



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FACILITANDO O ESTUDO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D

IAN SANTANA MACÊDO

Salvador - Bahia
Dezembro de 2013

IAN SANTANA MACÊDO

Facilitando o Estudo da Geometria Espacial com o Geogebra 3D

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFBA como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Perfilino Eugênio Fer-
reira Jr.

Salvador - Bahia

Dezembro de 2013

IAN SANTANA MACÊDO

Facilitando o Estudo da Geometria Espacial com o Geogebra 3D

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica institucional do PROFMAT - UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

**Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira
Jr.(Orientador)**
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

**Prof. Dr. Eleazar Gerardo Madriz
Lozada**
UFRB

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família. Aos meus pais que sempre foram exemplos de profissionais dedicados e competentes e que sempre me apoiaram para que eu pudesse vencer mais esse desafio em minha vida e aos meus irmãos por todo amor dedicado a família.

Ao PROFMAT, pela imensa contribuição na ampliação dos conhecimentos dos professores da rede pública e a CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFBA, pelo acolhimento, paciência e dedicação nesses dois anos e em especial ao meu orientador Perfilino.

Ao meu amigo Paulo, pela lembrança da prova de seleção do mestrado do PROFMAT.

Ao meu grande amigo Rafael, pelo tempo dedicado a mim na digitação do meu trabalho em latex.

A Nathalia, por estar sempre ao meu lado em todos os momentos e pela compreensão com a minha ausência ou mau humor durante esses dois anos de curso.

A Elísia, diretora do colégio onde ensino, por sempre ter feito tudo que podia para me ajudar durante o mestrado.

Ao meu querido amigo Ziul, pela imensa contribuição nessa minha formação e a todos os colegas da primeira turma do PROFMAT-UFBA.

A Lise, pelo acolhimento durante esses dois anos, onde sempre se colocou a minha disposição quando precisei. Como já te falei, você foi a maior responsável pela minha permanência no mestrado e se hoje estou escrevendo esse trabalho, devo a você.

Às minha afilhadas Rhaica e Rhana que tanto amo e que sempre que precisei esquecer um pouco os estudos, era indo visitá-las que conseguia.

Resumo

Este trabalho é destinado aos alunos do Ensino Médio e tem o propósito de facilitar o estudo da Geometria Espacial através da utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra 5.0 Beta 3D, tornando as aulas da disciplina de Matemática mais atraentes.

Com o auxílio do software, construímos figuras e animações que facilitam a visualização dos sólidos, a dedução das fórmulas utilizadas para cálculo de áreas e volumes e a resolução de exercícios.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria Espacial; GeoGebra 3D.

Abstract

This work is addressed to high school students and aims to ease the study of Spatial Geometry through the use of the software of dynamic geometry GeoGebra 5.0 Beta 3D, making math classes more attractive.

With the help of the software, we build figures and animations that make easier the visualization of solids, the deduction of the formulas used in the calculation of areas and volumes and the resolution of exercises.

Keywords: Math teaching; Spatial Geometry; GeoGebra 3D.

Sumário

Introdução	10
1 Contexto Histórico	12
1.1 AS CIVILIZAÇÕES EGÍPCIA E GREGA	12
1.1.1 Papiro de Moscou	12
1.1.2 Papiro de Rhind	13
1.1.3 Platão e Pitágoras	14
1.1.4 Arquimedes e Euclides	15
1.2 IDADE MÉDIA	16
1.2.1 Leonardo Fibonacci	16
1.3 MATEMÁTICOS DO RENASCIMENTO (IDADE MODERNA)	17
1.3.1 Johannes Kepler	17
1.3.2 René Descartes	19
1.3.3 Bonaventura Cavalieri	20
1.3.3.1 Calculando área com o Princípio de Cavalieri	20
1.3.3.2 Volume de um sólido segundo o Princípio de Cavalieri	20
2 Sólidos	22
2.1 Prisma	22
2.1.1 Elementos	22
2.1.2 Classificação	23
2.1.3 Áreas	24
2.1.3.1 Área Lateral	24
2.1.3.2 Área da Base	24
2.1.3.3 Área Total	25
2.1.4 Paralelepípedo	25
2.1.4.1 Área Lateral do Paralelepípedo Retângulo	26
2.1.4.2 Área Total do Paralelepípedo Retângulo	26
2.1.4.3 Diagonal do Paralelepípedo Retângulo	26
2.1.4.4 Volume do Paralelepípedo Retângulo	27
2.1.5 Cubo	28
2.1.5.1 Área Lateral e Área Total do Cubo	28
2.1.5.2 Diagonal do Cubo	29
2.1.6 Volume do Prisma	29
2.2 Cilindro	30
2.2.1 Elementos	30

2.2.2	Classificação	30
2.2.3	Secção Meridiana	31
2.2.4	Áreas	32
2.2.4.1	Área Lateral	32
2.2.4.2	Área Total	32
2.2.5	Volume	32
2.3	Pirâmide	33
2.3.1	Elementos	34
2.3.2	Classificação	34
2.3.3	Área Lateral e Área Total da Pirâmide	36
2.3.4	Tetraedro	37
2.3.4.1	Volume	37
2.3.5	Volume da Pirâmide	38
2.4	Cone	39
2.4.1	Elementos	39
2.4.2	Classificação	40
2.4.3	Secção Meridiana	40
2.4.4	Área Lateral	41
2.4.5	Área Total	42
2.4.6	Volume	42
2.5	Esfera	42
2.5.1	Secção	43
2.5.2	Volume	44
2.6	Elipsóide	44
2.6.1	Volume	45
3	Uso do GeoGebra 3D na resolução de problemas	46
3.1	GeoGebra 3D	46
3.1.1	Construções	47
3.1.2	Dificuldades Encontradas no Geogebra	67
3.2	Problemas	71
	Considerações Finais	126
	Referências	127

Introdução

Num universo globalizado, o uso do computador como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem faz-se necessário, modernizando e garantindo o uso adequado das novas tecnologias em sala de aula.

Segundo os PCNEM (BRASIL, 1999), uma das competências a ser desenvolvida é: “[...] reconhecer a informática como ferramenta para novas estratégias de aprendizagem, capaz de contribuir de forma significativa para o processo de construção do conhecimento, nas diversas áreas.”

Silveira e Bisognin (2008) reforçam a importância da utilização do computador e dos softwares educacionais como recursos pedagógicos, colaborando com o trabalho do professor. Estes recursos transformam as aulas, tornando-as mais interessantes e recuperando o interesse pelo estudo da Matemática [...]. A interface dinâmica e a interatividade que estes programas propiciam como recurso de manipulação e movimento das figuras geométricas apresentadas na tela do computador, contribui no desenvolvimento de habilidades e na percepção de diferentes representações de uma mesma figura.

Segundo Cruz (2005), “a compreensão dos conceitos geométricos é favorecida quando estes são explorados num ambiente dinâmico e interativo, pois, tal ambiente, configura-se num recurso que pode possibilitar a transição entre o conhecimento que o aluno já acumula e a facilidade para conjecturar o que o computador proporciona”.

A geometria espacial permite o movimento das figuras geométricas na tela do computador, num ambiente interativo, no qual possibilita condições para que o aluno manipule com facilidade seus elementos, aplique propriedades e realize conjecturas, seguindo os requisitos essenciais em observância de suas regularidades, o que contribui para a construção do conhecimento. Segundo Cândido (2008), “o professor deve atingir um equilíbrio, dando autonomia aos alunos a qual é necessária para que não se comprometa a investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática”.

A discussão e implantação do uso dos softwares matemáticos, em especial o GeoGebra 3D, no ensino de geometria espacial como nova metodologia de ensino tem como objetivo desenvolver competências necessárias ao aluno, explorando o uso desse software numa perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagens encontradas nos estudos das figuras geométricas tridimensionais. Desta forma, proporciona o envolvimento entre a tecnologia e a aprendizagem matemática, em particular a geometria espacial, numa abordagem que auxilie a compreensão de conceitos e propriedades dessa área do conhecimento.

O propósito deste trabalho é salientar a importância do uso de softwares no processo de ensino-aprendizagem, essencialmente na disciplina de Matemática no ensino da geometria. Para isso, usaremos o GeoGebra 3D 5.0, que nos permitirá a criação e a interação com objetos, tais como pontos, linhas, polígonos, esferas e poliedros.

No primeiro capítulo é apresentado um resumo da História da Matemática e suas principais contribuições para a geometria espacial.

No segundo capítulo, são apresentados os principais sólidos geométricos e, com o auxílio do GeoGebra, é apresentada a dedução de fórmulas de áreas e volumes.

No terceiro capítulo vamos fazer uma abordagem sobre o uso dos softwares em sala de aula e apresentar o GeoGebra 3D 5.0, mostrando também um resumo das suas principais construções. No final do capítulo vamos propor a construção e resolução de alguns problemas usando o GeoGebra 3D.

1 Contexto Histórico

O desenvolvimento da geometria se deu a partir das necessidades das civilizações antigas no seu cotidiano, desde as demarcações de terras, construções de moradias e até suas crenças, como foi o caso da concepção das grandes pirâmides, por exemplo.

O estudo da Geometria Espacial surgiu com os povos da Mesopotâmia no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates, à aproximadamente dois mil anos a.C., quando o homem passou a produzir o tijolo ou blocos de pedras usados nas construções e esses conhecimentos foram registrados em papiros e em tábuas de argila. Daí, ele desvenda aspectos da natureza, como o espaço e a sua grandeza, o volume.

Os objetos primitivos, do ponto de vista espacial, são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas, ângulos e superfícies. Dentre os cálculos essenciais que podemos executar, estão: comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas. As concepções primitivas de ponto e reta são admitidas sem definição.

A Geometria Espacial é dividida em Geometria Espacial de posição e Geometria Espacial métrica. A primeira, analisa a posição relativa de pontos e retas, retas e retas, retas e planos e, planos e planos. A segunda, examina os sólidos geométricos, suas propriedades e o cálculo de volumes.

1.1 AS CIVILIZAÇÕES EGÍPCIA E GREGA

Para [Eves \(1992\)](#), os registros mais antigos do homem na área da Geometria são tábuas de argila cozida, descobertas na Mesopotâmia, do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a.C. As principais fontes de informações a respeito da geometria egípcia antiga são os papiros de Rhind (ou Ahmes - 1650 a.C.) e Moscou (1850 a.C.), e a pirâmide de Giseh, cuja construção envolveu geometria de forma intuitiva, construída cerca de 2900 a.C. Muitos conhecimentos geométricos como área, volumes e relações métricas em polígonos já eram dominados na bacia fértil entre os rios Tigre e Eufrates, pelos babilônios. Foram os gregos que, no apogeu de sua civilização, elevaram e propagaram seus conhecimentos geométricos.

1.1.1 Papiro de Moscou

O Papiro de Moscou, representado na Figura 1, foi produzido por um escriba por volta de 1850 a.C., também conhecido como Papiro de Golonisshev, um papiro egípcio em forma de uma estreita tira, com 25 problemas matemáticos grafados com escrita hierática.

Dentre os problemas, contém o que envolve a área do triângulo e o volume do tronco de pirâmide.

Segundo Boyer (1985), o problema 10 no Papiro de Moscou apresenta uma questão onde o escriba pede a área da superfície do que parece ser um cesto com um diâmetro $4\frac{1}{2}$. Seguindo a fórmula $S = (1 - 1/9)^2(2x)x$, onde $x = 4\frac{1}{2}$, obtém como resposta 32 unidades. Como $(1 - 1/9)^2$ é a aproximação egípcia para $\pi/4$, a resposta 32 unidades se adequa à superfície de um semiesfera de diâmetro $4\frac{1}{2}$. Dando assim, uma estimativa primitiva da área de uma superfície.

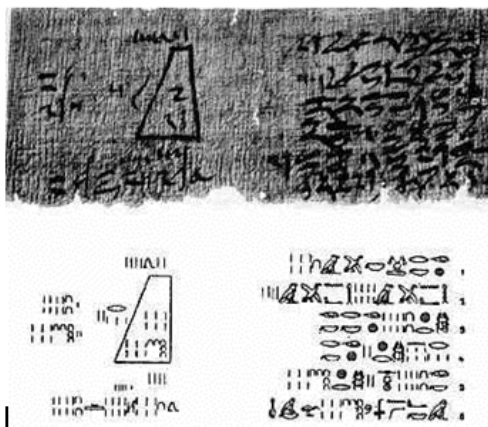


Figura 1: Papiro de Moscou

1.1.2 Papiro de Rhind

O Papiro de Rhind, também denominado Papiro de Ahmes e mostrado na Figura 2, tem como título original “Instruções para conhecer todas as coisas secretas” e é apreciado como um dos mais indispensáveis sobre os conhecimentos matemáticos egípcios. O Papiro de Rhind é constituído de informações sobre aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares e trigonometria básica.

No Papiro de Rhind, datado aproximadamente do ano 1650 a.C., encontra-se um texto matemático com aspecto de manual prático que obtém 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes.

No problema 48 o Papiro de Rhind compara a área do círculo com a de um quadrado circunscrito.



Figura 2: Papiró de Rhind.

1.1.3 Platão e Pitágoras

Platão (427—347 a.C.), cujo verdadeiro nome era Arístocles, nasceu em Atenas (ou nas suas proximidades). Foi discípulo e admirador do grande filósofo grego Sócrates.

À sua escola devem-se algumas definições importantes: o ponto é o início de uma reta, a reta é um comprimento sem largura e a distinção entre números pares e ímpares e suas operações entre si.

Platão foi o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, que passaram a serem designados sólidos platônicos.

Por volta de 580 a.C nasce Pitágoras , um profeta e místico, em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso.

Assim como Tales, que viajou pelo Egito e Babilônia. No retorno ao mundo grego, Pitágoras se estabelece em Crotona, na costa sudoeste do que agora é a Itália, lá fundando uma sociedade secreta com bases matemáticas e filosóficas. É difícil caracterizar a figura de Pitágoras, pois a ordem que ele fundou era comunitária e secreta. O conhecimento e propriedade eram comuns, as atribuições de descobertas não eram feitas a um membro específico da escola. Desta forma, é mais conveniente que não se refira a obra de Pitágoras, mas sim das contribuições pitagóricas para a geometria grega (BOYER, 1985).

Segundo o pitagorismo, a essência, que é o princípio fundamental que forma todas as coisas, é o número. Os pitagóricos não distinguem forma, lei, e substância, considerando o número o elo entre estes elementos: terra, água, ar e fogo.

Suas principais descobertas foram: as propriedades dos números inteiros, números figurados, números perfeitos, a construção de figuras geométricas e a demonstração do teorema que leva seu nome, embora haja evidências de que os babilônios já tinham

conhecimento deste teorema.

Os filósofos gregos Platão e Pitágoras relacionam o estudo da geometria espacial ao estudo da metafísica e da religião em razão das formas abstratas expostas pelos sólidos.

1.1.4 Arquimedes e Euclides

Arquimedes (287—212 a.C.), matemático e cientista grego, nasceu em Siracusa, na Sicília, e foi educado em Alexandria, no Egito.

Apesar de ser conhecido como um inventor de dispositivos mecânicos, fez importantes contribuições para o campo da matemática através dos seus estudos sobre matemática pura e cálculo integral. Destacou-se também na geometria, estudando área e volumes de figuras sólidas curvas e sobre as áreas de figuras planas.

Na física, Arquimedes também realizou estudos importantes. Em mecânica, definiu a lei da alavanca e é considerado o inventor da polia composta. Durante sua permanência no Egito, inventou o “parafuso sem fim” para elevar o nível da água, porém é conhecido principalmente por ter enunciado a lei da hidrostática, o chamado Princípio de Arquimedes.

Conforme Boyer (1985), para achar áreas e volumes o versátil Arquimedes usou a própria versão primitiva do cálculo integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual. Numa carta a Eratóstenes, Arquimedes expôs seu “método da alavanca” para descobrir fórmulas de áreas e volumes. Mas, quando publicava provas para essas fórmulas, ele utilizava o método da exaustão para se ajustar aos padrões de rigor da época.

Em seus trabalhos, Arquimedes usou seu princípio de equilíbrio dos sólidos (Figura 3): cone, cilindro e esfera para adquirir o volume da esfera, considerando o diâmetro do cone como duas vezes o diâmetro da esfera.

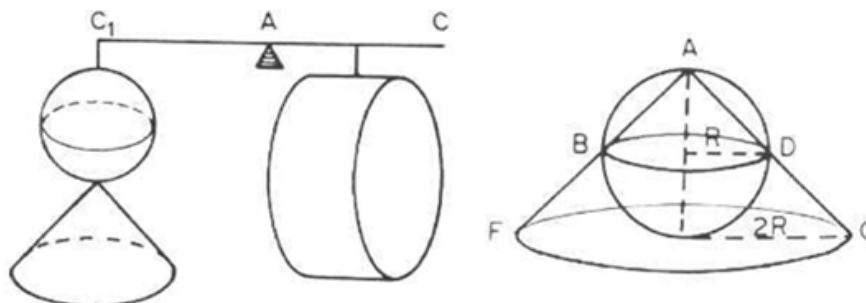


Figura 3: Princípio de Equilíbrio dos Sólidos.

As mais importantes contribuições de Arquimedes são sobre questões em cuja abordagem se usa hoje o Cálculo Diferencial e Integral. Assim, no livro “A quadratura da parábola” ele fornece dois métodos para determinar a área de um segmento de pará-

bola. No primeiro, considera certas figuras planas envolvidas como “somas” infinitas de segmentos de retas e no segundo, o método de exaustão, utiliza ao fim o resultado já obtido mecanicamente, buscando a certeza que só a geometria fornece. Seu trabalho serviu de fonte de inspiração e, no século XVII, colaborou para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Na antiguidade, a geometria chega ao cume com os estudos sobre as esferas e o cilindro com os geométricos Arquimedes e Euclides.

Euclides (por volta de 325–265 a.C.) foi um dos mais importantes matemáticos da antiguidade. É conhecido pela sua obra prima “Os Elementos”, que é a obra matemática mais duradoura de todos os tempos, utilizada até os dias de hoje.

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, salvo algumas poucas informações esparsas. Mesmo sobre sua formação matemática não há nenhuma certeza: é possível que tenha sido feita em Atenas, na Academia de Platão.

“Os Elementos” dedicam um bom espaço à teoria dos números (três livros), mas com o enfoque geométrico que permeia toda a obra. Euclides representava os números por segmentos de reta, assim como representava o produto de dois números por um retângulo. Contudo, a argumentação usada por ele independe da geometria.

Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas, chamadas atualmente de axiomas ou postulados.

O “postulado das paralelas” de Euclides, por exemplo, era uma hipótese aceita sem discussão.

Essa obra é um exemplo de clareza na maneira pela qual os teoremas são enunciados e provados, onde o rigor empregado e o método axiomático desenvolvido tornaram-se um foco indispensável para os inventores do cálculo.

Euclides morreu em Alexandria deixando uma contribuição inigualável para o desenvolvimento da matemática.

1.2 IDADE MÉDIA

1.2.1 Leonardo Fibonacci

O estudo da geometria espacial, após um vasto tempo, foi extinto nas teorias da geometria grega. No período do “Renascimento”, sucedeu o resgate de toda a ciência, entorpecido até aquele instante. Diversos matemáticos como Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa (cerca de 1180–1250), reconquistaram os estudos sobre Geometria Espacial.

Fibonacci era antes de tudo um algebrista, mas escreveu também, em 1220, um

livro intitulado "Practica Geometriae". Esse parece ser baseado numa versão árabe da Divisão de figuras de Euclides (hoje perdida) e nas obras de Heron sobre mensuração. Contém, entre outras coisas, uma prova de que as medidas de um triângulo se dividem na razão de 2 para 1, e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras. Continuando uma tendência babilônica e árabe, ele usava álgebra para resolver problemas geométricos (BOYER, 1996).

1.3 MATEMÁTICOS DO RENASCIMENTO (IDADE MODERNA)

1.3.1 Johannes Kepler

Segundo Boyer (1985), o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571–1630), fez uma relação aplicada à astronomia das órbitas elípticas aos sólidos regulares.

Em sua obra *Mysterium Cosmographicum*, Kepler instituiu um modelo do sistema solar (Figura 4) onde os cinco sólidos platônicos eram apoiados um dentro do outro, isolados por uma série de esferas inscritas, procedendo à seguinte disposição: primeiro o octaedro, em seguida o icosaedro, o dodecaedro, o tetraedro e por fim, o cubo. Ele conjecturou que as razões entre os raios das órbitas dos planetas coincidiam com as razões entre os raios das esferas.

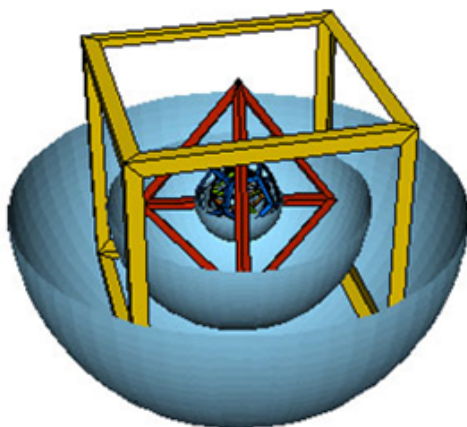


Figura 4: Modelo do sistema solar instituído por Kepler.

Após descobertas dos planetas Urano, Netuno e Plutão seu "Mysterium Cosmographicum" foi inabilitado, pois não há sólidos platônicos adicionais que estabeleçam suas distâncias ao Sol. No entanto, de sua investigação surgiram os novos sólidos (que tem o seu nome), e a percepção de que as órbitas dos planetas não são círculos, e sim elipses. Em 1609, Kepler evidencia as três leis do movimento dos planetas:

- 1) os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos (Figura 5).

Esta lei demarcou que as órbitas não eram circunferências, como se supunha até então, mas sim, elipses. A distância de um dos focos (F_1) até o objeto, mais a distância do objeto até o outro foco (F_2), é sempre igual, não considerando a localização do objeto ao longo da elipse.

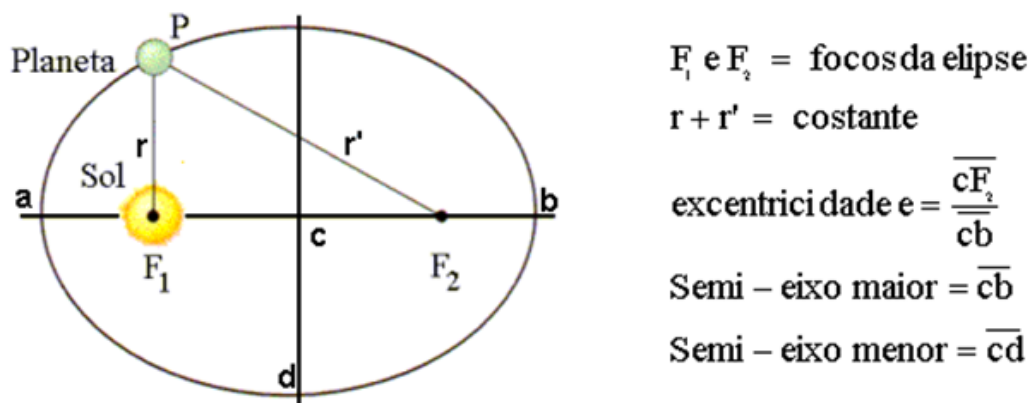


Figura 5: Trajetória elíptica dos planetas de acordo com a lei de Kepler.

2) o raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais (Figura 6).

A lei das áreas estabelece que os planetas se movam com velocidades diferentes, subordinado a distância a que está do Sol.

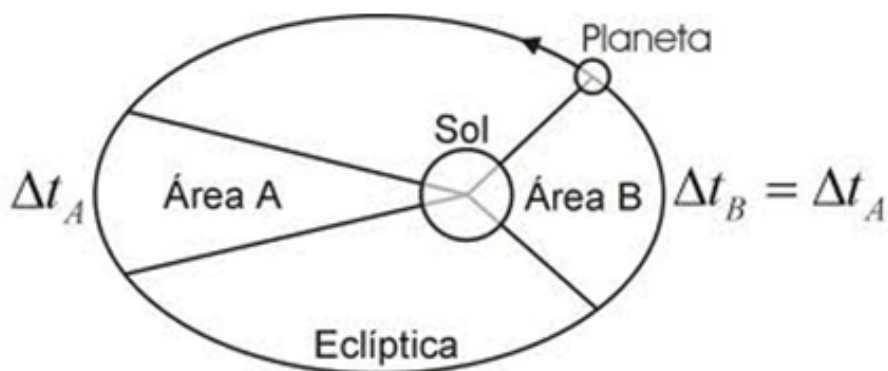


Figura 6: Lei das áreas.

3) os quadrados dos períodos de revolução (T) são proporcionais aos cubos das distâncias médias (a) do Sol aos planetas. $T^2 = ka^3$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

Considerando T o período de revolução (ano do planeta) e a o semi-eixo maior da órbita de um planeta, a lei aponta que há um vínculo entre a distância do planeta e o

período de translação. Portanto, quanto maior for a distância ao Sol mais tempo levará para complementar sua volta em torno desta estrela.

1.3.2 René Descartes

René Descartes (1596–1650) nasceu em La Haye, pequena cidade a sudoeste da França e a cerca de 300km de Paris, província de Touraine.

A obra-prima de Descartes é o Discurso do Método, publicado em 1637, na qual expõe a essência de sua filosofia que, em suma, é uma defesa do método matemático como modelo para a aquisição do conhecimento. Essa obra inclui três apêndices, sendo um deles A Geometria. As duas primeiras partes deste apêndice constituem uma aplicação da álgebra; a última é um texto sobre equações algébricas.

Já ao início de seu trabalho, introduz a notação algébrica, hoje universalmente adotada: x, y, z, \dots para as variáveis e a, b, c, \dots para as constantes. Descartes pensava nas letras como segmentos de retas. Mas rompeu com a tradição grega ao admitir que x^2 (ou xx como escrevia) e x^3 , por exemplo, podiam ser interpretados também como segmentos de reta e não necessariamente como uma área e um volume. Com isso, foi-lhe possível mostrar que as cinco operações aritméticas (incluindo a raiz quadrada) correspondem a construções elementares com régua e compasso (EVES, 1992).

Descartes foi reconhecido na matemática como o “pai da matemática moderna” por sugerir a fusão entre a álgebra e a geometria, concebendo a geometria analítica e o sistema de coordenadas.

O método cartesiano baseia-se em quatro tarefas básicas: verificar, analisar, sintetizar e enumerar.

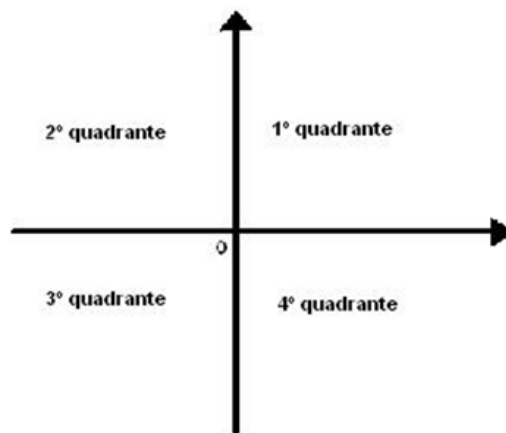


Figura 7

1.3.3 Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598—1647), matemático italiano, estudou astronomia, trigonometria esférica e cálculo logarítmico.

Criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólidos, denominado princípio de Cavalieri. Este princípio consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se, as secções planas de iguais alturas possuírem a mesma área.

Segundo [Eves \(1992\)](#), Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Segundo ele, porém, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida por uma infinidade de secções paralelas entre si - a essas cordas e a essas secções chamou-se de indivisíveis.

O Princípio de Cavalieri, ainda bastante usado no ensino de geometria métrica no espaço, facilita bastante a aceitação da idéia de indivisível.

1.3.3.1 Calculando área com o Princípio de Cavalieri

Sejam A e B figuras planas. Se, para toda reta horizontal r , as interseções $r \cap A$ e $r \cap B$ são formadas por um número finito de segmentos de reta, tais que a soma dos comprimentos dos segmentos em $r \cap A$ é igual à soma análoga em $r \cap B$, então A e B têm áreas iguais ([LIMA et al., 2006](#)).

([PATERLINI, 2010](#)) , mostra uma versão para o Princípio de Cavalieri para áreas, onde é considerado que a razão entre os segmentos não precisa ser necessariamente igual a 1. Nesse caso, sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então, a razão entre as áreas R e S será igual a essa mesma constante.

1.3.3.2 Volume de um sólido segundo o Princípio de Cavalieri

Considere dois sólidos P e Q . Se qualquer plano horizontal secciona P e Q segundo figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes $V(P)$ e $V(Q)$ é igual a essa constante. Vejamos a Figura 8:

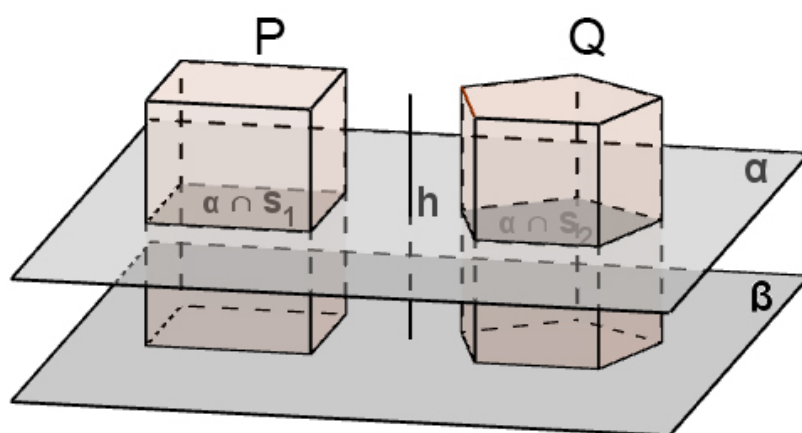


Figura 8: Princípio de Cavalieri.

Segundo [Eves \(1992\)](#), a aceitação e a aplicação do Princípio de Cavalieri podem tornar mais simples a dedução de fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria espacial.

2 Sólidos

Nesse capítulo vamos fazer uma abordagem dos principais sólidos geométricos estudados no ensino médio. Com o auxílio do GeoGebra 3D, vamos mostrar como deduzir as fórmulas utilizadas para o cálculo de áreas e volumes.

2.1 Prisma

Definição - Considere o polígono convexo $ABCD\dots MN$ situado no plano π e um segmento de reta PQ ($P \in \pi$), cuja reta suporte intersecta esse plano. Chamamos de *prisma* convexo a união de todos os segmentos paralelos e congruentes a PQ que possuem uma de suas extremidades no polígono e estão localizados num mesmo semiespaço determinado por π . A altura de um prisma é a distância h entre os planos das suas bases (faces poligonais opostas, paralelas e congruentes). A Figura 9 mostra um prisma regular de base hexagonal.

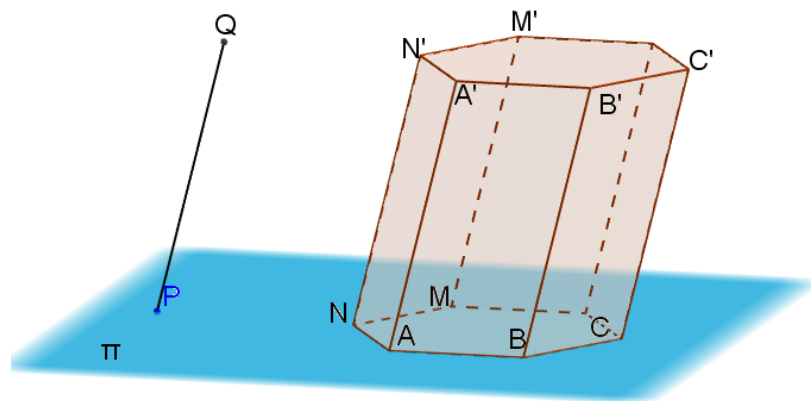


Figura 9

2.1.1 Elementos

São elementos de um prisma: Faces (superfícies planas poligonais que limitam o poliedro), Arestas (lados das faces do poliedro) e Vértices (vértices das faces do poliedro). Vamos considerar agora um prisma cuja base seja um polígono de n lados para determinar o seu número de faces, arestas e vértices. O prisma possui:

- $(n + 2)$ faces, sendo n faces laterais e 2 bases congruentes. Todas as faces laterais são paralelogramos.
- $3n$ arestas, sendo $2n$ arestas das bases e n arestas laterais.

- $2n$ vértices, sendo n em cada base.

2.1.2 Classificação

Os prismas podem ser classificados em reto ou oblíquo. O prisma será dito reto quando suas arestas laterais forem perpendiculares aos planos de suas bases, caso contrário, o prisma será oblíquo (Figura 10). No caso do prisma reto, suas faces serão retângulos. Se as bases de um prisma reto forem polígonos regulares chamamos esse prisma de regular.

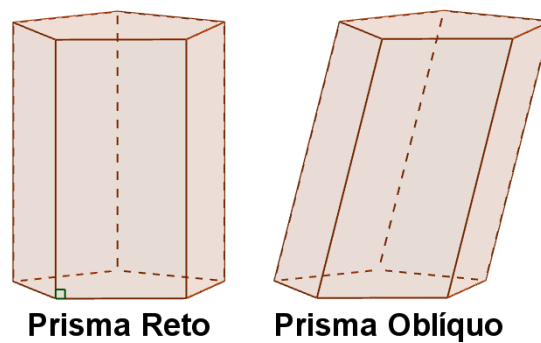


Figura 10: Classificação dos prismas.

Os prismas também podem ser classificados quanto ao número de lados de suas bases em:

- Prisma Triangular: se as bases são triângulos.
- Prisma Quadrangular: se as suas bases são quadrados.
- Prisma Pentagonal: se as suas bases são pentágonos, etc.

Veja a Figura 11

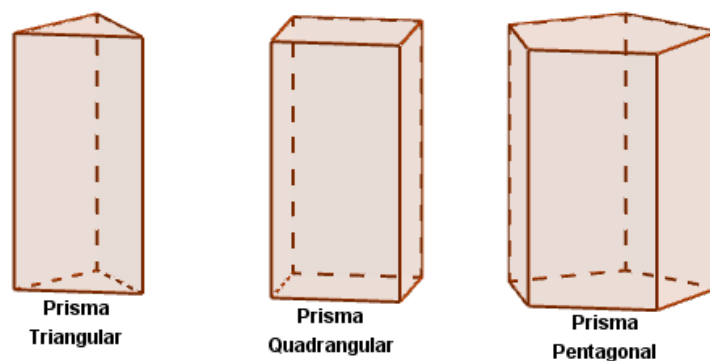


Figura 11: Classificação dos prismas.

2.1.3 Áreas

2.1.3.1 Área Lateral

A área lateral de um prisma é a soma das áreas de suas faces laterais (Figura 12).

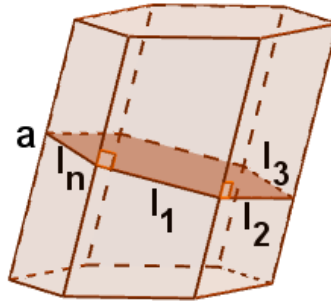


Figura 12: Área lateral.

Seja um prisma cuja base é um polígono de n lados e aresta lateral medindo a . Seja l_1, l_2, \dots, l_n as medidas dos lados de uma secção reta. Cada face lateral desse prisma é um paralelogramo de base a e altura igual a um lado dessa secção reta. Logo,

$$A_l = al_1 + al_2 + \dots + al_n = (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \cdot a \Rightarrow$$

$$A_l = 2p \cdot a$$

Onde $2p$ é o perímetro da secção reta e a é a medida da aresta lateral do prisma. Se o prisma for reto, a sua aresta lateral (a) será igual a sua altura (h), l_1, l_2, \dots, l_n serão as arestas de sua base já que a base é um secção reta e $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ será o perímetro de sua base. Nesse caso,

$$A_l = 2p \cdot h$$

2.1.3.2 Área da Base

Vamos considerar um prisma regular onde sua base é um polígono de n lados de medidas $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ para determinar a área de sua base (Figura 13). Sendo o prisma regular, sua aresta lateral será igual a altura ($a = h$) e a sua base, que é uma secção reta, será um polígono regular ($l_1 = l_2 = \dots = l_n$). Sendo assim, a área de sua base será a soma das áreas dos n triângulos de base l e altura m (medida do apótema da base). Logo:

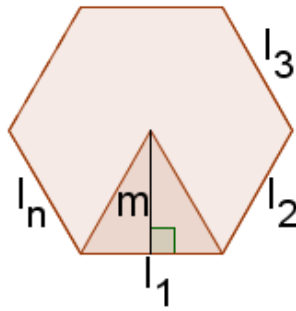


Figura 13: Área da base.

$$A_b = n \cdot \left(\frac{l \cdot m}{2} \right) = \frac{(n \cdot l)m}{2}$$

Como $(n \cdot l)$ é o perímetro de sua base, ou seja, $n \cdot l = 2p$, temos:

$$A_b = \frac{2p \cdot m}{2} \Rightarrow A_b = p \cdot m$$

onde p é o semi-perímetro da base do prisma.

2.1.3.3 Área Total

A área total (A_t) de um prisma é a soma de sua área lateral com as áreas das duas bases. Logo,

$$A_t = A_l + A_b$$

2.1.4 Paralelepípedo

Definição - Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos (Figura 14a e 14b). Se as bases de um prisma reto são retângulos, chamamos esse prisma de paralelepípedo retângulo.

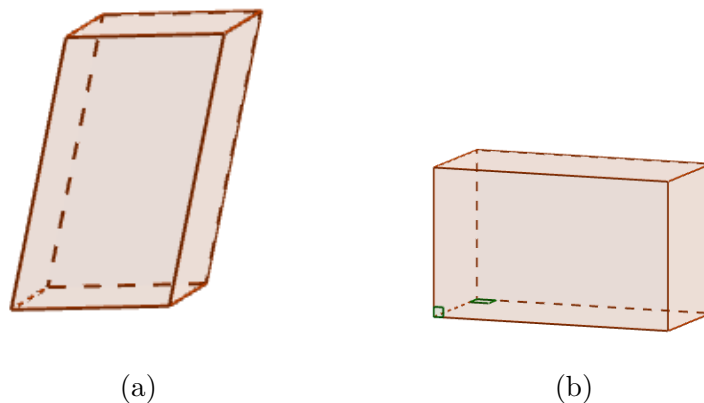


Figura 14

2.1.4.1 Área Lateral do Paralelepípedo Retângulo

Vamos considerar o paralelepípedo retângulo de dimensões x , y e z abaixo para o cálculo de suas áreas lateral e total (Figura 15).

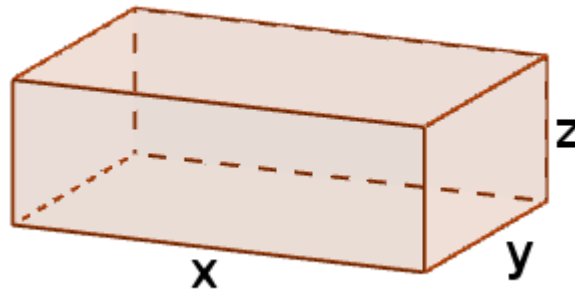


Figura 15: Área lateral do paralelepípedo retângulo.

A área lateral de um paralelepípedo retângulo será a soma das áreas de suas quatro faces laterais. Logo,

$$A_l = 2xz + 2yz = 2(xz + yz)$$

2.1.4.2 Área Total do Paralelepípedo Retângulo

A área total de um paralelepípedo retângulo será a soma da área lateral com a área das duas bases. Logo,

$$A_t = 2xz + 2yz + 2xy = 2(xy + xz + yz)$$

2.1.4.3 Diagonal do Paralelepípedo Retângulo

Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões x , y e z , chamaremos a diagonal da sua base de d e a diagonal do sólido de D (Figura 16).

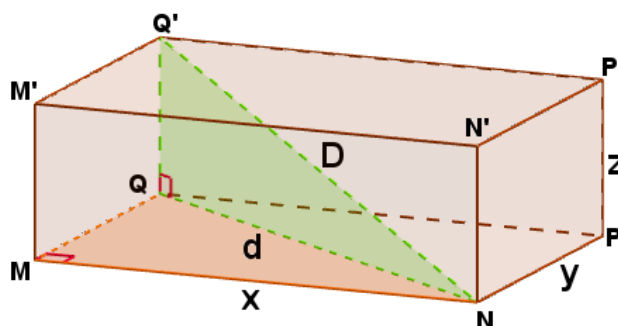


Figura 16: Diagonal do paralelepípedo.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo QMN temos que $d^2 = x^2 + y^2$
 Aplicando Pitágoras agora no triângulo $Q'QN$ temos: $D^2 = d^2 + z^2 \Rightarrow D^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 Logo,

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.1.4.4 Volume do Paralelepípedo Retângulo

Vamos fazer um estudo do volume de um paralelepípedo retângulo para que através desse volume e usando o princípio de Cavalieri possamos posteriormente determinar uma expressão para o volume de um prisma qualquer. Sabemos que um paralelepípedo retângulo fica perfeitamente determinado por três medidas que são: seu comprimento (x), sua largura (y) e a sua altura (z).

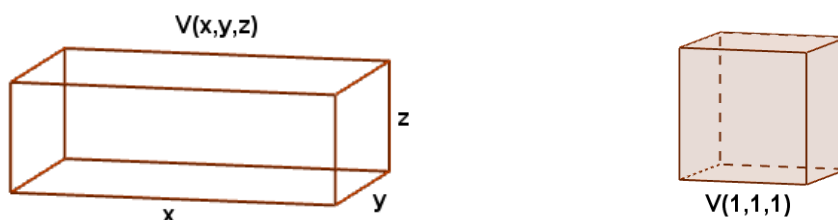


Figura 17: Volume do paralelepípedo retângulo

Representaremos o volume do paralelepípedo retângulo por $V(x, y, z)$ e o volume do cubo por $V(1, 1, 1)$, já que o cubo de dimensões um é um paralelepípedo retângulo. O volume de um paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, o que significa que se mantivermos constantes seu comprimento e sua largura e multiplicarmos a sua altura por um número natural k , o seu volume também será multiplicado por k , ou seja, $V(x, y, kz) = kV(x, y, z)$.

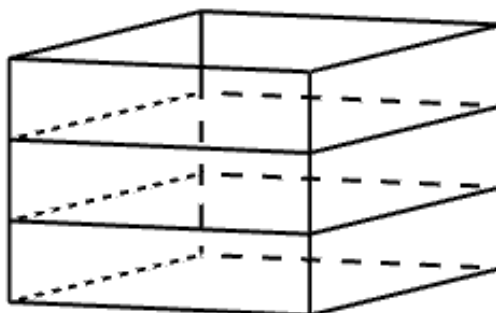


Figura 18

A figura 18 mostra três paralelepípedos retângulos iguais e sobrepostos. Naturalmente, o volume total é três vezes maior que o volume de um deles. Essa relação que

verificamos para os números naturais também é válida para qualquer número real positivo. Isso é garantido pelo teorema fundamental da proporcionalidade que diz: Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionados por uma função crescente f tal que para todo natural k , $f(kx) = kf(x)$, então para todo real r , tem-se $f(rx) = rf(x)$. Concluimos então que se mantivermos constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, o seu volume será proporcional a terceira dimensão. Assim, sendo x , y e z as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x \cdot 1, y, z) \\ &= xV(1, y, z) = xV(1, y \cdot 1, z) \\ &= xyV(1, 1, z) \\ &= xyzV(1, 1, z \cdot 1) = xyzV(1, 1, 1) = xyz \cdot 1 = xyz \end{aligned}$$

Deste modo, o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto de suas dimensões. Tomando como base a face de dimensões x e y , indicando por A_b a área dessa base ($A_b = xy$) e a altura z por h , podemos escrever:

$$V = A_b \cdot h$$

2.1.5 Cubo

Definição - Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são todas congruentes (Figura 19).

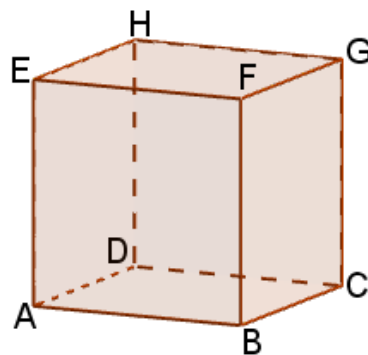


Figura 19: Cubo.

2.1.5.1 Área Lateral e Área Total do Cubo

A área lateral de um cubo de aresta a é igual a soma das áreas de suas quatro faces laterais, ou seja, $A_l = 4a^2$. A área total de um cubo de aresta a é a soma de sua área lateral com a área de suas bases, ou seja, $A_t = 4a^2 + 2a^2 \Rightarrow A_t = 6a^2$.

2.1.5.2 Diagonal do Cubo

Seja d a diagonal da base de um cubo e D a diagonal do sólido (Figura 20). Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo QMN temos: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$.

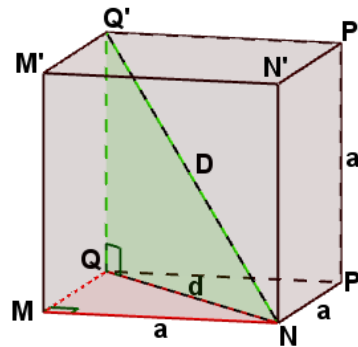


Figura 20: Diagonal do cubo.

No triângulo $Q'QN$ temos: $D^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow D^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow D = a\sqrt{3}$.

2.1.6 Volume do Prisma

Seja P_1 um prisma de altura h e área da base $B_1 = B$ e P_2 um paralelepípedo retângulo de mesma altura e área da base $B_2 = B$ (Figura 21).

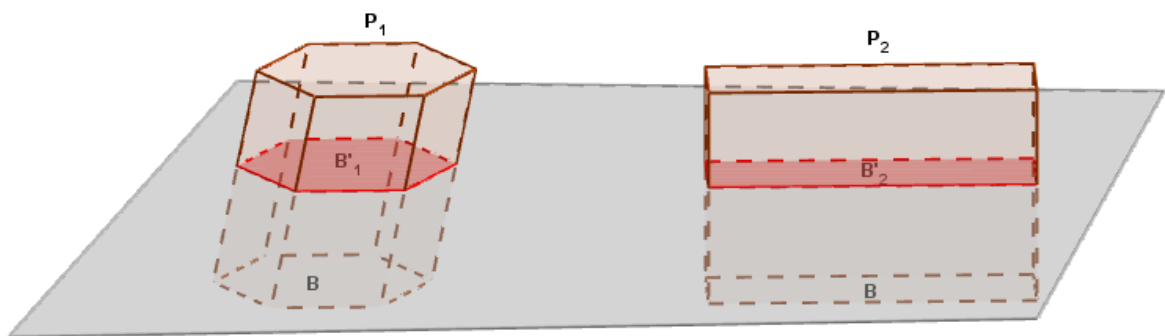


Figura 21: Volume do prisma.

Suponhamos que os dois sólidos possuem suas bases no plano α e estão no mesmo semi-espacos determinado por α .

Qualquer plano β , paralelo a α , que secciona P_1 , também secciona P_2 .

Como a secção $B'_1 = B_1 = B$ e a secção $B'_2 = B_2 = B$, temos que as secções B'_1 e B'_2 terão sempre a mesma área.

Logo, pelo principio de Cavalieri, o volume de P_1 é igual ao volume de P_2 .

Como $V_{P_2} = B_2h = Bh$, temos que $V_{P_1} = Bh$. Concluimos então que o volume de um prisma é o produto entre a área de sua base pela medida de sua altura.

2.2 Cilindro

Definição - Seja C um círculo de centro O e raio r , contido em um plano α , e PQ um segmento de reta não nulo, não paralelo e não contido em α (Figura 22). Chamamos de cilindro circular ou cilindro a união de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma de suas extremidades em um ponto do círculo e localizados em um mesmo semi-espaço dos determinados por α .

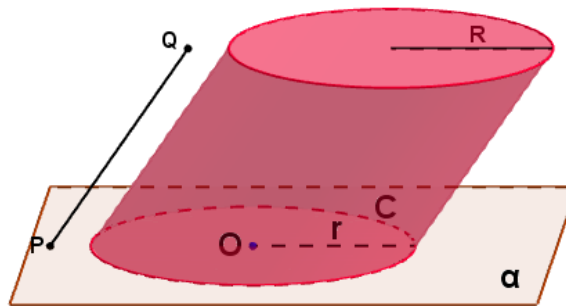


Figura 22: Cilindro.

2.2.1 Elementos

O cilindro possui:

- Duas bases: círculos congruentes localizados em planos paralelos.
- Geratrizes: são os segmentos com uma de suas extremidades no círculo de centro em O e raio R e a outra no ponto correspondente do círculo de centro O e raio r (raio da base do cilindro)

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as suas bases.

2.2.2 Classificação

Se as geratrizes forem perpendiculares aos planos das bases, teremos um cilindro circular reto, caso contrário, teremos um cilindro circular oblíquo.

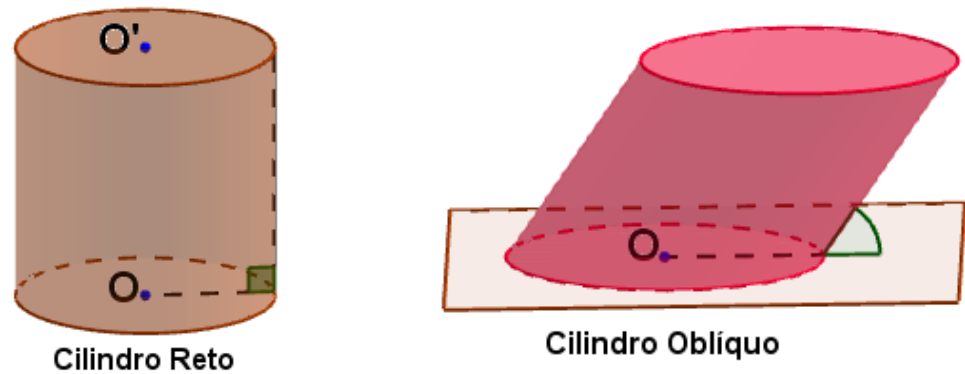


Figura 23: Classificação dos cilindros.

O cilindro reto também pode ser chamado de cilindro de revolução, já que é gerado pela rotação de um retângulo em torno de uma reta que contém um de seus lados.

2.2.3 Secção Meridiana

Secção meridiana é a interseção entre um cilindro e um plano que contém a reta OO' , ligando os centros de suas bases (Figura 24).

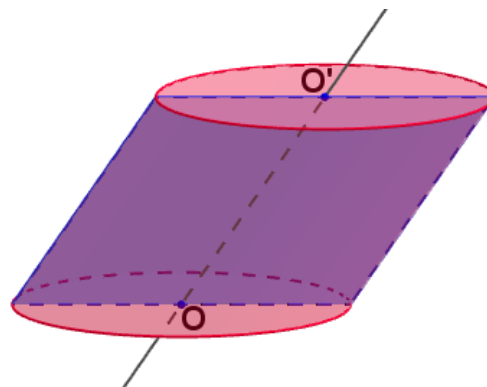


Figura 24: Secção meridiana.

A secção meridiana de um cilindro será um paralelogramo, se o cilindro for oblíquo, ou será um retângulo, se o cilindro for reto.

Cilindro equilátero - Cilindro equilátero é o cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (Figura 25). Nesse caso temos: $2r = g = h$.

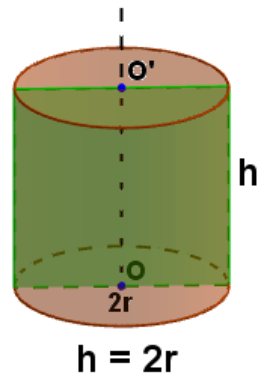


Figura 25: Cilindro equilátero.

2.2.4 Áreas

2.2.4.1 Área Lateral

Ao planificarmos a superfície lateral de um cilindro reto obtemos um retângulo cujo comprimento é $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e cuja altura é a mesma do cilindro (h) (Figura 26). Logo, a área lateral do cilindro é:

$$A_l = 2\pi r h$$

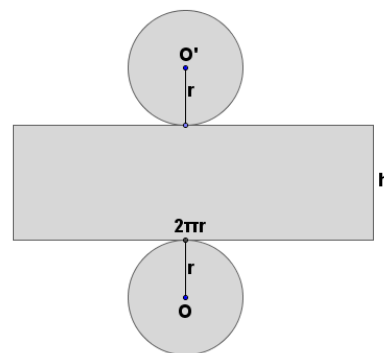


Figura 26: Área lateral do cilindro.

2.2.4.2 Área Total

A área total de um cilindro é a soma de sua área lateral com as áreas de suas bases, logo:

$$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h + r)$$

2.2.5 Volume

Consideremos um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma com mesma altura h e área da base $B_2 = B$ (Figura 27). Suponhamos que o cilindro e o

prisma possuem suas bases apoiadas em um plano α e estão em um dos semi-espacos determinados por α . Todo plano β , paralelo a α , que secciona o cilindro também secciona o prisma. Sendo B'_1 e B'_2 as seções feitas no cilindro e prisma respectivamente temos:

$$B'_1 = B_1 = B \text{ e } B'_2 = B_2 = B \Rightarrow B_1 = B_2$$

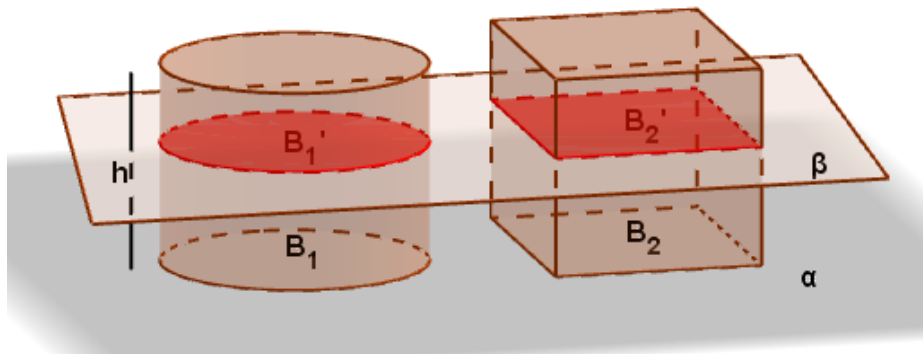


Figura 27: Volume do cilindro.

Logo, pelo princípio de Cavalieri, um cilindro e um prisma têm o mesmo volume quando apresentam alturas congruentes e bases equivalentes. Como $V_{prisma} = B_2 h = Bh$, temos que o volume do cilindro será $V_{cilindro} = Bh$ onde B é a base do cilindro, ou seja, $B = \pi r^2$ e o volume fica:

$$V = \pi r^2 h$$

2.3 Pirâmide

Definição - Considere o polígono convexo $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ situado em um plano π e um ponto V não pertencente a π . Chamamos de pirâmide a união dos segmentos com uma de suas extremidades em V e a outra nos pontos do polígono (Figura 28). Definimos o ponto V como sendo o vértice da pirâmide e o polígono $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ como sendo a base da pirâmide. A altura de uma pirâmide é a distância h do seu vértice ao plano da sua base.

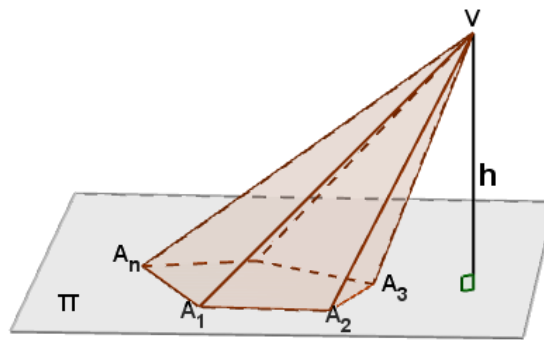


Figura 28: Pirâmide.

2.3.1 Elementos

São elementos de uma pirâmide: Faces, Arestas e Vértices. Agora consideremos uma pirâmide cuja base seja um polígono de n lados para determinar o seu número de faces, arestas e vértices.

O prisma possui:

- $(n + 1)$ faces, sendo n faces laterais e uma base.
- $2n$ arestas, sendo n arestas laterais e n arestas da base
- $(n + 1)$ vértices, sendo n vértices da base e um vértice que não pertence a base o qual chamamos de vértice da pirâmide.

2.3.2 Classificação

Uma pirâmide pode ser classificada em reta ou oblíqua (Figura 29). Pirâmide reta é aquela cuja projeção ortogonal do seu vértice sobre o plano de sua base é o centro dessa base. Se essa projeção ortogonal não coincide com o centro da base a pirâmide será oblíqua.

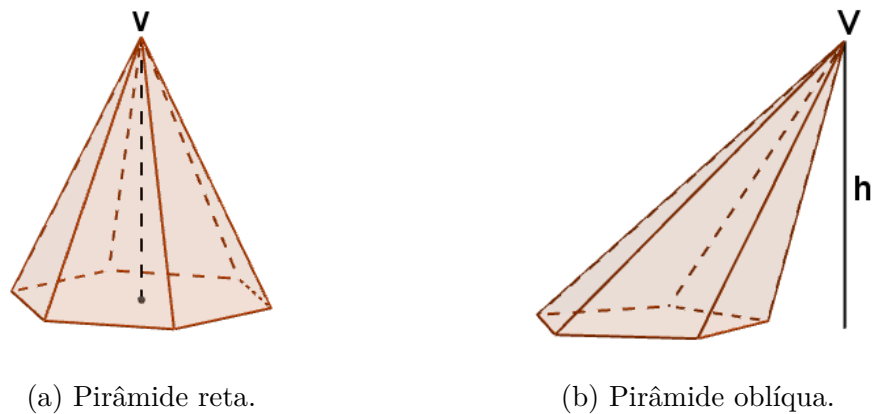


Figura 29: Classificação das pirâmides

As pirâmides também podem ser classificadas quanto ao número de lados de sua base em:

- Pirâmide Triangular: se a base é um triângulo.
- Pirâmide Quadrangular: se a base é um quadrado.
- Pirâmide Pentagonal: se a base é um pentágono, etc.

Pirâmide regular - Pirâmide regular é uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular. As arestas laterais de uma pirâmide regular são congruentes e suas faces laterais são triângulos isósceles e congruentes.

Apótema da pirâmide regular - O apótema de uma pirâmide regular é o segmento que liga o seu vértice ao ponto médio de uma de suas arestas da base, ou seja, é a altura de uma face lateral (Figura 30).

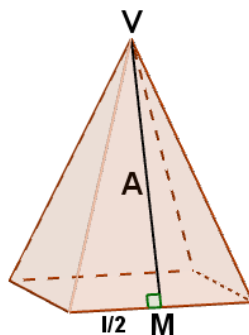


Figura 30: Apótema da pirâmide.

Relações métricas na pirâmide regular

Vamos considerar a pirâmide regular abaixo onde a base $ABCDEF$ é um hexágono regular e portanto inscritível em uma circunferência de raio $R = OF$. Seja $A = VM$ o apótema da pirâmide, $a = OM$ o apótema da base, $L = VC$ uma aresta lateral e $l = BC$ uma aresta da base (Figura 31).

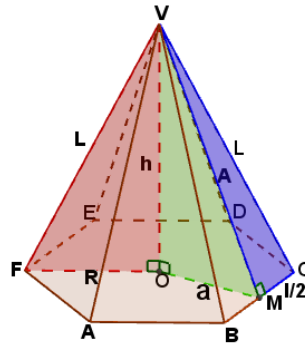


Figura 31: Relações métricas na pirâmide regular.

Os triângulos VOM , VOF e VMC são retângulos e, portanto podemos estabelecer as seguintes relações:

- $A^2 = h^2 + a^2$
- $L^2 = h^2 + R^2$
- $L^2 = A^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$

2.3.3 Área Lateral e Área Total da Pirâmide

A área lateral de uma pirâmide regular é a soma das áreas das n faces laterais (Figura 32), onde cada uma dessas faces é um triângulo isósceles de base l (aresta da base) e altura A (apótema da pirâmide).

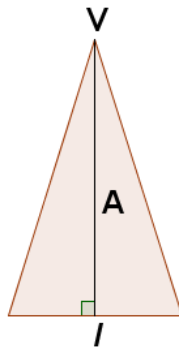


Figura 32: Área lateral da pirâmide.

$$\text{Logo, } A_l = n \cdot \left(\frac{lA}{2}\right) = \left(\frac{nl}{2}\right)A.$$

Como $(n \cdot l)$ é o perímetro da base da pirâmide temos que $\left(\frac{nl}{2}\right)$ é o seu semi-perímetro e:

$$A_l = p \cdot A$$

A base de uma pirâmide é a união de n triângulos de base l (aresta da base) e altura a (apótema da base).

Portanto, a área da base de uma pirâmide regular é:

$$A_b = n \cdot \left(\frac{la}{2}\right) = \left(\frac{nl}{2}\right) \cdot a = p \cdot a$$

A área total de uma pirâmide regular é a soma de sua área lateral com a área de sua base.

$$A_t = p \cdot (a + A)$$

2.3.4 Tetraedro

Definição - Tetraedro é uma pirâmide triangular. Se todas as arestas do tetraedro forem congruentes, chamamos ele de tetraedro regular.

2.3.4.1 Volume

Vamos mostrar como encontrar uma expressão para o volume do tetraedro através da decomposição de um prisma triangular em três pirâmides triangulares (tetraedros).

Qualquer prisma triangular pode ser decomposto em três tetraedros equivalentes entre si (de mesmo volume).

Seja o prisma triangular $ABCDEF$ da Figura 33.

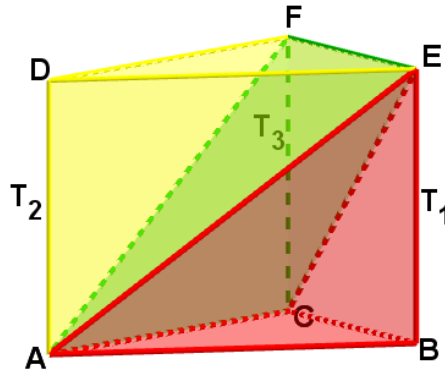


Figura 33: Volume do tetraedro.

Cortamos esse prisma pelos vértices A, C e E , obtendo o tetraedro $T_1 = ABCE$ e a pirâmide quadrangular $ACFDE$.

Cortamos a pirâmide quadrangular $ACFDE$ pelos vértices A, E e F , obtendo os tetraedros $T_2 = ADFE$ e $T_3 = ACFE$.

Os volumes dos tetraedros T_1 e T_2 são iguais, já que eles possuem as bases congruentes (bases do prisma) e a mesma altura (arestas laterais do prisma). Logo, $V_{T_1} = V_{T_2}$.

Os volumes dos tetraedros T_2 e T_3 são iguais, já que elas possuem as bases congruentes (AF é a diagonal do paralelogramo $ACFD$) e a mesma altura (distância do vértice E ao plano $ACFD$). Logo, $V_{T_2} = V_{T_3}$.

$$\text{Como } V_{T_1} = V_{T_2} \text{ e } V_{T_2} = V_{T_3} \Rightarrow V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}.$$

Como o prisma foi decomposto em três tetraedros de mesmo volume temos:

$V_{prisma} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = 3V_{T_1} = 3V_T \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}V_{prisma}$. Seja A_b a área da base do prisma e h a medida da sua altura temos:

$$V_T = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

2.3.5 Volume da Pirâmide

Consideremos uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados e área A_b e cuja medida da altura seja h (Figura 34). Podemos considerar essa pirâmide como sendo a união de $(n - 2)$ tetraedros cujos volumes são: $V_{T_1}, V_{T_2}, \dots, V_{T_{n-2}}$.

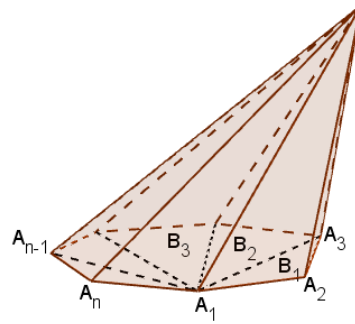


Figura 34: Volume da pirâmide.

O volume dessa pirâmide será:

$$V_P = V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_{n-2}} = \frac{1}{3}A_{b_1} \cdot h + \frac{1}{3}A_{b_2} \cdot h + \dots + \frac{1}{3}A_{b_{(n-2)}} \cdot h \Rightarrow$$

$$V_P = \frac{1}{3}(A_{b_1} + A_{b_2} + \dots + A_{b_{(n-2)}}) \cdot h \Rightarrow$$

$$V_P = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

2.4 Cone

Definição - Seja C um círculo de centro O e raio r contido num plano α e seja V um ponto não contido em α (Figura 35). Chamamos de cone circular ou cone a união dos segmentos de reta com uma de suas extremidades em V e a outra nos pontos do círculo.

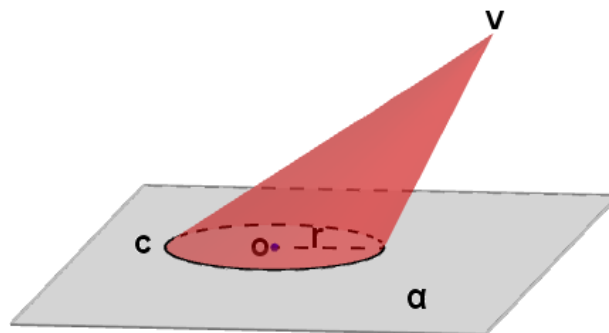


Figura 35: Cone.

2.4.1 Elementos

- Base do Cilindro: é o círculo de centro O e raio r

- Geratriz: são os segmentos que possuem uma de suas extremidades em V e a outra nos pontos da circunferência da base.
- Vértice: é o ponto V

2.4.2 Classificação

Os cones podem ser classificados em retos ou oblíquos (Figura 36). Se a reta OV for perpendicular ao plano da base do cone, teremos um cone reto, caso contrário, teremos um cone oblíquo.

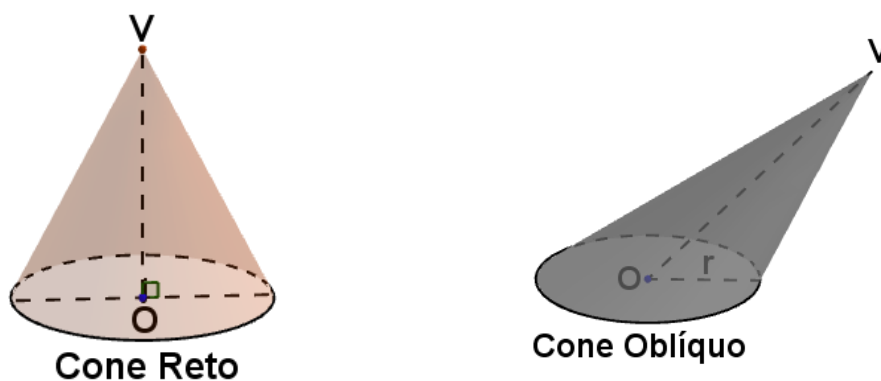


Figura 36: Classificação dos cones.

2.4.3 Secção Meridiana

A interseção de um cone com um plano que contém a reta OV é chamada de secção meridiana (Figura 37). A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles.

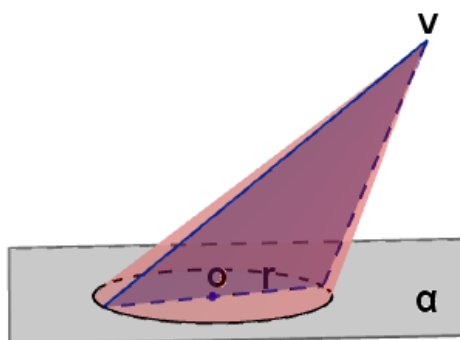


Figura 37: secção meridiana.

Cone equilátero - Cone equilátero é aquele cuja secção meridiana é um triângulo equilátero. Nesse caso temos que a medida do diâmetro da base do cone será igual à medida

da geratriz (Figura 38), ou seja:

$$g = 2r$$

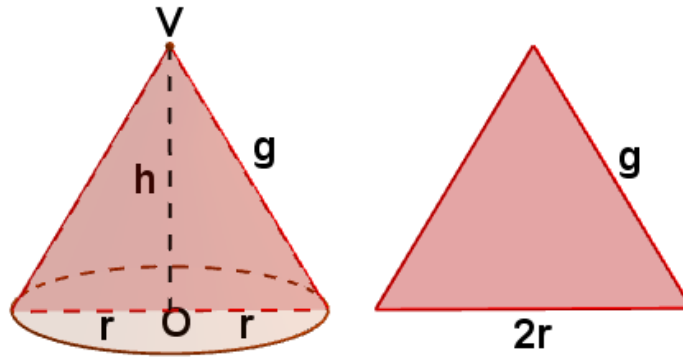


Figura 38: Cone equilátero.

2.4.4 Área Lateral

Para determinar a área lateral de um cone circular reto vamos planificar a sua superfície lateral, formando um setor circular cujo raio é a geratriz do cone (Figura 39). Completamos esse setor de forma que tenhamos um círculo completo e faremos a relação entre o comprimento e a área do setor e do círculo.

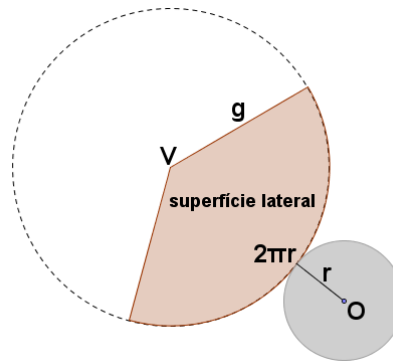


Figura 39: Área lateral do cone.

	Comprimento	Área
Círculo	$2\pi g$	πg^2
Setor	$2\pi r$	A_l

$$\text{Logo, } A_l = \frac{(2\pi r)(\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow A_l = \pi r g.$$

2.4.5 Área Total

A área total de um cone é a soma de sua área lateral com a área da sua base ($A_b = \pi r^2$), logo:

$$A_t = \pi r \cdot (g + r)$$

2.4.6 Volume

Seja C um cone de altura $H_C = h$ e área da base $B_C = A_b$ e seja P uma pirâmide triangular de altura $H_P = h$ e área da base $B_P = A_b$ (Figura 40).

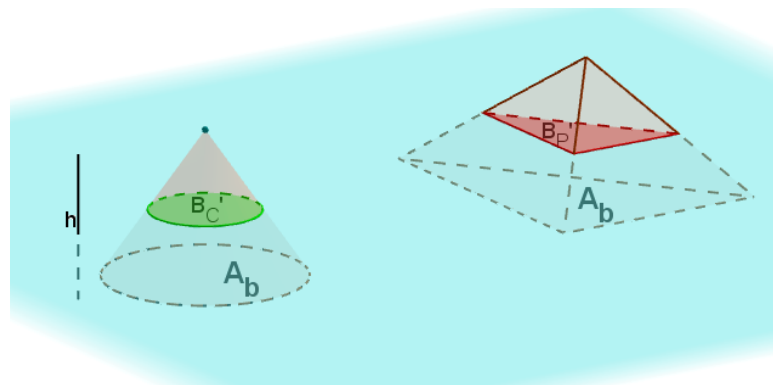


Figura 40: Volume do cone.

Vamos supor que ambos os sólidos estejam apoiados em um plano α e que os vértices estão em um mesmo semi-espaço dos determinados por α . Todo plano β , paralelo a α , que secciona o cone, também secciona a pirâmide. Sendo B'_C e B'_P as áreas dessas secções feitas no cone e na pirâmide respectivamente, temos:

$$\frac{B'_C}{B_C} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{B'_P}{B_P} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{B'_C}{B_C} = \frac{B'_P}{B_P}$$

Como $B_C = B_P = A_b$, temos que $B'_C = B'_P$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide triangular que possuem alturas congruentes e bases equivalentes têm volumes iguais. Como $V_P = \frac{1}{3}B_P \cdot h = \frac{1}{3}A_b \cdot h$, temos que:

$$V_C = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

2.5 Esfera

Definição - Sejam um ponto O e um segmento de medida R . Chamamos de esfera de centro O e raio R ao conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que a distância de O a P é menor ou igual a R (Figura 41).

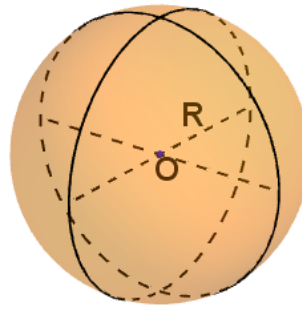


Figura 41: Esfera.

Superfície da esfera: A superfície de uma esfera de centro O e raio R é o conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que a distância de O a P seja igual a R .

Apesar de usarmos definições distintas para a esfera e para a sua superfície, é muito comum usarmos a palavra esfera com os dois significados. Às vezes ela representa a superfície, ou seja, a casca do sólido e às vezes ela representa o seu interior. Devemos sempre entender o significado de acordo com a situação que está sendo proposta.

2.5.1 Secção

Secção - A interseção de qualquer plano secante a uma esfera será sempre um círculo (Figura 42). Esse círculo será máximo se o plano secante passar pelo centro da esfera. Seja ϵ uma esfera de raio R e α um plano secante a essa esfera, tal que d seja a distância do plano ao centro da esfera. Como afirmamos anteriormente a interseção da esfera com o plano será um círculo e seja r o raio desse círculo. Podemos sempre calcular o raio r desse círculo observando a relação: $r^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$.

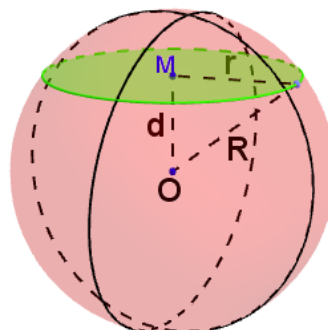


Figura 42: Secção.

2.5.2 Volume

Para demonstrar como obtemos a fórmula do volume de uma esfera utilizaremos o princípio de Cavalieri. Para isso, temos que pensar em um sólido de volume conhecido de forma que seções produzidas por planos horizontais na esfera e a base desse sólido tenham sempre áreas iguais. Tomemos uma esfera ϵ de raio R e um cilindro equilátero C com o raio da base também igual a R (Figura 43). Construamos no interior do cilindro C , dois cones C_1 e C_2 iguais e opostos pelo vértice cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujas alturas sejam iguais a R . O sólido formado no interior do cilindro que é exterior aos cones é chamado de Anticlepsidra.

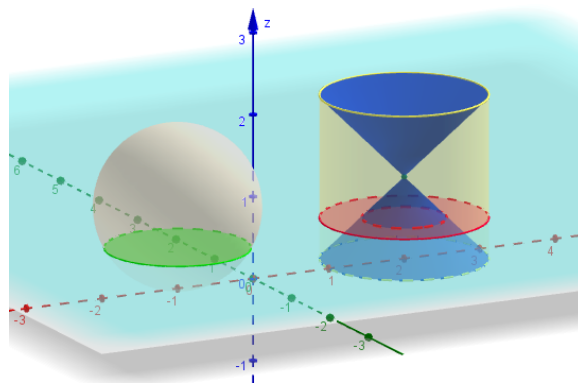


Figura 43: Volume da esfera.

Apoiando a esfera ϵ e a Anticlepsidra em um mesmo plano α vamos determinar as áreas das seções planas determinadas pelas interseções de cada plano paralelo a α , distando h do centro dos sólidos, com a esfera e a Anticlepsidra. Na esfera de raio R , uma seção que dista h do seu centro será sempre um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$ e na Anticlepsidra essa seção será sempre uma coroa circular com raio maior medindo R e raio menor medindo h cuja área é $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera é igual ao volume da Anticlepsidra, ou seja, $V_\epsilon = V_C - 2V_{C_1}$.

Sabemos que $V_C = A_b \cdot h$ e que $V_{C_1} = \frac{1}{3}A_b \cdot h$, logo, $V_C = \pi R^2 \cdot 2R$ e $V_{C_1} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R$ e o volume da esfera será: $V_\epsilon = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2.6 Elipsóide

Definição - É a superfície resultante da rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. Um elipsóide na forma canônica é uma superfície dada por uma equação de segundo grau do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2.6.1 Volume

Vamos considerar o elipsóide A cuja equação cartesiana é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e a esfera B cuja equação é $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ para mostrar como conseguimos encontrar o volume de um elipsóide através do volume de uma esfera. Para isso usaremos o princípio de Cavalieri que diz que se todo plano β secciona os sólidos A e B tal que a área da interseção de β e do sólido A é k vezes a área da interseção de β e do sólido B , então o volume de A também é k vezes o volume de B ($V_A = k \cdot V_B$).

Para usar o princípio, vamos considerar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, o elipsóide citado anteriormente e supor que os sólidos estejam apoiados no plano XY (Figura 44).

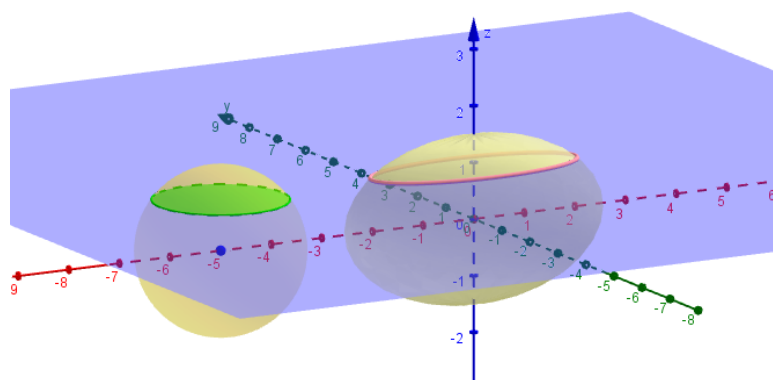


Figura 44: Volume do elipsóide.

Seja β o plano $z = p$, paralelo ao plano XY . Temos então que a interseção entre o plano β e a esfera é o círculo $x^2 + y^2 = c^2 - p^2$ cuja área é $S_B = \pi \cdot (c^2 - p^2)$ e a interseção entre o plano β e o elipsóide é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - p^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{(qa)^2} + \frac{y^2}{(qb)^2} = 1$$

onde $q = \frac{\sqrt{c^2 - p^2}}{c}$, cuja área é $S_A = \pi \cdot (qa) \cdot (qb) = \frac{[\pi ab(c^2 - p^2)]}{c^2}$

Calculando o quociente entre S_A e S_B temos: $S_A/S_B = \frac{ab}{c^2}$.

Logo, pelo princípio de Cavalieri, temos: $V_A = V_B \cdot \frac{ab}{c^2}$. Como $V_B = \frac{4}{3}\pi c^3$ temos:

$$V_B = \frac{4}{3}\pi abc$$

3 Uso do GeoGebra 3D na resolução de problemas

Em nosso cotidiano, o uso do computador tem se tornado muito presente, assim como nas escolas, no processo de ensino-aprendizagem.

A importância dos softwares educacionais como recurso pedagógico possibilitará a aprendizagem da geometria em sua dinâmica.

Conforme [Valente \(1993\)](#), o maior embate que o computador tem provocado no processo educacional provém do fato do seu uso ter causado as indagações dos métodos e processos de ensino utilizados.

Além disso, é necessário o aperfeiçoamento profissional na inserção e atuação desta tecnologia em sala de aula. De acordo com [Valente \(1993\)](#), a implantação da informática no cotidiano da escola consiste basicamente de quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor preparado para utilizar o computador como ferramenta educacional e o aluno.

Na implementação, classificação e avaliação de softwares para a educação é imprescindível considerar os fatores inerentes ao contexto educacional, como as questões éticas, filosóficas, psico-pedagógicas e culturais que atuam nestes processos.

O computador como instrumento para a construção e avaliação de modelos faz parte do paradigma conjectural. E no emancipatório, o computador é uma ferramenta para a manipulação de números e ou textos para tratamento e recuperação de informação, liberando o usuário para concentrar-se no processo de ensino-aprendizagem.

3.1 GeoGebra 3D

O GeoGebra é um programa de matemática desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Geometria, Álgebra e Cálculo, podendo ser utilizado tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Foi criado em 2001, na Flórida Atlantic University. Seu autor é o professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria.

O programa Geogebra é um programa de geometria que permite a construção com pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas. Também possibilita a inclusão de equações e coordenadas diretamente. É possível determinar derivadas e integrais de funções e admite um conjunto de comandos próprios da análise matemática, identificando

pontos singulares de uma função, como raízes ou extremos ou pontos de inflexão.

O Geogebra é um software de acesso livre podendo ser obtido no site www.geogebra.org. Para a sua instalação, faz-se necessária a instalação no computador do software Java (www.java.com).

3.1.1 Construções

As construções do GeoGebra 3D podem ser feitas através dos ícones (Figura 45) ou através do seu campo de entrada (Figura 46). Como nem todas as construções possui essas duas opções, vamos fazer um resumo das principais construções utilizadas no trabalho, mostrando sempre a opção que entendemos ser a melhor para cada caso ou as duas opções.

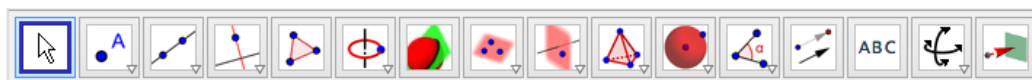


Figura 45








Figura 46

Como a maioria dos ícones apresentados na figura 45 apresentam mais de uma opção de construção, vamos apresentar alguns dos ícones separadamente e citar as principais construções que cada um possui.




1. 

Esse ícone é usado para selecionar ou mover algum objeto construído.

2. 

Além da construção de um novo ponto, esse ícone possui as seguintes opções: ponto em objeto () , interseção de dois objetos () , ponto médio ou centro () , vincular/desvincular ponto () ou número complexo () .

3. 

Além da construção de uma reta definida por dois pontos, esse ícone também possui as opções: segmento definido por dois pontos () , semirreta definida por dois pontos () ou vetor definido por dois pontos () .



4. 

Além da construção de uma reta perpendicular a uma outra reta, esse ícone também possui a opção reta paralela () .



Esse ícone é usado para construção de polígonos.




Além da construção de um círculo dados eixo e um de seus pontos, esse ícone também possui as opções: círculo (Centro - Raio + Direção) () ou círculo definido por três pontos ()



Esse ícone é usado para a construção de interseção de superfícies.






Além da construção de um plano passando por três pontos, esse ícone também possui a opção plano passando por um ponto e uma reta ()




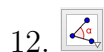
Além da construção de um plano perpendicular, esse ícone também possui a opção plano paralelo ()






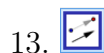
Além da construção de uma pirâmide, esse ícone possui as seguintes opções: construção de um prisma () , extrusão para pirâmide ou cone () ou extrusão para prisma ou cilindro ()



Além da construção de uma esfera dados centro e um de seus pontos, esse ícone também possui a opção esfera dados centro e raio ()



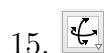
Além da construção de ângulos, esse ícone possui as seguintes opções: distância (comprimento ou perímetro) () , área () ou volume ()






Esse ícone é usado para fazer a translação de um ponto por um vetor.



Esse ícone é usado para inserir texto na janela de construção.




Além de girar a janela de visualização 3D, esse ícone possui as seguintes opções:

mover janela de visualização () , ampliar () ou reduzir () .

16. 

Esse ícone é usado para que possamos mudar a vista para a frente do objeto selecionado.

17. 

Esse ícone (controle deslizante) so é encontrado na janela de visualização 2 e é usado para definir uma variável. Ao definirmos essa variável, determinamos o seu intervalo de variação.

Principais construções

Ponto:

Digitamos no campo de entrada: $A=(x,y,z)$ para definir o ponto A. Como exemplo, temos na figura 47 o ponto $A = (2, 4, 6)$.

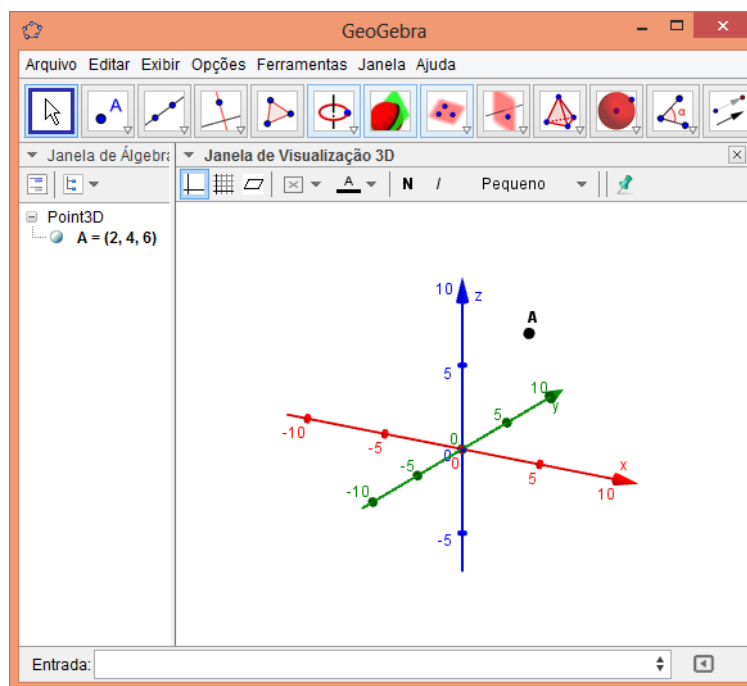



Figura 47: Ponto

Após criarmos um ponto, suas coordenadas aparecerá na janela de álgebra. Os novos pontos criados através do ícone terão sempre a sua terceira coordenada igual a zero. Para que possamos alterar essa terceira coordenada temos que selecionar o ponto e clicar nele para aparecer uma reta na vertical, nesse caso podemos modificar a terceira coordenada, mantendo as duas primeiras inalteradas.

Reta:

No campo de entrada: $\text{Reta}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle]$, definindo a reta determinada por dois pontos.

Nos ícones: opção reta definida por dois pontos no ícone  e então selecionar dois pontos já construídos ou não. Como exemplo, digitamos no campo de entrada os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, -1, 0)$ e construímos a reta a através do ícone citado, selecionando os pontos construídos.

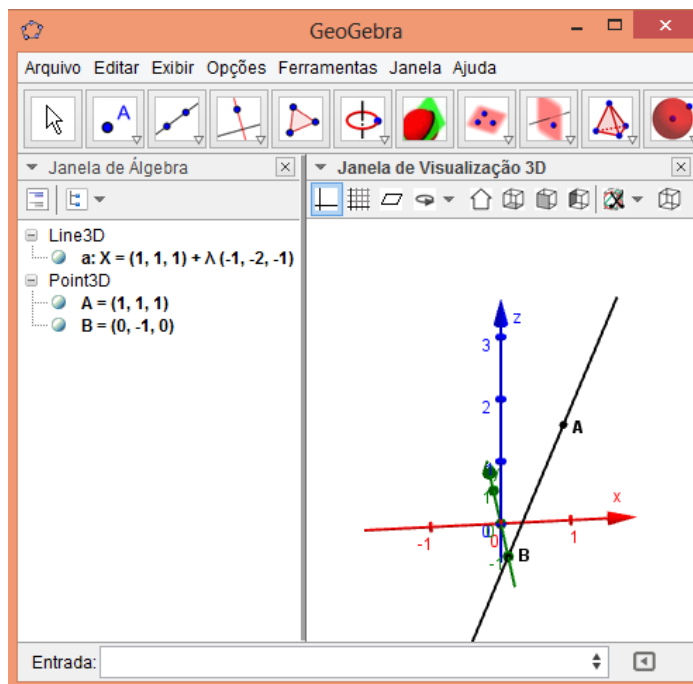



Figura 48: Reta

Ao criarmos uma reta, sua equação paramétrica aparecerá na janela de álgebra.

Reta Paralela:

No campo de entrada: $\text{Reta}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Reta Paralela} \rangle]$ e digitamos um ponto por onde a reta passará e uma reta que ela será paralela.

Nos ícones: opção reta paralela no ícone  e então selecionar um ponto e depois em uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor). Como exemplo, criamos na figura 49 o ponto $C = (2, -1, 0)$ e a reta b , paralela a reta a , passando por C .

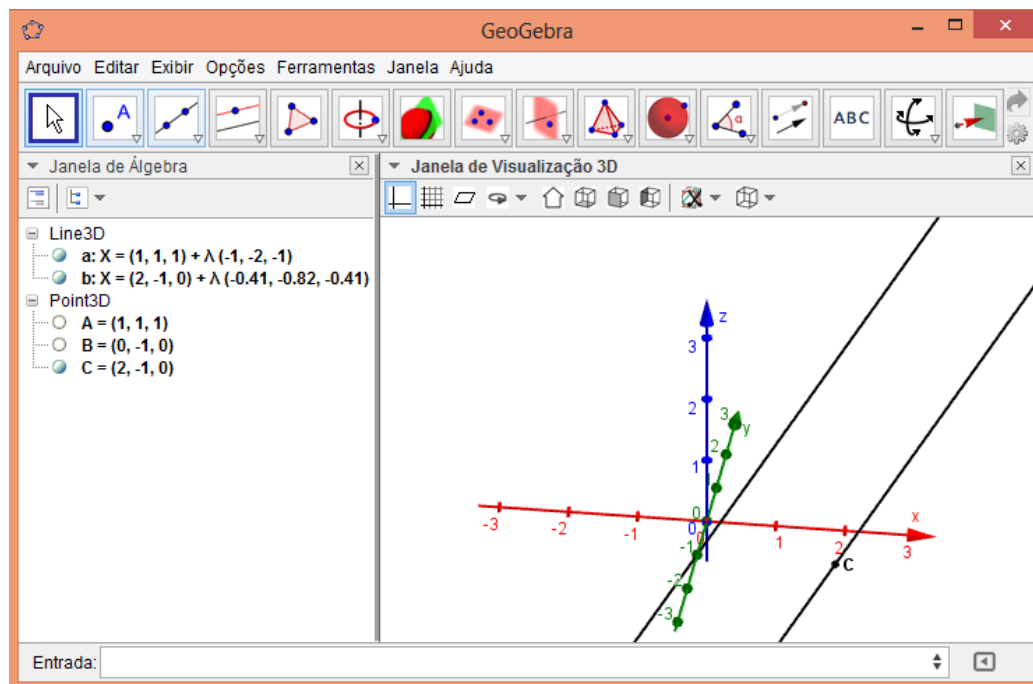



Figura 49: Reta paralela

Ao criarmos uma reta paralela no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra a sua equação paramétrica, onde percebemos que o seu vetor diretor será múltiplo do vetor diretor da reta a qual ela é paralela.

Reta Perpendicular:

Só podemos construir através da opção reta perpendicular no ícone  e então selecionamos um ponto e depois em uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor). Como exemplo, criamos na figura 50 a reta b , que passa pelo ponto $C = (2, -1, 0)$ e é perpendicular a reta a .

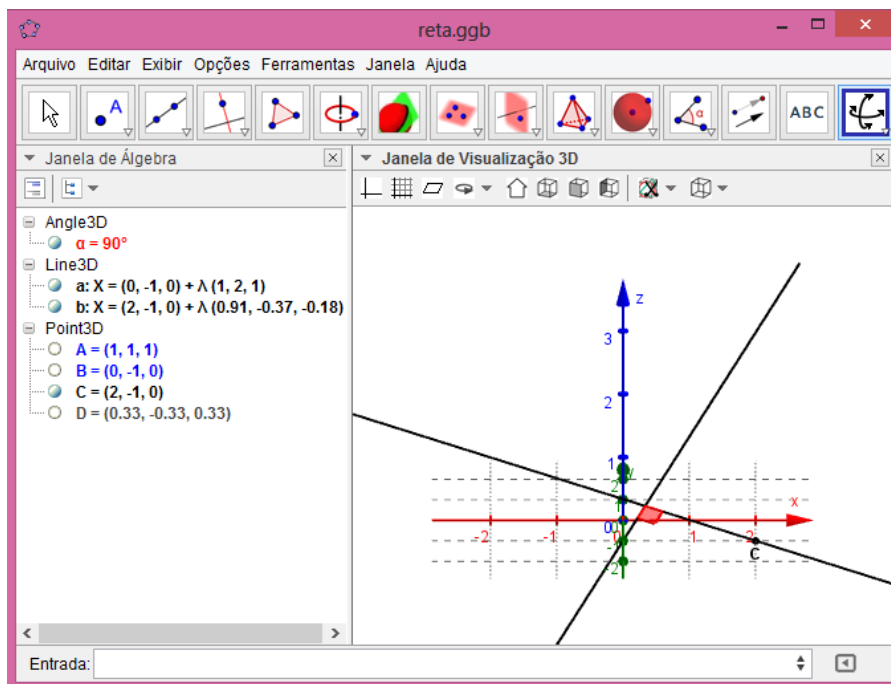



Figura 50: Reta perpendicular

Ao criarmos uma reta perpendicular, sua equação paramétrica aparecerá na janela de álgebra e o produto interno entre os vetores diretores dessas retas é igual a zero.

Segmento:

No campo de entrada: Segmento[<Ponto>, <Ponto>], definindo o segmento determinado por dois pontos ou:

Segmento[<Ponto>, <Comprimento>], definindo um segmento determinado por uma de suas extremidades e pelo seu comprimento.

Nos ícones: opção segmento definido por dois pontos no ícone , e então seleccionar dois pontos já construídos ou não.

Como exemplo, criamos na figura 51 o segmento determinado pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$.

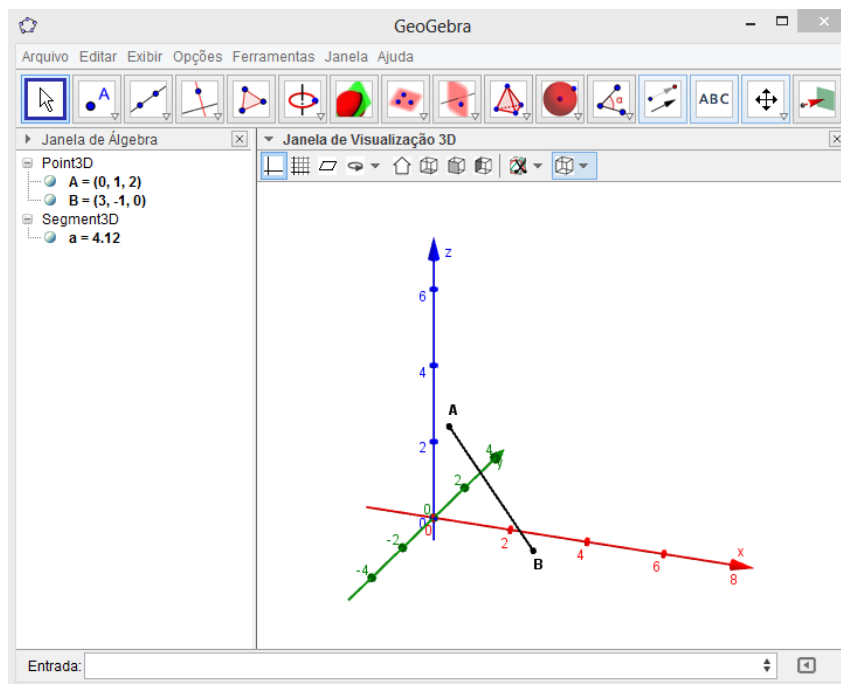



Figura 51: Segmento

Ao criarmos um segmento no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as coordenadas de suas extremidades e o valor numérico da medida desse segmento.

Ponto Médio:

No campo de entrada: `PontoMédio[<Segmento>]`, definindo o ponto médio de um segmento ou

`PontoMédio[<Ponto>, <Ponto>]`, definindo o ponto médio do segmento determinado pelas suas extremidades (Pontos)

Nos ícones: opção Ponto Médio ou Centro no ícone , selecionando em dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.

Como exemplo, construímos na figura 52 o ponto médio do segmento determinado pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$.

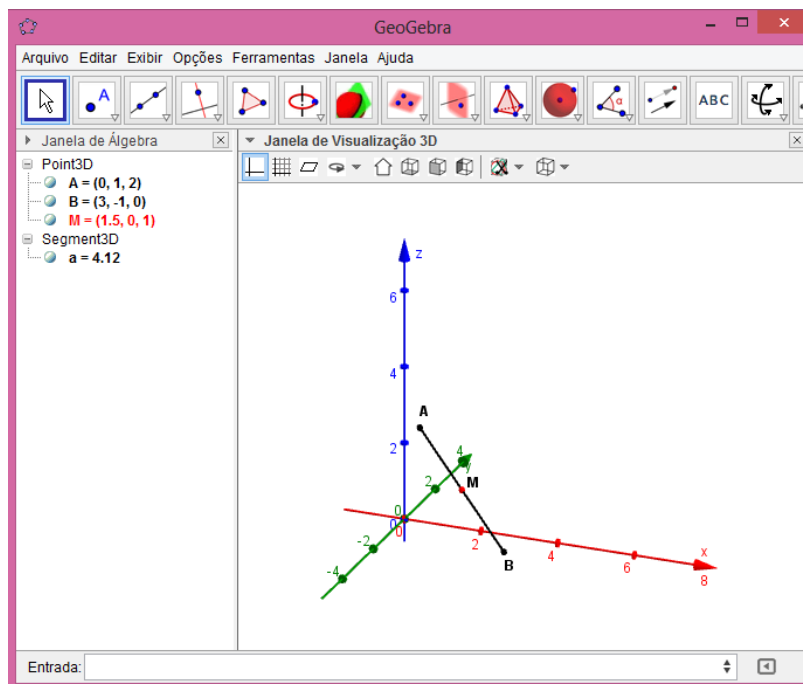



Figura 52: Ponto médio

Ao criarmos o ponto médio de um segmento no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as suas coordenadas.

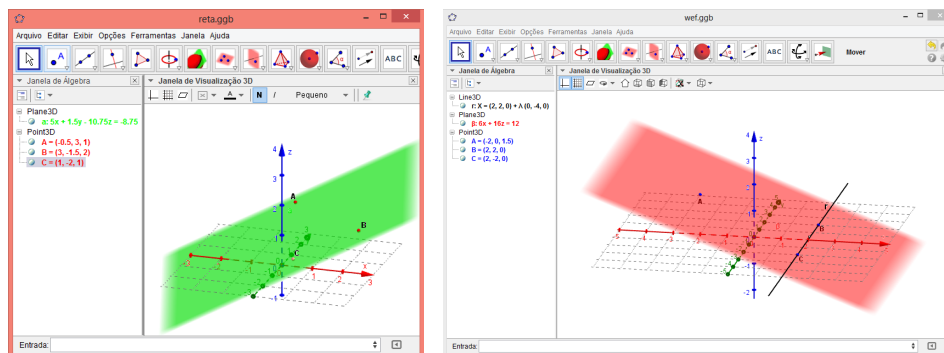
Plano:

No campo de entrada: $\text{Plano}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle]$, definindo o plano que passa por três pontos ou:

$\text{Plano}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Reta} \rangle]$, definindo o plano determinado por um ponto e uma reta.

Nos ícones: opções plano passando por três pontos ou plano passando por um ponto e uma reta no ícone , selecionando três pontos ou então um ponto e uma reta.

Como exemplo, construímos na figura 53a o plano determinado pelos pontos $A = (-0.5, 3, 1)$, $B = (3, -1.5, 2)$ e $C = (1, -2, 1)$ e na figura 53b o plano determinado pela reta r (determinada pelos pontos $B = (2, 2, 0)$ e $C = (2, -2, 0)$) e pelo ponto $A = (-2, 0, 1.5)$.



(a) Plano passando por 3 pontos


(b) Plano passando por um ponto e uma reta

Figura 53

Ao criarmos um plano no GeoGebra 3D, a sua equação cartesiana aparecerá na janela de álgebra.

Plano Paralelo:

No campo de entrada: Plano[<Ponto>, <Plano>], definindo um plano que passa por um ponto e é paralelo a outro plano.

Nos ícones: opção plano paralelo no ícone , e então seleccionar um ponto e um plano paralelo.

Como exemplo, construímos na figura 54 o plano α que é determinado pelos pontos $A = (-2, 1, 0)$, $B = (-2, -1, 0)$ e $C = (2, 0, 1)$ e o plano β que passa pelo ponto $P = (-2, 0, 2)$ e é paralelo a α .

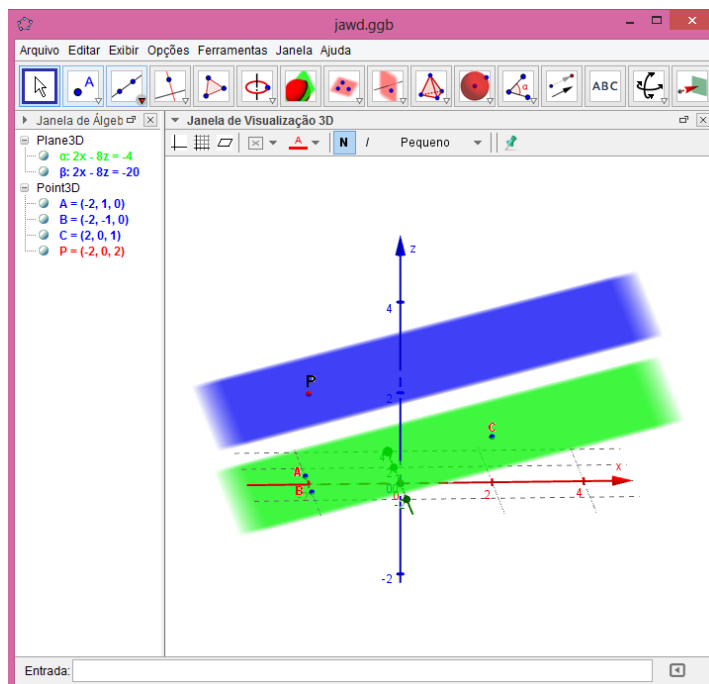



Figura 54: Plano paralelo

Ao criarmos um plano paralelo no GeoGebra 3D, sua equação cartesiana aparecerá na janela de álgebra. Percebemos que os vetores normais aos planos são iguais, já que eles são paralelos.

Plano Perpendicular:

No campo de entrada: `PlanoPerpendicular[<Ponto>, <Reta>]`, definindo um plano que passa por um ponto e é perpendicular a uma reta.

Nos ícones: opção plano perpendicular no ícone , e então selecionar um ponto e uma reta perpendicular.

Como exemplo, construímos na figura 55 o plano α que passa pelo ponto $P = (-1, -2, 3)$ e é perpendicular a reta r .

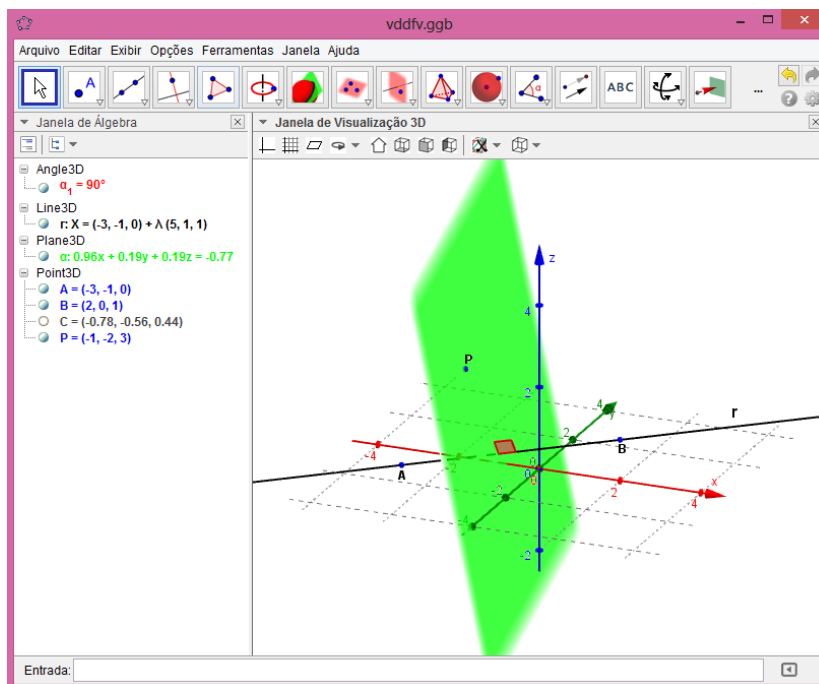



Figura 55: Plano perpendicular

Círculo:

No campo de entrada: $\text{Círculo}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle]$, definindo o círculo que passa por três pontos ou:

$\text{Círculo}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Raio} \rangle]$, definindo o círculo que passa por um ponto e tem raio conhecido. Nesse caso o programa entende que o círculo é paralelo ao plano XY.

Nos ícones: opção círculo definido por três pontos no ícone , e então selecionamos os três pontos que determinam o círculo.

Como exemplo, construímos na figura 56 o círculo c determinado pelos pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (0, -2, 1)$.

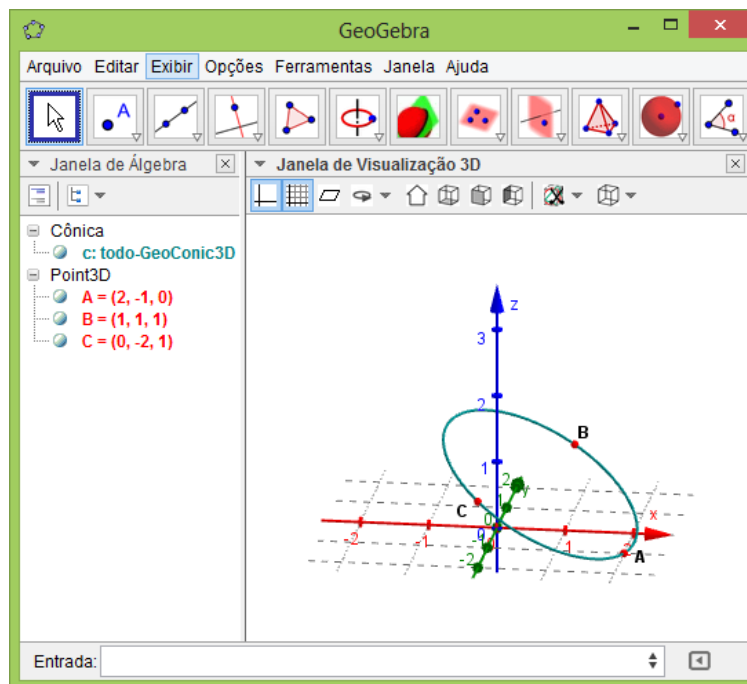



Figura 56: Círculo

Ao criarmos um círculo no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as coordenadas dos pontos que determinam esse círculo.

Polígono:

No campo de entrada: Polígono[<Ponto>, ..., <Ponto>], definindo o polígono que tem esses pontos como vértice.

Nos ícones: selecionamos o ícone  e depois selecionamos os pontos que determinam os vértices do polígono.

Como exemplo, construímos na figura 57 o polígono(pol1) que passa pelos pontos $A = (1.8, -1, -0.5)$, $B = (1, 2.5, 1)$ e $C = (-0.7, -2, 1)$.

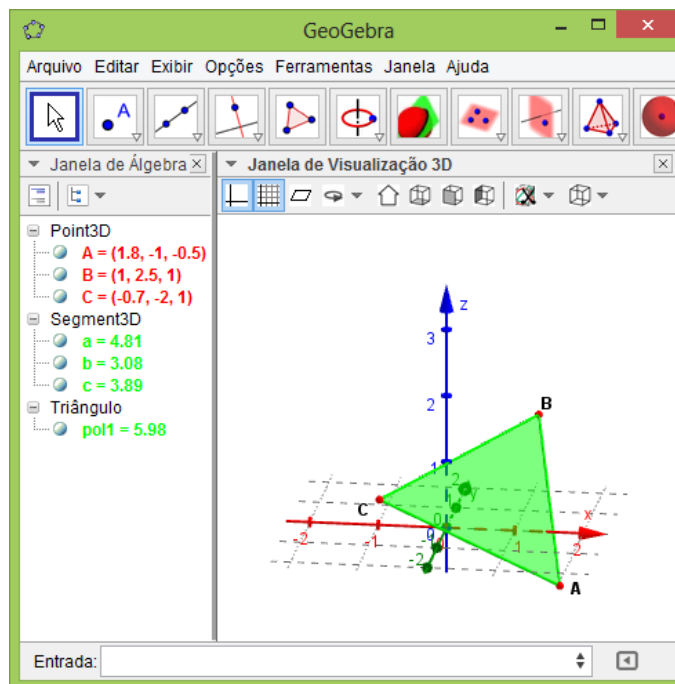



Figura 57: Polígono

Ao criarmos um polígono no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as coordenadas dos seus vértices, as medidas de seus lados e a área desse polígono.

Ângulo:

No campo de entrada: $\hat{\text{Ângulo}}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle]$, definindo o ângulo determinado por três pontos.

Nos ícones: opção ângulo no ícone , e então selecionamos três pontos que determinam o ângulo.

Como exemplo, construímos na figura 58 o ângulo α determinado pelos segmentos a e b .

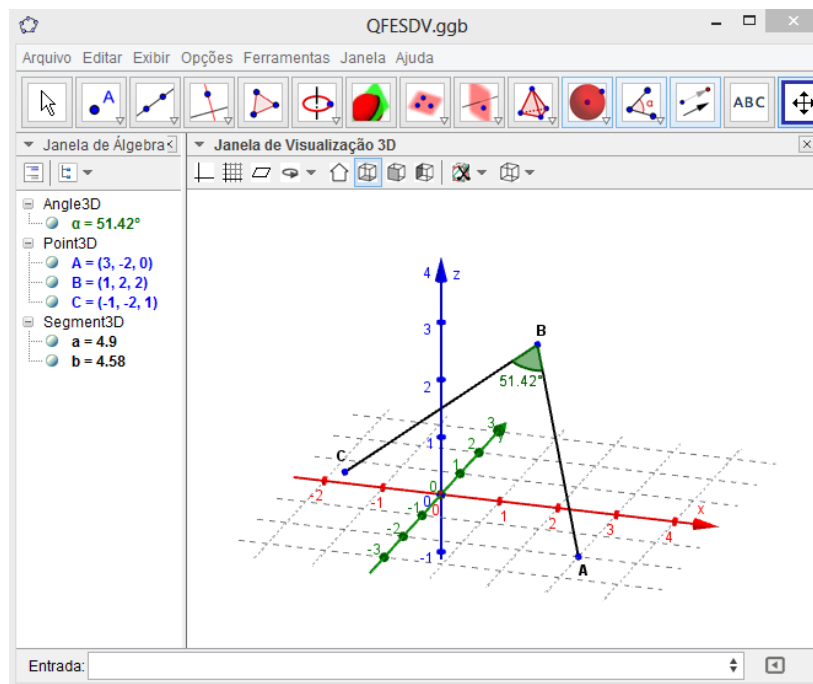



Figura 58: Ângulo

Ao criarmos um ângulo no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra o valor do ângulo criado.

Interseções:

No campo de entrada: `Interseção[<Objeto>, <Objeto>]`, definindo a interseção entre dois objetos (retas, segmentos, planos, círculos, elipses, polígonos, poliedros, etc.)

Nos ícones: opção interseção de dois objetos no ícone , selecionando os objetos que queremos determinar a interseção.

Para determinar a interseção entre dois objetos a melhor opção é sempre através do campo de entrada, já que a versão atual do GeoGebra 3D ainda apresenta algumas limitações e em alguns casos observados acaba não determinando a interseção que desejamos. Como exemplo dessa limitação temos a interseção entre a esfera a e o plano b mostrado na figura 59 que só foi possível determinar através do campo de entrada.

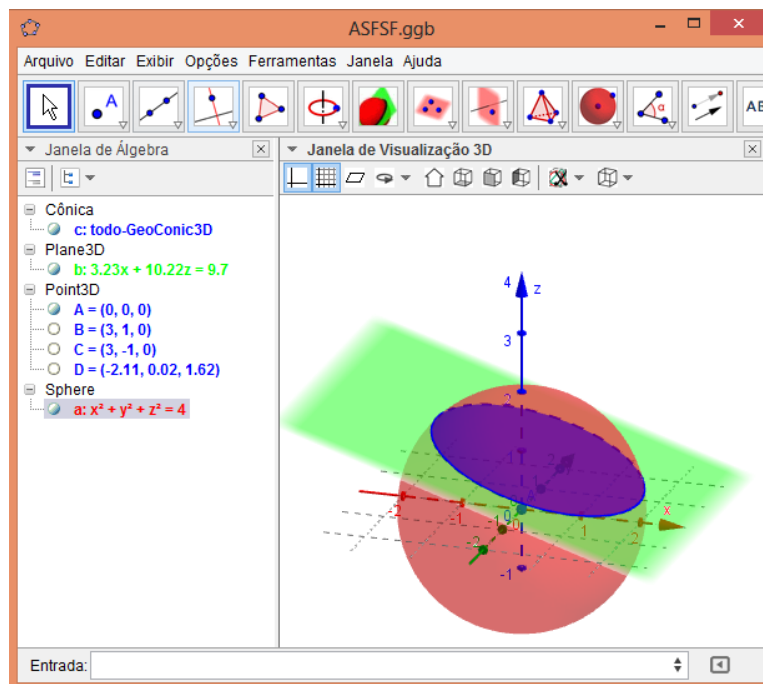




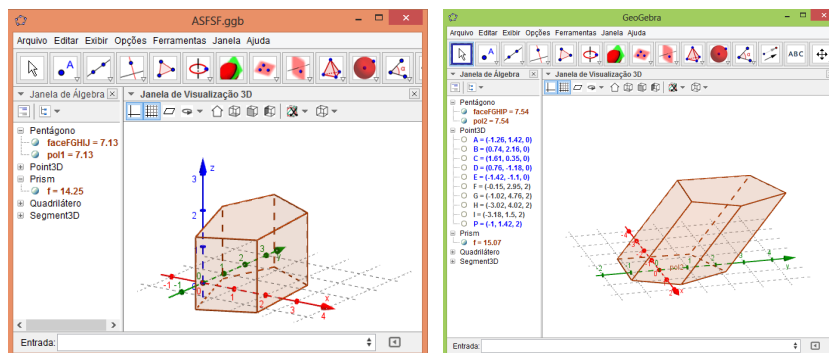
Figura 59: Interseção entre um plano e uma esfera

Prisma:

No campo de entrada: $\text{Prisma}[\langle \text{Polígono} \rangle, \langle \text{Altura} \rangle]$, definindo um prisma determinado pelo polígono de sua base e pela sua altura. Nesse caso o programa só constrói o prisma reto. Se quisermos construir um prisma oblíquo, temos que usar o seguinte comando no campo de entrada: $\text{Prisma}[\langle \text{Polígono} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle]$ e o programa irá construir um prisma cuja base é o polígono construído inicialmente e cujas arestas laterais são todas paralelas a aresta determinada pelo primeiro vértice da base e pelo ponto determinado.

Nos ícones: opção prisma no ícone , selecionando um polígono (base do prisma) e um ponto da base oposta. Nesse caso podemos construir tanto um prisma reto quanto um prisma oblíquo. Outra opção que temos é em Extrusão para Prisma ou Cilindro também no ícone , selecionando um polígono e digitando a altura ou selecionando e arrastando o polígono. Nesse caso o prisma será sempre reto.

Como exemplo, temos na figura 60a um prisma reto determinado pela sua base(pol1) e pela sua altura($h = 2$) e na figura 60b um prisma oblíquo determinado pela sua base(pol2) e pelo ponto $P = (-1, 1.42, 2)$



(a) Prisma reto

(b) Prisma oblíquo


Figura 60

Ao criarmos um prisma no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as coordenadas dos seus vértices, as medidas de suas arestas, as áreas de suas faces e o seu volume.

Cilindro:

No campo de entrada: Cilindro[<Círculo>, <Altura>], definindo o cilindro determinado por uma de suas bases (círculo) e pela sua altura. Nesse caso o cilindro será sempre reto. Outra opção que temos no campo de entrada é:

Cilindro[<Ponto>, <Ponto>, <Raio>], que define o cilindro determinado pelos centros de suas bases (pontos) e pelo raio de sua base. Nesse caso o cilindro também será sempre reto.

Nos ícones: opção Extrusão para Prisma ou Cilindro no ícone , selecionando um círculo e digitando a altura ou selecionando e arrastando um círculo. Nesse caso o cilindro também será sempre reto.

Como exemplo, temos na figura 61 o cilindro cuja base é o círculo determinado pelos pontos $A = (2, -2, 0)$, $B = (3, 0, 0)$ e $C = (1, 1, 0)$ e cuja altura é igual a dois.

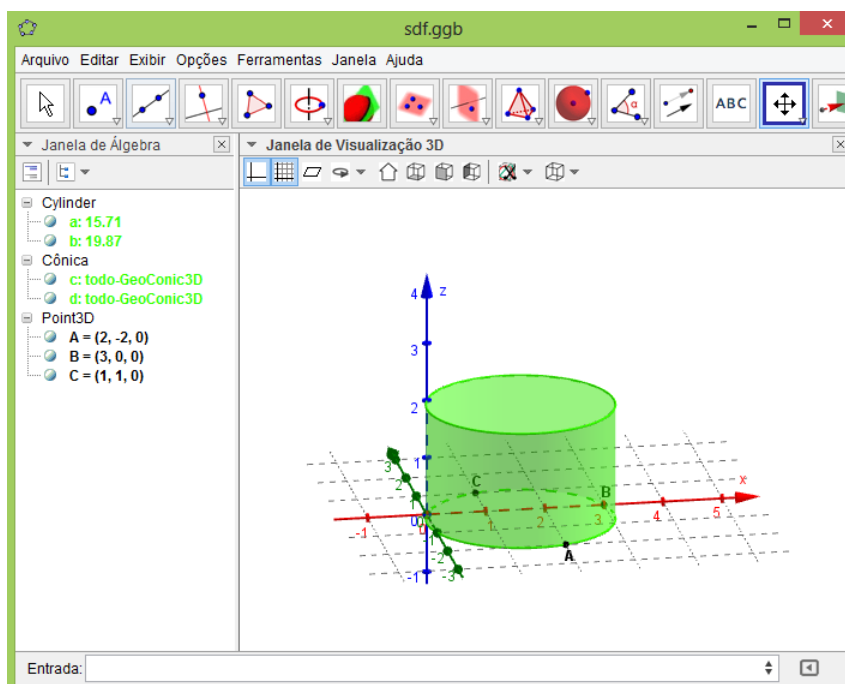




Figura 61: Cilindro

Ao criarmos um cilindro no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra o valor numérico da sua área lateral e o seu volume.

Pirâmide:

No campo de entrada: Pirâmide[<Polígono>, <Altura>], definindo uma pirâmide determinada por sua base (polígono) e pela sua altura. Nesse caso a pirâmide será sempre reta. Outra opção que temos no campo de entrada é: Pirâmide[<Polígono>, <Ponto>], definindo a pirâmide determinada pela sua base (polígono) e pelo seu vértice (ponto).

Nos ícones: opção Pirâmide no ícone , selecionando ou criando um polígono para a base e depois selecionando ou criando um vértice para a pirâmide. Nesse caso a pirâmide determinada poderá ser reta ou oblíqua. Outra opção que temos é em Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone também no ícone , selecionando um polígono e digitando a sua altura ou selecionando e arrastando um polígono. Nesse caso a pirâmide será sempre reta.

Como exemplo, temos na figura 62 uma pirâmide determinada pelo polígono (base da pirâmide) cujos vértices são $A = (2, -1, 0)$, $B = (4, -1, 0)$, $C = (4.5, 1, 0)$, $D = (3, 3, 0)$ e $E = (1, 1, 0)$ e pelo seu vértice $V = (3, 1, 2.5)$.

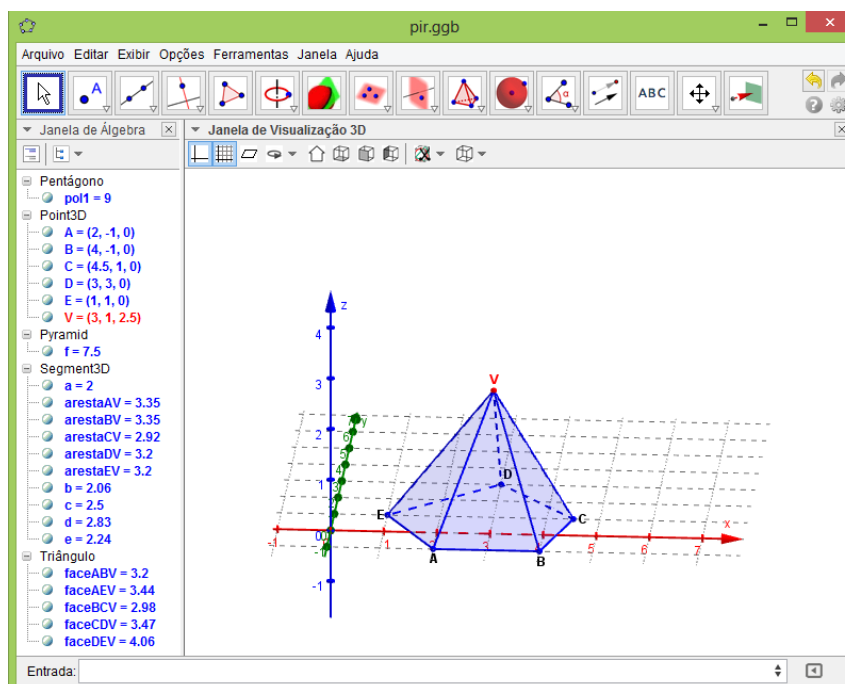



Figura 62: Pirâmide

Ao criarmos uma pirâmide no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra as coordenadas dos seus vértices, as medidas de suas arestas, a área de sua base, as áreas de suas faces laterais e o seu volume.

Cone:

No campo de entrada: $\text{Cone}[\langle \text{Círculo} \rangle, \langle \text{Altura} \rangle]$, definindo um cone determinado por sua base (círculo) e pela sua altura. Outra opção que temos no campo de entrada é: $\text{Cone}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Raio} \rangle]$, que define o cone determinado pelo centro da sua base (ponto), pelo seu vértice (ponto) e pelo raio da sua base. Nesses dois casos teremos sempre um cone reto.

Nos ícones: opção Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone no ícone , selecionando um círculo e digitando a sua altura ou selecionando e arrastando um círculo. Nesse caso o cone será sempre reto.

Como exemplo, construímos na figura 63 um cone definido pelo círculo (base do cone) determinado pelos pontos $A = (2, -2, 0)$, $B = (3, 0, 0)$ e $C = (1, 1, 0)$ e pela sua altura ($h = 3$).

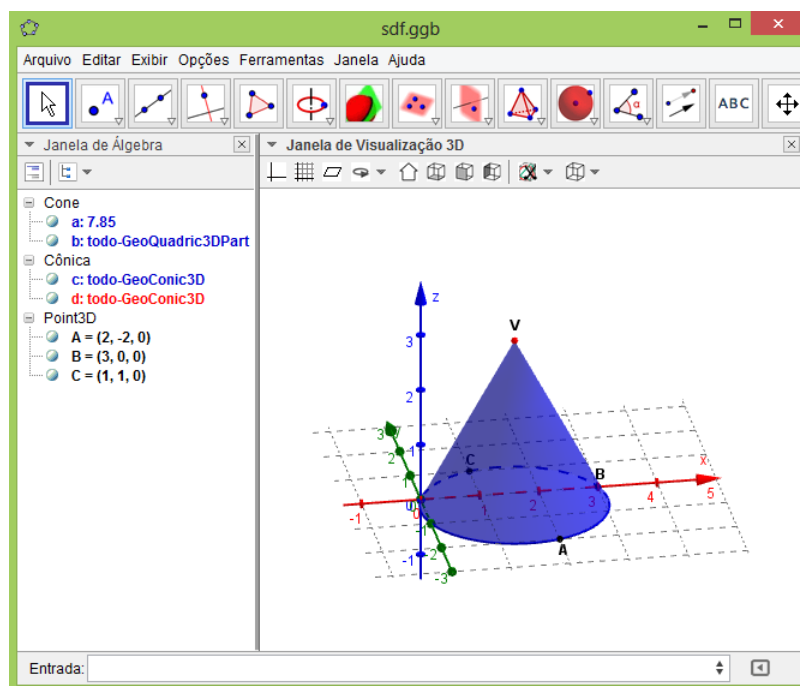



Figura 63: Cone

Ao criarmos um cone no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra o valor numérico do seu volume.

Esfera:

No campo de entrada: $\text{Esfera}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Valor Numérico do Raio} \rangle]$, definindo a esfera determinada pelo seu centro (Ponto) e pela medida do seu raio.

Nos ícones: opção Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos no ícone , selecionando ou criando o centro e selecionando ou criando um ponto da superfície esférica. Outra opção que temos é em Esfera dados Centro e Raio também no décimo primeiro ícone, selecionando ou criando o centro e digitando o valor do seu raio.

Como exemplo, construímos na figura 64 a esfera ϵ determinada pelo seu centro $C = (2, 3, 1)$ e pelo valor numérico do seu raio ($r = 2$).

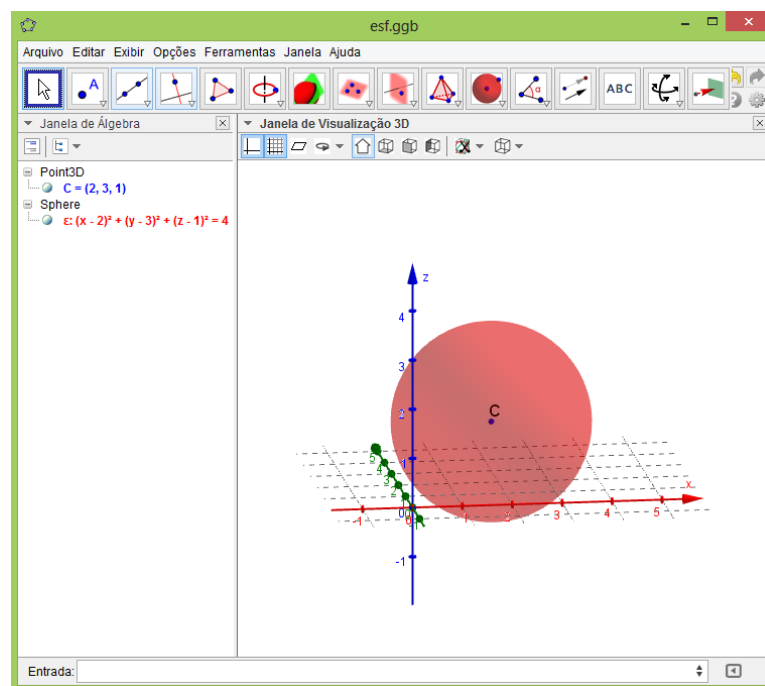


Figura 64: Esfera

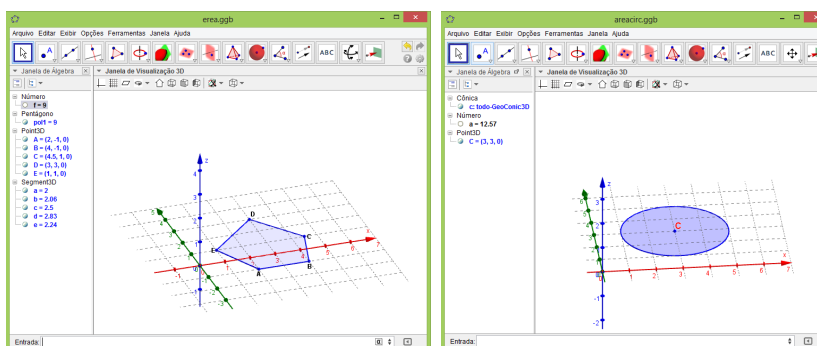
Ao criarmos uma esfera no GeoGebra 3D, aparecerá na janela de álgebra a sua equação .

Área:

No campo de entrada: Área[<Cônica>], definindo a área de um polígono, círculo, elipse, etc.

Nos ícones: opção Área no ícone , selecionando um polígono, círculo ou elipse.

Como exemplo, determinamos na figura 65a a área do pentágono denominado de pol1 e na figura 65b a área do círculo c.



(a) Área de um polígono

(b) Área de um círculo

Figura 65

3.1.2 Dificuldades Encontradas no Geogebra

Identificamos algumas construções que ainda não foram implementadas na versão utilizada do GeoGebra e que fizeram parte do trabalho. A solução encontrada foi fazer essas construções através das equações paramétricas de suas superfícies, que vamos mostrar a seguir.

Cilindro Oblíquo:

Primeiro vamos definir os pontos A e B e uma variável R. Os pontos A e B serão os centros das bases do cilindro e R será o raio das bases. Após definir esses três pontos digitamos a equação abaixo.

Entrada: Superfície[$x(A) + R * \cos(t) + k * (x(B) - x(A)), y(A) + R * \sin(t) + k * (y(B) - y(A)), k * z(B), t, 0, 2 * \pi, k, 0, 1]$

Como exemplo, construímos na figura 66 o cilindro oblíquo determinado pelos pontos $A = (2, 0, 0)$ e $B = (3, 0, 2)$, centros de suas bases, e pelo valor numérico do seu raio, que no exemplo é igual a um.

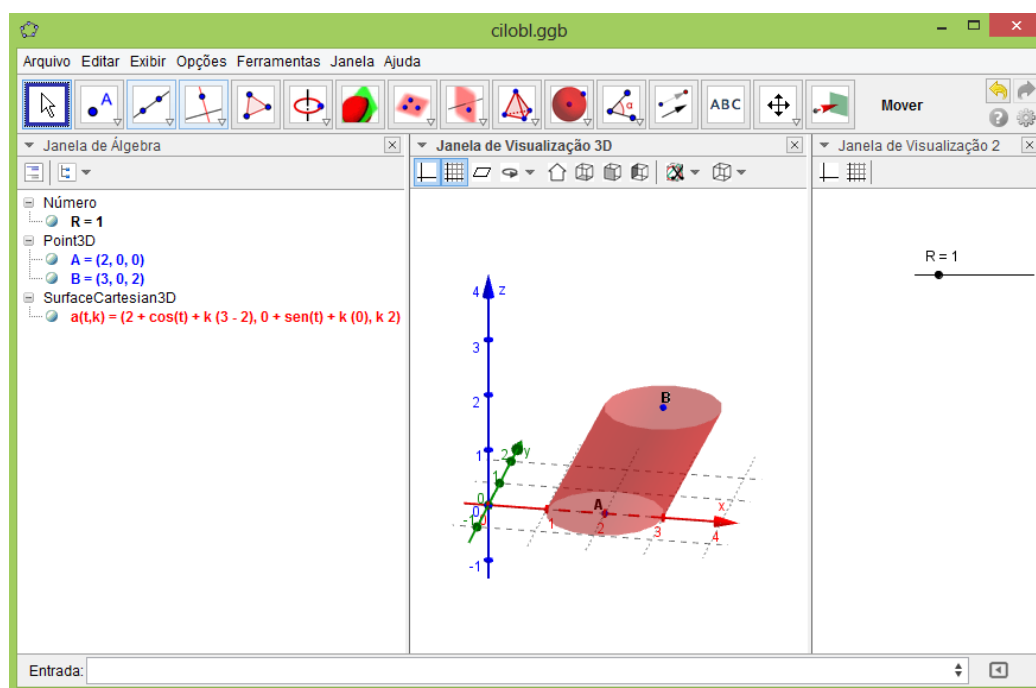


Figura 66: Cilindro oblíquo

Cone Oblíquo:

Primeiro vamos definir no ícone do controle deslizante da janela de visualização 2 os valores a, b, c, R e d, sendo que R e d são maiores que zero. Os valores a, b e c vão determinar o vértice do cone ($V=(a,b,c)$).

Após definir os quatro valores no controle deslizante, digitamos a equação abaixo.

Entrada: Superfície[$k * (R * \cos(t) - a) + a, k * (R * \sin(t) - b) + b, c * (1 - k), t, 0, 2 * \pi, k, 0, d]$

Como exemplo, construímos na figura 67 um cone oblíquo de raio igual a um ($R = 1$) e vértice $V = (1.5, 0, 2)$.

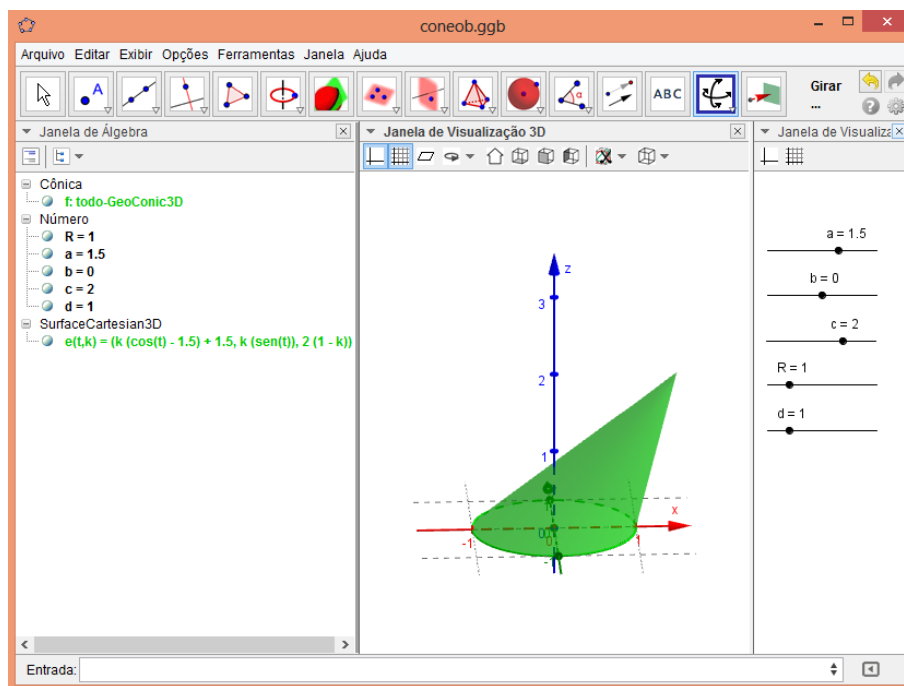


Figura 67: Cone oblíquo

Elipsóide

Definimos os valores a, b e c (maiores que zero) no controle deslizante da janela de visualização 2 e depois digitamos a equação abaixo:

Entrada: Superfície[$a * \cos(u) * \cos(v), b * \sin(u) * \cos(v), c * \sin(v), u, 0, 2 * \pi, v, 0, 2 * \pi]$

Como exemplo, construímos na figura 68 um elipsóide onde $a = 2.5, b = 1.5$ e $c = 1$.

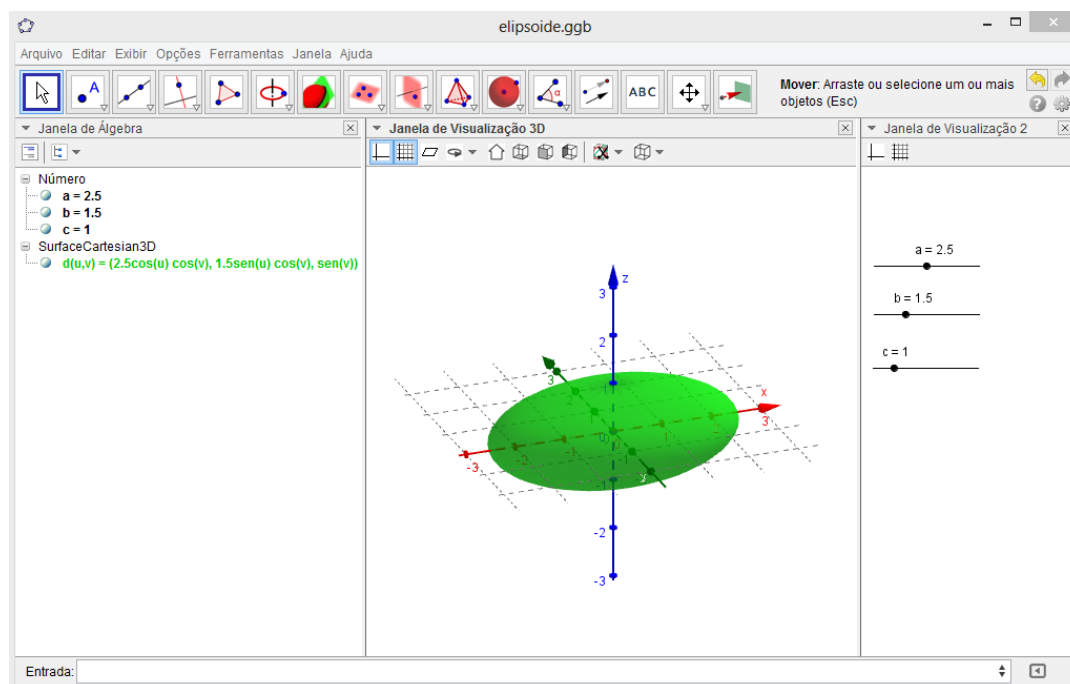


Figura 68: Elipsóide

Essa equação foi utilizada na dedução da fórmula do volume do elipsóide e para essa demonstração tivemos que fazer a interseção dessa superfície com um plano. Essa interseção não foi possível ser determinada através do ícone Interseção de Dois Objetos e nem através da entrada pelo comando Interseção[<Objeto>, <Objeto>]. Como sabemos que a interseção de um elipsóide com um plano é sempre uma elipse, definimos essa elipse da seguinte forma:

Após definir um valor k ($-c < k < c$) no controle deslizante, definimos um plano $z = k$ onde a sua interseção com o elipsóide é:

$$\text{Entrada: Curva}[a * \text{sqrt}(c^2 - k^2)/c * \cos(t), b * \text{sqrt}(c^2 - k^2)/c * \sin(t), k, t, 0, 2 * \pi]$$

Como essa interseção determina apenas o contorno de uma elipse, não tivemos como calcular a área dessa curva através dos ícones e do comando Área[<Cônica>]. Tivemos então que determinar essa área através da fórmula para cálculo da área da elipse ($\pi \cdot a \cdot b$), onde expressamos a fórmula em função de a , b , c e k , como mostramos abaixo.

$$\text{área} = \pi * [a * \text{sqrt}(c^2 - h^2)/c] * [b * \text{sqrt}(c^2 - h^2)/c] = \pi * a * b * (1 - (k/c)^2)$$

Como exemplo, temos na figura 69 a construção da elipse ϵ que é a interseção entre o plano β e o elipsóide. Após a construção da elipse determinamos a sua área que no exemplo é igual a 7,54.

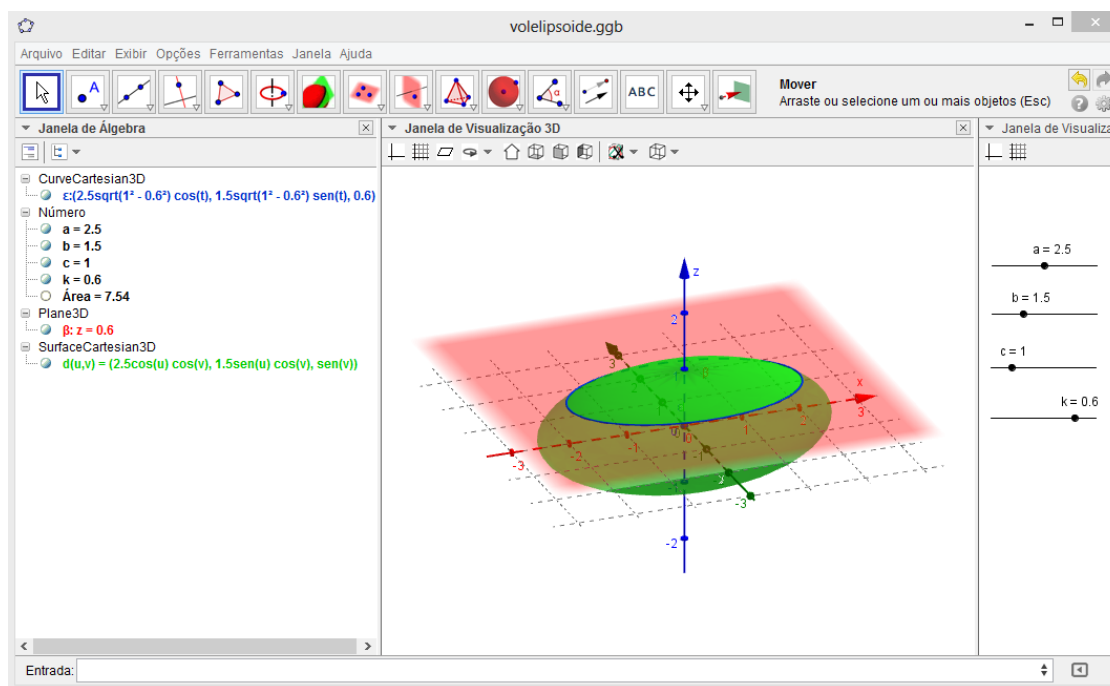


Figura 69: Demonstração do volume do elipsóide

Outra dificuldade que encontramos foi na construção de prismas e pirâmides regulares. A versão 3D do GeoGebra não possui a opção Polígono Regular em seus ícones, dificultando um pouco a construção da base desses sólidos. A solução encontrada foi construir o polígono regular na janela de visualização 2 e depois usar ele para a construção do sólido no GeoGebra 3D. Para isso, vamos na entrada com o comando `Prisma[<Polígono>, <Altura>]` ou `Pirâmide[<Polígono>, <Altura>]` e escrevemos em <Polígono> a denominação dada ao polígono construído e digitamos a sua altura. Após esse comando o programa irá construir um sólido (prisma ou pirâmide) regular que aparecerá sem a base (Figura 70a) que foi construída na janela de visualização 2. Construímos essa base posteriormente com o comando `Interseção[<Objeto>, <Objeto>]`, onde faremos a interseção entre o sólido construído e um plano que geralmente é o plano XY ($z = 0$) (Figura 70b).

Como exemplo, temos na figura 70a a construção do prisma regular cuja base é o polígono *pol1* construído na janela de visualização 2. Já na figura 70b temos a construção da base inferior desse prisma regular, que é obtida fazendo a interseção entre o prisma e o plano β ($z = 0$).

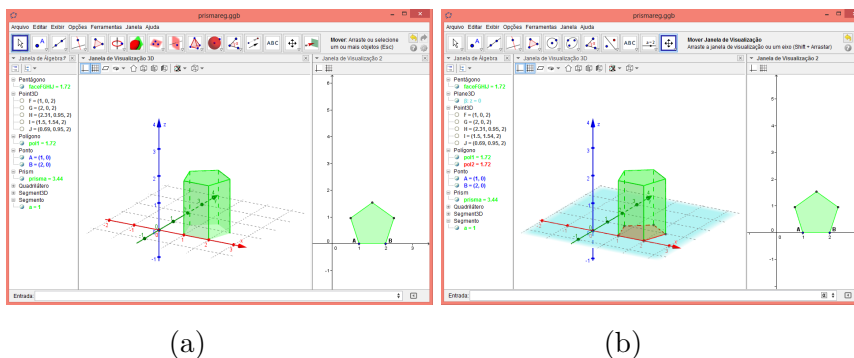


Figura 70

3.2 Problemas

Problema 1 - RETIRADO DO EXAME DE QUALIFICAÇÃO DO PROFMAT - 2012.1

Na figura abaixo (Figura 71), $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta 1. AE , BF , CG e DH são arestas e a face $ABCD$ está contida em um plano horizontal π . Seja T o tetraedro $BDEG$. Seja X um ponto da aresta AE (diferente de A e de E) e π' o plano paralelo a π que passa por X . A intersecção de π' com T é o quadrilátero $MNPQ$, como mostrado na figura 71.

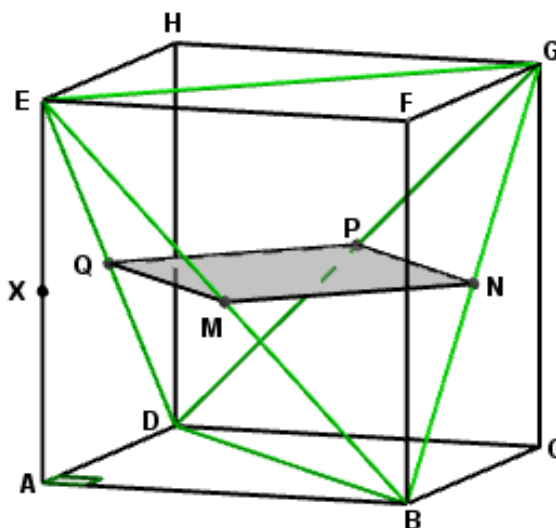


Figura 71

- a) Mostre que $MNPQ$ é um retângulo.
- b) Mostre que o perímetro de $MNPQ$ é igual a $2\sqrt{2}$, independentemente do ponto X .

Construção do Problema:

1. Construção do Polígono $ABCD$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ e $D = (0, 1, 0)$ e através do ícone polígono, selecionamos os pontos construídos, determinando assim o polígono $ABCD$ que será denominado de $pol1$.

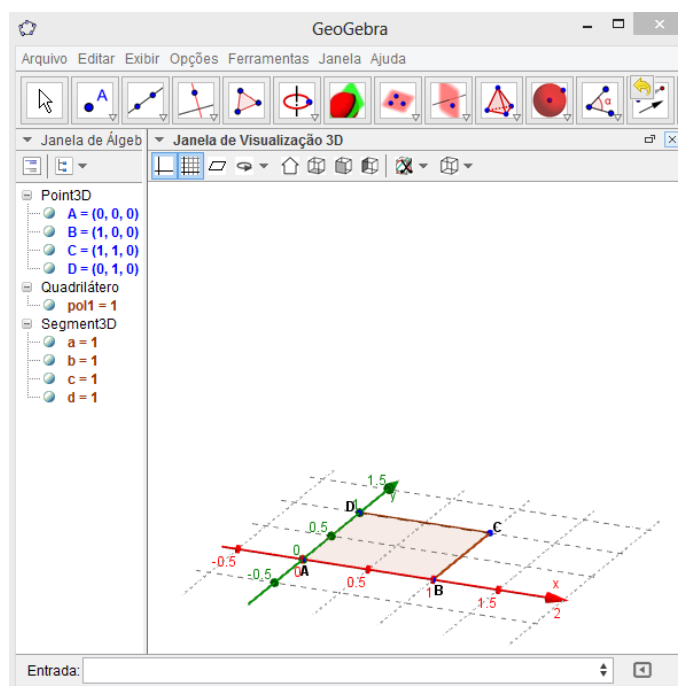


Figura 72

2. Construção do Cubo.

Digitamos na entrada o comando $\text{Prisma}[\text{pol1}, 1]$ e será construído o cubo cuja base é o polígono $ABCD$ e cuja altura é igual a 1.

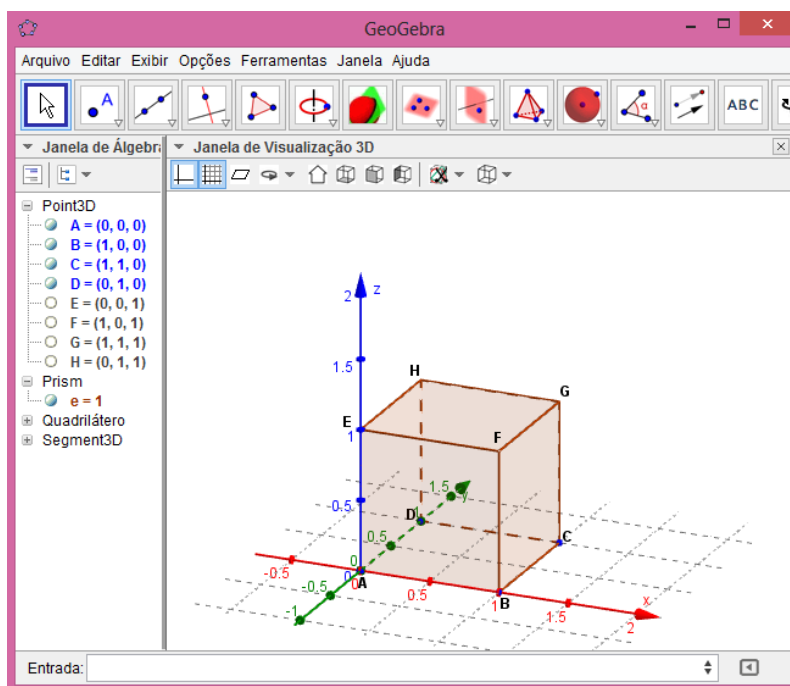


Figura 73

3. Construção do Polígono BDE .

Através do ícone polígono, selecionamos os pontos B , D e E , construindo o polígono que será denominado de $pol2$.

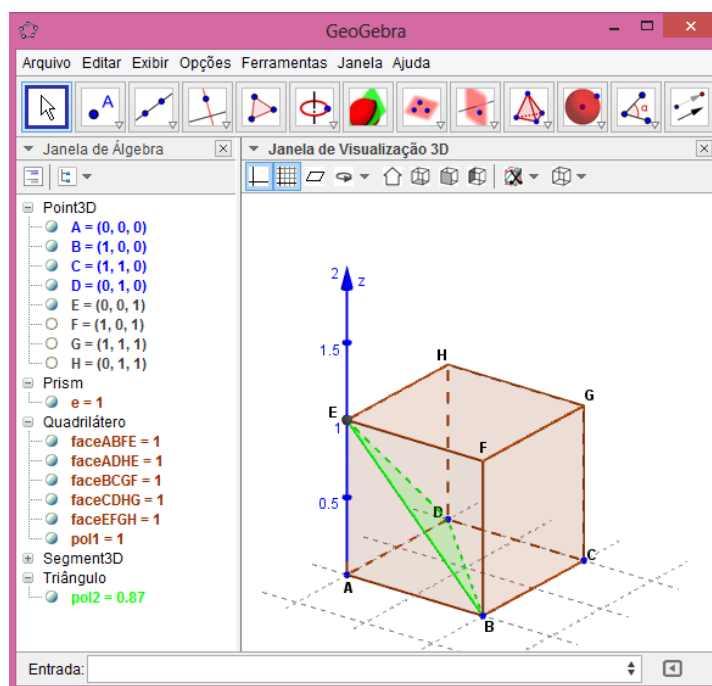


Figura 74

Após a construção do triângulo BDE ($pol2$), aparecerá na janela de álgebra o

valor de sua área. Temos então que a área do triângulo BDE será igual a $0,87$.

4. Construção do Tetraedro T .

Digitamos na entrada o comando Pirâmide[<Polígono>, <Ponto>], substituindo o polígono por $pol2$ e o ponto por G , construindo assim, a pirâmide cuja base é o polígono BDE e cujo vértice é o ponto G , que será denominada de f .

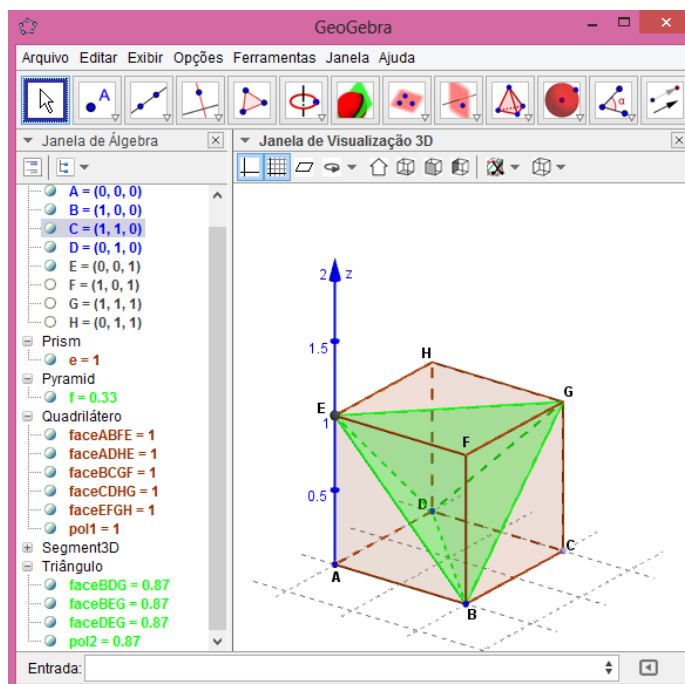


Figura 75

5. Definição da variável a no controle deslizante.

Acesse a opção exibir no menu e selecione a janela de visualização 2, em seguida, selecione o ícone do controle deslizante e defina a variável a , variando de 0 a 1, já que o comprimento da aresta do cubo é igual a 1.

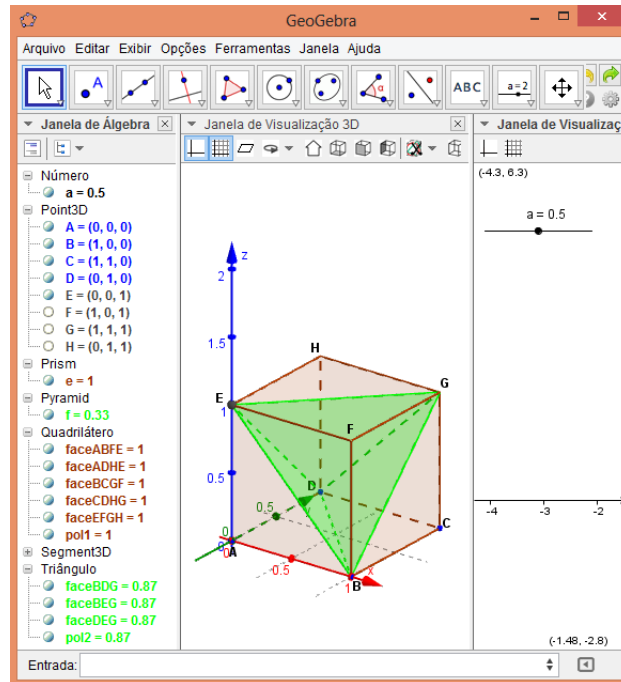


Figura 76

6. Construção do ponto X .

Digitamos no campo de entrada o ponto $X = (0, 0, a)$ e o ponto X será construído sobre a aresta AE , variando entre os pontos $A = (0, 0, 0)$ e $E = (0, 0, 1)$, conforme seja o valor da variável a .

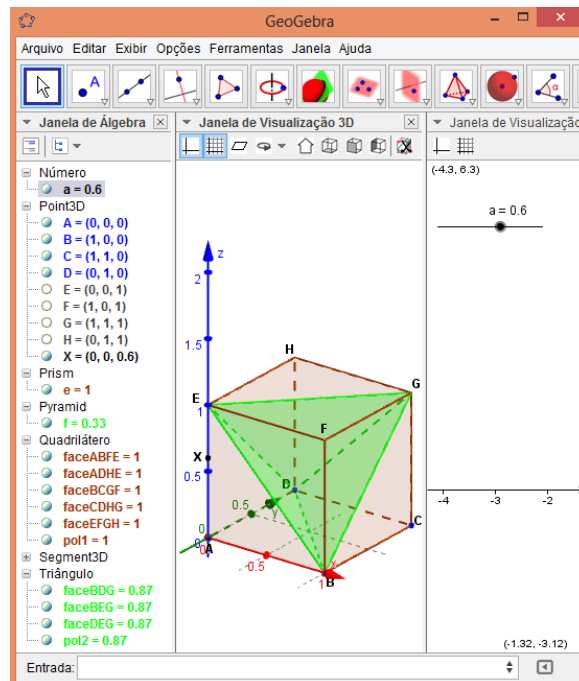


Figura 77

7. Construção do plano π' .

Construímos o plano π' através do ícone plano paralelo, selecionando o ponto X e o plano $z = 0$.

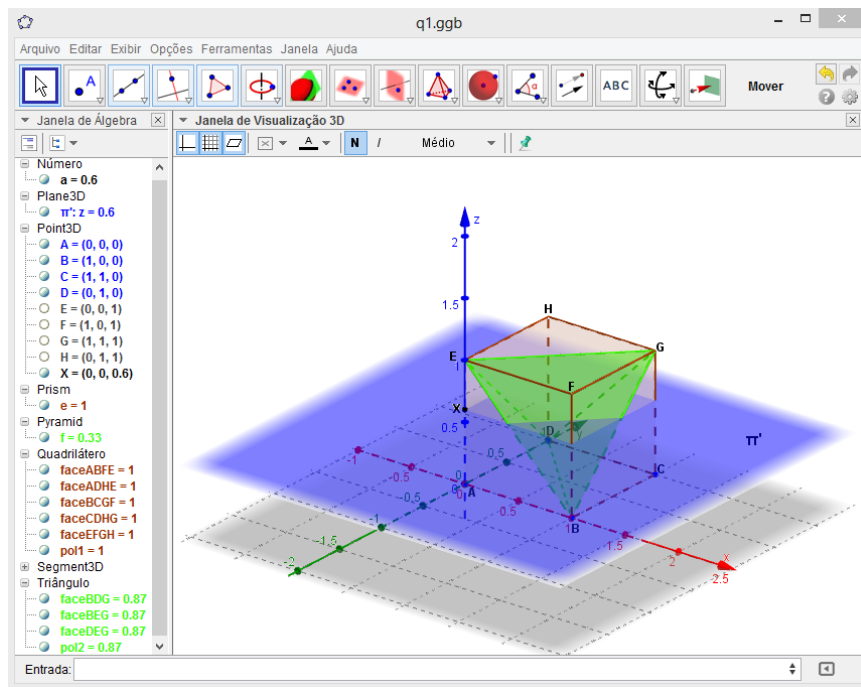


Figura 78

8. Construção da interseção entre o plano π' e o tetraedro T .

Digitamos na entrada o comando $\text{Interseção}[\pi', f]$ e será construído o polígono determinado pela interseção entre o plano π' e o tetraedro T , que será denominado de pol3 .

Após a construção da interseção vamos no ícone inserir texto e selecionamos os vértices do polígono para definirmos esses pontos como M , N , P e Q .

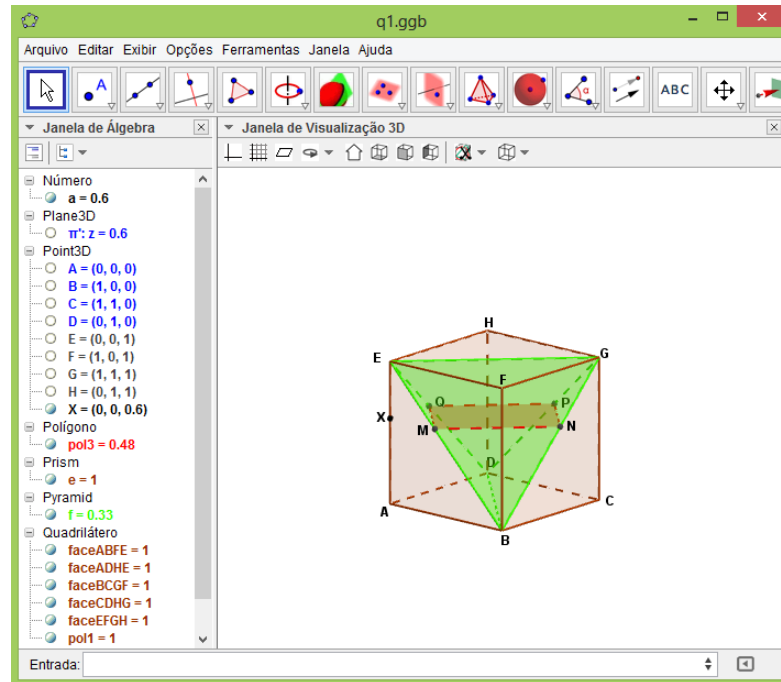


Figura 79

Soluções

a) Para mostrar que $MNPQ$ é um retângulo, devemos mostrar que os lados opostos são paralelos entre si e que o ângulo entre os lados não paralelos é reto.

O plano que contém a base superior do cubo e o plano π' são paralelos entre si e secantes ao plano que contém BEG . Como as interseções entre dois planos paralelos e um terceiro plano secante a eles são duas retas paralelas, temos que as retas que passam por EG e MN são paralelas entre si o que nos garante que os segmentos \overline{EG} e \overline{MN} são paralelos (Figura 80).

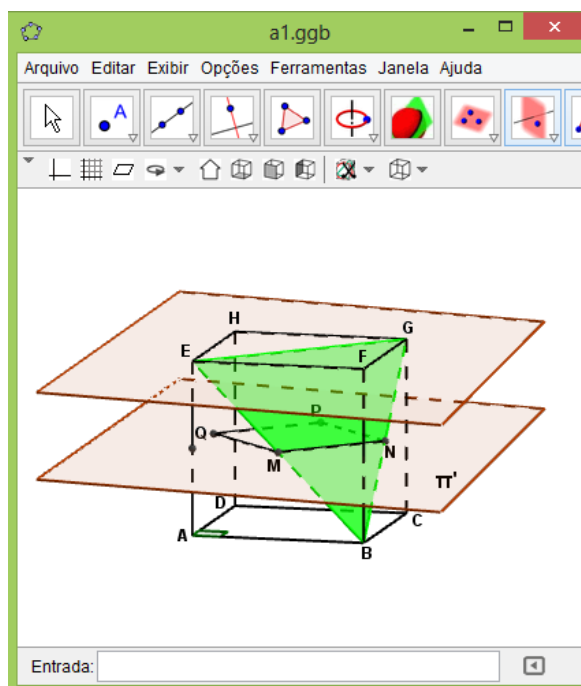


Figura 80

De maneira análoga mostramos que os segmentos \overline{EG} e \overline{PQ} também são paralelos. Como $\overline{EG} \parallel \overline{MN}$ e $\overline{EG} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{PQ}$. Sabendo que os planos π e π' são paralelos entre si e secantes aos planos que contém BDE e BDG , temos que: $\overline{BD} \parallel \overline{MQ}$ e $\overline{BD} \parallel \overline{NP} \Rightarrow \overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ (Figura 81), ou seja, os lados opostos de $MNPQ$ são paralelos entre si. Como os segmentos \overline{MN} e \overline{MQ} são paralelos aos segmentos \overline{EG} e \overline{BD} respectivamente e esses segmentos são ortogonais, temos que \overline{MN} é perpendicular a \overline{MQ} . Logo, $MNPQ$ é um retângulo.

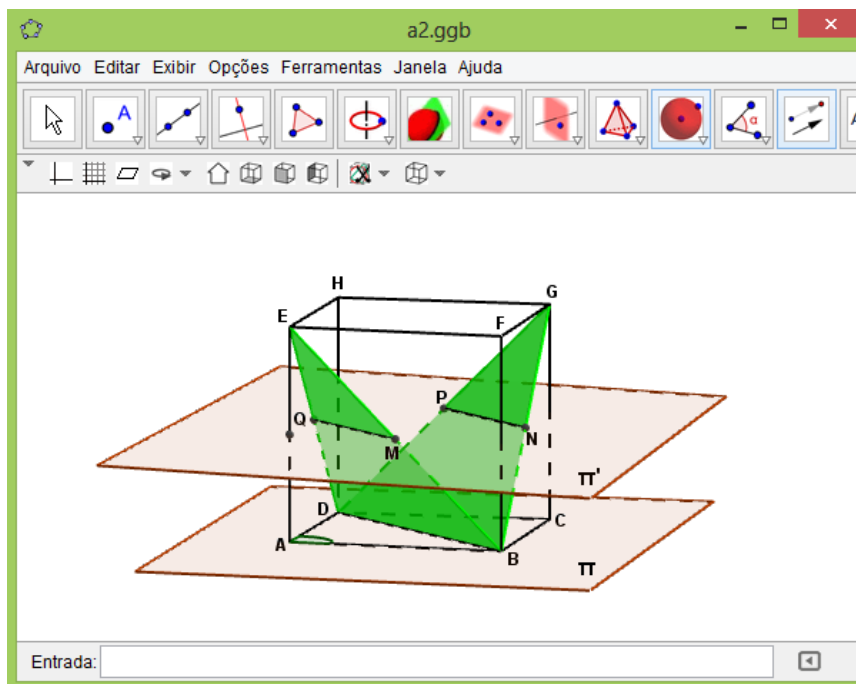


Figura 81

Podemos medir os ângulos MNP , NPQ , PQM e QMN e mostrar que todos eles são iguais a 90° . Nesse caso, a janela de álgebra do GeoGebra 3D, ilustra que, no caso particular apresentado, o figura é realmente um retângulo.

b) Cada aresta do tetraedro é diagonal de uma das faces do cubo, ou seja, todas possuem a mesma medida e com isso todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros. Como $\overline{MN} \parallel \overline{EG}$ e o triângulo BEG é equilátero, temos que o triângulo BMN também é equilátero e $|\overline{MN}| = |\overline{BN}|$. Por outro lado, BDG também é um triângulo equilátero e $\overline{BD} \parallel \overline{NP}$, ou seja, GNP é equilátero e $|\overline{NP}| = |\overline{NG}|$. Temos então que $|\overline{MN}| + |\overline{NP}| = |\overline{BN}| + |\overline{NG}| = \sqrt{2}$. Analogamente, temos que $|\overline{PQ}| = |\overline{DQ}|$ e $|\overline{QM}| = |\overline{QE}|$, ou seja, $|\overline{PQ}| + |\overline{QM}| = |\overline{DQ}| + |\overline{QE}| = \sqrt{2}$. Logo, o perímetro de $MNPQ$ é: $|\overline{MN}| + |\overline{NP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{QM}| = 2\sqrt{2}$ (Figura 82).

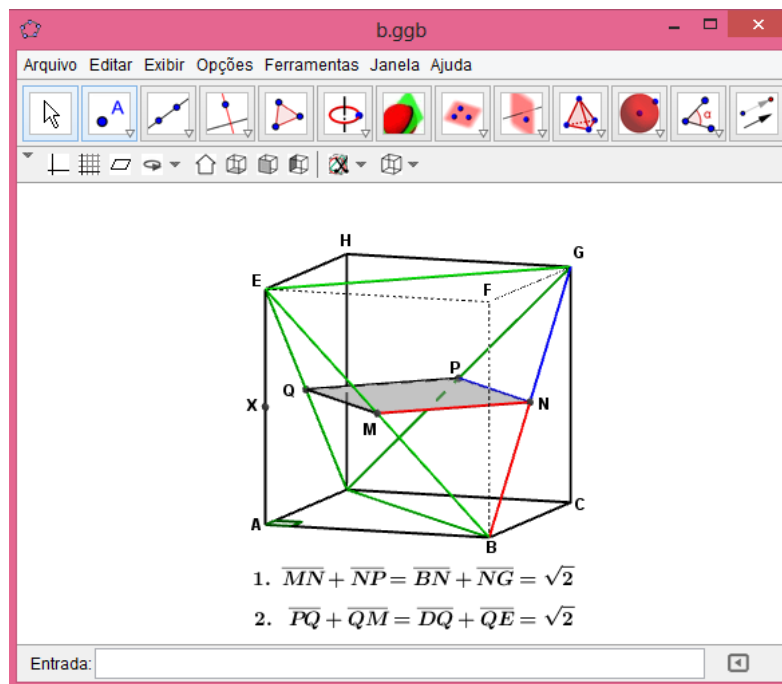


Figura 82

No caso particular do problema apresentado, verificamos através da janela de álgebra do GeoGebra 3D, que o perímetro de $MNPQ$ é constante e igual a $2\sqrt{2}$, independentemente da posição que o ponto X ocupe na aresta AE . Para isso, determinamos o perímetro do polígono através do campo de entrada com o comando $\text{Perímetro}[\text{pol3}]$. Após determinar esse perímetro, selecionamos o controle deslizante a com o botão direito do mouse e escolhemos a opção animar. Percebemos então que esse perímetro será sempre igual a $2,83 \cong 2\sqrt{2}$.

Problema 2 - RETIRADO DO EXAME DE QUALIFICAÇÃO DO PROFMAT - 2012.2

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 6 e AD um segmento perpendicular ao plano desse triângulo de comprimento 8.

a) Localize o ponto P do espaço que é equidistante dos quatro pontos A, B, C e D e calcule a distância comum $R = PA = PB = PC = PD$.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas AC e BD .

Construção do Problema:

1. Construção do triângulo ABC .

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$ e $B = (6, 0, 0)$. Após a construção desses dois pontos, construímos dois círculos de raio seis, um com centro em A e outro com centro em B , através do comando $\text{Círculo}[\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Raio} \rangle]$ no campo de entrada. Com o comando $\text{Interseção}[\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Objeto} \rangle]$ do campo de entrada,

determinamos a interseção entre esses dois círculos construídos que serão os pontos C e C' . Determinado o ponto C , clicamos no ícone polígono e selecionamos os pontos A , B e C para construir o triângulo equilátero.

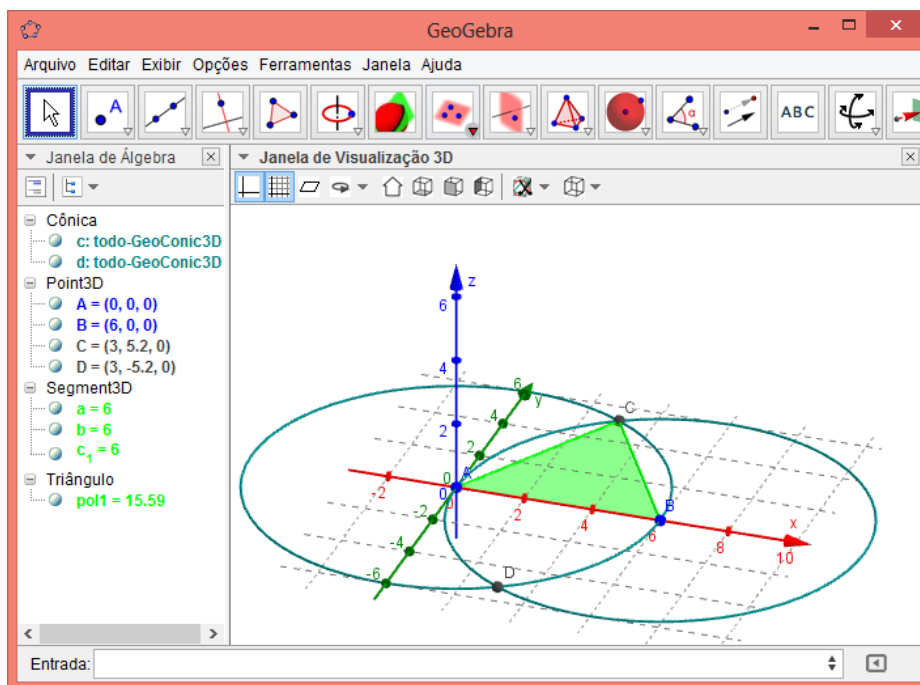


Figura 83

Como os dois círculos só foram construídos para auxiliar na construção do ponto C , podemos deixá-los escondidos selecionando-os na janela de álgebra.

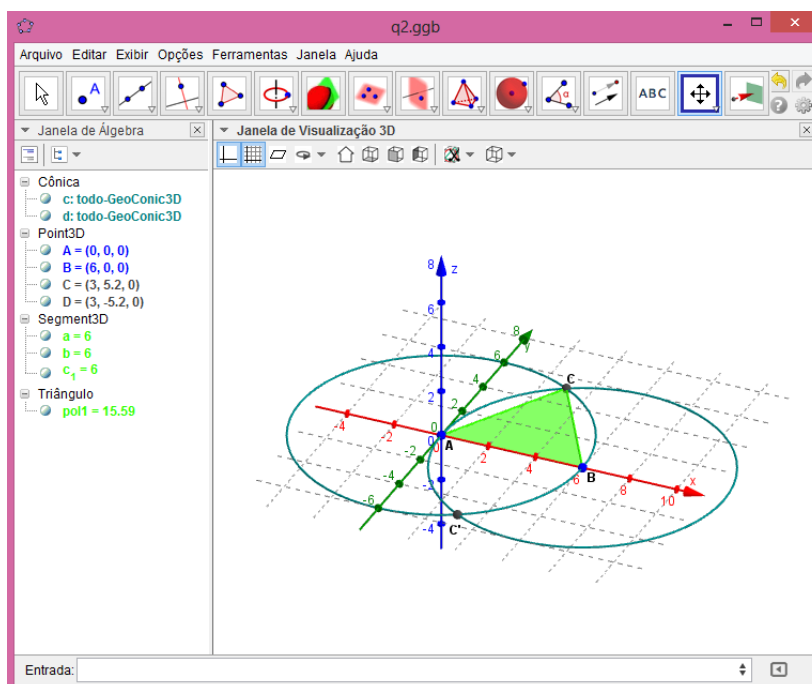


Figura 84

2. Construção do segmento AD .

Como já existe um ponto D na construção temos que renomea-lo para depois digitarmos na entrada o ponto $D = (0, 0, 8)$. Após a construção do ponto D , vamos no ícone segmento determinado por dois pontos e selecionamos os pontos A e D , construindo assim o segmento.

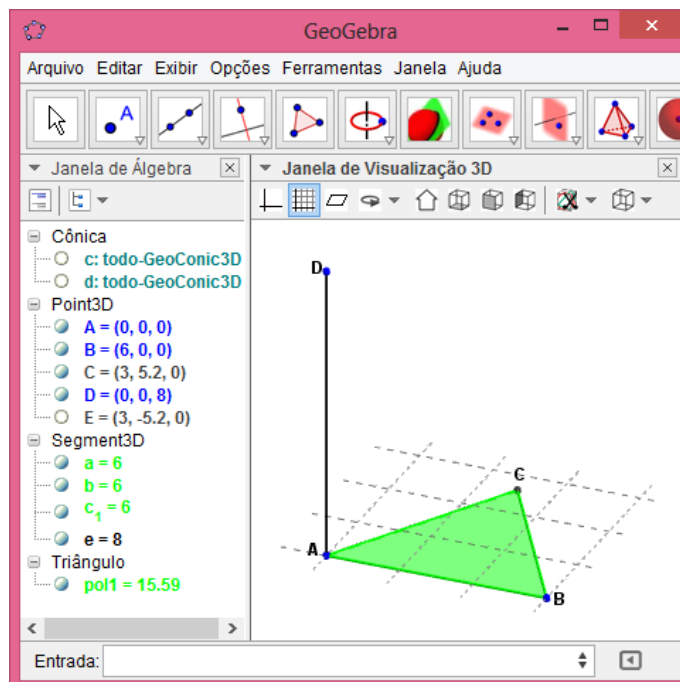


Figura 85

SOLUÇÕES:

a) Sabemos que o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de A e D é o plano que passa pelo ponto médio do segmento \overline{AD} e é perpendicular a ele (plano mediador de \overline{AD}). Sabemos também que o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices de um triângulo é a reta que passa pelo centro desse triângulo e é perpendicular ao plano de sua base. Seja α o plano mediador de \overline{AD} e seja r a reta que passa pelo centro do triângulo ABC e é perpendicular ao plano determinado pelos seus vértices. O ponto P , equidistante de A , B , C e D , será a interseção entre o plano α e a reta r (Figura 86) e será determinado através do comando interseção no campo de entrada (Interseção[α , r]).

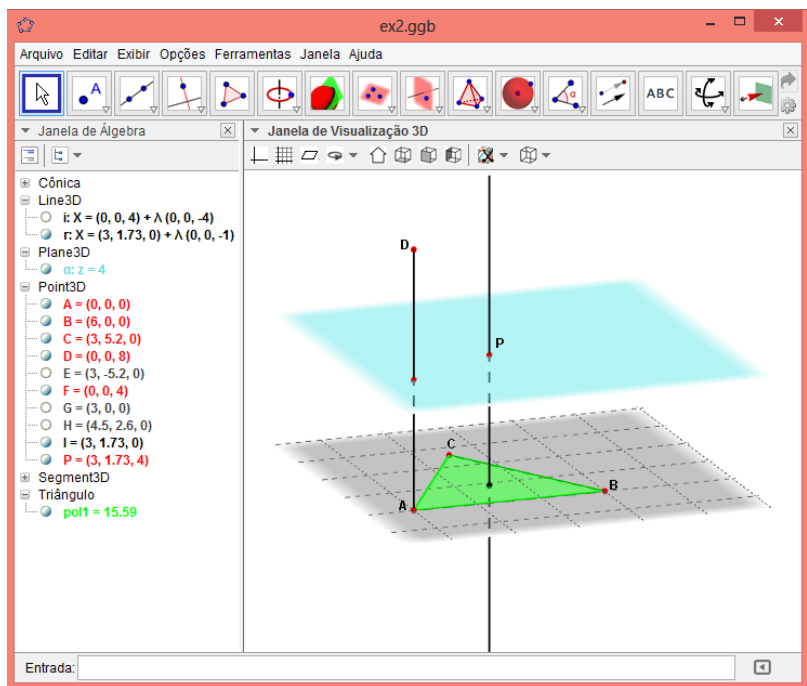


Figura 86

Localizado o ponto P , ficamos com o triângulo retângulo PGA onde $|\overline{PG}| = 4$ e, como o triângulo ABC é equilátero, $|\overline{GA}| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (Figura 87).

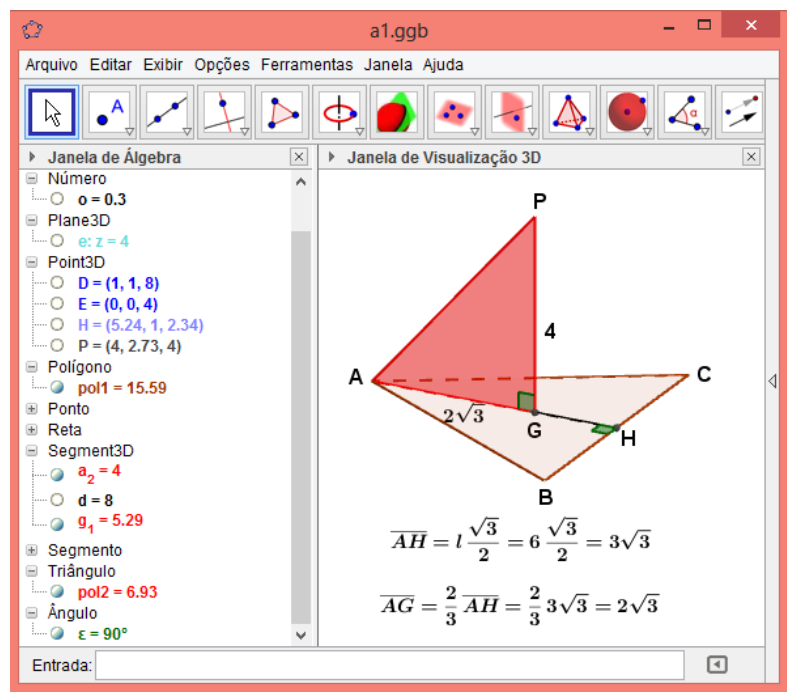


Figura 87

Aplicando Pitágoras no triângulo PGA temos: $|\overline{PA}|^2 = R^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{7}$.

Podemos comprovar na janela de álgebra do GeoGebra 3D que, para o caso particular apresentado, a medida do segmento AP , denominado de g_1 , é realmente igual a $2\sqrt{7} \cong 5,29$.

b) Seja s a reta que passa pelo ponto B e é paralela a reta AC . Sabemos que o ângulo entre as retas reversas AC e BD é o mesmo determinado pelas retas s e BD , como mostra a Figura 88 .

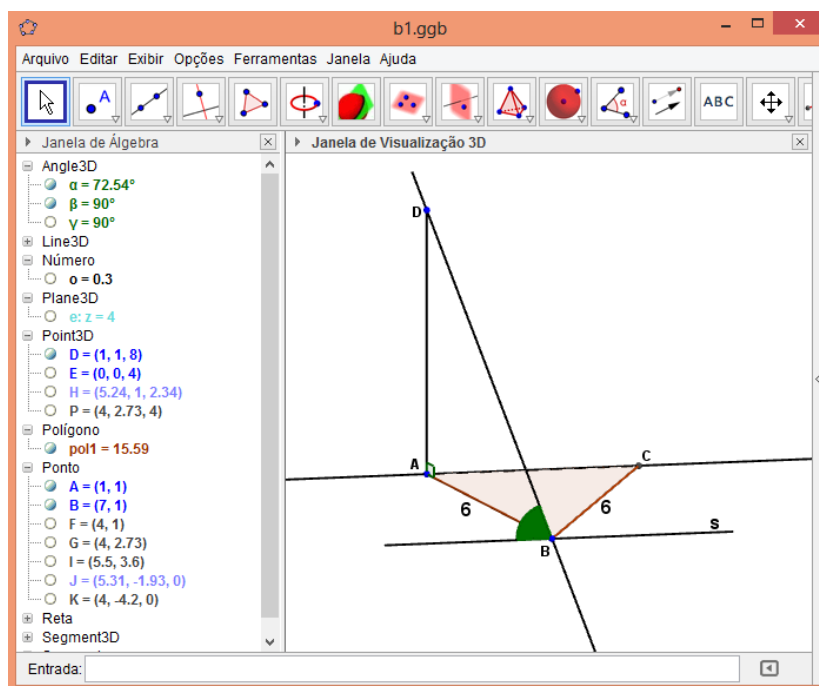


Figura 88

Para determinar o cosseno do ângulo entre as retas s e BD vamos traçar uma reta paralela a BC , passando pelo ponto A . Essa reta determina na reta s um ponto E , formando assim o paralelogramo $AEBC$ (Figura 89).

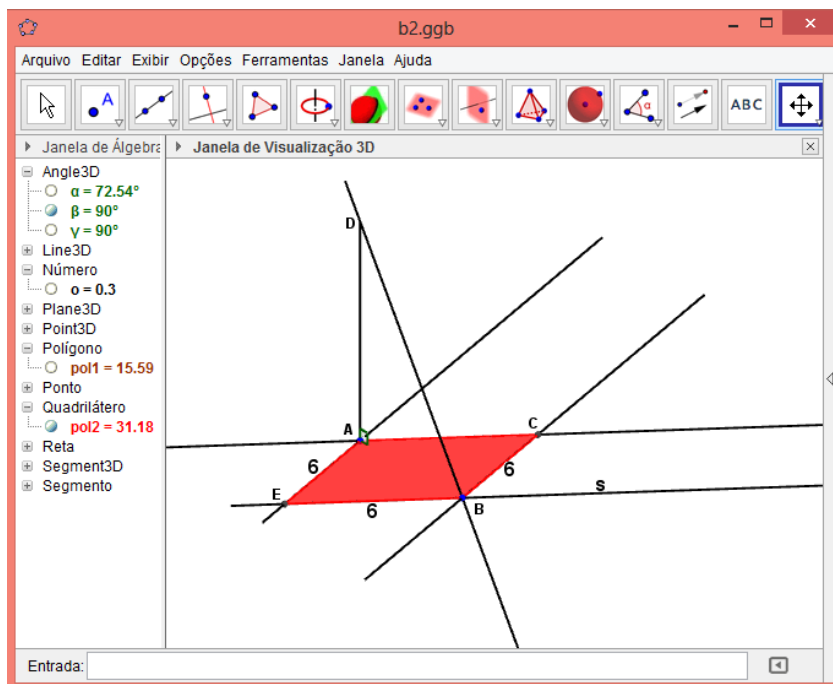


Figura 89

Traçamos o segmento \overline{DE} , ficando assim com dois triângulos retângulo DAB e DAE cujas hipotenusas medem 10, já que os catetos medem 8 (altura do ponto D) e 6 ($\overline{BC} = \overline{AB} = \overline{AE}$). Ficamos então com o triângulo EBD (Figura 90), onde $|\overline{EB}| = 6$ (lado do paralelogramo) e $|\overline{BD}| = |\overline{DE}| = 10$ onde aplicamos a lei dos cossenos para determinar o cosseno do ângulo entre as retas s e BD .

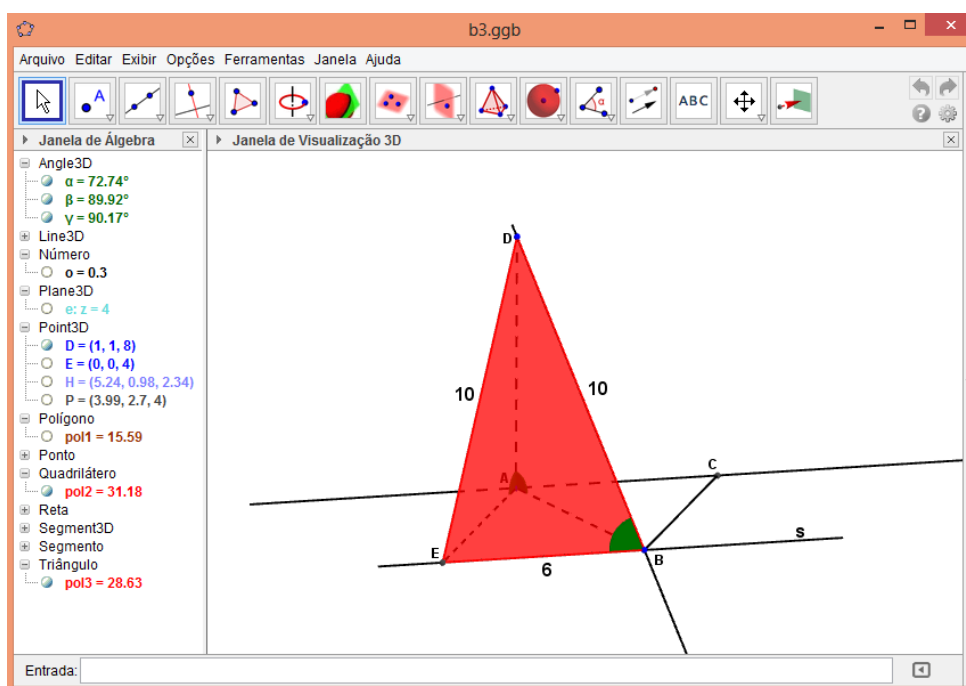


Figura 90

$$\begin{aligned}
 10^2 &= 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\
 100 &= 136 - 120 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\
 120 \cdot \cos \alpha &= 36 \Rightarrow \\
 \cos \alpha &= 0,3
 \end{aligned}$$

Para confirmar que o cosseno do ângulo α é realmente igual a 0,3, podemos digitar no campo de entrada o comando $\cos(\alpha)$ e aparecerá na janela de álgebra o valor numérico $o = 0,3$, confirmando o valor encontrado anteriormente.

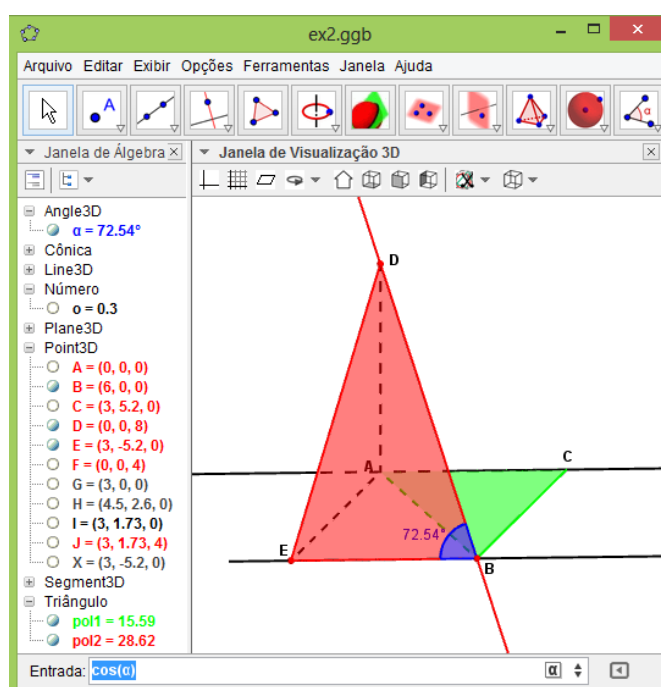


Figura 91

Problema 3 - RETIRADO DA SEGUNDA AVALIAÇÃO DA MATÉRIA MA13 (GEOMETRIA) DO PROFMAT 2012.

No cubo $ABCD A' B' C' D'$ de aresta a , os pontos M , N , P e Q são médios das arestas $A' B'$, $B' C'$, $C' D'$ e $A' D'$, respectivamente. Foram feitas as secções pelos planos AMQ , BNM , CPN e DPQ . Retirando-se os quatro tetraedros formados, resultou o poliedro P ilustrado na Figura 92. O poliedro P possui duas bases paralelas e faces laterais triangulares. Ele é um prismatóide.

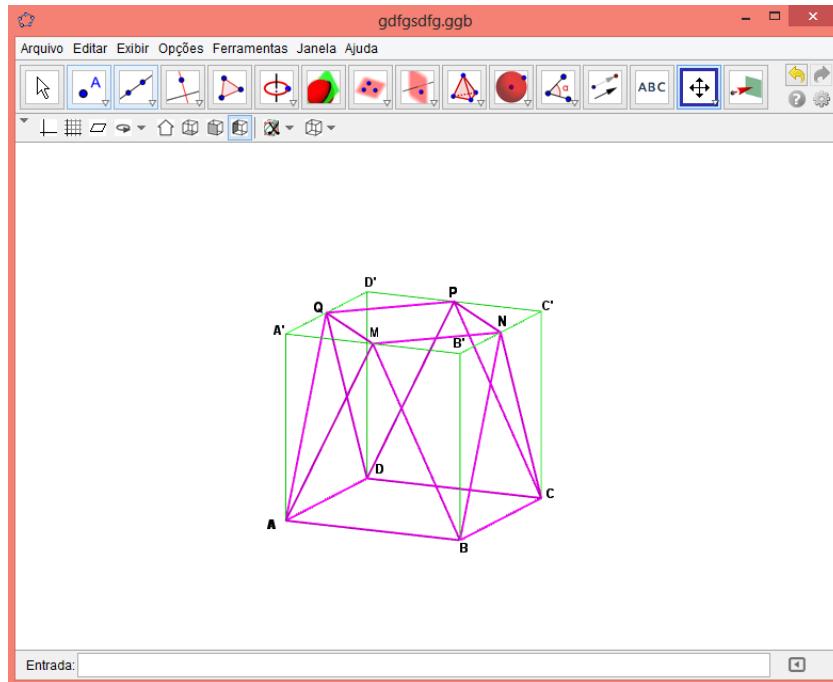
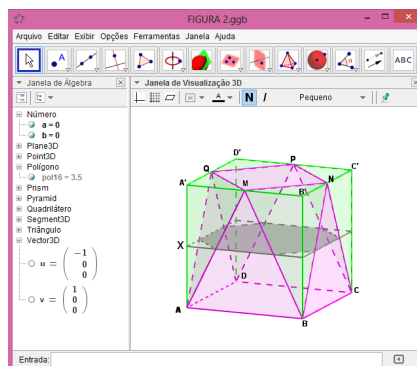


Figura 92: Prismatóide

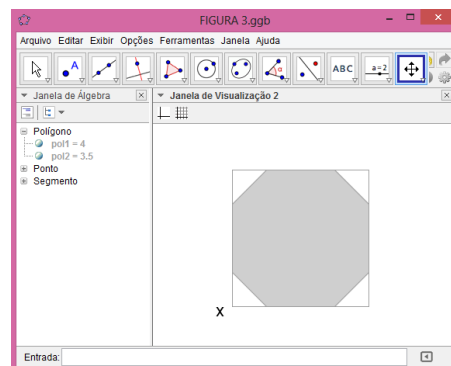
a) Calcule o volume do poliedro P .

Observe agora a Figura 93a ; pelo ponto médio X da aresta AA' foi traçado um plano paralelo à face $ABCD$ que determinou em P uma seção octogonal. A forma dessa seção equidistante das bases do poliedro P , que é chamada de seção média, está ilustrada na Figura 93b. No poliedro P , representaremos a área da base $ABCD$ por S , a área da base $MNPQ$ por s , a área da seção média por S_m e a distância entre as bases por h .

b) Calcule a área da seção média e calcule o volume de P usando a fórmula do volume dos prismatóides: $V = \frac{h}{6}(S + s + 4S_m)$.



(a)



(b)

Figura 93

Construção do Problema:

Vamos construir inicialmente os quatro tetraedros. Esses tetraedros serão construídos de forma que possamos desloca-los lateralmente a fim de que tenhamos uma melhor visualização do prismatóide. Os vértices dos tetraedros $AA'MQ$ e $DD'QP$ serão definidos usando o vetor $u = (-1, 0, 0)$ para que possamos desloca-los para a esquerda e os vértices dos tetraedros $BB'MN$ e $CC'NP$ serão definidos usando o vetor $v = (1, 0, 0)$ para que possamos desloca-los para a direita. Como as arestas do cubo medem a , vamos definir essa medida como sendo uma variável, apesar de na resolução da questão não usarmos nenhum valor específico e sim o próprio a .

1. Determinação da variável a .

Acesse a opção exibir no menu e selecione a janela de visualização 2, em seguida, selecione o ícone do controle deslizante e defina a variável a , variando de 0 a 5.

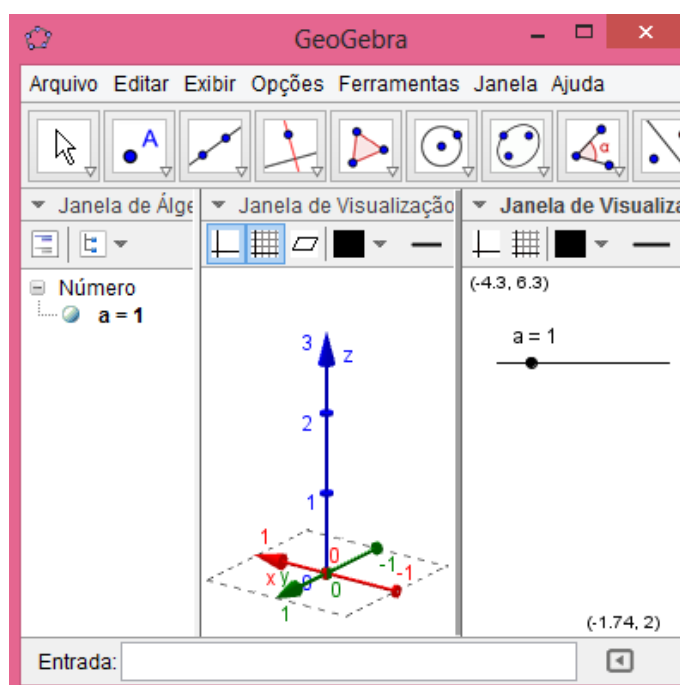


Figura 94

2. Construção de uma variável k .

Essa variável k que definiremos será usada na construção dos vértices dos sólidos para que possam ser deslocados lateralmente com o auxílio dos vetores que serão estabelecidos posteriormente.

Acesse a opção exibir no menu e selecione a janela de visualização 2, em seguida, selecione o ícone do controle deslizante e defina a variável k , variando de 0 a 5.

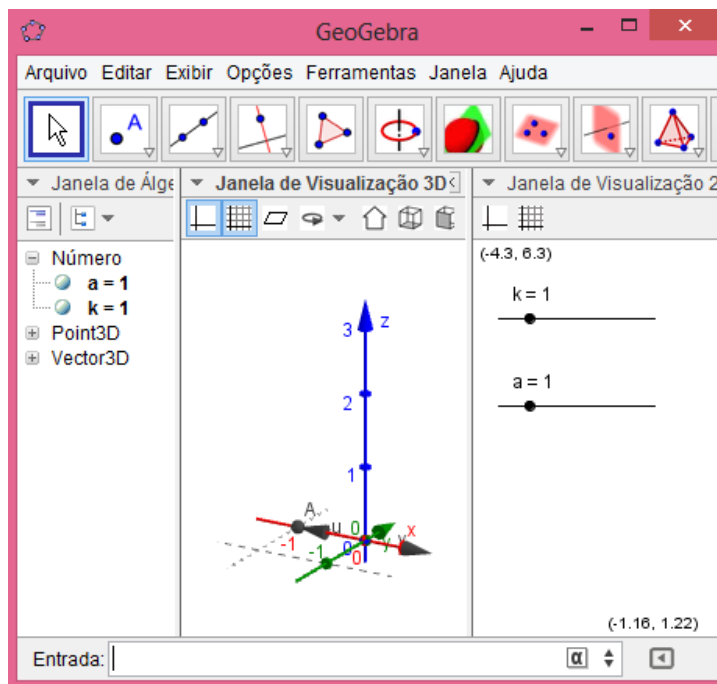


Figura 95

3. Construção dos vetores u e v .

Determinamos os vetores $u = (-1, 0, 0)$ e $v = (1, 0, 0)$ no campo de entrada com o comando `Vetor[<Ponto>]`.

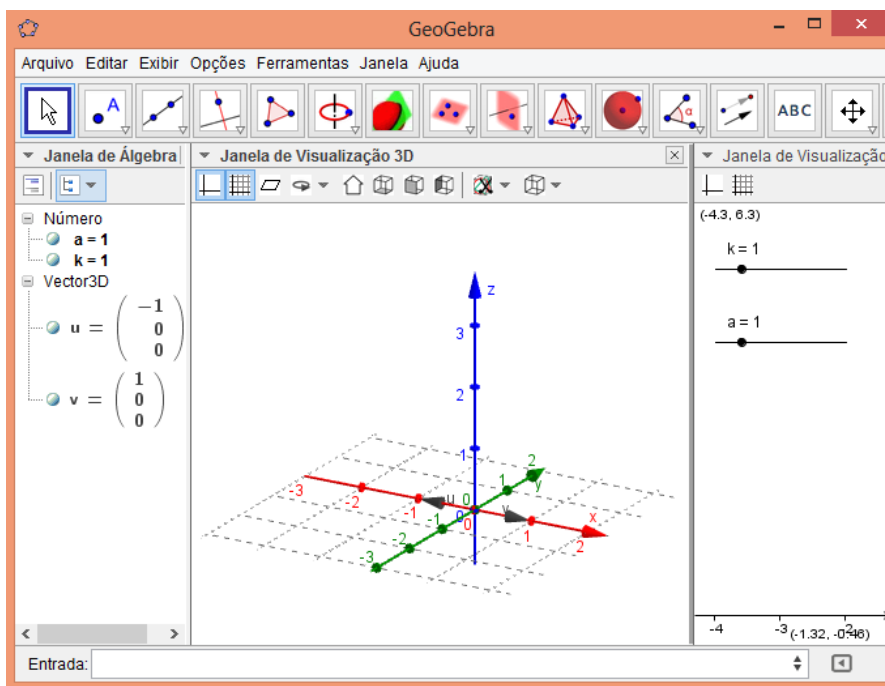


Figura 96

4. Construção dos tetraedros $AA'MQ$ e $DD'QP$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0) + k * u$, $A' = (0, 0, a) + k * u$, $M = (a/2, 0, a) + k * u$, $Q = (0, a/2, a) + k * u$, $D = (0, a, 0) + k * u$, $D' = (0, a, a) + k * u$ e $P = (a/2, a, a) + k * u$.

Construídos dessa forma, esses vértices poderão ser deslocados lateralmente, facilitando a visualização do prismatóide. A vértice A , por exemplo, irá variar de $A = (0, 0, 0)$ a $A = (-5, 0, 0)$.

Após a construção dos vértices, criamos os polígonos $A'MQ$ e $D'PQ$ através do ícone polígono e depois criamos os tetraedros através do ícone pirâmide, selecionando os polígonos criados e os pontos A e D .

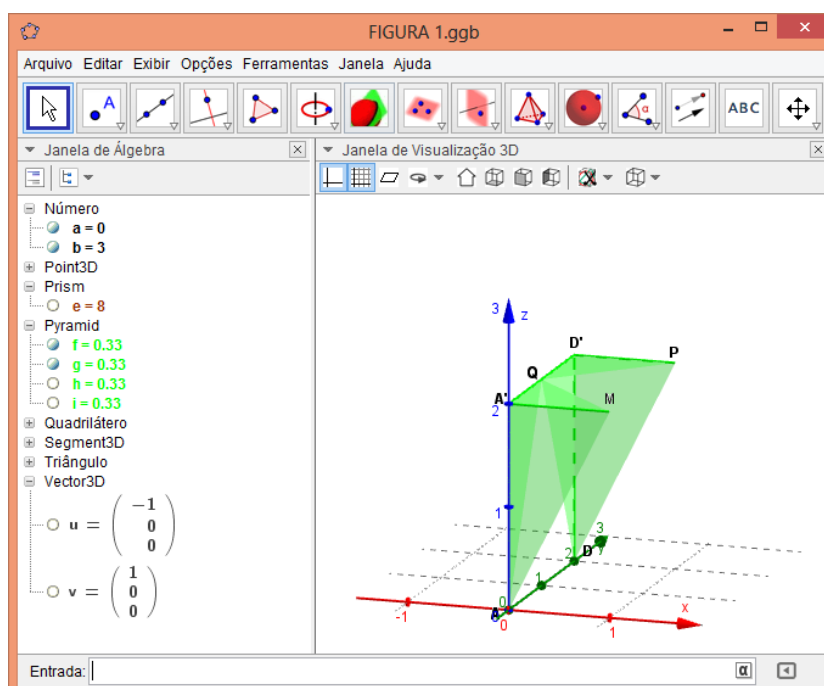


Figura 97

5. Construção dos tetraedros $B'MNB$ e $C'PNC$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $B = (a, 0, 0) + k * v$, $B' = (a, 0, a) + k * v$, $M' = (a/2, 0, a) + k * v$, $N = (a, a/2, a) + k * v$, $C = (a, a, 0) + k * v$, $C' = (a, a, a) + k * v$ e $P' = (a/2, a, a) + k * v$.

Após a construção dos vértices, criamos os polígonos $B'MN$ e $C'PN$ através do ícone polígono e depois criamos os tetraedros através do ícone pirâmide, selecionando os polígonos criados e os pontos B e C .

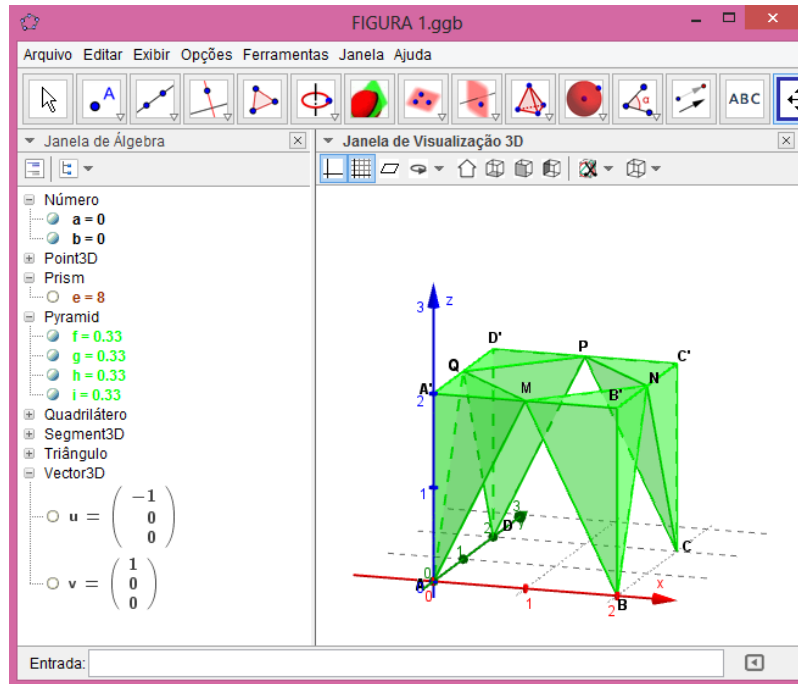


Figura 98

6. Construção do prismatóide.

Para construirmos o prismatóide, teremos que construir suas faces separadamente. Digitamos no campo de entrada os pontos $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, e $(a/2, 0, a)$ e depois construímos a face ABM através do ícone polígono.

Fazemos o mesmo para construir as outras faces até que o prismatóide esteja todo construído.

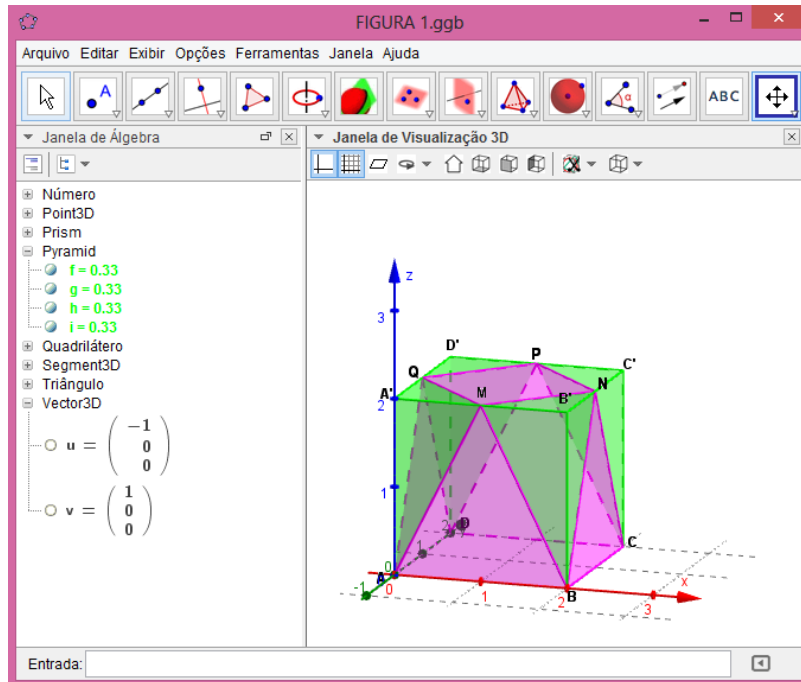


Figura 99

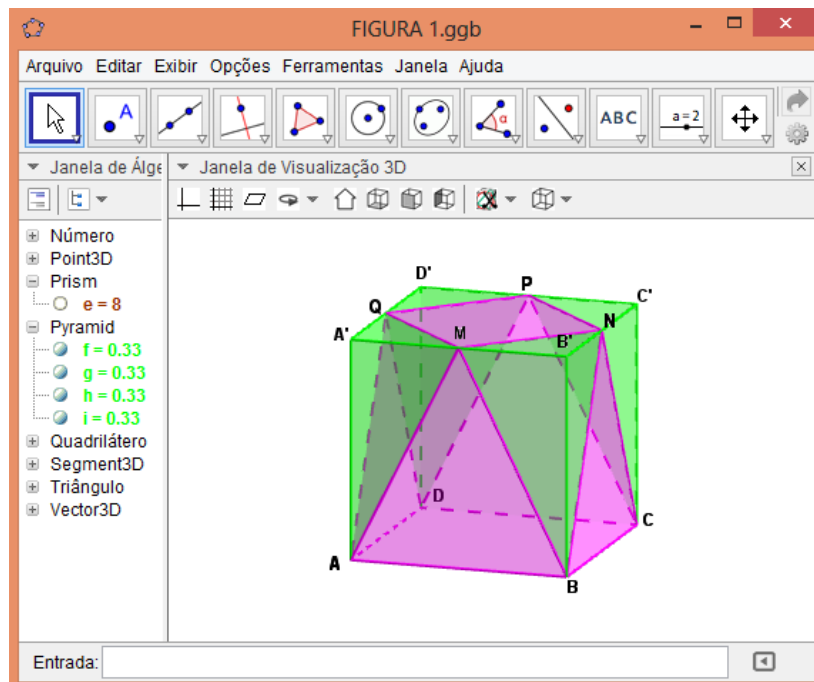
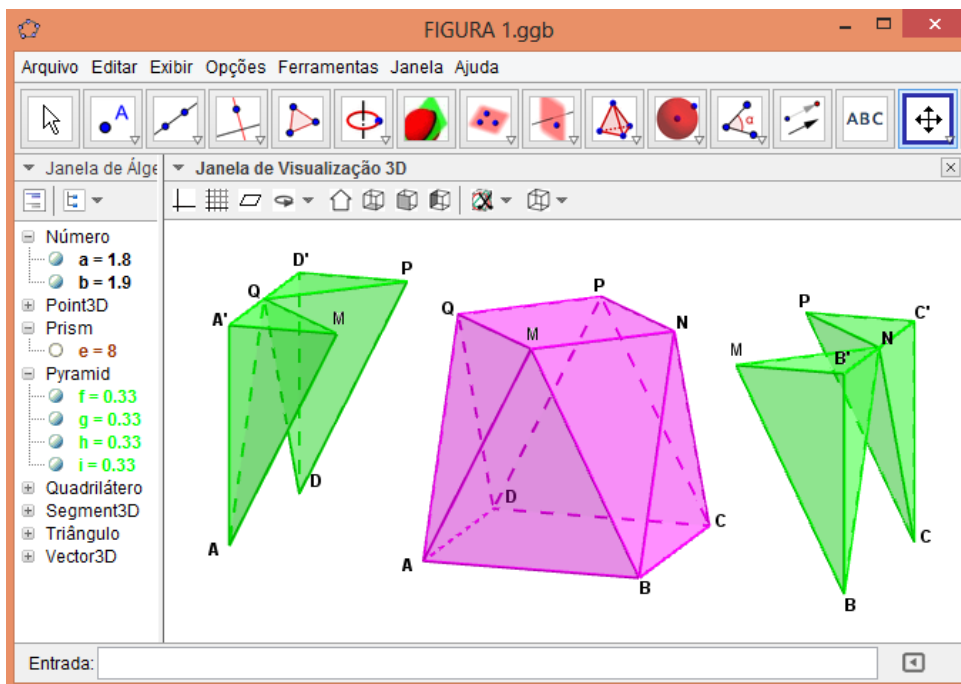


Figura 100

SOLUÇÕES:

- a) O volume do poliedro P (prismatóide) será igual ao volume do cubo (V_C) menos o volume dos quatro tetraedros retirados ($4.V_T$).



Cada tetraedro retirado tem como base um triângulo retângulo, cujos catetos medem $\frac{a}{2}$, e uma altura de medida a , como mostramos na Figura 101 .

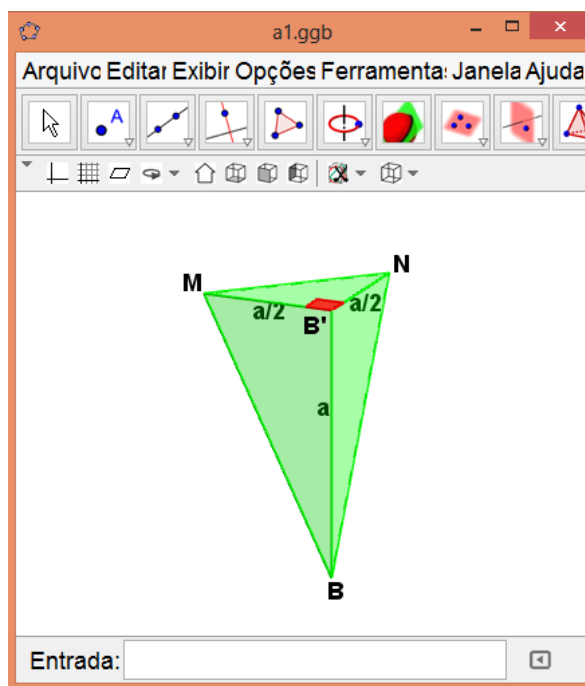


Figura 101

Calculando a área da base desse tetraedro temos: $A_b = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$.

Logo, o volume do tetraedro é: $V_T = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{a^3}{24}$

Calculando o volume de P temos:

$$V_P = V_C - 4 \cdot V_T = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{24}$$

$$V_P = \frac{5}{6}a^3$$

Para compararmos a expressão que encontramos com o valor apresentado na janela de álgebra do GeoGebra 3D, vamos considerar a medida da aresta do cubo apresentada na figura, ou seja, $a = 2$.

$$\text{Logo, se } a = 2, \text{ temos que } V_P = \frac{5}{6}a^3 = \frac{5}{6} \cdot 2^3 = \frac{20}{3}$$

A janela de álgebra do GeoGebra nos mostra que, para o caso particular apresentado, o volume de cada tetraedro é aproximadamente 0,33, logo, o volume do prismatóide será $V_{cubo} - 4 \cdot V_{tetraedro} = 2^3 - 4 \cdot 0,33 = 6,68 \cong \frac{20}{3}$, confirmando assim o resultado encontrado na expressão.

b) A área da seção média será igual a área de um quadrado de lado a (a^2) menos as áreas de quatro triângulos retângulos e isósceles, como mostra a figura 102.

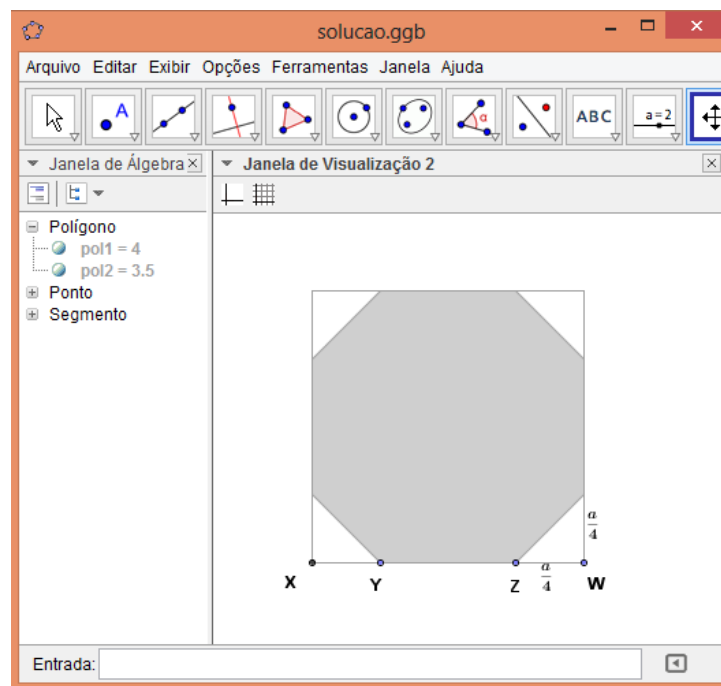


Figura 102

Seja Y e Z as interseções da seção média com as arestas \overline{AM} e \overline{BM} , respectivamente, e seja W a interseção do plano da seção média com a aresta $\overline{B'B}$. O segmento \overline{YZ} é a base média do triângulo ABM , logo, $\overline{YZ} = \frac{a}{2}$ (Figura 103).

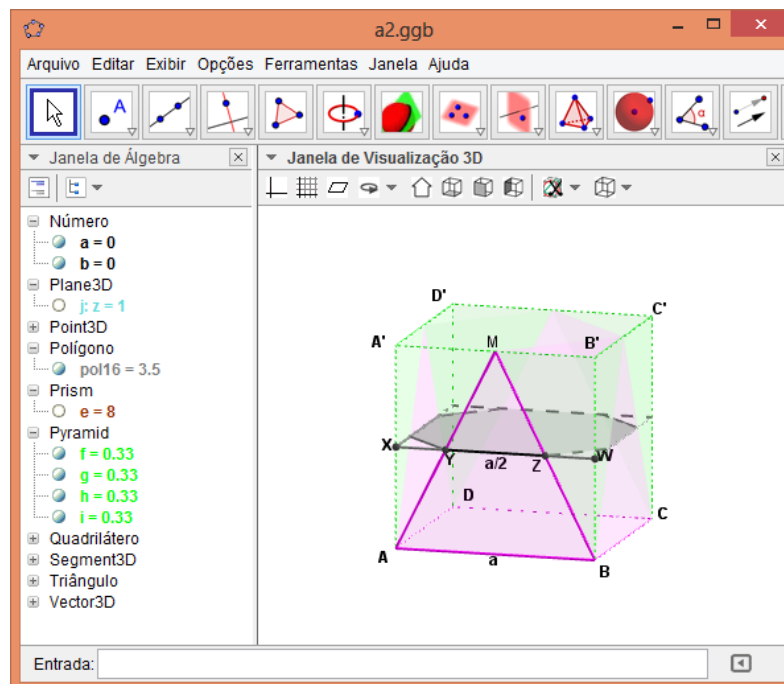


Figura 103

Como os segmentos \overline{XY} e \overline{ZW} são congruentes, já que são lados equivalentes de triângulos congruentes, temos que $|\overline{XY}| = |\overline{ZW}| = \frac{a}{4}$ e a área de cada triângulo retângulo isósceles retirado do quadrado é $\frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{32}$.

Logo, a área da seção média é:

$$S_m = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{32} \Rightarrow S_m = \frac{7}{8} \cdot a^2$$

A janela de álgebra da figura 103 nos mostra que a área da secção média é igual a 3,5 para $a = 2$, confirmando assim a fórmula que encontramos, já que $S_m = \frac{7}{8} \cdot 2^2 = \frac{7}{2} = 3,5$.

Vamos agora calcular o volume do prismatóide através da fórmula $V_P = \frac{h}{6} \cdot (S + s + 4S_m)$

Sabemos que S é a área da base $ABCD$, ou seja, $S = a^2$. Sabemos também que s é a área da base $MNPQ$, onde \overline{MN} é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\frac{a}{2}$, ou seja, $s = (\overline{MN})^2 = \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$. Logo,

$$V_P = \frac{a}{6} \cdot \left(a^2 + \frac{a^2}{2} + 4 \cdot \frac{7}{8}a^2\right) \Rightarrow$$

$$V_P = \frac{5}{6}a^3$$

Problema 4 - RETIRADO DA SEGUNDA AVALIAÇÃO DA MATÉRIA MA13 (GEOMETRIA) DO PROFMAT 2011.

A figura abaixo mostra o cubo $ABCDEFGH$ de aresta a . Sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, BF, FG, GH, HD e DA .

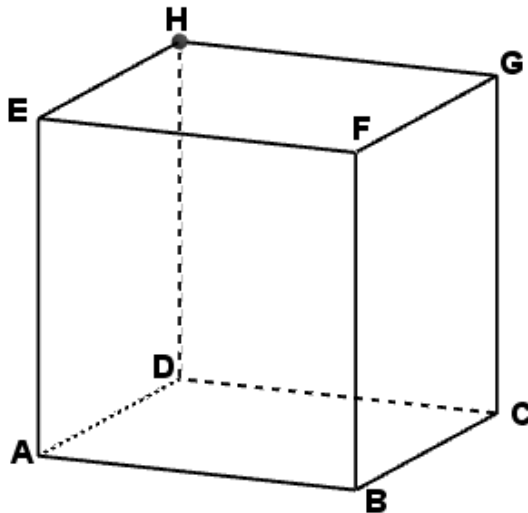


Figura 104

(a) Mostre que esses seis pontos são coplanares. Sugestão: Mostre que qualquer um deles pertence ao plano mediador da diagonal EC do cubo

(b) Mostre que o hexágono $MNPQRS$ é regular.

(c) Calcule o volume da pirâmide de vértice E e base $MNPQRS$.

Construção do Problema:

1. Determinação do valor numérico da aresta a .

Abrimos a janela de visualização 2, vamos no ícone controle deslizante e determinamos o valor da aresta a variando de 0 a 5.

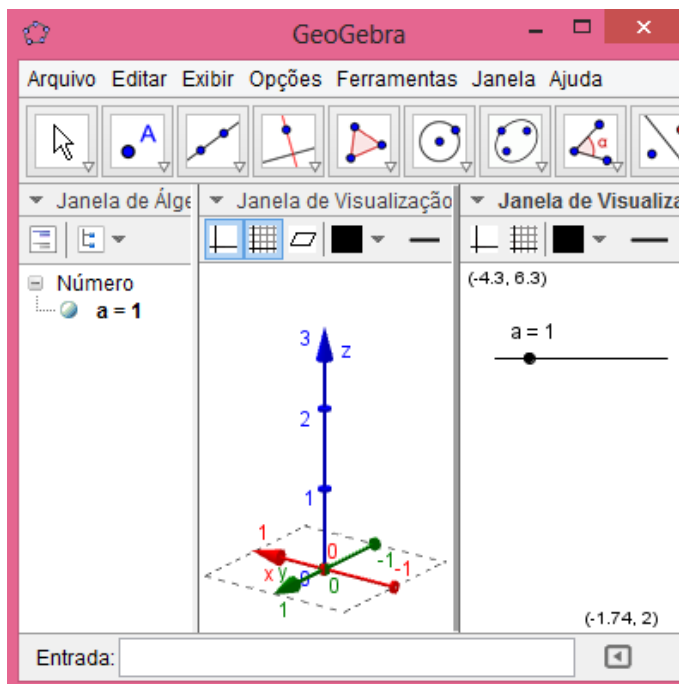


Figura 105

2. Construção do polígono $ABCD$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a, a, 0)$ e $D = (0, a, 0)$ e depois construímos o polígono (pol1) através do ícone polígono, selecionando os quatro pontos construídos.

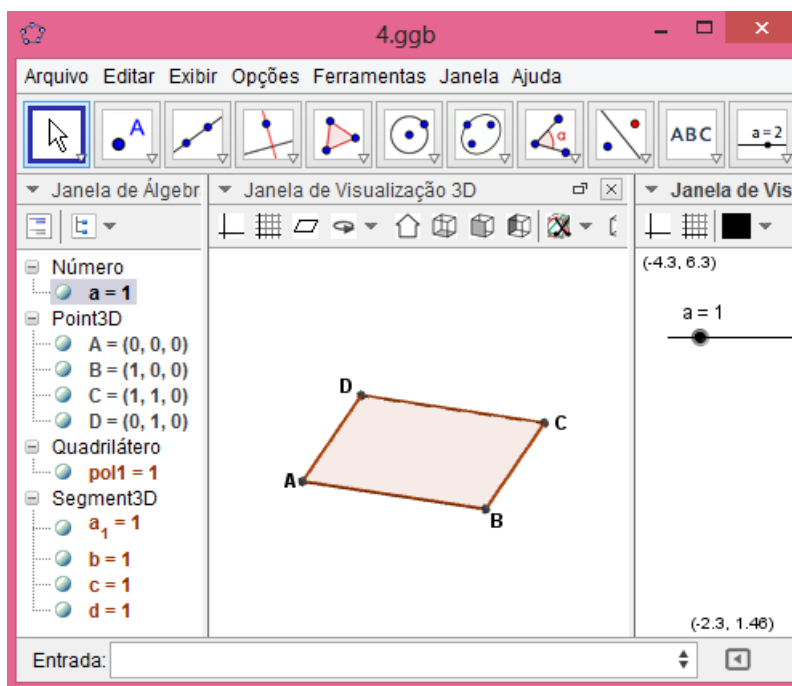


Figura 106

3. Construção do cubo.

Construímos o cubo $ABCDEFGH$ com o comando Prisma[<Polígono>, <Al-
tura>] no campo de entrada, determinando assim um cubo (prisma e) cuja base é o
polígono $po1$ e a altura é a .

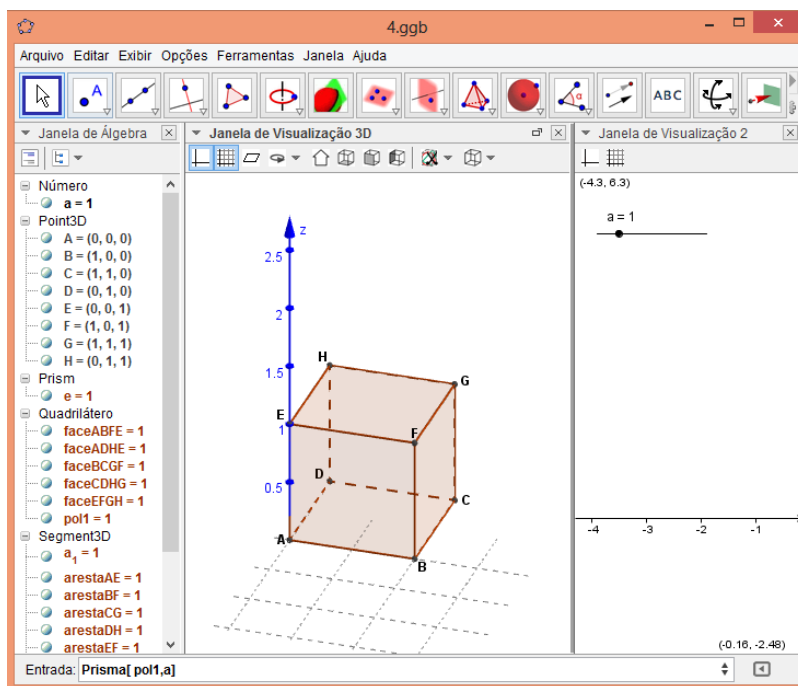


Figura 107

4. Construção dos pontos M , N , P , Q , R e S .

Através do ícone novo ponto, opção ponto médio, selecionamos as arestas AB , BF ,
 FG , GH , HD e DA , determinando assim os pontos M , N , P , Q , R e S .

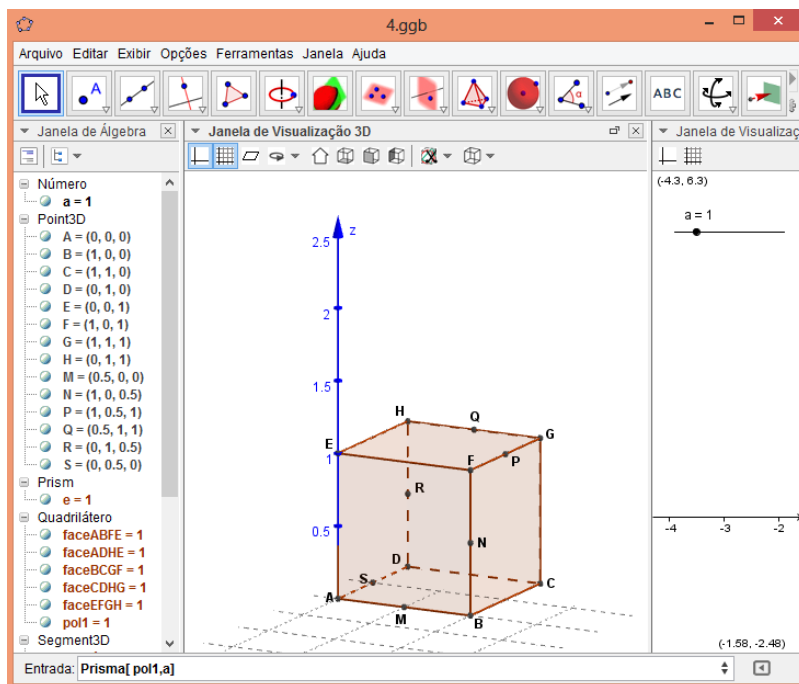


Figura 108

SOLUÇÕES:

a) Vamos considerar os triângulos MAE e MBC mostrado na Figura 109.

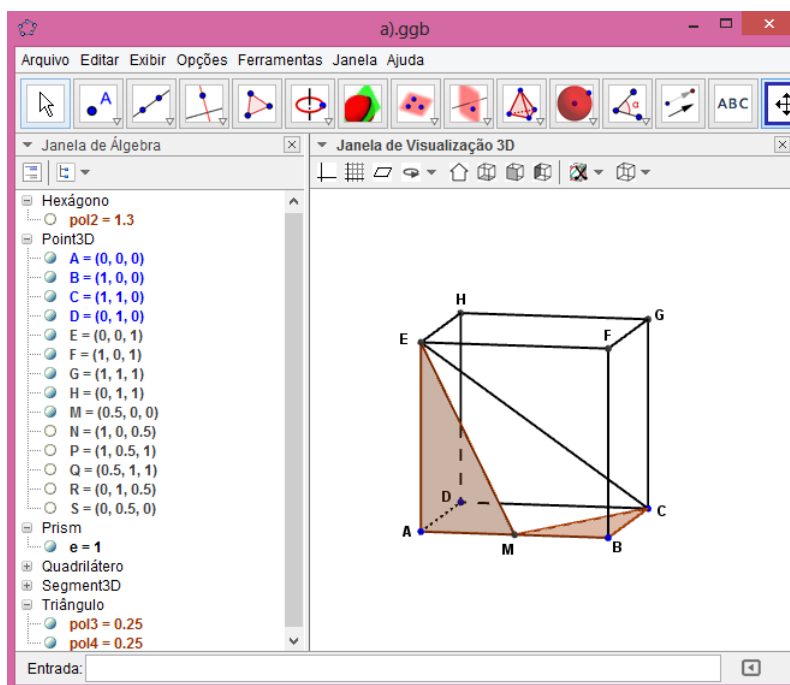


Figura 109

Sabemos que esses triângulos são congruentes, já que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}| = \frac{a}{2}$, $|\overline{AE}| = |\overline{BC}| = a$ e $\angle MAE = \angle MBC = 90^\circ$, logo, concluímos então que os segmentos ME e MC

são congruentes, ou seja, o ponto M pertence ao plano mediador do segmento EC (Figura 110).

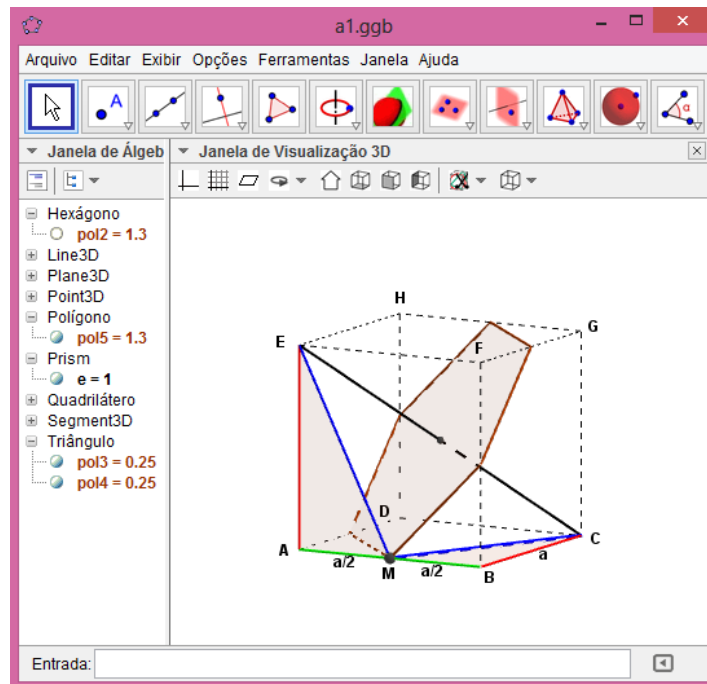


Figura 110

O plano mediador da diagonal EC do cubo pode ser construído através do ícone plano passando por três pontos, selecionando, por exemplo, os pontos M , N e P . Após a construção desse plano mediador, podemos construir o hexágono $MNPQRS$ fazendo a interseção entre esse plano e o prisma e .

Da mesma forma provamos que N , P , Q , R e S também pertencem ao plano mediador de EC , ou seja, esses seis pontos são coplanares.

b) Se considerarmos o triângulo ABF de base AF , temos que o segmento \overline{MN} é a base média desse triângulo, logo, $|\overline{MN}| = \frac{|\overline{AF}|}{2}$ (Figura 111).

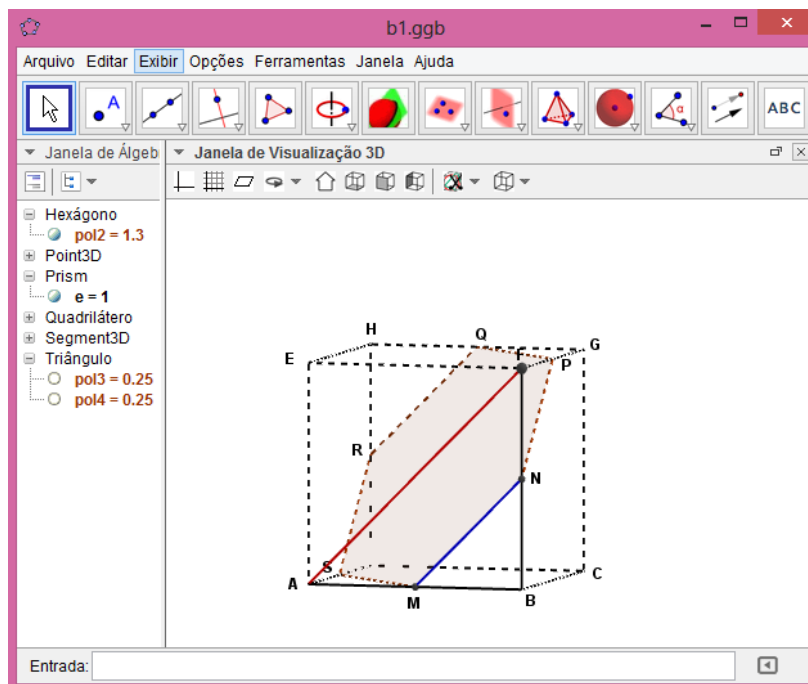


Figura 111

Como AF é a diagonal da face do cubo, temos que $|\overline{MN}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Sendo O o centro do cubo, temos que os segmentos \overline{NO} e \overline{MO} medem metade dos segmentos \overline{NR} e \overline{MQ} . Como $|\overline{NR}| = |\overline{MQ}| = a\sqrt{2}$ pois são congruentes a diagonal da face do cubo, então $|\overline{NO}| = |\overline{MO}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Provamos então que o triângulo MNO é equilátero, como mostra a Figura 112. Usando o mesmo raciocínio, provamos que os triângulos NOP , POQ , QOR , ROS e SOM também são equiláteros e, portanto o hexágono $MNPQRS$ é regular.

Para construir o triângulo MNO traçamos as diagonais MQ e NR na opção segmento definido por dois pontos e depois fazemos a interseção entre essas diagonais para encontrar o ponto O . Após a construção do triângulo MNO podemos determinar os seus três ângulos internos através do ícone ângulo, selecionando os seus vértices. Observamos na janela de álgebra que os ângulos internos do triângulo são todos iguais a 60° , sendo assim, um triângulo equilátero.

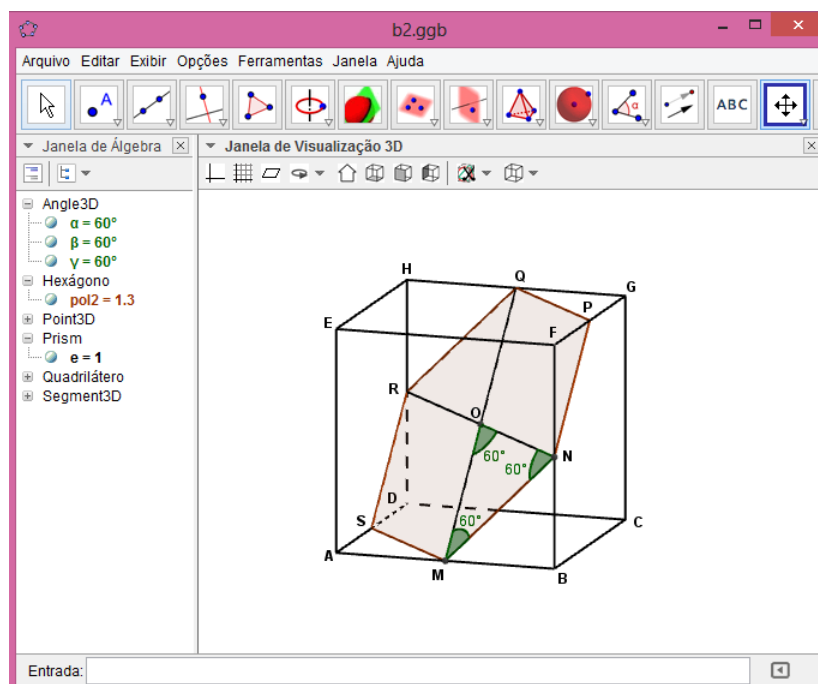


Figura 112

Usando as ferramentas do GeoGebra 3D (e considerando $a = 1$) também podemos provar que o hexágono $MNPRRS$ é regular. Para isso, devemos determinar as medidas dos seus ângulos internos através do ícone ângulo e determinar as medidas dos segmentos \overline{MN} , \overline{NP} , \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} e \overline{SM} . Quando construímos o hexágono, já percebemos na janela de álgebra que todos os seus lados são iguais e quando determinamos os seus ângulos internos, percebemos que todos eles medem 120° . Logo, o hexágono é regular.

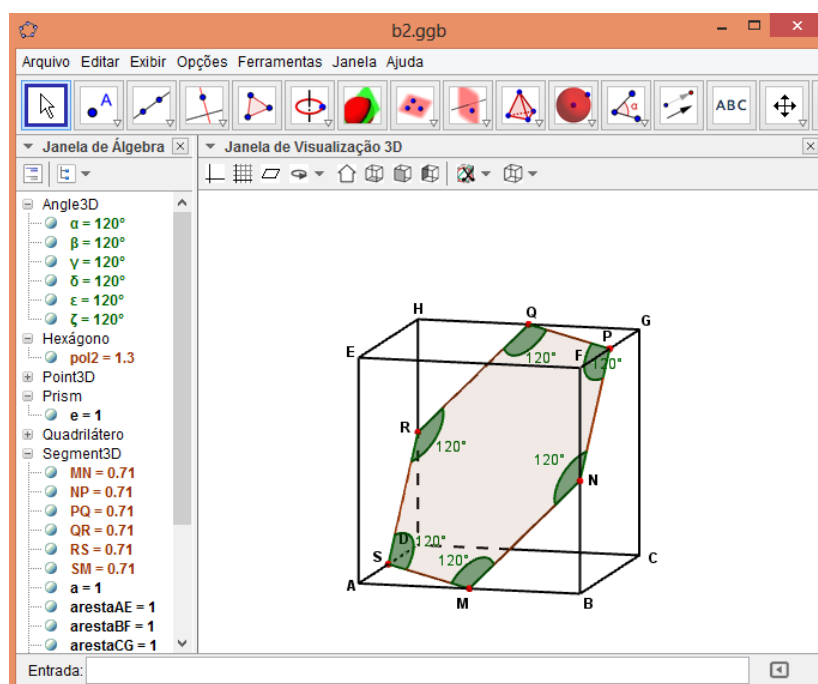
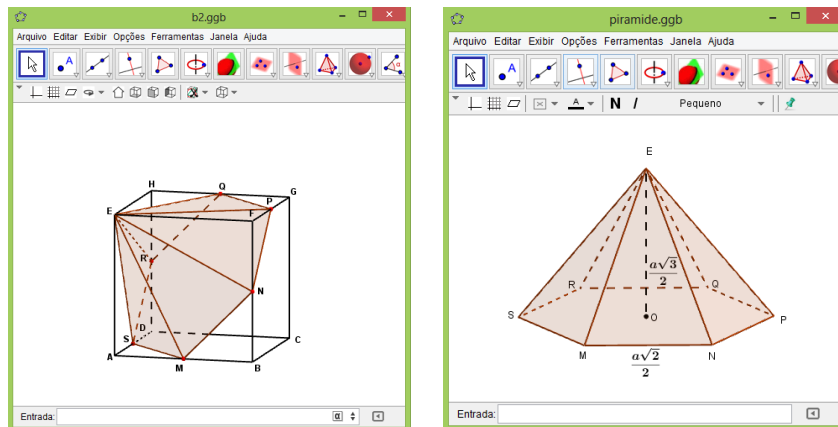


Figura 113

c) Para calcular o volume da pirâmide vamos considerar a base como sendo a soma dos seis triângulos equiláteros cuja área é $A_b = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ e a altura medindo a metade da diagonal do cubo, ou seja, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Para construir a pirâmide $MNPQRSE$ abaixo, escolhemos o ícone pirâmide e selecionamos o polígono (hexágono) criado anteriormente e o seu vértice E .



(a)

(b)

Figura 114

Logo, o volume da pirâmide será:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$V_P = \frac{3}{8}a^3$$

Quando construimos a pirâmide, percebemos que aparece na janela de álgebra $f = 0,38 \cong \frac{3}{8}$, confirmando assim o volume da pirâmide para $a = 1$.

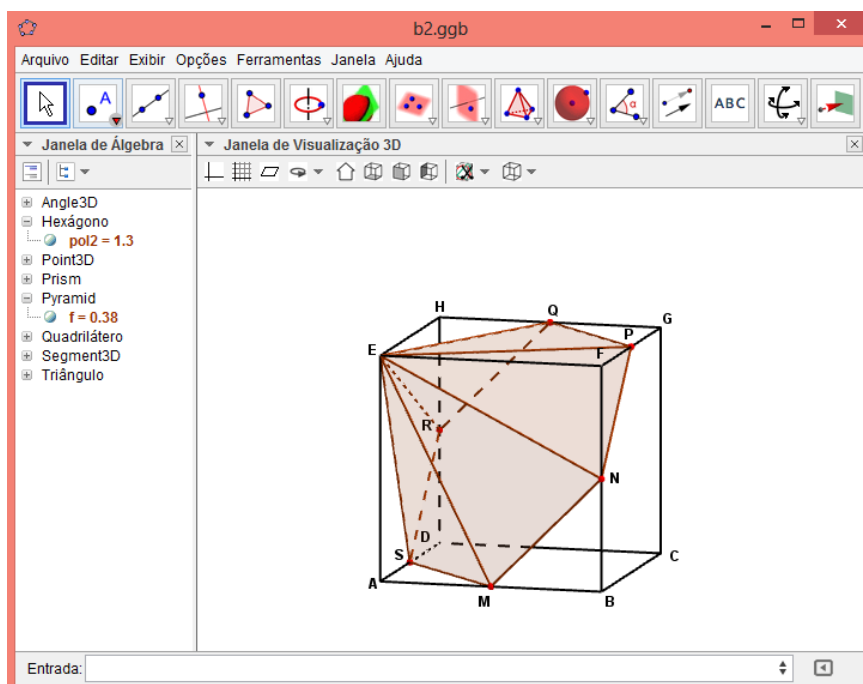


Figura 115

Problema 5 - RETIRADO DA TERCEIRA AVALIAÇÃO DA MATÉRIA MA13 (GEOMETRIA) DO PROFMAT 2011.

As bases de um tronco de pirâmide regular são quadrados de lados 12 e 4. Sabe-se que a área lateral é igual à soma das áreas das bases.

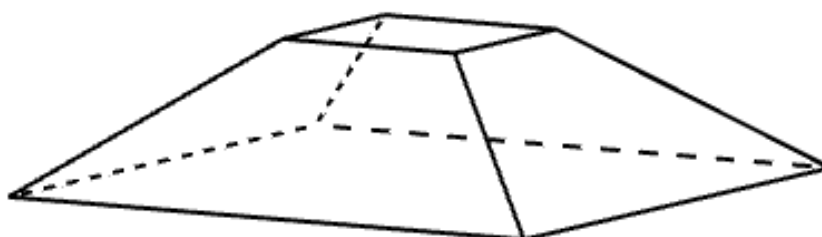


Figura 116

- (a) Calcule a altura do tronco.
- (b) Calcule o volume do tronco.

Construção do Problema:

1. Construção da base maior.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (12, 0, 0)$, $C = (12, 12, 0)$ e $D = (0, 12, 0)$. Definido os quatro vértices, vamos no ícone polígono e selecionamos os pontos para construirmos o polígono $ABCD$ (pol1) cuja medida da aresta é igual a 12.

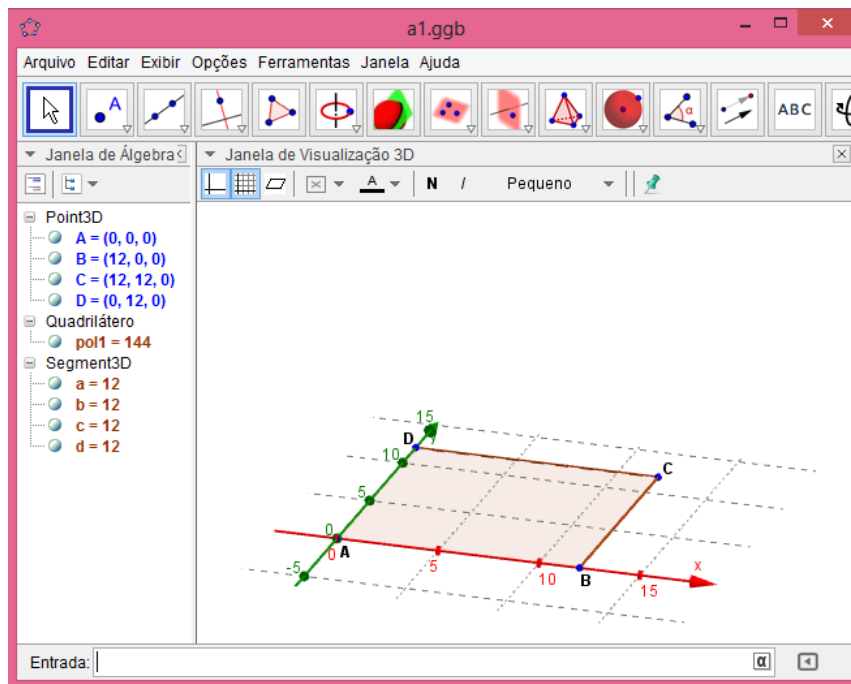


Figura 117

2. Determinação da altura h do tronco.

Como não sabemos a altura desse tronco, vamos defini-la como sendo uma variável h que posteriormente será calculada. Essa variável h é necessária para a construção dos vértices da base menor do tronco.

Definimos essa variável h no controle deslizante da janela de visualização 2, variando de 0 a 5.

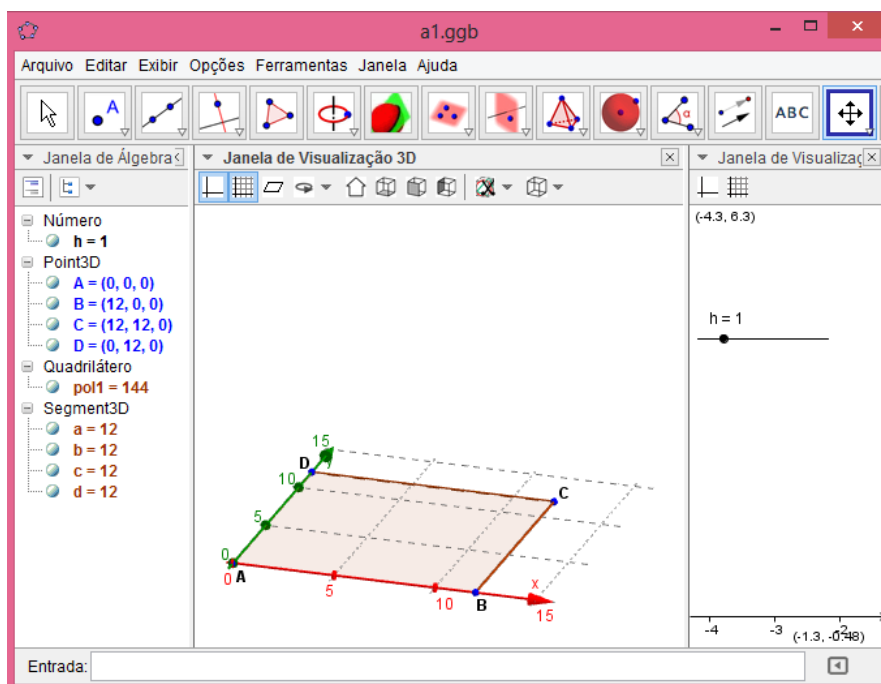


Figura 118

3. Construção da base menor.

Digitamos no campo de entrada os pontos $E = (4, 4, h)$, $F = (8, 4, h)$, $G = (8, 8, h)$ e $H = (4, 8, h)$. Definido os quatro vértices, vamos no ícone polígono e selecionamos os pontos para construirmos o polígono $EFGH$ (pol2).

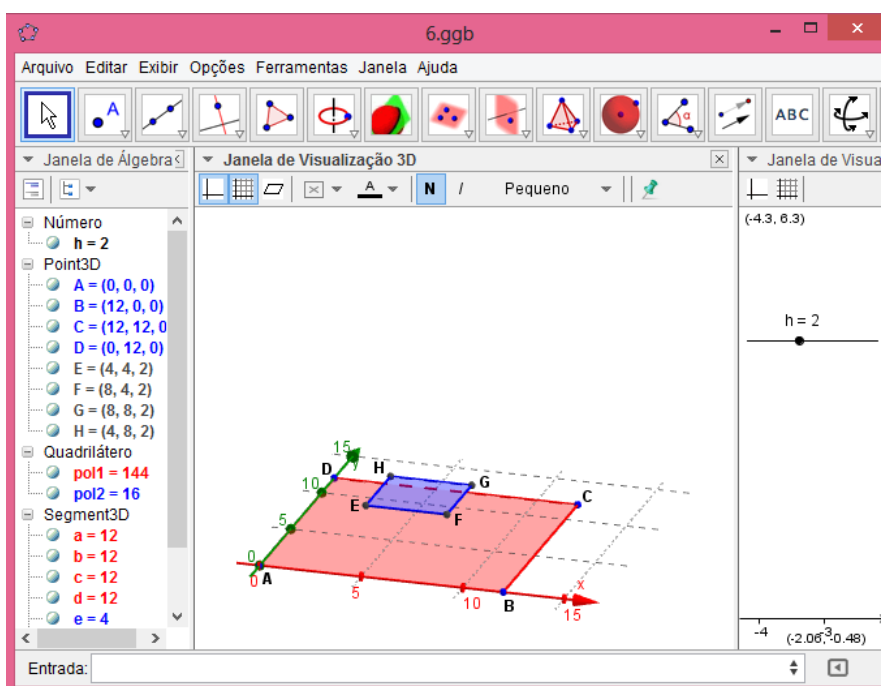


Figura 119

4. Construção do tronco de pirâmide.

Vamos determinar as quatro faces laterais do tronco através do ícone polígono, selecionando os 4 vértices de uma mesma face lateral. Para construção da face $ABFE$, por exemplo, selecionamos os pontos A , B , F e E após escolher o ícone polígono.

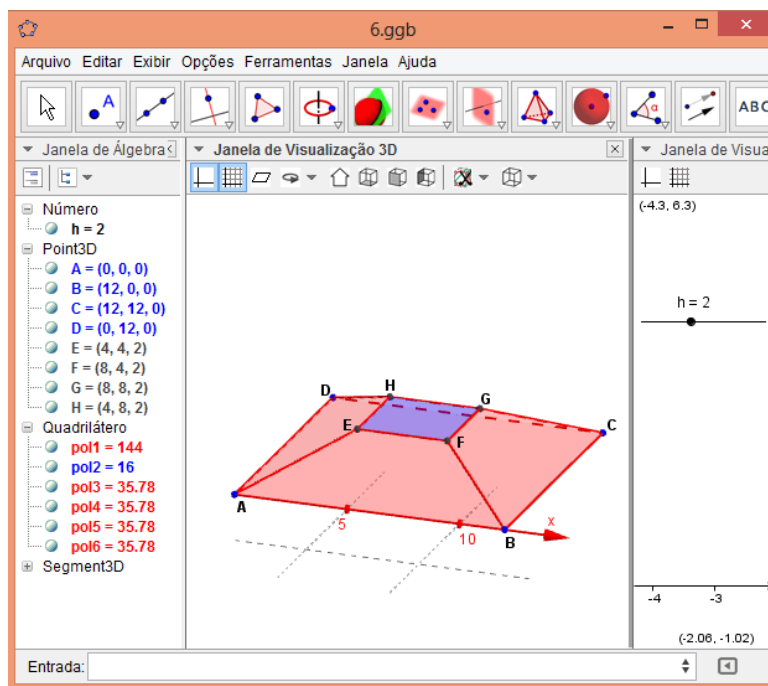


Figura 120

SOLUÇÕES:

a) Como as bases desse tronco de pirâmide são quadrados de lados 12 e 4, a soma de suas áreas será $12^2 + 4^2 = 160$.

A lateral do tronco é a união de quatro trapézios cujas bases maior e menor medem 12 e 4 respectivamente, e cuja altura é a distância entre os pontos M e N , médios das bases maior e menor respectivamente (Figura 121).

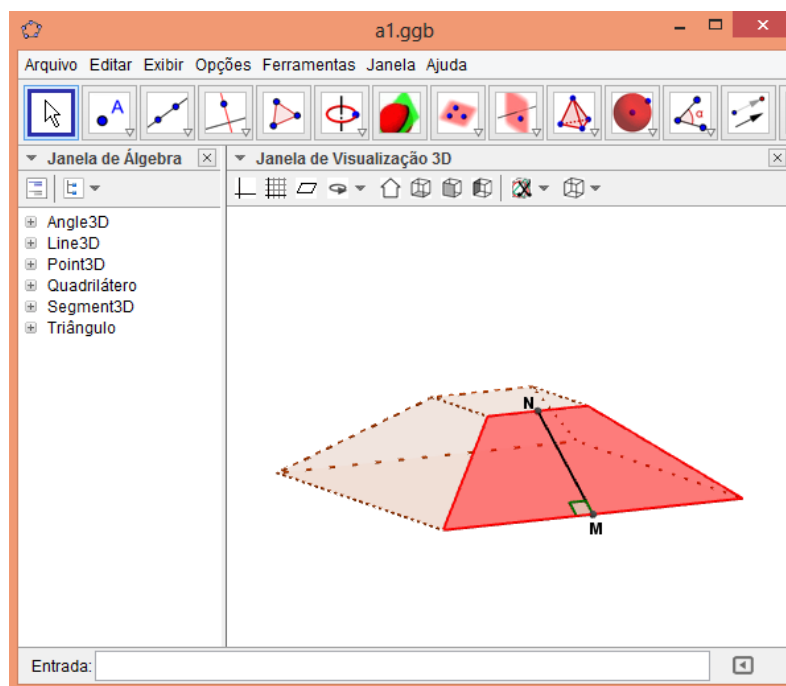


Figura 121

Logo, a área lateral desse tronco será o quadruplo da área de uma de suas faces laterais. Como as faces laterais são trapézios, temos que: $A_l = 4 \cdot \frac{(12 + 4) \cdot |\overline{MN}|}{2} = 32 \cdot |\overline{MN}|$

Vamos agora determinar a medida do segmento \overline{MN} , sabendo que a área lateral desse tronco é igual a soma das áreas de suas bases.

$$32 \cdot |\overline{MN}| = 160 \Rightarrow |\overline{MN}| = 5$$

Vamos construir agora uma reta (r) que passe pelo ponto N e seja perpendicular aos planos das bases do tronco e vamos chamar de ponto P a interseção dessa reta com a base maior. Determinado esse ponto P , ficamos com um triângulo retângulo onde podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a medida da altura desse tronco (Figura 122).

Essa reta r pode ser construída através do ícone reta paralela. Para isso, construímos o ponto $A' = (0, 0, 2)$ no campo de entrada e depois o segmento AA' em segmento definido por dois pontos e então construímos a reta r no ícone reta paralela, selecionando o ponto N e o segmento AA' . Como r é perpendicular aos planos das bases, então ela é paralela ao eixo z e conseqüentemente ao segmento AA' que está contido no eixo.

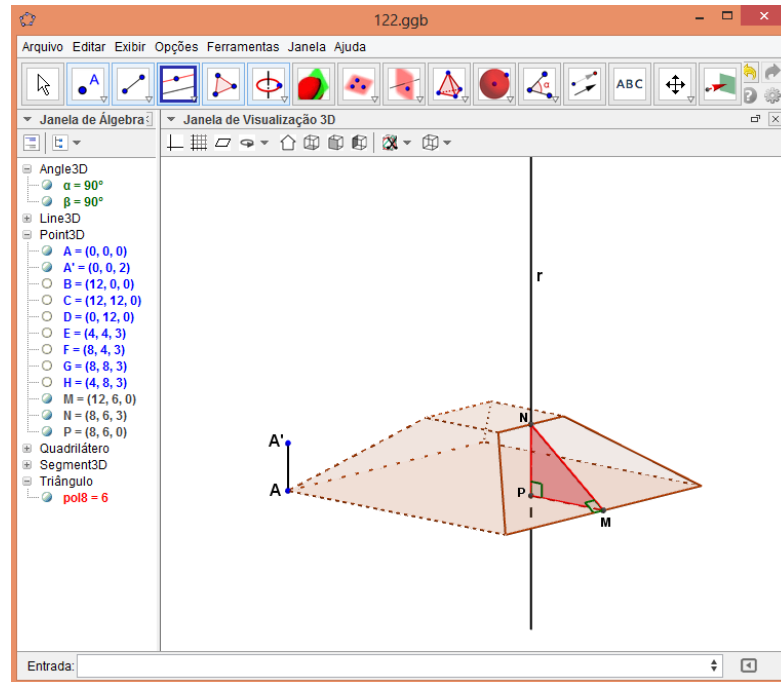


Figura 122

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNP temos:

$$|\overline{MN}|^2 = |\overline{MP}|^2 + |\overline{PN}|^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = 3$$

b) Vamos fazer o prolongamento de duas arestas laterais do tronco e determinar o vértice V da pirâmide que será a interseção desses prolongamentos (Figura 123). Sendo O o centro da base maior do tronco, ficamos com os triângulos semelhantes MOV e MPN , já que possuem um ângulo comum e um ângulo reto.

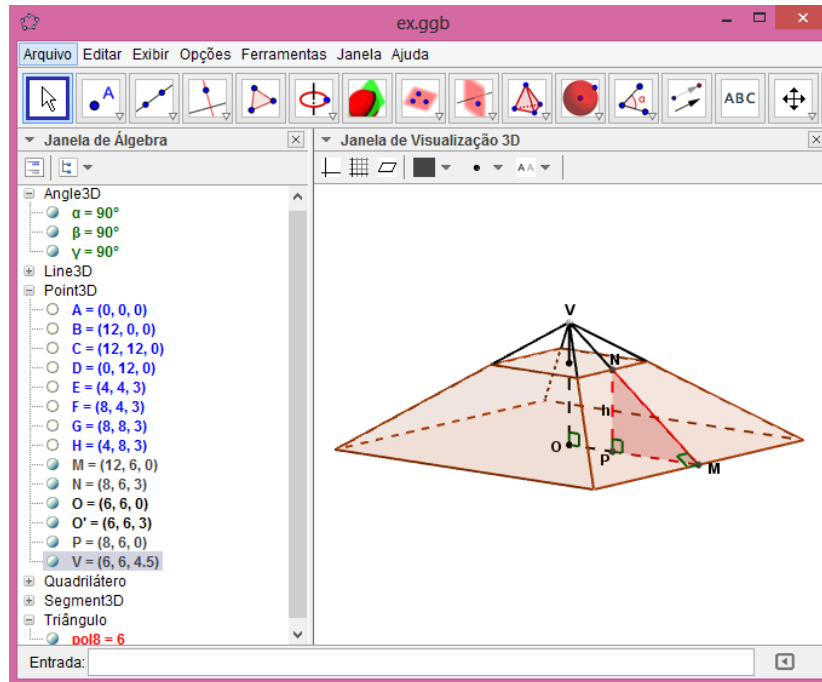


Figura 123

Fazendo a semelhança entre esses triângulos temos:

$$\frac{|\overline{MO}|}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{OV}|}{|\overline{PN}|} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{|\overline{OV}|}{3} \Rightarrow |\overline{OV}| = \frac{9}{2}$$

Concluimos então que a altura da pirâmide maior é $|\overline{OV}| = \frac{9}{2}$ e da pirâmide menor é $\frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$.

Para determinar o volume do tronco vamos subtrair os volumes das pirâmides maior e menor, ou seja:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_T = 208$$

Para confirmar o volume encontrado, podemos construir no GeoGebra 3D, através do ícone pirâmide, duas pirâmides com vértice em V e cujas bases são os polígonos $ABCD$ (pol1) e $EFGH$ (pol2). Após a construção dessas duas pirâmides, aparecerá na janela de álgebra o volume de cada uma. Temos que o volume da pirâmide maior é 216 ($P = 216$) e o volume da menor é 8 ($m = 8$), logo, o volume do tronco será $216 - 8 = 208$, confirmando assim o valor encontrado anteriormente para o caso particular do problema apresentado.

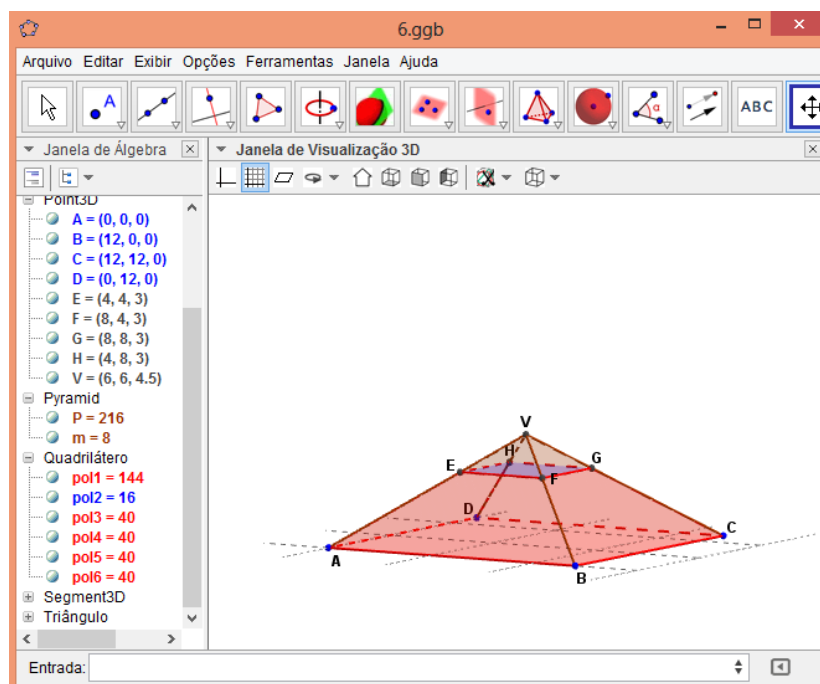


Figura 124

Problema 6 - RETIRADO DA SEGUNDA AVALIAÇÃO DA MATÉRIA MA13 (GEOMETRIA) DO PROFMAT 2012.

Em um cubo, $ABCD$ e $EFGH$ são faces opostas e AE , BF , CG e DH são arestas paralelas. Sejam M e N os pontos médios das arestas BC e DH , respectivamente.

- Se a aresta do cubo mede 2, calcule a distância entre os pontos M e N .
- Calcule o cosseno do ângulo entre as retas AB e NM .

Construção do Problema:

- Construção do polígono $ABCD$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (2, 2, 0)$ e $D = (0, 2, 0)$ e depois construímos o polígono (pol1) através do ícone polígono, selecionando os quatro pontos construídos.

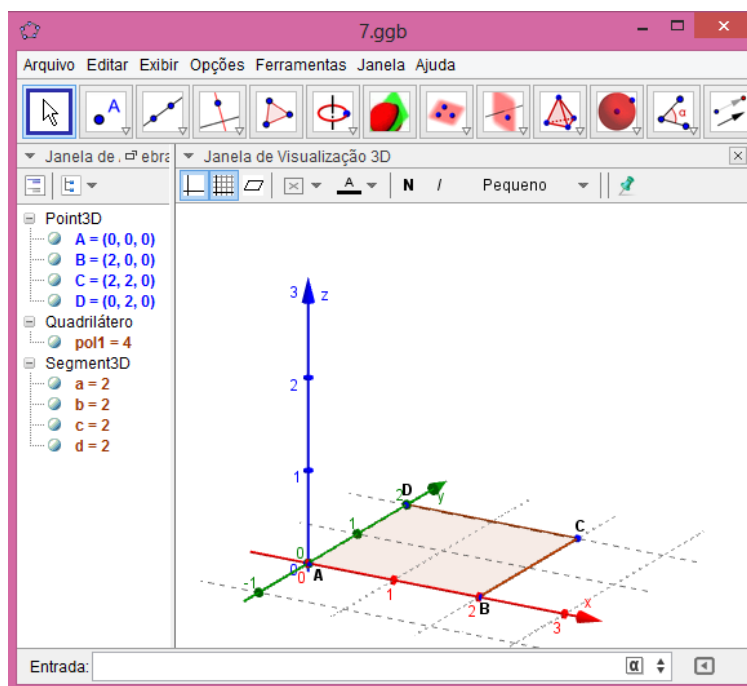


Figura 125

2. Construção do cubo.

Construímos o cubo $ABCDEFGH$ com o comando Prisma[<Polígono>, <Al-
tura>] no campo de entrada, determinando assim o cubo (prisma e) cuja base é o polígono $pol1$ e cuja altura é igual a dois.

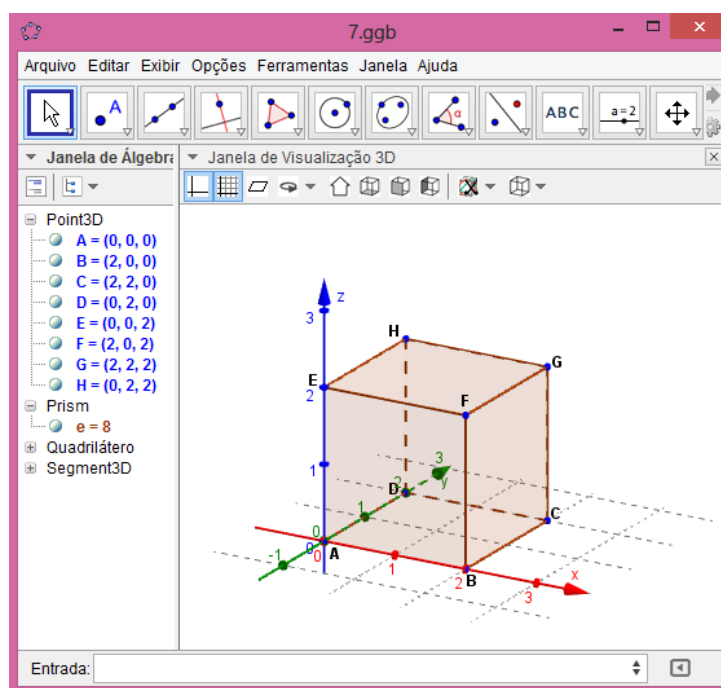


Figura 126

3. Construção dos pontos M e N .

Para construir os pontos M e N , vamos no ícone novo ponto e escolhemos a opção ponto médio ou centro e selecionamos as arestas BC e DH .

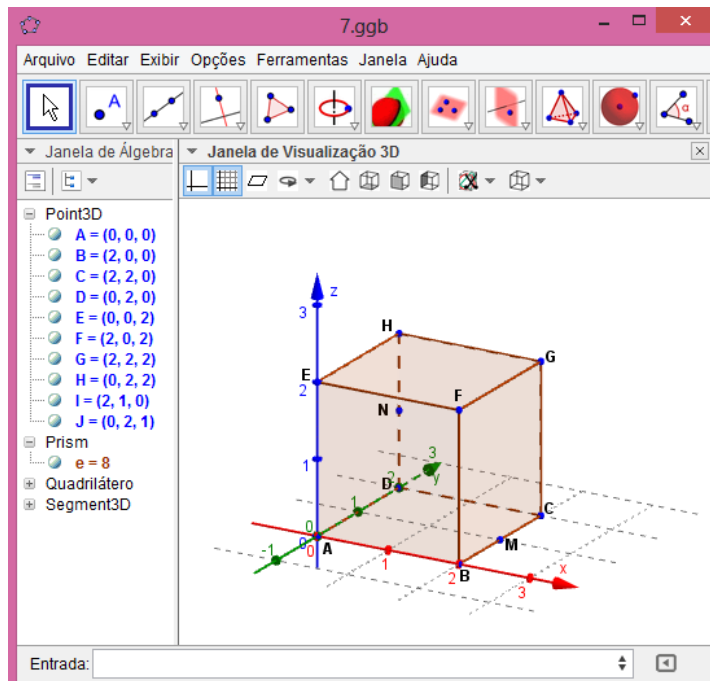


Figura 127

SOLUÇÕES:

a) Para calcular a distância entre os pontos M e N , temos primeiro que determinar a distância entre os pontos D e M . Construimos então o triângulo CDM através do ícone polígono, selecionando os seus vértices. Calculando o segmento \overline{DM} no triângulo retângulo CDM construído (Figura 128), temos: $|\overline{DM}|^2 = |\overline{MC}|^2 + |\overline{CD}|^2$, onde $|\overline{MC}| = 1$ e $|\overline{CD}| = 2$. Logo, $|\overline{DM}| = \sqrt{5}$.

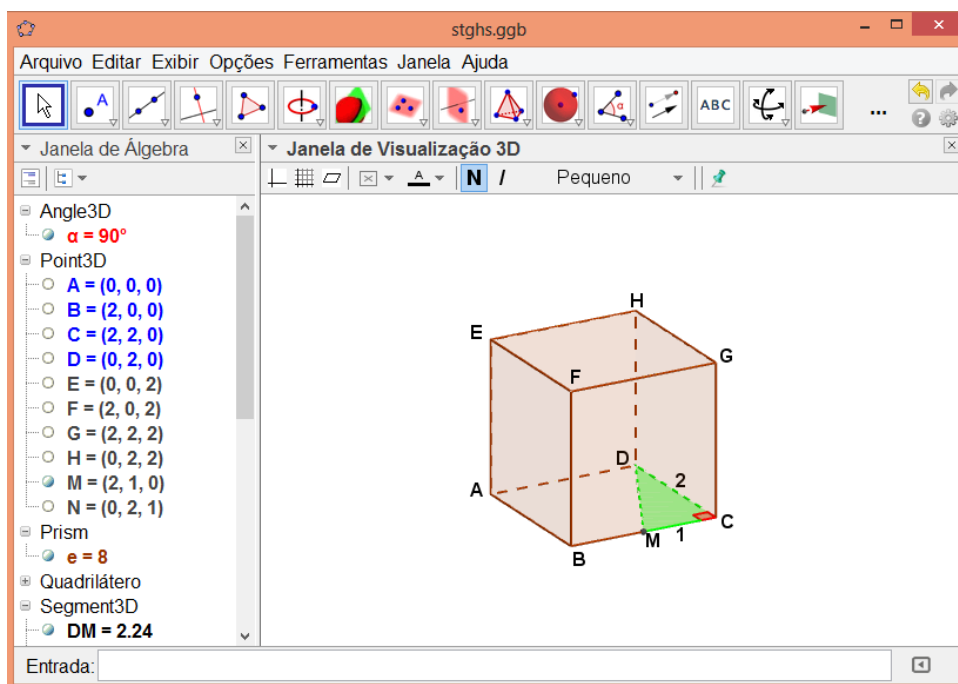


Figura 128

Confirmando o valor encontrado anteriormente, temos na janela de álgebra que, para o caso particular do problema apresentado, $|\overline{DM}| = 2,24 \cong \sqrt{5}$.

Construímos agora o triângulo MDN para calcular a distância entre os pontos M e N . Aplicamos Pitágoras no triângulo construído (Figura 129), onde $|\overline{DM}| = \sqrt{5}$ e $|\overline{DN}| = 1$.

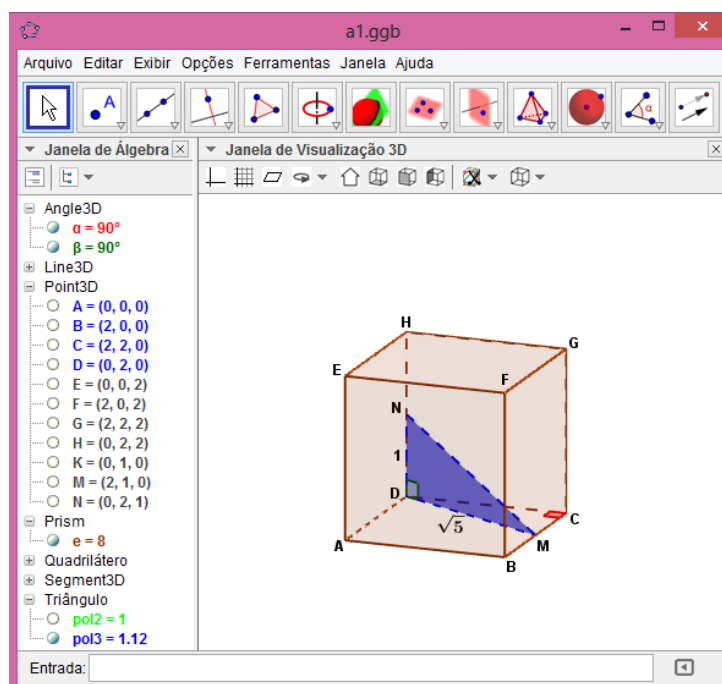


Figura 129

$$\text{Temos então: } |\overline{MN}|^2 = (\sqrt{5})^2 + 1 \Rightarrow |\overline{MN}| = \sqrt{6}$$

Na construção do triângulo MDN , percebemos na janela de álgebra que $|\overline{MN}| = 2,45 \cong \sqrt{6}$, confirmando assim a medida encontrada anteriormente.

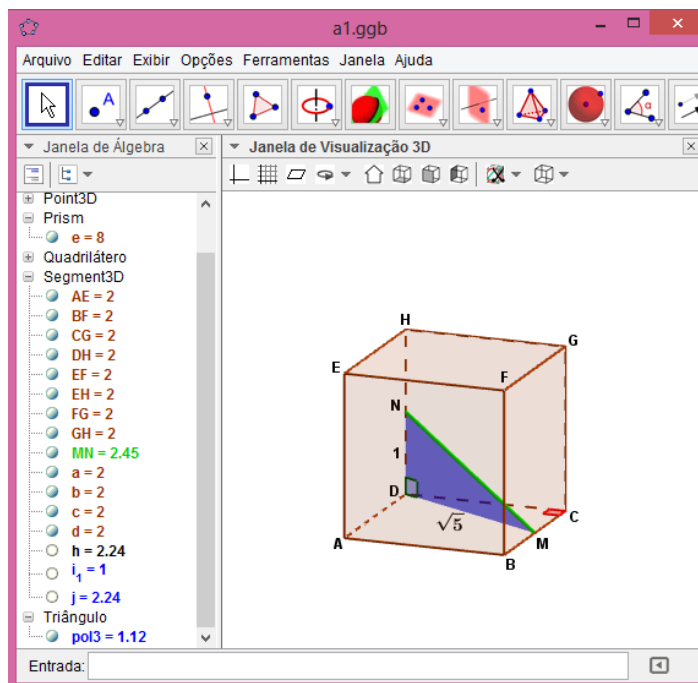


Figura 130

b) Seja r a reta que passa pelo ponto M e é paralela a reta AB . Como as retas AB e NM são reversas, o ângulo formado entre elas é igual ao ângulo formado entre as retas r e NM (Figura 131).

Construímos a reta r através do ícone reta paralela, selecionando o ponto M e o segmento \overline{AB} .

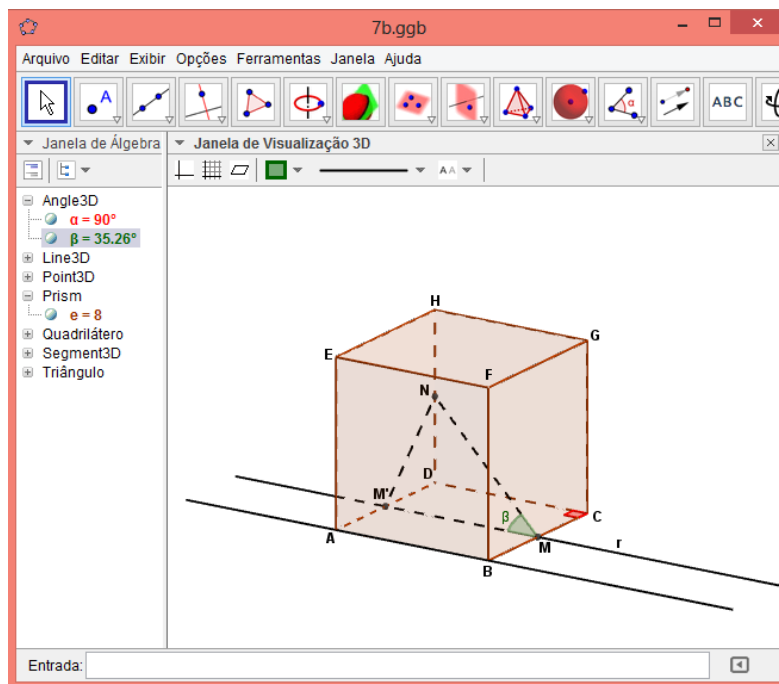


Figura 131

A reta r intersecta a reta AD no ponto M' , formando assim o triângulo $M'MN$, onde $|\overline{MN}| = \sqrt{6}$, $|\overline{MM'}| = 2$, $|\overline{M'N}| = \sqrt{2}$ e β é o ângulo formado entre as retas $M'M$ e MN (Figura 132).

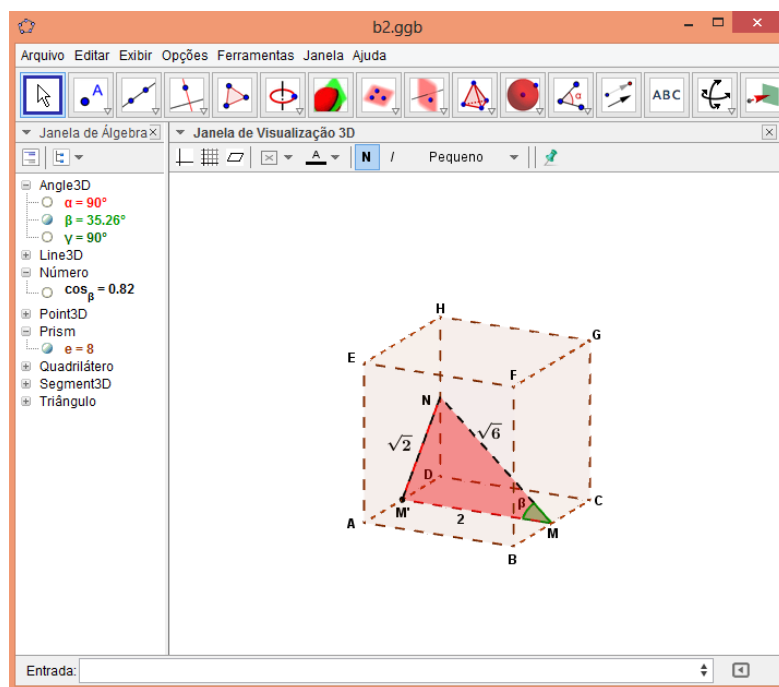


Figura 132

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $M'MN$ temos:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2})^2 &= 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \beta \Rightarrow \\
 2 &= 10 - 4\sqrt{6} \cdot \cos \beta \Rightarrow \\
 \cos \beta &= \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

Para confirmar o valor encontrado, digitamos no campo de entrada $\cos(\beta)$. Confirmamos então na janela de álgebra que, para o caso particular do problema apresentado, $\cos(\beta) = 0,82 \cong \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Problema 7 - RETIRADO DA TERCEIRA AVALIAÇÃO DA MATÉRIA MA13 (GEOMETRIA) DO PROFMAT 2012.

Considere o paralelepípedo retângulo de bases $ABCD$ e $EFGH$ e com arestas laterais AE , BF , CG e DH . As medidas são $AB = 6$, $AD = AE = 4$ e M é o ponto médio da aresta EF . São feitas as secções pelos planos MHA e MBG . Retirando-se os tetraedros $EMHA$ e $FMBG$ resulta o poliedro P .

- Faça um desenho do poliedro P e calcule seu volume.
- Determine o cosseno do ângulo entre as retas AH e MG .

Construção do Problema:

- Construção da base $ABCD$.

Digitamos no campo de entrada os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (6, 0, 0)$, $C = (6, 4, 0)$ e $D = (0, 4, 0)$ e depois construímos o polígono ($pol1$) através do ícone polígono, selecionando os quatro pontos construídos.

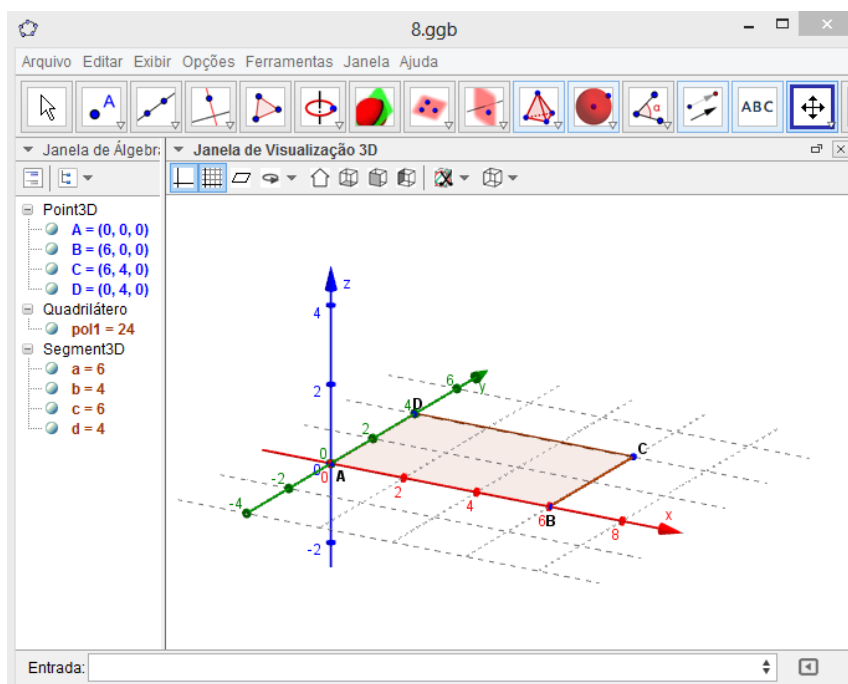


Figura 133

2. Construção do paralelepípedo.

Construímos o paralelepípedo $ABCDEFGH$ com o comando Prisma[<Polígono>, <Altura>] no campo de entrada, determinando assim o prisma e cuja base é o polígono $po1$ e cuja altura é igual a quatro.

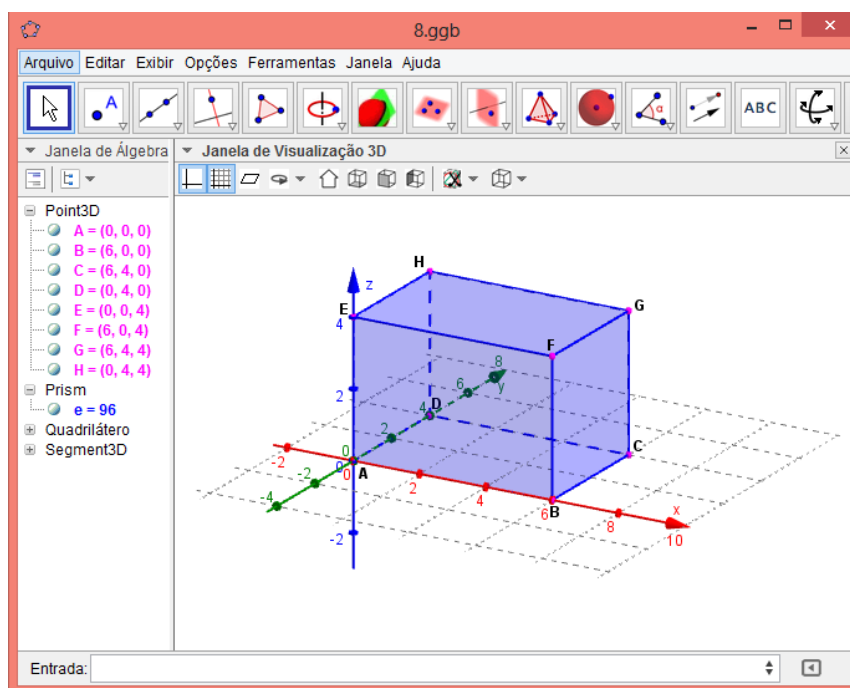


Figura 134

3. Construção do ponto M .

Vamos no ícone ponto médio ou centro e depois selecionamos a aresta EF , determinando assim o ponto M .

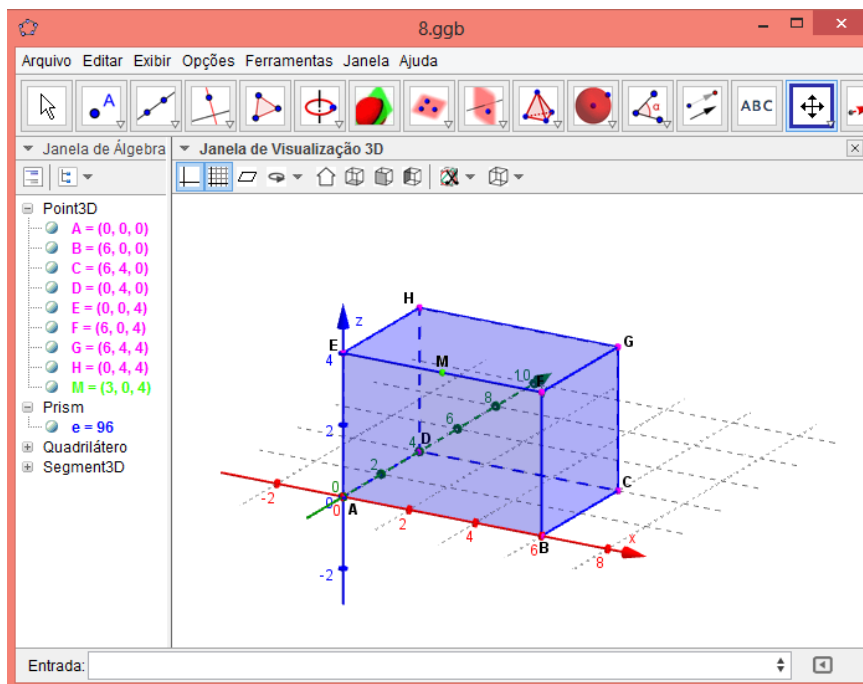


Figura 135

4. Construção dos polígonos EMH e FMG .

Construímos os polígonos EMH ($pol2$) e FMG ($pol3$) através do ícone polígono, selecionando os vértices de cada um dos polígonos.

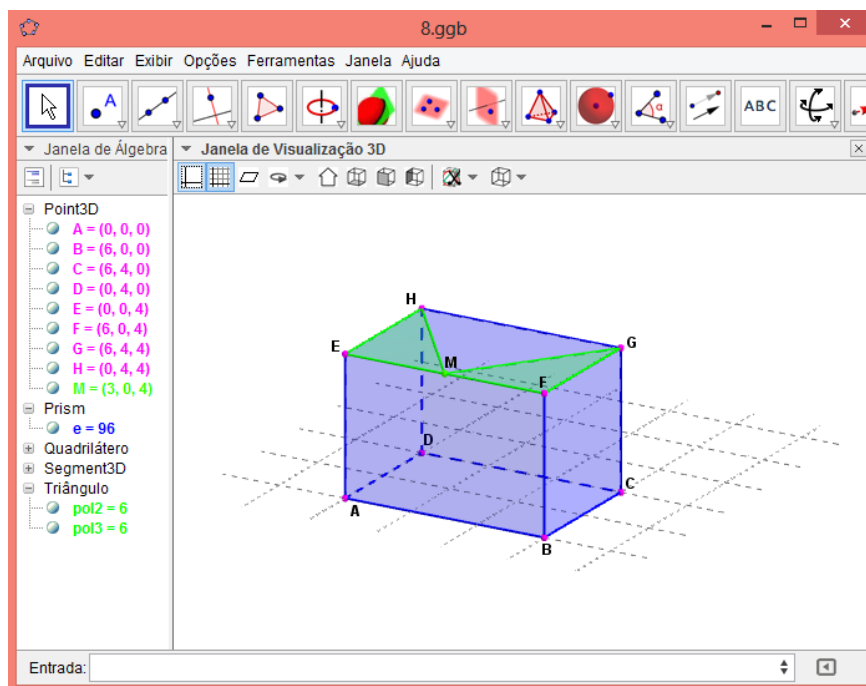


Figura 136

5. Construção dos tetraedros $EMHA$ e $FMGB$.

Construímos os tetraedros $EMHA$ (pirâmide i) e $FMGB$ (pirâmide j) através do comando Pirâmide[<Polígono>, <Ponto>] no campo de entrada, onde os polígonos EMH ($pol2$) e FMG ($pol3$) são as bases das pirâmides e os pontos A e B são os vértices.

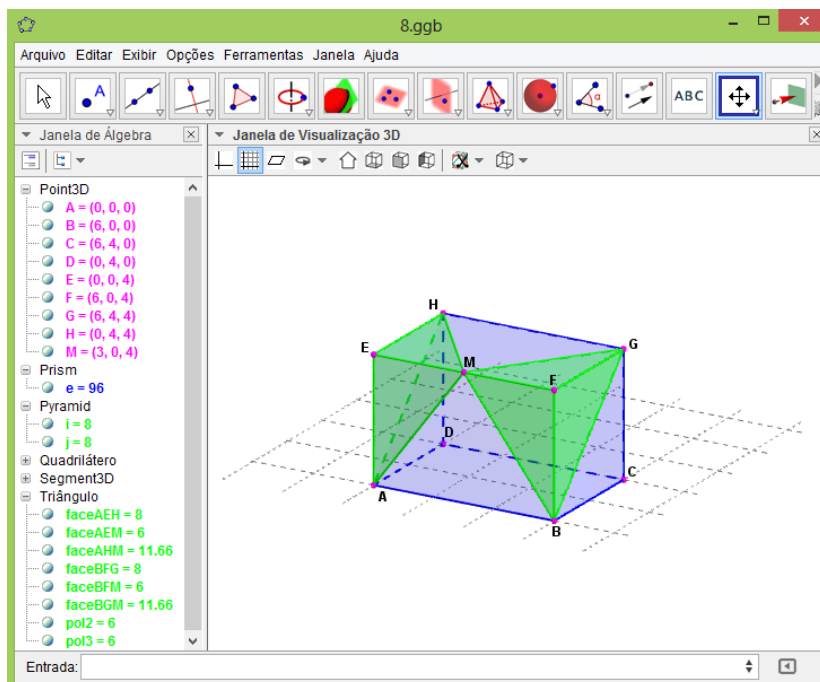


Figura 137

Para visualizarmos melhor o poliedro P , podemos construir uma pirâmide de base $AHGB$ e vértice M e um prisma de base BCG e altura igual a cinco. Para isso devemos construir primeiro os polígonos $AHGB$ ($pol4$) e BCG ($pol5$) através do ícone polígono, selecionando os seus vértices. Após a construção dos polígonos, podemos construir a pirâmide $AHGBM$ (pirâmide k) e o prisma $BCGADH$ (prisma p) através dos comandos Pirâmide[<Polígono>, <Ponto>] e Prisma[<Polígono>, <Altura>], respectivamente.

Podemos agora manter o prisma e escondido, selecionando ele na janela de álgebra com o botão direito do mouse e escolhendo a opção exibir objeto, e deixarmos as pirâmides i e j totalmente transparentes, selecionando-as na janela de álgebra com o botão direito do mouse e escolhendo a opção propriedades, onde iremos na opção cor e deixamos a sua transparência em zero.

Assim podemos ter uma melhor visualização do poliedro P , como mostra a figura 138.

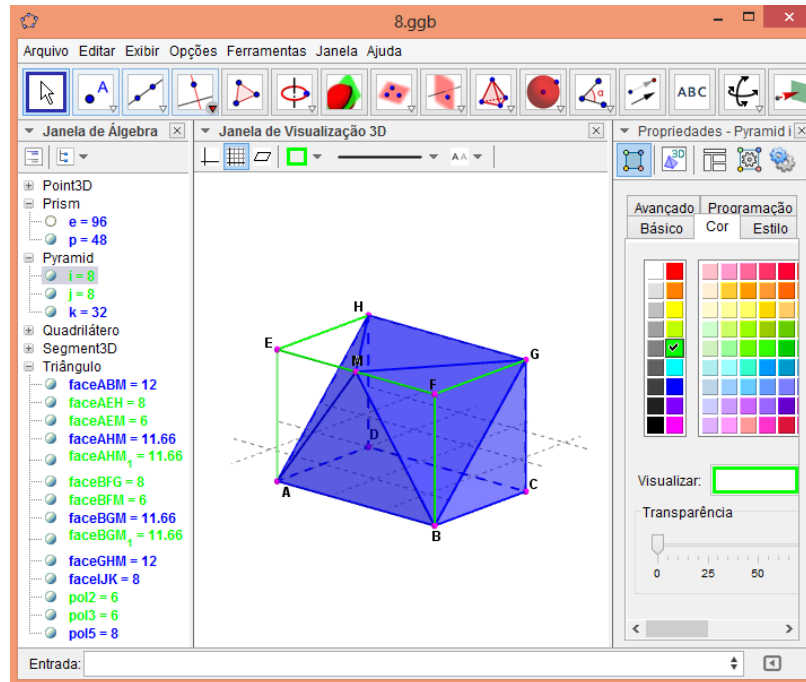


Figura 138

SOLUÇÕES:

a) O poliedro P é a união de uma pirâmide quadrangular (Figura 139) e um prisma triangular (Figura 140). Vamos Calcular o volume de cada um desses sólidos separadamente.

Cálculo do volume da pirâmide:

Sabendo que o lado do quadrado $BCGF$ mede quatro, temos que a sua diagonal mede $4\sqrt{2}$ e a medida da altura da pirâmide é $h = 2\sqrt{2}$ (metade da diagonal do quadrado).

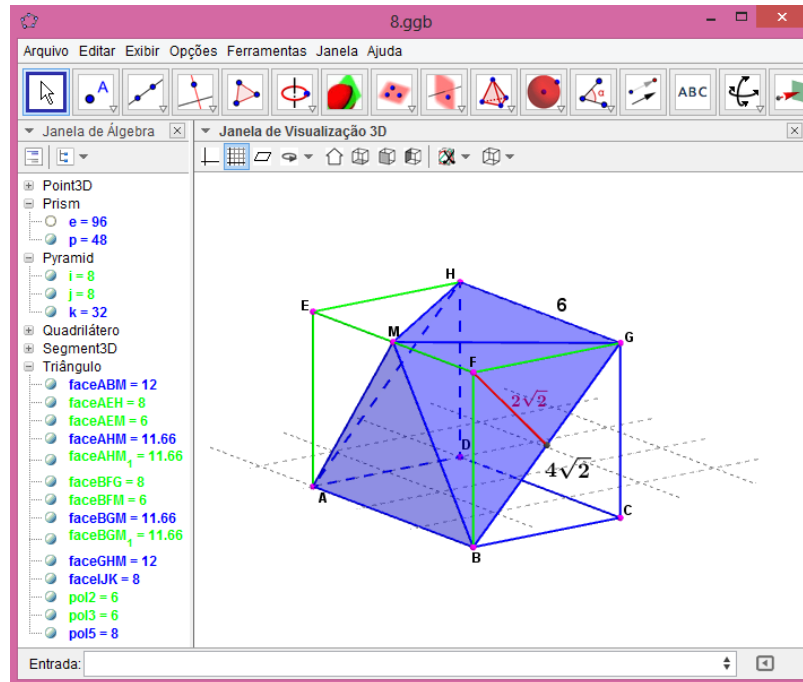


Figura 139

Logo, $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow V_{pirâmide} = 32$.

Assim que construímos a pirâmide, aparece na janela de álgebra $k = 32$, o que significa que o seu volume é igual a 32, confirmando assim o valor calculado.

Cálculo do volume do prisma:

A base do prisma é um triângulo retângulo de catetos medindo 4 e sua área é $A_b = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

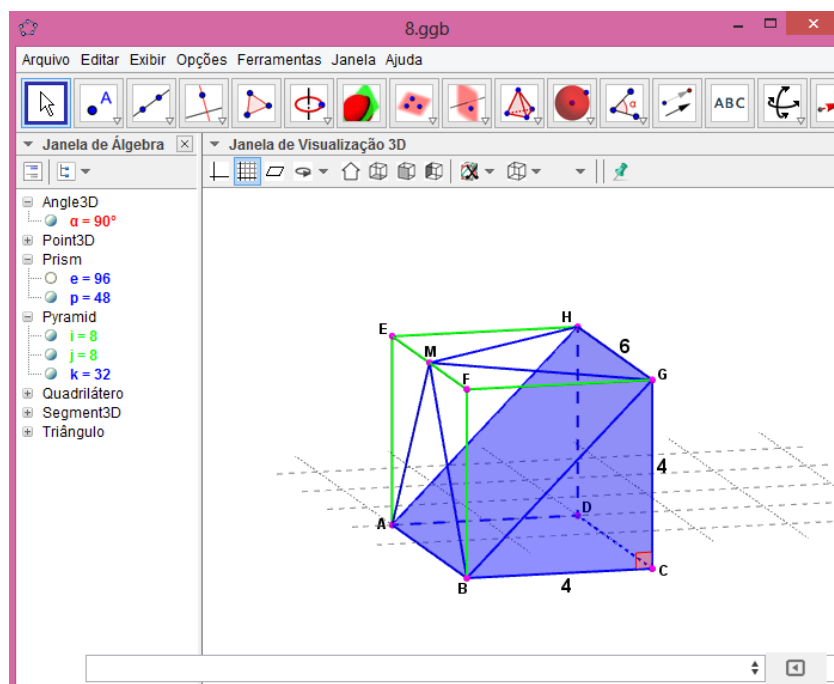


Figura 140

Logo, $V_{prisma} = A_b \cdot h = 8 \cdot 6 = 48$.

Verificando na janela de álgebra, temos que $p = 48$, ou seja, o volume do prisma p é igual a 48, confirmando assim o valor que calculamos.

Concluimos, então, que o volume do poliedro P é a soma dos volumes da pirâmide e do prisma, ou seja:

$$V_P = 80$$

Podemos mais uma vez confirmar que o volume de P é realmente igual a 80 através da janela de álgebra do GeoGebra. Ao construirmos o paralelepípedo $ABCDEFGH$, percebemos que o seu volume apresentado na janela de álgebra é igual a 96. Percebemos também que o volume dos tetraedros $EMHA$ e $FMBG$ são iguais a 8. Como sabemos que retirando-se os tetraedros do paralelepípedo resulta o poliedro P , temos que o seu volume é igual a $96 - 2 \cdot 8 = 80$, confirmando assim o valor que encontramos anteriormente.

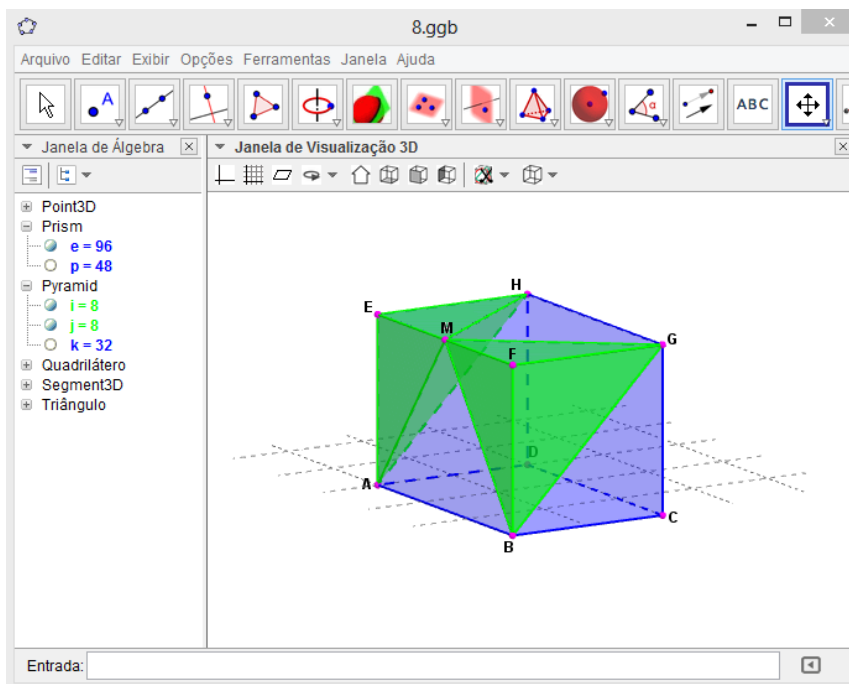


Figura 141

b) O ângulo formado entre as retas reversas AH e MG é o mesmo ângulo formado entre as retas MG e BG , já que as retas AH e BG são paralelas (Figura 142). Logo, queremos calcular o cosseno do ângulo $MGB = \beta$.

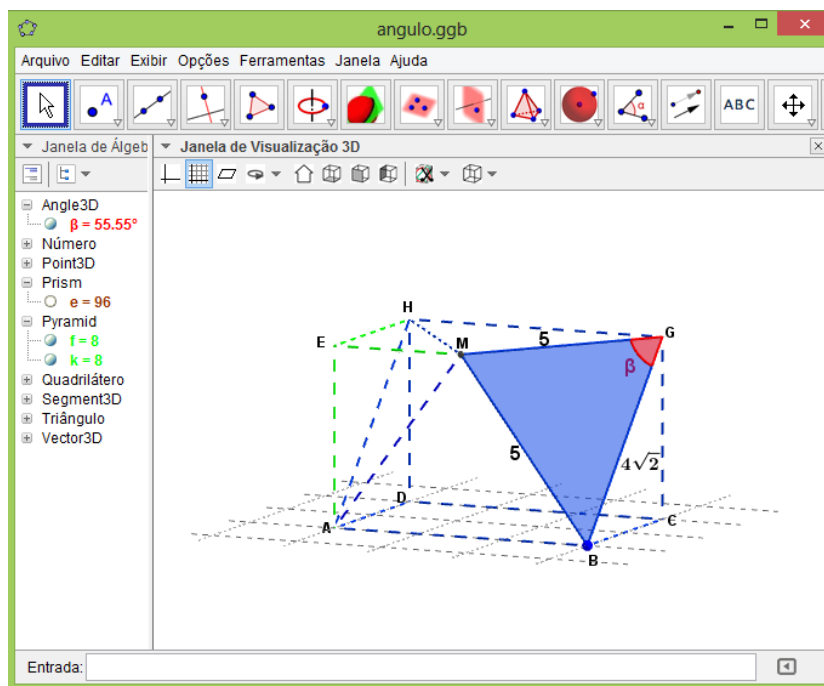


Figura 142

Como todos os lados do triângulo MGB são conhecidos, já que $|\overline{MG}| = |\overline{MB}| = 5$ (hipotenusas de triângulos cujos catetos são 3 e 4) e $|\overline{GB}| = 4\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado

$BCGF$), vamos aplicar a lei dos cossenos para encontrar o cosseno do ângulo procurado.

$$\begin{aligned}5^2 &= 5^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \beta \Rightarrow \\40\sqrt{2} \cdot \cos \beta &= 32 \Rightarrow \\ \cos \beta &= \frac{2\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

Vamos confirmar o valor encontrado digitando no campo de entrada o comando $\cos(\beta)$. O valor encontrado será $c = 0,57 \cong \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Considerações Finais

A escolha de um tema para realização desse trabalho surgiu a partir de alguns questionamentos como: qual o nível de ensino queremos atingir? O que podemos fazer para melhorar o processo de ensino aprendizagem? De que forma podemos mudar um pouco as nossas aulas para que nossos alunos se sintam mais motivados? Diante desses e outros questionamentos, decidimos trabalhar com o conteúdo de geometria espacial.

Entendemos que o conteúdo abordado na geometria espacial depende bastante dos conteúdos vistos anteriormente em geometria plana. Como nossos alunos já apresentam certa dificuldade em geometria plana, essas dificuldades tendem a se acentuar quando começamos a trabalhar no espaço.

A visualização em 3D dos sólidos trabalhados na geometria espacial é de fundamental importância para que os alunos consigam compreender a dedução das fórmulas usadas para o cálculo de áreas e volumes. Diante disso, decidimos trabalhar com o software GeoGebra 3D, já que acreditamos que o uso do computador durante as aulas estimula os alunos a aprender, além de permitir uma melhor visualização dos conteúdos ensinados, facilitando o desenvolvimento do conteúdo.

Acreditamos também que as animações feitas na dedução das fórmulas dos volumes de um tetraedro, pela decomposição de um prisma, e dos cilindros, cones, esferas e elipsóide pelo princípio de Cavalieri, possa facilitar o seu entendimento, trazendo assim, uma maior maturidade e segurança na aplicação das mesmas.

Sabemos que o GeoGebra 3D é um software que ainda se encontra em fase de teste, sofrendo assim constantes mudanças, o que faz com que ainda apresente algumas limitações e problemas em suas construções. Devido aos problemas apresentados pelo GeoGebra 3D, algumas construções se tornam demoradas já que é constante as vezes que o software "congela", ou seja, para de funcionar normalmente, e interrompe processamento de tempos em tempos. Por isso, a recomendação é que o usuário possa sempre salvar para não perder parte da construção feita.

Acreditamos que em breve essa versão do GeoGebra será definitiva e com isso os problemas apresentados deixarão de acontecer, melhorando ainda mais o ensino da geometria espacial com a sua utilização.

Esperamos que esse trabalho possa ser utilizado para o ensino da geometria espacial por professores do ensino médio, colaborando e enriquecendo cada vez mais as aulas da disciplina de matemática.

Referências

- BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1985. 488 p.
- BOYER, C. *História da Matemática*. 2ª edição. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996. 175 p.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, 1999. 146 p.
- CÂNDIDO, L. A. Implicação do uso da informática na sala de aula de Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 326–335, 2008.
- CRUZ, D. G. da. *A utilização de Ambiente Dinâmico e Interativo na construção do conhecimento produzido*. 169 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6ª ed.. ed. São Paulo: Atual Editora, 2009.
- EVES, H. *Geometria: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992.
- GONÇALVES, L. C. T. *GeoGebra - Um instrumento auxiliar no processo ensino/aprendizagem da Matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade da Madeira, Funchal, 2012.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6ª ed.. ed. São Paulo: Atual Editora, 2009.
- LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. 4ª ed.. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 5ª ed.. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6ª ed.. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- PATERLINI, R. R. Os "Teoremas" de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática*, n. 72, p. 43–47, 2010.
- PINTO, R. L. O Processo de ensino e aprendizagem da geometria na formação continuada de professores de Matemática. In: . Belo Horizonte: RELME26, 2012. p. 21–23.
- SILVEIRA, A. M. da; BISOGNIN, E. O uso de programas computacionais como recurso auxiliar para o ensino de Geometria Espacial. In: *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino De Matemática*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2008.
- VALENTE, J. A. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: UNICAMP, 1993.