tanto com valores positivos quanto com valores negativos. Lembramos que nossos alunos desconhecem a definição de limite e o que estamos querendo intuir é o seguinte: qual é o valor de* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$*?*

A pergunta que poderia ser feita é: qual o valor de $f(x)$ *quando tomamos valores, positivos, cada vez menores, como por exemplo:* $0,1; 0,01; ...; 0,00001$ *e assim por diante? Dessa forma, o aluno poderá perceber que para valores cada vez mais próximos de zero, ou seja, quando* x *tende a zero por valores positivos,* $f(x)$ *tende a crescer cada vez mais, ou seja,* $f(x)$ *tende ao infinito, uma vez que estamos efetuando a divisão de* 1 *por um número cada vez mais próximo de* 0*. O que acabamos de fazer e concluir é que* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$*. De forma análoga, chegamos à conclusão de que* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$*. Nesse último limite, é interessante ressaltar que o resultado negativo se dá, pois estamos dividindo um número positivo por um número negativo, cada vez mais próximo de zero.*

Propomos agora verificar o comportamento da função, quando tomamos valores para x*, cada vez maiores, ou seja, o que acontece com* $f(x)$ *quando tomamos para* x *valores como* $100, 1000, ..., 1000000$ *e assim por diante? Os alunos poderão observar que estamos dividindo o número* 1 *por valores cada vez maiores e com isso teremos como resultado para* $f(x)$ *valores positivos cada vez mais próximos de zero. Intuitivamente, o que estamos fazendo é calcular limites no infinito. Nesse caso,* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$*. Analogamente, agora com valores negativos, teremos como resultado para* $f(x)$ *valores negativos cada vez mais próximos de zero, ou seja,* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$*.*

Com essas informações em mãos, podemos esboçar o gráfico da função racional desejada, como mostra a Figura 4.1.

Note que o que fizemos foi intuir o que seriam exatamente as definições de assíntotas verticais e horizontais, sem a necessidade de utilizar as definições das mesmas. Na atividade proposta, $x = 0$ *é assíntota vertical (reta na cor verde na Figura 4.1, correspondente ao eixo das ordenadas do plano) e* $y = 0$ *é assíntota horizontal (reta na cor azul na Figura 4.1, correspondente ao eixo das abscissas). Concluímos, então, que os eixos coordenados do plano cartesiano são as assíntotas da função racional* $f(x) = \frac{1}{x}$*.*

Após essa primeira atividade, supervisionada pelo professor, é interessante que se

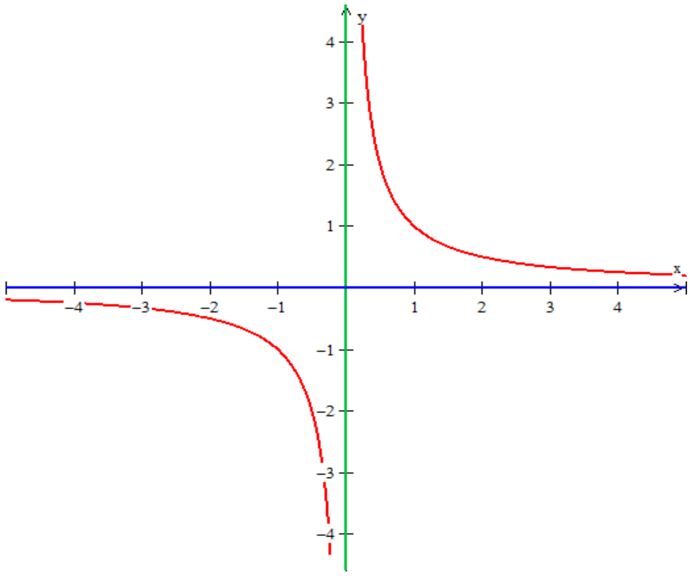

Figura 4.1: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

proponha atividades de fixação, contendo funções racionais que tenham comportamento semelhante ao da função dada inicialmente, para que os alunos possam trabalhar individualmente ou em grupo. A família de funções do tipo $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ com $a \in \mathbb{R}$, por exemplo, possui o mesmo comportamento e os alunos podem praticar com valores específicos para a constante a, ou até mesmo construir uma generalização para o gráfico dessas funções quando $a \in \mathbb{R}$.

Para uma segunda atividade propomos a seguinte questão.

Atividade 4.2 *Esboce o gráfico da função racional* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

O interessante em propor tal questão é que a mesma possui apenas uma pequena variação se comparada às funções anteriores. Inicialmente, o professor poderia induzir os alunos a terem a percepção de que $f(x) > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e gerar o seguinte questionamento: porque isso acontece? Tal discussão poderá render boas descobertas.*

De uma maneira geral, para esboçar o gráfico da função proposta, o aluno seguiria o mesmo padrão da Atividade 4.1, iniciando com a obtenção do domínio; estudando o comportamento da função para x *tendendo a zero por valores positivos, por valores negativos e para* x *no infinito. Com o gráfico pronto, os alunos vão concluir e confirmar que de fato* $f(x) > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, como havia intuído o professor.*

As atividade propostas até agora são os passos iniciais para que os alunos tenham os primeiros contatos com gráficos de funções racionais. É claro que o método de analisar a função, a partir dos valores de x, utilizado até aqui torna-se muito trabalhoso e inviável em funções racionais mais complexas, como as presentes nos Exemplos 3.2 e 3.5. O objetivo é que os alunos possam utilizar seus conhecimentos em polinômios para tornar o trabalho mais fácil. As ferramentas necessárias serão a fatoração e a divisão de polinômios.

Utilizando a Definição 3.3 e o Teorema 3.1, podemos reescrever a função racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Se dividirmos $f(x)$ por $g(x)$, pela definição e teorema já mencionados temos que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \tag{4.1}$$

Dividindo a equação (4.1) por $g(x)$ obtemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \tag{4.2}$$

Escrevendo a função racional, no formato mostrado na equação (4.2), podemos facilmente identificar as assíntotas verticais e a assíntota horizontal ou oblíqua. De fato, as candidatas às assíntotas verticais são os pontos críticos da função racional, ou seja, as raízes do polinômio $g(x)$. Se o termo $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ for escrito na forma irredutível (ou seja, simplificada), temos que as assíntotas verticais são os pontos críticos desse termo. Mostraremos, em um exemplo mais adiante, porque é importante escrever o termo mencionado na forma irredutível. Já a assíntota horizontal ou oblíqua é exatamente o polinômio $q(x)$ na equação (4.2), uma vez que no termo $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ o grau de $r(x)$ é sempre menor do que o grau de $g(x)$, logo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x\to\pm\infty} q(x)$$

Vejamos a aplicação do que dissemos em um exemplo.

Exemplo 4.1 *Determinar as assíntotas e esboçar o gráfico da função:*

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-5}$$

Iniciamos escrevendo $f(x)$ como a equação (4.2). Dividindo o polinômio $2x-4$ pelo polinômio $x-5$, obtemos 2 como quociente e 6 como o resto da divisão. Logo:

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-5} = 2 + \frac{6}{x-5}$$

Observe que o termo $\dfrac{6}{x-5}$ *está escrito na forma irredutível, ou seja, não pode ser simplificado. Assim, pelo que discutimos, o ponto crítico da função é* $x = 5$*, sendo portanto a assíntota vertical. Temos ainda que:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2+\frac{6}{x-5}\right] = 2$$

No limite acima, o termo $\dfrac{6}{x-5}$ *tende a zero, portanto,* $y = 2$ *é assíntota horizontal da função. Para esboçar o gráfico, devemos ainda analisar o comportamento da função para valores em torno do ponto crítico. Nesse caso, em torno de* $x = 5$*. Escrevendo a função racional como descrito na equação (4.2) também possibilita estudar o comportamento da mesma de maneira muito mais prática do que sua forma original. Na realidade, tudo que temos a fazer é estudar o comportamento do termo* $\dfrac{6}{x-5}$ *para* x *tendendo a* 5 *pela direita e pela esquerda, uma vez que este resultado só será incrementado da constante* 2*.*

Mais uma vez, como citado no início do texto, devemos deixar claro para os alunos o significado de x *tendendo a* 5 *pela direita e pela esquerda. Por mera inspeção temos que:*

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{6}{x-5} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 5^-}\frac{6}{x-5} = -\infty$$

Com essas informações em mãos, podemos esboçar o gráfico da função em questão. A curva em vermelho na Figura 4.2 é o gráfico de $f(x)$*, em que a reta na cor azul,* $y = 2$*, é a assíntota horizontal e a reta na cor verde,* $x = 5$*, é a assíntota vertical.*

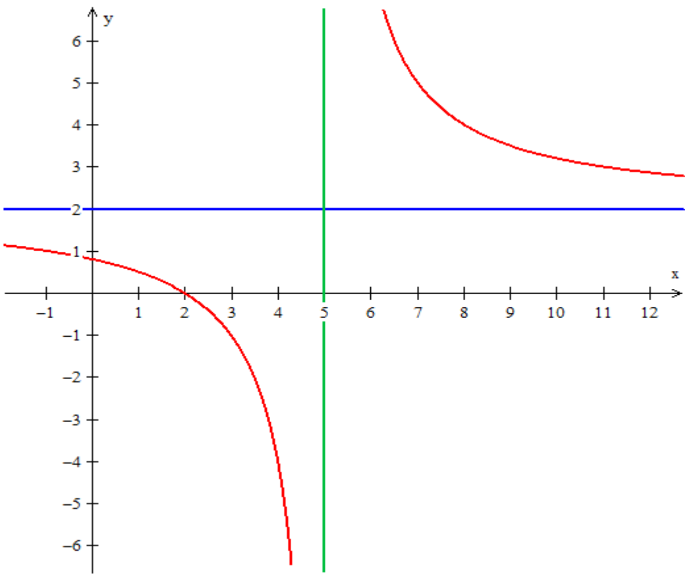

Figura 4.2: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-5}$

É importante deixar claro que, neste exemplo, acrescentamos os cálculos dos limites no infinito e dos limites laterais para mera confirmação das assíntotas da função. O que os alunos devem realizar, em sala de aula, é um estudo intuitivo do comportamento da função, da mesma forma que foi explicitado na Atividade 4.1.

O método sugerido e utilizado no Exemplo 4.1 possibilitará ao aluno obter as assíntotas e esboçar o gráfico de funções racionais sem maiores dificuldades, uma vez que só utiliza ferramentas já conhecidas pelo mesmo e requer uma breve análise do comportamento da função em torno de seus pontos críticos. É interessante ressaltar que, apesar de termos comentado sobre a existência de funções racionais com assíntotas curvilíneas, neste trabalho nos limitamos a desenvolver o assunto até assíntotas oblíquas, devido ao nível de análise mais rigoroso e detalhado que tais funções requerem.

Vejamos agora como a função racional do Exemplo 3.2 pode ser resolvida através do método sugerido aos alunos.

Exemplo 4.2 *Determinar as assíntotas e esboçar o gráfico da função:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

Escrevendo a função na forma descrita na equação (4.2), temos:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = 2 - \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

Observe que o termo $-\dfrac{x-1}{x^2-1}$ *não está escrito na forma irredutível, ou seja, o termo pode ser simplificado. Voltamos então ao que dissemos, sobre a necessidade de sua simplificação, principalmente pelo fato de facilitar a identificação das assíntotas e a análise do comportamento da função. O termo escrito sem a simplicação nos leva a duas candidatas às assíntotas verticais,* $x = 1$ *e* $x = -1$*, pontos críticos da função. No entanto,* $x = 1$ *também anula o numerador, chegando a uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$*. Como* 1 *é raiz do numerador e do denominador do termo em questão, efetuamos a simplificação através da fatoração dos polinômios e com isso teremos, de forma explícita, a assíntota vertical. Sendo assim:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = 2 - \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 2 - \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

Agora podemos claramente identificar as assíntotas. Na Figura 4.3, a reta $y = 2$, na cor azul, é a assíntota horizontal, a reta $x = -1$, na cor verde, é a assíntota vertical e a curva em vermelho é o gráfico de $f(x)$.

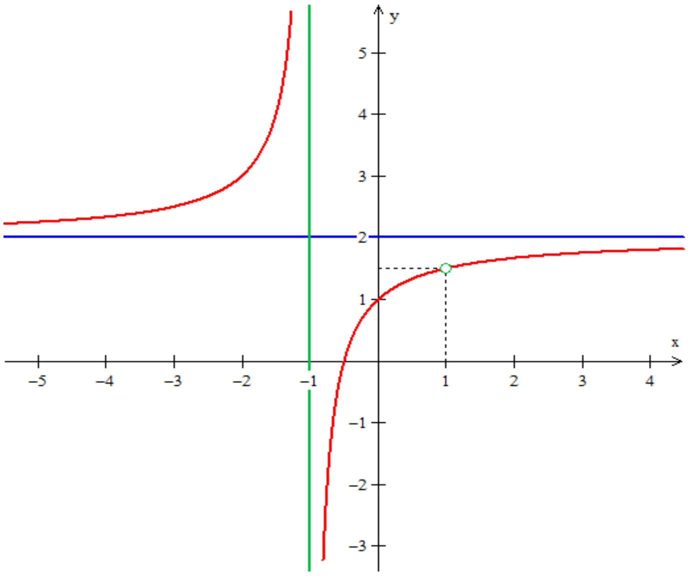

Figura 4.3: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

Deve-se ainda, ficar atento em relação ao domínio da função em questão. A mesma, não possui assíntota no ponto $x = 1$, mas possui uma descontinuidade, por não está definida neste, e mesmo após reescrever a função racional, o seu domínio deverá ser mantido, ou seja, a descontinuidade não deixará de existir.

4.2 Atividades Sobre Funções Racionais

Nessa seção, sugerimos uma lista de exercícios que pode ser utilizada em sala de aula com o intuito de revisar, fixar e aprofundar os conceitos aqui apresentados.

Atividade 4.3 *Simplifique as expressões racionais e indique para que valores de x a simplificação é válida:*

1. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 3}$
2. $\dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 3x}$
3. $\dfrac{2x + 10}{x^2 - 25}$

4. $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

Atividade 4.4 *Escreva as seguintes funções na forma descrita na equação (4.2), indicando o domínio, contradomínio, as equações das assíntotas e os zeros:*

1. $f(x)=\dfrac{2x-6}{x+2}$
2. $g(x)=\dfrac{3x+4}{x-1}$
3. $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$
4. $p(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x-3}$
5. $i(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

Atividade 4.5 *Considere as funções racionais definidas por:*

$$f(x)=-\frac{1}{x-2},\quad g(x)=\frac{3x+7}{x+4},\quad h(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1},\quad p(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

1. *Determine o domínio de cada uma das funções.*
2. *Determine a equação das assíntotas verticais do gráfico de cada uma das funções.*
3. *Determine a equação da assíntota horizontal (se existir) ou oblíqua (se existir) do gráfico de cada uma das funções.*
4. *Represente graficamente cada uma das funções. A sua representação deverá incluir as assíntotas (verticais e horizontal ou oblíqua).*

Atividade 4.6 *O custo de produção de uma unidade de um certo modelo de aparelho depende do número de aparelhos produzidos e é dado, em reais, por:*

$$c(n)=\frac{500n+600}{4n}, \text{ sendo } n \text{ o número de aparelhos produzidos.}$$

1. *Determine, analiticamente, o custo de produção de 100 aparelhos.*
2. *Se o custo de produção de uma unidade foi 200 reais, quantos aparelhos foram produzidos?*

3. *Quantos aparelhos deverão ser produzidos para que o custo de produção, por aparelho, não ultrapasse* 150 *reais?*

Atividade 4.7 *No dia* 1 *de Janeiro de* 2013 *foi lançado um novo produto num certo supermercado. Estima-se que ao fim de* t *meses, ele detenha uma porcentagem do mercado (dentro dos produtos similares vendidos nesse supermercado), dada pela expressão:*

$$p(t) = 80 - \frac{70}{t+1}, \text{ com } t \geq 0$$

1. *Qual a porcentagem de mercado que esse produto atingiu no final do primeiro trimestre? (aproximado às unidades)*

2. *A partir de que mês este produto terá mais de* 70% *do mercado?*

Atividade 4.8 *Para uma viagem ao Rio de Janeiro alugou-se um ônibus por* 1500 *reais e já estão inscritas* 15 *pessoas. Se se inscreverem mais* x *pessoas:*

1. *Determine uma expressão que lhe permita calcular o preço* $P(x)$ *por pessoa.*

2. *Represente graficamente a função* $P(x)$*.*

3. *Determine o número* x *de pessoas que ainda terão de se inscrever para que cada pessoa pague* 20 *reais ou menos.*

Atividade 4.9 *Uma empresa de fabricação de computadores conclui que, em média, um novo empregado, após* t *dias de prática, pode montar, por dia, um número* n *de certos componentes, sendo:*

$$n(t) = \frac{20t}{t+2}, \text{ com } t \geq 0$$

1. *Determine as assíntotas, vertical e horizontal, do gráfico de* n*.*

2. *Faça um esboço do gráfico da função e interprete o gráfico quando* t *cresce indefinidamente.*

Atividade 4.10 *Numa experiência laboratorial, uma substância foi retirada de um forno às* $10h$ *sendo, posteriormente, feito o registo da sua temperatura em diversos momentos ao*

Tempo t, em minutos	0	1	4	6	9	13	27	34	49	60
Temperatura T em °C	86	51	30	26	23	21	18,5	18	17,4	17,2

Tabela 4.1: Registro da temperatura em função do tempo

longo de uma hora. Os valores obtidos encontram-se na tabela seguinte, onde t representa o tempo (em minutos) decorrido após a substância ser retirada do forno. T (em °C) representa a temperatura.

1. *Através de várias experiências e com a ajuda da calculadora, encontre um modelo matemático do tipo $T(t) = b + \dfrac{a}{t-c}$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ que se ajuste às observações efetuadas e registradas na tabela.*

2. *De acordo com o modelo encontrado, preveja a temperatura a que se encontra a substância, meia hora após ter sido retirada do forno.*

3. *Indique, com aproximação ao segundo, ao fim de quanto tempo, após ser retirada do forno, a substância atingiu a temperatura de 40 °C.*

4. *Para dar continuidade à experiência, é necessário proceder a uma mistura desta substância com outras em determinadas condições. Essa mistura só deve ser efetuada se a substância em causa estiver a uma temperatura compreendida entre os 17 °C e os 21 °C. A que horas poderiam os técnicos efetuar a mistura? Fundamente a sua opinião.*

5. *Atendendo às condições mencionadas no item anterior indique, explicitando o seu raciocínio, se a mistura poderia ser efetuada às $10h20m$.*

6. *Admitindo que o modelo se mantém válido para além de uma hora, indique o valor da temperatura ambiente. Justifique o seu raciocínio.*

4.3 A Informática na Aprendizagem Matemática

Desde a instituição da matemática como disciplina, essa tem sido ensinada, pela maioria dos professores, de forma teórica e técnica, sem qualquer envolvimento com fatos reais e se baseiam no regime tradicional de ensino. A maneira abstrata de se ensinar, ou seja, a forma completamente desvinculada da disciplina a tudo que o aluno conhece no seu cotidiano, o afasta da aprendizagem e ele praticamente só assimila que determinada teoria ou técnica é utilizada para a resolução de exercícios específicos de determinado conteúdo da matemática. De maneira geral, a matemática é tratada como uma ciência compartimentada, sem qualquer interligação com outras ciências.

As disciplinas que envolvem a manipulação de cálculos, como a química, a física e principalmente a matemática, têm-se mostrado como as mais desafiadoras para os alunos. Isso fica claro se considerarmos as dificuldades que a maioria dos educandos apresentam na resolução de problemas lógicos e os altos índices de reprovação constatados nas mesmas. Esse fato decorre, de certa forma, da atividade educacional ser centrada apenas em decorar técnicas de resolução de exercícios ou lista de fórmulas.

Muitas vezes, o ensino da matemática é sobremaneira paradoxal, exigindo do professor, antenado ao seu tempo, um maior cuidado na escolha de suas metodologias de ensino. De acordo com os PCNs (2001):

> *O ensino de matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita freqüência em relação à sua aprendizagem [...] A constatação de sua importância apóia-se no fato de que a matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.*

Como vemos, o ensino da matemática, apesar de ser de grande importância para o desenvolvimento intelectual e do raciocínio lógico de qualquer pessoa, ainda é visto como um obstáculo difícil de ser transposto. De certa maneira, podemos dizer que esta postura diante da disciplina possui raízes históricas na metodologia tradicional, vigente em grande parte dos períodos históricos e resistente até hoje, na maioria das salas de aula.

Na concepção desta tendência, tradicional, o professor era o centro do processo educativo, o detentor de todo o conhecimento cultural acumulado no decorrer da história do homem. Este professor via-se como sabedor de todas as coisas e, por isso, não buscava inovar, repetindo sempre suas metodologias impositivas e muitas vezes ineficazes. Nesse tipo de educação, cabia ao aluno o papel de expectador do conhecimento, passivo a qualquer atitude do professor.

Nos dias de hoje, apesar de muitos professores criticarem a tendência tradicional, é exatamente o que reproduzem em suas aulas. Diante desta realidade, um caminho a seguir é a inovação no ensino das disciplinas exatas, fomentando o gosto pela matemática e o aprendizado dos alunos. Atento a estas necessidades, os PCNs (2001) apresentam medidas que devem ser observadas pelo professor:

> *A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significado para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama.*

Desse modo, acreditamos que novas estratégias de ensino devem ser investigadas, desenvolvidas e adotadas, com o objetivo de transformar a ação pedagógica do docente e, assim, obter um enriquecimento dos processos utilizados em aula e, por consequência, a melhora do rendimento acadêmico dos estudantes.

Diante da realidade educacional brasileira, que contém tantos índices negativos, é importante que o estudioso de matemática busque em seus trabalhos uma maneira de modificar este quadro, vigente há tantos anos.

Uma das perspectivas que vem se destacando como um método/caminho para levar à aprendizagem eficaz da matemática é a sua integração com a informática. Esta relação possui inúmeras vertentes, ficando a critério do profissional da educação escolher qual delas irá seguir, mas uma boa opinião engloba os softwares matemáticos que envolvem situações matemáticas concretas.

De acordo com Perissé (2010) a palavra computador vem do verbo latino *putare* que significa contar, calcular, verificar, avaliar, pensar. O *com* de computador remete à preposição latina *cum*, indicando que o computador computa várias coisas ao mesmo tempo. Indo além, o autor ainda diz que esta máquina computa com alguém, em companhia de alguém, com o seu próprio criador. A Matemática está incorporada à Informática desde a origem do termo *computador* e seus antecessores - máquinas que realizavam tarefas antes manuais, por meio de algoritmos. Com o avanço tecnológico, as primeiras máquinas de calcular se tornaram cada vez mais complexas, capazes de processar grande quantidade de informações em pouco tempo.

Não podemos mais ignorar a tecnologia e nem seu potencial nos processos que envolvem a aprendizagem. Especificamente, em relação ao computador, pensamos que, uma vez presente no ambiente de aprendizagem, ele não é neutro e interfere no processo, exercendo uma influência que deve ser considerada e investigada.

Atualmente, a ferramenta computacional é uma das possibilidades de trabalho em sala de aula, ocupando, inclusive, papel de destaque nas orientações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs. As recomendações contidas neste documento são baseadas em estudos e experiências que consideram essa ferramenta como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Além disso, os PCNs (2001) sugerem uma reflexão sobre a relação entre a Matemática e a Tecnologia, baseada nas necessidades de renovação de saberes.

> *Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. [...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.*

Sendo assim, ferramentas computacionais, como softwares educacionais, podem ser capazes de propiciar ambientes com novas propostas pedagógicas de aprendizagem, principalmente no ensino de matemática.

O que confere a um software o caráter educacional é a sua aplicação no processo ensino-aprendizagem. Contudo, Oliveira (2001) enquadra os softwares educacionais em duas categorias, quais sejam:

- Software aplicativo, nesta categoria entram aqueles que não foram desenvolvidos com finalidades educativas, mas podem ser utilizados para este fim. São os programas de uso geral no mercado e utilizados em contexto de ensino, como por exemplo, o Banco de Dados, Processadores de Texto, Planilhas Eletrônicas e Editores Gráficos.

- Software educativo, o objetivo destes programas é favorecer os processos de ensino-aprendizagem, são desenvolvidos especialmente para construir o conhecimento relativo a um conteúdo didático. Entre as características principais de um software educativo estão o seu caráter didático com a finalidade de levar o aluno/usuário a construir o conhecimento em uma determinada área, sua possibilidade de interação, mediada pelo professor, entre usuário e programa e sua facilidade de uso, permitindo que qualquer usuário possa desenvolver suas atividades com facilidade.

O emprego destas tecnologias, em especial dos programas educacionais, no ensino de matemática na Educação Básica, deve provocar mudanças curriculares e pedagógicas, se o que se pretende é explorar a potencialidade destas tecnologias no sentido de melhorar a prática do professor em sala de aula, possibilitando aulas mais dinâmicas e melhoria da aprendizagem desta área de conhecimento.

O uso destes recursos implica mudanças no papel do professor de matemática. A construção de vários gráficos com precisão e rapidez poderá trazer uma mudança importante no enfoque dos mesmos. Passa-se da construção manual para a análise interpretativa dos dados, possibilitando-se uma apropriação significativa do conhecimento matemático pelo estudante, conforme atestam algumas pesquisas. A construção geométrica de funções, com o uso dos recursos computacionais, por exemplo, possibilita um enfoque maior à análise gráfica, que a própria construção da figura. Segundo Candau (1998):

> *[...] da demonstração de "como" construir um gráfico para explicações e perguntas sobre "o que o gráfico está a dizer" acerca de uma expressão algébrica ou de uma situação que ele representa. As tarefas dos alunos mudam de marcar pontos e traçar curvas para escrever explicações de pontos chave de gráficos ou de características globais.*

É importante destacar o cuidado que o professor deve ter, nas primeiras atividades, ao enfatizar a possibilidade de uma falsa visualização gráfica que surge na tela do computador, nessas construções, em função do fator escala. Esse é o momento de ele levar o estudante a refletir sobre a representação apresentada e sobre quais os recursos informáticos podem ser utilizados para a visualização da figura real. Pode-se explorar, inicialmente, atividades de construção de gráficos manuais, em comparativo com as construídas no computador para análise e correção.

O uso do computador no processo educativo, em Matemática, possibilita novas práticas pedagógicas. Permite, pelo uso de seus recursos tecnológicos, pesquisar, fazer antecipações e simulações, confirmar ideias prévias, experimentar, criar soluções e construir novas formas de representação mental. Permite auxiliar a interação com diferentes formas de representação simbólica, como gráficos, planilhas, textos, notas musicais, ícones e imagens, além do conhecimento socializado, a superação dos problemas no processo ensino e aprendizagem de Matemática, pois permite um trabalho que respeita distintos ritmos de aprendizagem, auxiliando na correção dos desníveis de conhecimento.

Diante desta realidade, a informática pode apresentar-se como uma metodologia que aproximará a matemática de situações reais, tornando-a mais concreta, motivadora e fazendo com que passe a ser mais acessível aos alunos.

Sabedores dessa situação, nós, professores, precisamos sempre nos dedicar a tornar o ensino dessa disciplina mais dinâmico e satisfatório. Dessa forma, podemos considerar que a apresentação da proposta é uma tentativa de desbravar caminhos que poderão nortear o trabalho do professor junto a seus educandos, de modo a transformar atitudes.

4.4 Softwares Para Construção de Gráficos

Sugerimos que as atividades, propostas nas seções anteriores, sejam aplicadas em sala de aula e que os gráficos das funções racionais sejam construídos pelos alunos, de forma individual ou em grupo, sob a supervisão e orientação do professor, de maneira a fixar os conceitos apresentados. Propomos, ainda, que o laboratório de informática seja utilizado, para que os alunos, através de softwares matemáticos que possibilitam a construção de gráficos de funções, possam fazer a constatação e a confirmação dos resultados obtidos.

Existem vários softwares matemáticos que possibilitam a construção de gráficos de funções. Muitos deles podem ser encontrados e baixados da internet de forma gratuita. Entre os programas de fácil manuseio e download gratuito, indicamos o Winplot e o Geogebra. Estes softwares possuem uma interface de fácil visualização e a construção de funções obedece a meros comandos de controle. A utilização destes programas dinamiza as aulas, pois de forma visual e coletiva as inúmeras funções podem ser representadas e analisadas detalhadamente, bem como a solução de situações problemas pelo método gráfico.

O Winplot é um programa que possibilita gerar gráficos 2D e 3D, a partir de funções ou equações matemáticas. Podem-se obter resultados rápidos, diretos e excelentes, sendo ainda possível a personalização dos gráficos, com alteração de cores e espessuras de traçados. O *menu* do sistema é simples, existe uma opção de *Ajuda* em todas as partes. Aceita funções matemáticas de modo natural. É um programa completo e totalmente em português, o que é um facilitador para os alunos. O Geogebra é um programa de matemática dinâmica, feito com o intuito de ser utilizado em sala de aula, que já ganhou vários prêmios. Possibilita o desenho de funções e, ainda, a alteração dinâmica deles, após serem construídos. Também está em português e é de fácil utilização.

4.5 Atividades com o Geogebra

Os softwares matemáticos, sugeridos para a construção dos gráficos das funções racionais no laboratório de informática, possuem, ainda, uma ferramenta bastante interessante, que possibilita a animação do gráfico construído a partir da variação de uma ou mais constantes, chamadas de parâmetros. Nesta seção, iremos propor algumas atividades a serem realizadas com o Geogebra, para realizar a animação do gráfico. A elaboração das animações possibilita aos alunos visualizarem o comportamento de determinada função racional, quando variamos uma ou mais de suas constantes.

Exemplo 4.3 *Tomemos como um exemplo inicial a função* $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$*, com* $a \in \mathbb{R}$*.*

Nesta atividade, os alunos podem observar o comportamento da função a partir da variação da constante a*. Para* $a = 0$ *já fizemos a discussão sobre a função na Atividade 4.1.*

O primeiro passo é definir um "Controle Deslizante" para a constante a*. Para isso, basta clicar no ícone de "Controle Deslizante", na barra de ferramentas do programa, e em seguida clicar na "Janela de Visualização" e "Aplicar". Como já observamos neste estudo, para a função* $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$*, temos que a assíntota vertical é* $x = a$ *e a assíntota horizontal é* $y = 0$*.*

Desta forma, no campo "Entrada" definimos os comandos $f(x) = 1/(x-a)$*,* $x = a$ *e* $y = 0$*. Na "Janela de Visualização" irá aparecer a função e as assíntotas com o "Controle Deslizante" fixado em* $a = 0$*. Clicando com o botão direito do* mouse *em cima do "Controle Deslizante", na "Janela de Visualização", podemos selecionar a função "Animar" e o gráfico irá se mover para diferentes valores de* a*, em um intervalo pré-determinado, completando nossa atividade.*

Na Figura 4.4 podemos observar o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ *para diferentes valores do parâmetro* a*. A curva em vermelho corresponde à função, a reta verde é a assíntota vertical e a reta azul (eixo* Oy*) é a assíntota horizontal.*

Ao aplicar esta atividade, é interessante, ainda, que o professor frise aos alunos a importância do parâmetro a *na assíntota da função.*

Os gráficos podem ser personalizados com diferentes cores e espessuras de linha, para tanto, deve-se clicar com o botão direito do *mouse* sobre a curva e selecionar a função "Propriedades".

Passemos agora para um exemplo em que podemos animar dois parâmetros diferentes.

Exemplo 4.4 *Verifiquemos com o Geogebra o comportamento da função* $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

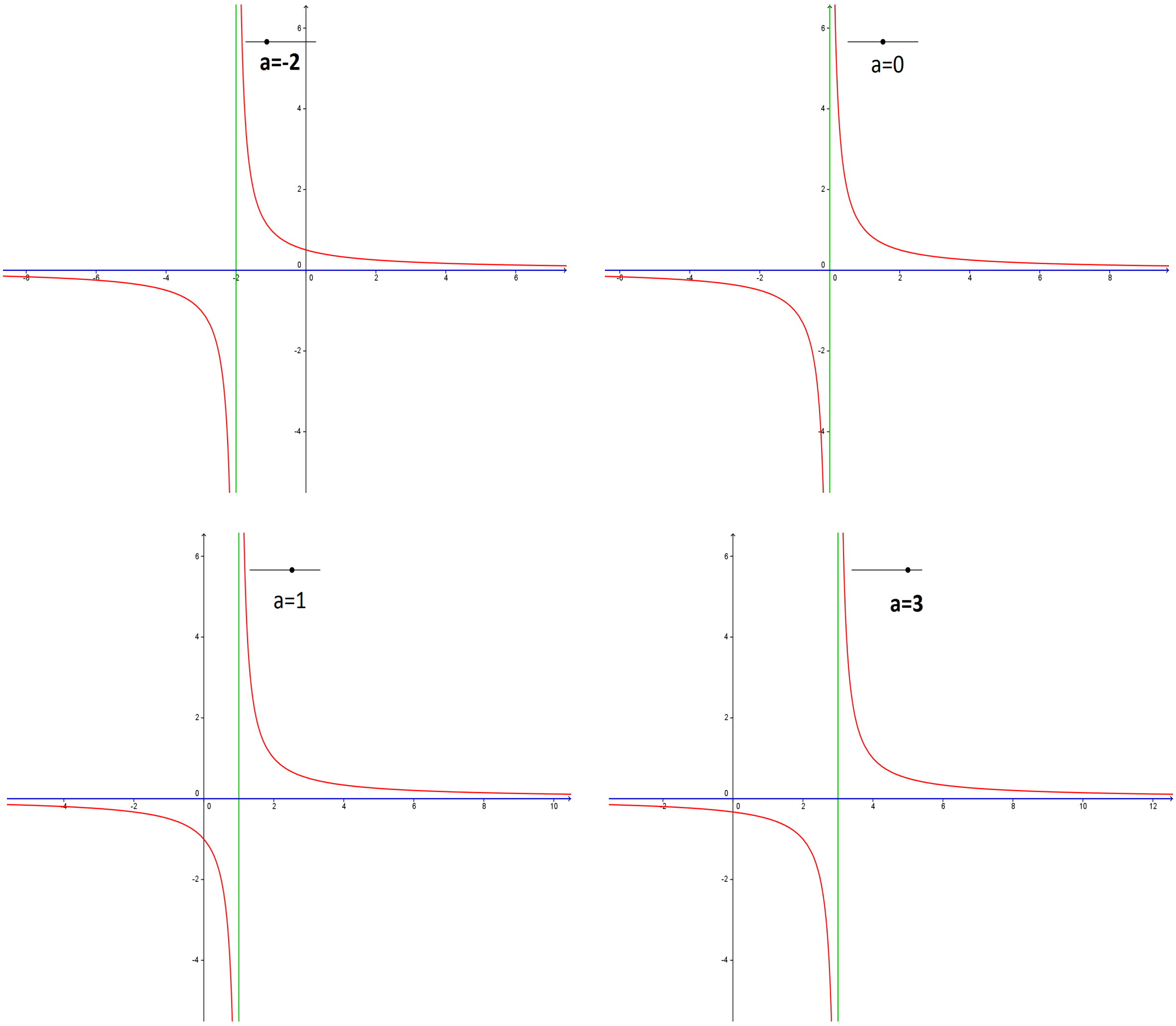

Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ para diferentes valores de a

As construções são semelhantes às realizadas no Exemplo 4.3. Inicialmente, devemos definir dois controles deslizantes, um para a constante a e outro para a constante b.

Estudando as assíntotas da função $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$, sabemos que $x = a$ é a assíntota vertical e que $y = b$ é a assíntota horizontal. Sendo assim, no campo "Entrada" definimos os comandos $f(x) = b * x/(x-a)$, $x = a$ e $y = b$.

Podemos agora "Animar" cada "Controle Deslizante", juntos ou separadamente, e observar o comportamento do gráfico para diferentes valores dos parâmetros a e b. Na Figura 4.5 podemos observar esse comportamento. A curva em vermelho corresponde à função, a reta verde é a assíntota vertical e a reta azul é a assíntota horizontal.

Os alunos devem tirar algumas conclusões da atividade proposta, como por exemplo:

1. *Observar que a constante a corresponde à assíntota vertical e que a constante b*

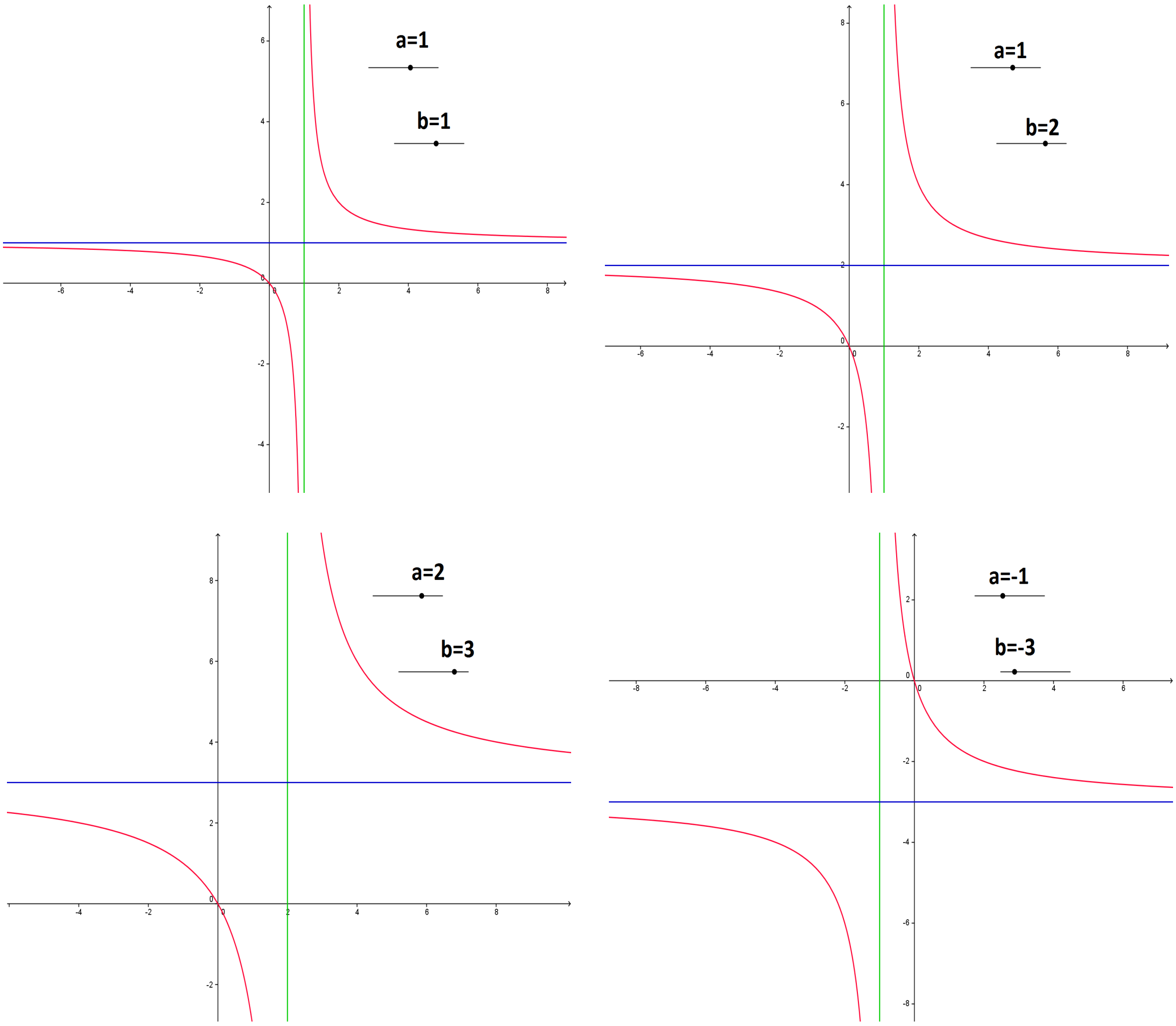

Figura 4.5: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ para diferentes valores de a e b

corresponde à assíntota horizontal da função.

2. *Observar que se $b = 0$, a função racional se reduz à função constante $f(x) = 0$.*

3. *Observar que se $a = 0$, a função racional se reduz à função constante $f(x) = b$.*

Nos dois próximos exemplos, mostraremos como construir animações para assíntotas oblíquas. Lembrando que as assíntotas oblíquas ocorrem quando o grau do polinômio do numerador da função racional excede, em uma unidade, o grau do polinômio do denominador.

Exemplo 4.5 *Estudar o comportamento da função $f(x) = \dfrac{ax^2}{x-1}$, com $a \in \mathbb{R}$, utilizando o Geogebra.*

Vamos, inicialmente, reescrever a função racional, como descrito na equação (4.2), para determinarmos as assíntotas. Se efetuarmos a divisão dos polinômios temos:

$$f(x) = \frac{ax^2}{x-1} = ax + a + \frac{a}{x-1}$$

Logo, concluímos que $g(x) = ax + a$ é a assíntota oblíqua e $x = 1$ é a assíntota vertical da função dada.

Definimos um "Controle Deslizante" para a constante a e, no campo "Entrada", definimos os comandos $f(x) = a * x^2/(x-1)$, $g(x) = a * x + a$ e $x = 1$.

Podemos agora "Animar" o "Controle Deslizante" e observar o comportamento do gráfico para diferentes valores dos parâmetros a. Na figura 4.6 podemos observar o comportamento da função e de suas assíntotas. A curva em vermelho representa a função racional $f(x) = \dfrac{ax^2}{x-1}$, a reta verde é a assíntota vertical $x = 1$ e a reta azul é a assíntota horizontal $g(x) = ax + a$.

Mais uma vez, os alunos devem tirar conclusões sobre a atividade realizada, como notar que a assíntota vertical é fixa e que a assíntota oblíqua é uma reta que depende unicamente do parâmetro a, definindo sua inclinação (coeficiente angular) e o ponto que corta o eixo Oy (coeficiente linear). Um resultado importante é que quando $a = 0$, a função racional se reduz ao eixo das abscissas Ox, ou seja, é a reta $y = 0$.

Encerramos nosso trabalho com um exemplo de animação no Geogebra com assíntota oblíqua, em que a variação de um único parâmetro, faz variar tanto a assíntota oblíqua quanto a assíntota vertical da função.

Exemplo 4.6 *Estudar o comportanmento da função racional $f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}$, com $a \in \mathbb{R}$.*

O procedimento é análogo ao realizado no Exemplo 4.5.

Reescrevendo a função racional temos:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a} = x + a + \frac{a^2}{x-a}$$

Sendo assim, sabemos que $g(x) = x + a$ é a assíntota oblíqua e $x = a$ é a assíntota vertical da função em questão.

Definimos um "Controle Deslizante" para a constante a e no campo "Entrada" definimos os comandos $f(x) = x^2/(x-a)$, $g(x) = x + a$ e $x = a$.

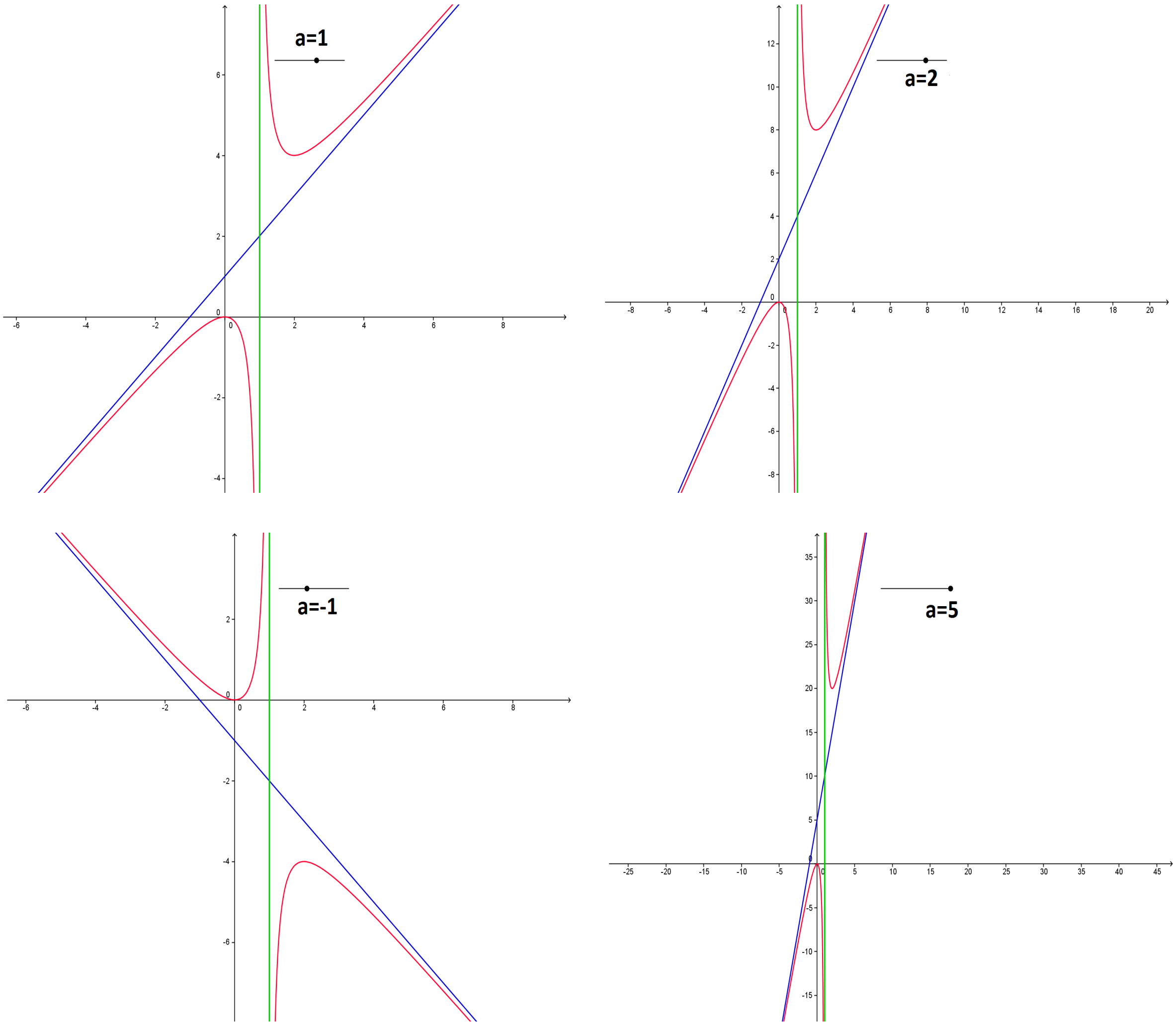

Figura 4.6: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{ax^2}{x-1}$ para diferentes valores de a

Animando o "Controle Deslizante", observamos o comportamento da função. Na figura 4.7 podemos observar o comportamento da função e de suas assíntotas para alguns valores da constante a. A curva em vermelho representa a função racional $f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}$, a reta verde é a assíntota vertical $x = a$ e a reta azul é a assíntota oblíqua $g(x) = x + a$.

Observe que o parâmetro a não influencia na inclinação (coeficiente angular) da assíntota oblíqua, mas comanda o ponto em que esta corta os eixos coordenados. Uma informação importante que podemos obter com a variação do parâmetro a é que se $a = 0$, a função racional em questão reduz-se à função linear $f(x) = x$.

As animações das funções racionais desta seção servem como sugestões de atividades. Cada professor pode usar seu conhecimento e sua imaginação para montar outras animações que venham a acrescentar no conhecimento de seus discentes em relação ao

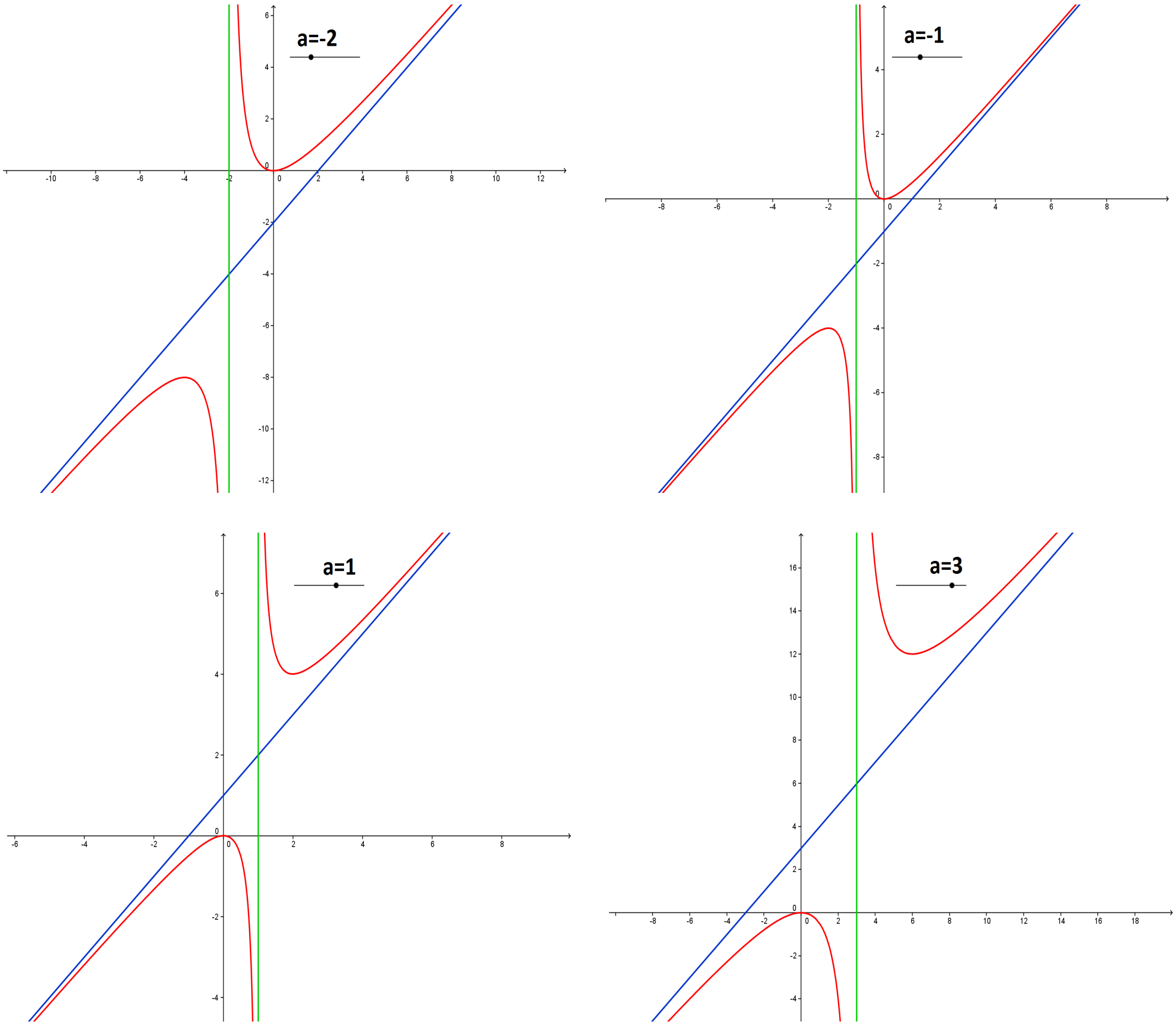

Figura 4.7: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}$ para diferentes valores de a

comportamento das funções racionais.

Capítulo 5

Conclusão

Concluímos que o estudo de funções racionais no Ensino Médio pode ser viável, pois a abordagem aqui proposta parte de conteúdos que compõem o programa de ensino desses alunos. Assim, buscamos tornar o assunto de funções racionais acessível aos discentes, utilizando de forma intuitiva o conceito de limite, sem a necessidade de apresentar sua definição, e reescrevendo a lei de formação dessas funções, de maneira que suas assíntotas pudessem ser facilmente identificadas. Essa forma de se reescrever a lei de formação da função torna o trabalho de análise do comportamento da mesma muito mais simples, principalmente em torno de seus pontos críticos.

Acreditamos, ainda, que a inserção desse conteúdo no currículo escolar torna o mesmo mais completo e enriquece a bagagem de conhecimento dos alunos. Isso não chegaria a prejudicar o cronograma de desenvolvimento do currículo, uma vez que tal assunto está diretamente relacionado com as funções polinomiais e será tratado como um aprofundamento de ensino, podendo ser feito em poucas aulas adicionais. Busca desenvolver nos alunos uma maior capacidade crítica, possibilitando que eles tirem conclusões a partir da análise do comportamento das funções racionais. Apresentamos também a possibilidade de utilização da tecnologia a favor do ensino. Sugere-se a utilização de softwares para a construção de gráficos e posterior análise dos mesmos.

Com esta proposta, constatamos que alguns conceitos e abordagens importantes na matemática muitas vezes são deixados de lado na seleção de conteúdos ministrados pelas escolas. Essa deficiência de conceitos acaba por tornar o ensino defasado em diversos pontos, deixando o aluno a mercê de algumas carências. Enfatizamos a importância de uma matriz curricular completa e dialógica, que tratam os referidos conteúdos matemáticos com o rigor conceitual. Dessa forma, para uma nação que almeja ser desenvolvida, como a nossa, é preciso que essas carências sejam sanadas e que o ensino possa, assim, ser satisfatório e preparar realmente o aluno para seu pleno desenvolvimento acadêmico.

O estudo aqui proposto sugere um modo de inserir as Funções Racionais de maneira eficaz no Ensino Médio, apresentando atividades e formas alternativas de aplicá-las.

Referências Bibliográficas

Almeida, N., Degenszajn, D., Dolce, O., Iezzi, G., e Périgo, R. (2010). *Matemática: Ciência e Aplicações. Ensino Médio*. Volume 3. 6. Ed. São Paulo: Saraiva.

Avila, G. (1985). *Evolução dos conceitos de função e de integral*. Revista de Matemática Universitária, n.1, pág. 14-46.

Barroso, J. M. O. (2010). *Conexões com a Matemática*. Volume 3. São Paulo: Moderna.

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula: Álgebra*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática*. 3. Ed. São Paulo: Blucher.

Candau, V. M. F. (1998). *Magistério: construção cotidiana*. 2. Ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

Carmo, M. P., Morgado, A. C., e Wagner, E. (2005). *Trigonometria e Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática. 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM.

Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., e Wagner, E. (2006a). *A Matemática do Ensino Médio.*. Volume 1. Coleção do Professor de Matemática. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM.

Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., e Wagner, E. (2006b). *A Matemática do Ensino Médio.*. Volume 3. Coleção do Professor de Matemática. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM.

Dante, L. R. (2010). *Matemática: Contexto e Aplicações*. Matemática Ensino Médio. Volume 3. São Paulo: Ática.

Eves, H. (1995). *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP.

Guidorizzi, H. (2001). *Um Curso de Cálculo.*. Volume 1. Livros Técnicos e Científicos: Editora S.A.

Hefez, A. e Villela, M. L. T. (2012). *Polinômios e Equações Algébricas*. Material da Disciplina de Polinômios e Equações Algébricas do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM.

Houaiss, A. e Villar, M. d. S. (2009). *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. 1. Ed. Editora Objetiva.

Iezzi, G. (1977). *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações*. 2. Ed. São Paulo: Atual.

LDB (2011). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Ministério da Educação e Cultura. 6 Ed. Brasília: Edições Câmara.

Leithold, L. (1994). *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1. 3. Ed. Editora HARBRA Ltda.

Mendes, M. H. M. (1994). *O conceito função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau*. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Munem, M. e Foulis, D. (1982). *Cálculo*. Volume 1. Editora Guanabara Dois.

Neto, A. C. M. (2012). *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*. Rio de Janeiro: SBM.

Oliveira, C. C. e. a. (2001). *Ambientes Informativos de Aprendizagem: produção e avaliação de software educativo*. Campinas: Papirus.

PCNs (2001). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Ministério da Educação*. Secretaria da Educação Fundamental. 3 Ed. Brasília: A Secretaria.

Perissé, G. (2010). *Palavras e Origens*. 2. Ed. São Paulo: Saraiva.

Pitombeira, J. B. e Roque, T. (2012). *Tópicos de História da Matemática*. Material da Disciplina de História da Matemática do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., e Andrade, J. M. (2010). Projecto IMLNA - Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. *Estudo das Funções no Programa de Matemática com Problemas e Tarefas de Exploração*, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Swokowski, E. (1983). *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1. 2. Ed. Editora Makron Books.