Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Matemática Financeira e uma abordagem no ensino de Finanças para a Educação Básica

Fabio Augusto Coelho da Cruz

Salvador - Bahia
Agosto de 2013

Matemática Financeira e uma abordagem no ensino de Finanças para a Educação Básica

Fabio Augusto Coelho da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador:
Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Junior.

Salvador - Bahia
Agosto de 2013

Matemática Financeira e uma abordagem no ensino de Finanças para a Educação Básica

Fabio augusto Coelho da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, aprovada em 19 de junho de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Junior (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

Aos meus pais que me deram uma educação da qual hoje sinto-me orgulhoso e à minha esposa que me deu força e apoio para que eu atingisse o meu objetivo.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma possibilitaram tornar realidade este sonho de ser Mestre. Agradeço a Deus, acima de tudo, pois todos os dias temos uma jornada dispendiosa pela frente, mas com a fé chegamos aonde desejamos.

"Não há saber mais ou saber menos:
Há saberes diferentes".
Paulo Freire

Resumo

Neste trabalho abordaremos a Matemática Financeira em aplicações no estudo de Finanças, no intuito de levar para o aluno da educação básica noções do mercado financeiro, para que no futuro ele tenha um conhecimento prévio na hora de realizar alguma operação econômica, como por exemplo, saber escolher a melhor opção de compra ou de investimento.

Abstract

In this paper we discuss the Financial Mathematics in applications in the study of Finance, in order to take the student from basic education notions of the financial market, so that in future it has prior knowledge when carrying out any economic operation, for example, to know choose the best option or investment.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No ensino básico, a Matemática Financeira é abordada geralmente em apenas dois tópicos: juros simples e juros compostos. O aluno aprende a fórmula de juros simples $J = C \cdot i \cdot n$, onde J é o juro, C é o capital da operação financeira, i é a taxa e n é o período da aplicação.

Aprende que a taxa deve ter a referência temporal em concordância com a unidade de medida do período. Em juros compostos, o discente aprende a fórmula do montante $M = C(1 + i)^n$, constrói o gráfico da função exponencial que a fórmula do montante representa e, a partir da fórmula, responde vários exercícios que pedem o valor do montante, o período necessário para que um capital duplique, etc.. Se investigarmos em vários livros do ensino básico, só encontraremos essas duas abordagens. Nas minhas andanças ministrando aulas tanto no ensino fundamental (onde o aluno só aprende juros simples) quanto no ensino médio, vejo uma necessidade de expandir a abordagem da Matemática Financeira.

Os alunos que estão ocupando uma cadeira em uma escola, futuramente estarão exercendo atividades no setor financeiro, seja como um consumidor que comprará um eletrodoméstico, um carro ou uma casa, seja como um investidor, onde poderá investir em renda fixa, como caderneta de poupança, CDB, etc.. Para tanto, é preciso um conhecimento prévio para que esses futuros cidadãos não se sintam lesados no momento de uma dessas atividades financeiras.

O país de uma forma geral tem evoluído economicamente nos últimos dez anos. Hoje no Brasil existe uma classe média mais consumidora, onde o sonho de adquirir uma casa própria ou um carro se torna realidade devido à possibilidade de adquirir crédito nas instituições financeiras. E o aluno agregando ao seu conhecimento as informações do mundo financeiro, certamente será um propulsor para que a economia do país cresça e traga melhorias para a vida dos cidadãos.

Diante dessa lacuna que é verificada na aprendizagem matemática, me disponibilizei em pesquisar sobre os autores que falam de Educação Financeira, no intuito de realizar um trabalho que auxiliasse os professores que, igualmente a mim, percebem a necessidade de uma abordagem do estudo de finanças na educação básica.

O trabalho apresentado tem uma proposta pedagógica inovadora, pois o principal objetivo do mesmo é introduzir o estudo de finanças dentro da sala de aula. No primeiro momento, falaremos da origem da moeda e das instituições financeiras. Em seguida definiremos os elementos básicos da matemática financeira para que possamos discutir os dois regimes financeiros: juros simples e juros compostos.

Neste trabalho também exploraremos a tecnologia como um facilitador nos cálculos que são necessários numa transação bancária. O Excel, em muitos problemas, mostrou ser uma melhor ferramenta do que alguns programas matemáticos gratuitos.

Dando sequencia aos estudos, falaremos dos sistemas de amortização. Serão apresentados os sistemas de amortização mais utilizados nas transações financeiras.

Os alunos aprenderão sobre as transações bancárias que envolvem um financiamento, o que acarretará uma maior transparência nas negociações, haja vista que são frequentes as reclamações por parte dos consumidores a respeito das taxas de juros de um financiamento, como são realizadas as amortizações, etc., e isso, muitas vezes deve-se ao desconhecimento dos conceitos básicos das operações financeiras no momento da assinatura do contrato.

Capítulo 2

Origem da moeda

2.1 Origem das instituições bancárias e dos juros

Em tempos remotos, sabemos que as civilizações viviam isoladas umas das outras. O que se sabe é que as comunidades viviam restritas e tiravam da natureza o necessário para sobreviver. Mas, com o passar do tempo, as civilizações foram se desenvolvendo e foram fortalecendo a cultura, como artesanato. Diante de uma produção não repartida igualmente, houve a necessidade de criar uma relação de troca entre as civilizações distintas ou dentro de uma mesma comunidade. Essa troca de mercadorias entre as civilizações tem o nome de *escambo*. Mais adiante, as civilizações perceberam que o escambo tinha limitações e não estava mais atendendo as necessidades das tribos, e dessa forma gerava uma demanda de usar uma comodite [1] amplamente muito aceita como meio de troca. A escolha da comodite é realizada de uma forma espontânea, por ser um produto demandado por muitos das civilizações. Daí surge a definição de dinheiro, ou seja, o escambo entre mercadorias é substituído por trocas entre uma determinada mercadoria muito aceita entre as civilizações por um outro produto que alguém necessita. Como ilustração, vamos considerar a seguinte situação: Vou pegar minha mochila e vou trocar por uma comodite que tem valor de troca no mercado. Daí pego essa comodite e vou trocá-la por outro produto que eu demando. Assim cria-se um mercado para essa comodite. Vale ressaltar que essa comodite não pode ser qualquer tipo de produto, é natural que seja um produto com características peculiares para que seja transformado em moeda.
Em toda história já existiram várias comodites que foram utilizadas como moeda. Já tivemos o sal, cobre, e em campos prisioneiros o cigarro já foi utilizado como moeda.
Poucas comodites podem ser utilizadas como moedas. Não é a toa que há 5000 anos o ouro era utilizado como moeda em regiões onde este era existente. Em regiões onde não havia ouro, utilizavam prata ou cobre. Ao passar dos anos, percebe-se a necessidade de homogeneidade da moeda, pois começam a desconfiar da procedência do ouro, etc.. Muitos charlatões misturavam outros produtos no ouro para obter vantagens ilegais nas negociações, e diante das falsificações, houve a necessidade de verificar se o ouro estava

[1] comodite significa mercadoria, sendo um termo de referência de produtos.

adulterado ou não, e a verificação da pureza do ouro era um processo dispendioso e isso ocasionava um custo para aquele que iria receber o ouro. Para o ouro ter o controle de qualidade, surge então a senhoriagem, que era um serviço imposto pelos reis no qual estampava na moeda o rosto dos reis, faraós, imperadores, etc., ou seja, colocavam um quinhão na moeda. Desde então o governo é responsável pela produção do dinheiro.

Na medida em que ocorreu o surgimento da moeda no período das grandes civilizações, o ato de emprestar, tomar emprestado e guardar dinheiro de outros foi algo quase inevitável.

As operações de empréstimos iniciaram há 5000 anos na Mesopotâmia (atual Iraque), no início da civilização. Porém as instituições bancárias modernas tiveram sua aurora no século XIV, no norte da Itália. Nesta época, a península italiana sofreu uma grande influência do papado em Roma, influências essas que geraram bastante riqueza para a região. Devido também à sua posição geográfica privilegiada, a península italiana se desenvolveu no comércio, já que se encontrava entre a Ásia e a África e os países emergentes da Europa. A riqueza começou a acumular, sobretudo em Veneza e Florença. Em Veneza, devido ao seu poder marítimo, surgiram bancos que financiavam as viagens. Já Florença se especializou na atividade fabril e no comércio, e lá comerciantes e financistas fundaram o Banco Medici, um dos maiores bancos da península.

Um dos conceitos econômicos mais relevantes para o sucesso dos bancos atuais, como aconteceu com o Banco Medici, é a “transformação de ativos”. Um comerciante quer depositar ganhos ou pedir dinheiro emprestado. Outro quer um lugar seguro para guardar o seu ouro, de onde ele possa retirá-lo rápido, se necessário. Outro ainda quer um empréstimo, o que é uma operação de risco para o banco e pode imobilizar o dinheiro por longo tempo. Daí, o banco se pôs entre as duas necessidades: “tomar empréstimos no curto prazo, fazer empréstimos no longo”. Logo, os bancos tomavam emprestado o dinheiro dos depositantes (alavancagem) para fazer empréstimos a terceiros, multiplicando seus lucros. [6]

2.2 A invenção da moeda e os pensamentos filosóficos

O nascimento da Filosofia veio para questionar e tentar explicar as diversas mudanças que ocorriam na natureza. Os primeiros questionamentos filosóficos, feitos na Grécia Antiga (na região conhecida como Jônia, na cidade de Mileto), eram sobre os fatos e fenômenos que ocorriam voltados principalmente ao ser humano.

Figura 2.1: Thales de Mileto, 625 a.c. - 556 a.c.; Primeiro filósofo

Os helenos, em VIII a.C. já dominavam a agricultura, fundiam ferro, esculpiam o bronze, navegavam seguros pelo mediterrâneo e desenvolviam um crescente comércio. Amadurecidas socioeconomicamente, cidades-estados tomavam maior independência. Os gregos aprenderam a arte de negociar, e diante desse avanço, não mais se efetuava a venda de mercadoria aceitando como pagamento a troca por outras mercadorias. O pagamento tornou-se monetário, ou seja, a moeda substituiu o poder de troca. Esse crescimento comercial exigia um sistema monetário que facilitasse negócios, pagamentos oficiais, cobranças de impostos e que limitasse as medições repetitivas dos pesos dos metais preciosos. A ação conjunta dessas circunstâncias condicionou a criação da moeda cunhada. Atribui-se aos reis lídios, a invenção da cunhagem das moedas.

Figura 2.2: Moeda grega com a efígie (rosto) de Dionísio (deus do vinho) que em Roma se chama Baco.

Até o fim do século VI a.C. a cunhagem de moedas alcançou as cidades gregas e toda a costa do Mediterrâneo como um veículo propagador da influência de sua cultura. As moedas passaram a promover tradições, lendas, sua fauna e flora e, principalmente, os deuses. Dentro desse contexto, mais de 1400 cidades gregas emitiram suas próprias moedas e de modo geral, essa cunhagem que difundia pensamentos significava a liberdade da cidade-estado, que era o eixo principal do pensamento grego.
A queda da aristocracia e o enriquecimento dos comerciantes promoveram algumas mudanças de valores na sociedade. A moeda permitiu uma forma de troca não realizada através de coisas concretas ou dos objetos trocados por semelhança, mas uma troca abstrata feita pelo valor semelhante de coisas diferentes, revelando, portanto, uma nova capacidade de abstração e de generalização no pensamento. Essa nova capacidade de abstração, e de entendimento a ponto de efetuações de trocas de objetos por seus valores, impulsionava outro pensamento, o pensamento racional, o qual a Filosofia tem como princípio, meio e fim.

2.3 Surgimento do papel moeda

O papel moeda surgiu quando os comerciantes, preocupados com o cerceamento do ouro das moedas e vendo o dispêndio de verificar o teor de metal fino, passaram a guardar o dinheiro em bancos de depósitos que surgiram na Itália e alguns outros países do século XII ao XV. Eles recebiam um certificado de depósito, do qual constava a promessa de devolução ao portador da quantia entregue. Esse bilhete deu início ao que conhecemos hoje como moeda de papel ou representativa, que contava, assim, com um lastro (garantia) de metal nobre.

Capítulo 3

Conceitos básicos

Para que o processo de aprendizagem deste trabalho atinja seu pleno objetivo vale destacar os significados dos termos que serão abordados no estudo e definições que fazem parte do universo da educação financeira.

3.1 A importância da Matemática Financeira

A Matemática Financeira estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso do tempo. Com isso, a Matemática Financeira elabora modelos para avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo. Certamente você tem consciência que 200 reais em seu bolso hoje valerão mais do que os mesmos 200 reais em suas mãos daqui a um ano. A ideia de juros apareceu naturalmente a partir do momento em que o homem percebe a relação entre o dinheiro e o tempo.

Definição 1 (Operações financeiras)**.** *Operação financeira é uma transação entre duas pessoas, físicas ou jurídicas, onde o dinheiro é o produto negociado.*

3.1.1 O surgimento dos juros

Quando certo indivíduo tem uma quantia ele é chamado de **credor ou poupador**. O credor possui um poder de compra devido à quantia que se encontra em suas mãos. Ele pode usar esse poder de compra ou guardar esse valor numa instituição financeira. Ao guardá-lo, ele automaticamente perde o poder de compra que possuía. Sendo assim, deve existir algo que recompense essa perda, e essa recompensa pela perda momentânea do poder de comprar é chamada de **juros**. Já aquele indivíduo que deseja um certo bem ou serviço, porém não possui a quantia necessária para realizar seu desejo, recorre a uma instituição financeira para tomar um empréstimo. Esse indivíduo é chamado de **devedor ou tomador**. Ao tomar um empréstimo, fica ciente do pagamento que terá de fazer para o banco afim de restituir ao mesmo o valor emprestado, e além disso, o banco receberá um valor a mais (juros) como recompensa de ter emprestado o dinheiro.Vale ressaltar que, dependendo da operação econômica, o banco ora é o credor (quando cede um empréstimo), ora é o tomador (quando por exemplo, abre uma caderneta de poupança para alguma pessoa).

3.1.2 Atos e agentes econômicos

Definição 2. *Atos econômicos são atos praticados por pessoas físicas (cidadãos comuns) ou pessoas jurídicas (empresas) que tem consequências financeiras.*

Definição 3. *Agentes econômicos são os coparticipantes dos atos economicos citados.*

Por exemplo, quando um tomador solicita um empréstimo ao banco, podemos dizer que o tomador e o banco são os agentes econômicos da operação financeira.

Numa operação financeira, isto é, num ato no qual o credor transfere seu poder de compra para o tomador, algumas condições são previamente definidas:

- remuneração paga pelo tomador ao credor pela utilização do capital;
- prazos e formas de devolução do capital e da remuneração acordada;
- garantias de pagamentos que o tomador apresentará ao credor.

3.2 Elementos básicos das operações financeiras

Nas operações financeiras estão relacionados os seguintes elementos básicos:

3.2.1 Capital

Chama-se de capital o valor monetário que é empregado numa operação financeira. Nas expressões matemáticas, o capital é representado por C.

3.2.2 Período

Quando se realiza uma operação financeira, fica imediatamente pactuado o tempo necessário para que o credor seja ressarcido e receba a recompensa. Chamamos de período a quantidade de unidades de tempo que foi verificada desde o início da pactuação da negociação até a sua liquidez. Exemplo: Considere uma operação financeira cujo prazo que se dá desde o início da negociação até o término é de 1 ano.

- Se considerarmos o mês como unidade de tempo teremos n = 12;
- Se considerarmos o semestre como unidade de tempo temos n = 2.

Sabemos que 1 ano tem 365 dias (366 se for ano bissexto), que é denominado ***ano civil***. Porém, em muitas negociações financeiras os agentes econômicos consideram que 1 ano corresponde a 360 dias. É o chamado ***ano comercial***.

Da mesma forma, sabemos que os meses abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias cada. Já os meses janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro tem 31 dias cada um deles e fevereiro 28 dias (29 se o ano for bissexto). Esses são os ***meses civis***. Todavia, adota-se em muitos atos econômicos um mês tendo 30 dias, denominado ***mês comercial***.
Tem ainda as operações que consideram apenas os dias úteis, e nesse caso 1 ano corresponderá a 252 dias.

3.2.3 Juros

Como já foi dito, o juro é a recompensa merecida ao credor por emprestar capital.

3.2.4 Taxa de juros

Do ponto de vista do tomador, taxa de juros é o preço do dinheiro que se paga por pedi-lo emprestado. Já, sob o ponto de vista do credor, a taxa de juros é o preço do dinheiro que se cobra por emprestá-lo durante um período.

Por exemplo: Se Maurício emprestar R$ 200,00 a Paulo com a condição de Paulo pagá-lo no final de um mês o valor cedido mais juros de 5% desse valor, então Paulo deverá pagar a Mauricio:

$$R\$200,00 \;+\; 5\% \; de \; R\$\,200,00 =$$

$$200,00 \;+\; \frac{5}{100} \cdot 200,00 =$$

$$200,00 + \underbrace{10,00}_{juros} = R\$210,00$$

As taxas vêem acompanhadas com uma referência de tempo. Quando completa uma unidade de tempo da referência, deve-se calcular os juros.
Por exemplo: 5 % ao mês (a.m.) indica que ao final de cada mês deve-se calcular os juros, que serão 5% de um certo valor.

A taxa percentual pode ser representada na forma decimal, na qual é denominada taxa unitária.Exemplo:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

Traduzindo a taxa unitária: *0,05 significa que a cada 1 real transacionado resulta em 5 centavos para compôr os juros.*

Para entender melhor a taxa unitária, considere $R\$\,500,00$ que aplicados renderão no final do prazo 10% do valor.

$10\% = \dfrac{10}{100} = 0,10.$

Cada real renderá R$ 0,10 . Logo, R$ 500,00 renderão:

$500 \cdot 0,10 = R\$50,00$

Portanto teremos juros de $R\$50,00$.

Utiliza-se a variável i para representar a taxa.

Exemplo 1. *Uma pessoa física solicitou ao banco um empréstimo de R$ 1000,00, que será pago após 5 meses. Além do ressarcimento do empréstimo, o banco receberá a recompensa por ter cedido o capital, e de acordo com as cláusulas contratuais o tomador deverá pagar no final do período juros de 5% do capital cedido. Pergunta-se: Qual o valor que o tomador deverá desembolsar?*

Solução:

Verificamos que os juros são calculados a partir da taxa de 5% a.p. (ao período), sendo o período um tempo de 5 meses. Logo, temos:

$$5\%\, de\, 1000 = \frac{5}{100} \cdot 1000 = 50$$

Logo, serão pagos 1000 + 50 = R$ 1050,00.

3.2.5 Montante ou Valor Futuro

É o valor final de uma operação. É a soma do capital com os juros do período considerado. Usaremos M ou FV ($Future\ Value$ em inglês).
O montante será expresso por

$$M = C + J$$

onde C representa o capital e J os juros da operação financeira.

Exemplo 2. *Um capital de $R\$4000,00$ será aplicado durante 2 anos. Durante esse tempo, o rendimento foi de 7% do capital aplicado . Determine o montante que será resgatado.*

Solução:

Calculemos o juros do período:

$J = 0,07 \cdot 4000 = 280$

Logo,o montante será de $M = 4000 + 280 = R\$4280,00$

3.2.6 Valor presente

É o valor do dinheiro na data atual. Veja o exemplo: uma conta de telefone que deveria ser paga a um mês atrás no valor de R$ 45,00, foi paga na data atual , porém no valor de R$ 51,00. Isto significa que, de acordo com o contrato vigente nessa operação, o valor presente da conta é de R$ 51,00 e não R$ 45,00, pois devido ao atraso, houve a cobrança de juros.

Nas calculadoras financeiras e em alguns programas usa-se PV (em inglês quer dizer $Present\ Value$) para representar o valor presente. Em muitas situações o valor presente e o capital representam a mesma coisa. Exemplo: uma aplicação de R$ 1000,00 na caderneta de poupança pode ser representada por $C = 1000$ ou $PV = 1000$.

3.2.7 Fluxo de caixa

O fluxo de caixa é uma das ferramentas mais importantes na análise do valor do dinheiro. É representado por uma linha tracejada de forma que cada traço representa o final de um período, e onde visualizamos melhor as entradas e saídas de capitais de uma operação financeira. Estas entradas e saídas de capitais são representadas por setas verticais. Seta para baixo indica saída de capital, já a seta para cima representa entrada de capital. O tempo 0 é o hoje, o tempo 1 é um período a partir de hoje, o tempo 2 são dois períodos a partir de hoje, e assim sucessivamente.

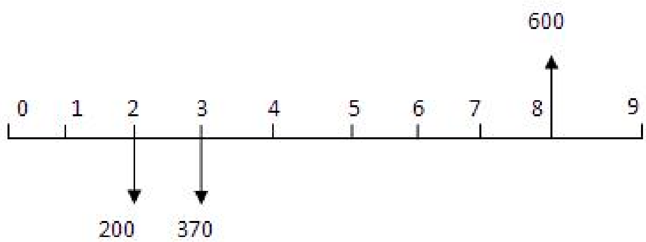


Figura 3.1: Fluxo de caixa

Nota-se que neste fluxo houve duas saídas nos meses 1 e 2 de R$ 200,00 e R$ 370,00, respectivamente, e um recebimento no mês 8 de R$ 600,00.

3.2.8 Renda

Renda é uma sequência de valores uniformes ou variáveis que podem representar pagamentos ou recebimentos, efetuados em intervalos de tempo regulares ou heterogêneos com finalidades diversas:

- formar um fundo de reserva;
- constituir um certo capital;
- pagamentos de: mensalidades escolares, salários, planos de financiamento, etc.

Quando um investidor vai ao banco e abre uma caderneta de poupança, ele deseja formar uma renda. E na maioria das vezes, o aplicador efetua depósitos de valores diferentes em intervalos de tempos irregulares (heterogêneos).

3.2.9 Amortização

É o nome que se dá ao mecanismo de abatimento de uma dívida mediante pagamentos periódicos sucessivos. As diversas maneiras de liquidar de forma progressiva um débito geram os chamados sistemas de amortização, entre os quais se incluem a amortização linear, os sistemas francês (ou Price), americano, e alemão, os sistemas de amortização constante (SAC), crescente (SACRE) e misto [1].

3.2.10 Desconto

Se você tem a receber daqui a um certo período uma quantia M, podemos descobrir quanto essa quantia vale na data de hoje. A diferença entre o valor M e o valor presente PV dessa quantia é denominado de ***desconto***.

No comércio, costuma-se usar o termo desconto para representar a diferença de preços quando se realiza uma promoção para ter liquidez de um produto ou serviço. Por exemplo, se uma TV que custa R$ 400,00 está com um desconto de 20% sobre o preço de venda, isso significa que o valor do desconto que o consumidor terá na compra da TV é

$$20\% \; de \; 400 = \frac{20}{100} \cdot 400 = 80 \, reais$$

3.2.11 Risco

Risco é a incerteza quanto ao cumprimento das obrigações assumidas por determinado tomador. Ele pode se referir ao indivíduo, à empresa ou até mesmo ao país. Em todo o caso, quanto maior o risco oferecido pelo devedor ou instituição à qual está ligado, mais caros serão os empréstimos que solicita. É que a chance de não liquidação da dívida e seus encargos são convertidos em uma taxa (de risco) adicional à taxa de juros (a relação entre o risco oferecido e o adicional correspondente é denominado índice de Sharpe). Quando materializa o risco , isto é, quando deixa de cumprir o combinado, em especial no tocante aos prazos de pagamentos, a pessoa (física ou jurídica) passa a ser qualificada como inadimplente [1].

3.2.12 Inflação e correção monetária

Inflação é o aumento da quantidade de moeda na economia. Porém, é popularmente usada para se referir ao aumento geral dos preços. O aumento de preço ocorre devido a uma grande oferta de moeda em paralelo com a limitação do produto ou serviço que é demandado pela sociedade.
Usando o bom senso, pode se questionar - Por que o preço de um cafezinho numa parte rica da cidade é muito mais alto que numa parte pobre? A resposta é que os clientes na parte rica têm mais dinheiro para gastar. Se considerarmos a população de um país inteiro e duplicarmos o dinheiro que as pessoas têm, é natural que elas queiram usar seu poder aquisitivo maior para comprar mais produtos e mais serviços. Contudo, como bens e serviços sempre têm oferta limitada, haverá muito dinheiro para comprar produto de menos, e os preços subirão. Vamos utilizar um exemplo prático: se tem mais banana sendo ofertada em relação à sua demanda, o preço da banana cai, pois tem mais oferta do que demanda. Por outro lado, se existe muita gente com dinheiro querendo comprar banana e não tem uma oferta de banana suficiente para atender à demanda, naturalmente o preço da banana subirá.

Os meios de comunicação e muitos economistas falam sobre a inflação da seguinte maneira:

Para determinar a inflação de um país leva-se em consideração o custo de um conjunto de itens básicos utilizados por determinado setor da sociedade. Chama-se de inflação o aumento do preço desse conjunto entre duas datas.

Na verdade o que a mídia chama de inflação é uma consequência da mesma.

A inflação, no contexto da mídia, é aferida a partir do aumento do preço de um ou mais produtos ou serviços que compõem uma lista de itens básicos demandados pela população.

Existem aqui no Brasil os chamados índices de preços, que verificam periodicamente o aumento ou decréscimo dos preços dos produtos e serviços. Os principais são: IGPM, INCC, IPCA, etc.

Com a inflação verificada,o poder aquisitivo (poder de compra) da moeda cai, e para restaurar o poder de compra de cada moeda, utiliza-se uma taxa denominada de ***correção monetária ou taxa de retorno***, que são as taxas determinadas pelos índices de preços.

Você já deve ter escutado alguém dizer a seguinte frase: "Há uns 5 anos com 100 reais eu comprava várias coisas no supermercado, mas hoje não dá pra comprar quase nada com essa quantia".
A frase acima quer dizer que o poder de compra dos 100 reais, passados 5 anos, já não é o mesmo, devido à inflação.

Na Europa do século XVI, os preços subiam sem justificativa. Muitos diziam que os governantes estavam usando a velha prática de desvalorizar o dinheiro, cunhando moedas com teor cada vez menor de ouro e prata. Era verdade. Porém, verificou-se que simultaneamente com o aumento dos preços, cresciam o número de prata e ouro que chegavam à Europa vindo de colônias de seus países na América. Tempos mais tarde, economistas concluíram que os preços na Europa haviam quadruplicado no século XVI, ao mesmo tempo que triplicara a quantidade de prata e ouro em circulação. Vale a pena destacar outros fatores que provocaram a inflação naquela época na Europa: a procura de bens de luxos; a escassez de bens à venda devido a exportações; a ganância de comerciantes ávidos por conter a oferta de bens usando os monopólios; e, claro, os governantes adulterando as moedas. [6]

3.2.13 Títulos de crédito

Muitas operações financeiras são realizadas através do crédito. O crédito, sob o aspecto financeiro, é a disponibilidade, por parte do credor, de algum capital ou prestação de serviço a uma pessoa física ou jurídica, sob a confiança do pagamento após um certo prazo.

Título de crédito é o documento que legitima uma dívida. Sob o aspecto jurídico, o título de crédito é o documento necessário para fazer cumprir o direito do credor de ser ressarcido do capital cedido (mais os juros) ou de receber o valor monetário correspondente ao serviço prestado.

Nas transações com títulos de crédito existem os seguintes agentes e informações:

- *valor nominal ou valor de face:* é o valor monetário do título de crédito;
- *data do pagamento:* a data em que o devedor pagará o valor nominal do título;
- *beneficiário:* a pessoa que receberá o valor nominal;
- *emitente ou sacador:* a pessoa que emite o título de crédito.
- *sacado:* o intermediário encarregado de pagar ao beneficiário o valor constante no título.

Os títulos de crédito são circuláveis, isto é, o beneficiário pode passar o direito daquilo que consta no título para terceiros a partir de endosso.[1] Em muitos casos, o beneficiário de um título de crédito exige um aval. Aval é uma atividade cambial[2] onde uma pessoa, denominada avalista, dá garantia ao título de crédito, isto é, se no dia do pagamento do valor nominal, este não for realizado pelo sacado ou emitente, o avalista responderá judicialmente pelo pagamento do valor nominal para o beneficiário.

[1] Endosso é uma declaração que transfere a outrem a posse de uma propriedade que lhe pertencia, geralmente, escrita no verso do título de crédito.

[2] Atividade cambial é uma operação econômica onde uma pessoa física ou jurídica transfere um bem uma realiza uma prestação de serviço para outrem em troca de um valor monetário ou uma comodite.

O título de crédito no código civil é guiado por três princípios, denominados princípios do direito do título de crédito:

1. *Cartularidade:* é a característica do título que preconiza que ele é necessário ao exercício do direito . Sem o documento o credor não pode, judicialmente, cobrar de seus devedores.

2. *Literalidade:* quer dizer que o título só vale no que nele consta, isto é, não é possível que se cobre do devedor mais do que consta no título. É a garantia dos devedores dos títulos de crédito;

3. *Autonomia:* as obrigações contraídas num título de crédito por vários devedores, avalistas, aceitantes, etc. são todas autônomas entre si, ou seja, a validade de uma não compromete a validade das outras.

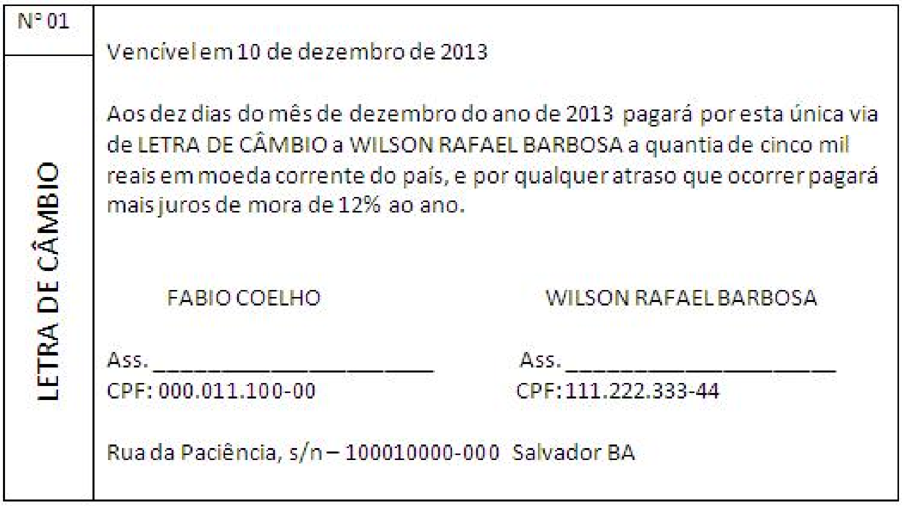
A seguir destacamos os títulos de crédito mais utilizados atualmente.

1. Letras de Câmbio

   É um título de crédito pelo qual o sacador (emitente) dá ao sacado (aceitante) ordem de pagar, ao beneficiário (investidor), determinada quantia, no tempo e no lugar fixados no título. Na letra de câmbio o emitente é o devedor, a instituição financeira é a aceitante e o beneficiário é a pessoa física ou jurídica investidora, adquirente da letra de câmbio.

   A origem histórica da letra de câmbio situa-se na península itálica, durante a Idade Média. Como se sabe, o sistema europeu de organização política, naquele tempo, era o feudal, caracterizado pela descentralização do poder – o estado central e forte é criação da Era Moderna. Sendo o poder espalhado e pontual, cada feudo ou burgo possuía, sob o domínio de um nobre, sua organização política relativamente autônoma, o que, via de regra, se traduzia na adoção de uma moeda própria.

   Os comerciantes necessitavam, assim, de um instrumento que possibilitasse a troca de diferentes moedas, quando, com o intuito de realizar negócios, deslocavam-se de um lugar para outro. Criou-se, então, a seguinte sistemática: o banqueiro recebia, em depósito, as moedas com circulação no burgo de seu estabelecimento, e escrevia uma carta ao banqueiro estabelecido no local de destino do mercador depositante. Nessa carta, ele dizia ao colega que pagasse ao comerciante, ou a quem ele indicasse, em moeda local, o equivalente ao montante depositado. Posteriormente, os banqueiros faziam o encontro de contas das cartas emitidas e recebidas. Dessa carta (em italiano, lettera), que viabilizava o câmbio de moedas, originou-se a letra de câmbio [4].



Nº 01

LETRA DE CÂMBIO

Vencível em 10 de dezembro de 2013

Aos dez dias do mês de dezembro do ano de 2013 pagará por esta única via de LETRA DE CÂMBIO a WILSON RAFAEL BARBOSA a quantia de cinco mil reais em moeda corrente do país, e por qualquer atraso que ocorrer pagará mais juros de mora de 12% ao ano.

FABIO COELHO

Ass. ______________________

CPF: 000.011.100-00

WILSON RAFAEL BARBOSA

Ass. ______________________

CPF: 111.222.333-44

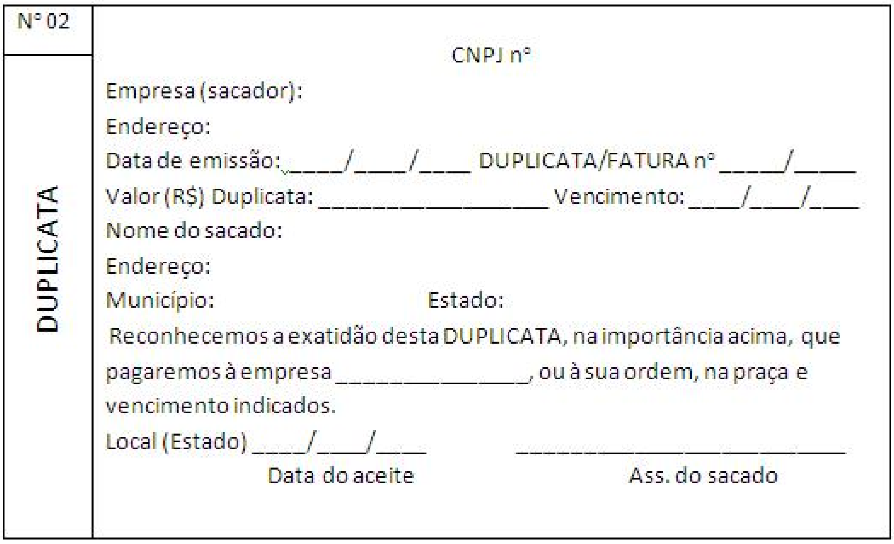
Rua da Paciência, s/n – 100010000-000 Salvador BA

Figura 3.2: Letra de câmbio

O financiamento do comércio internacional era um negócio de alto risco na Europa do século XIV. Em Veneza, situada na península itálica, existiam instituições bancárias que financiavam as viagens. E estas viagens envolviam tempo e distância e, por isso, sofria do que se chama de “problema fundamental da troca”- o perigo de que alguém fuja com a mercadoria ou com o dinheiro depois de ter feito o acordo. Para resolver o problema, utilizou-se da letra de câmbio, que comprovava a promessa do comprador de pagar pelos bens em determinada moeda, quando chegassem. O vendedor das mercadorias também podia vender a letra imediatamente para arrecadar dinheiro. Os bancos mercantis italianos tornaram-se hábeis com as letras de câmbio, criando um mercado monetário internacional.

2. Duplicatas

   É uma ordem bancária utilizada em uma transação de compra e venda ou prestação de serviços, sendo emitida pelo credor (beneficiário), necessitando o aceite do devedor (sacado).



Nº 02

DUPLICATA

CNPJ nº

Empresa (sacador):

Endereço:

Data de emissão: ____/____/____ DUPLICATA/FATURA nº _____/_____

Valor (R$) Duplicata: _________________ Vencimento: ____/____/____

Nome do sacado:

Endereço:

Município: Estado:

Reconhecemos a exatidão desta DUPLICATA, na importância acima, que pagaremos à empresa ______________, ou à sua ordem, na praça e vencimento indicados.

Local (Estado) ____/____/____ __________________________

Data do aceite Ass. do sacado

Figura 3.3: Exemplo de duplicata

Por exemplo, um dono de um restaurante adquire 100kg de carne de frango de um frigorífico. Ao receber a mercadoria, o dono do restaurante assina um documento enviado pelo frigorífico aceitando a dívida que contraiu com essa transação. Daí, o dono do frigorífico irá emitir a duplicata onde constará o valor que o dono do restaurante(sacado) pagará ao dono do frigorífico (beneficiário) e o prazo para que o pagamento seja efetivado. Muitos comerciantes ao necessitar de um capital imediato não esperam o prazo estipulado na duplicata para receber o dinheiro. Daí procuram as instituições financeiras para realizar o chamado desconto de duplicatas. Porém, o comerciante deverá receber um valor inferior ao que receberia se aguardasse o prazo que consta na duplicata. A duplicata também pode ser repassada a outra pessoa física ou jurídica através de endosso.

3. CDB

   O CDB (Certificado de Depósito Bancário) é um título de crédito emitido pelo banco (sacador) para pessoa física ou jurídica (sacado) a fim de captar recursos. Funciona assim: o investidor (credor) empresta o dinheiro ao banco, que é o devedor, de modo a receber uma remuneração em troca. Ao final da aplicação, o valor investido é acrescido de juros.

4. Notas promissórias

   São papéis emitidos por empresas ou pessoas físicas e com os quais elas conseguem obter recursos para adquirir capital. A empresa tem 2 opções para financiar o seu capital: ou ela recorre aos bancos ou ela recorre diretamente ao público através da emissão das notas promissórias. Sendo assim, podemos dizer que as notas promissórias são instrumentos que as empresas utilizam para angariar capital diretamente com o investidor (credor).

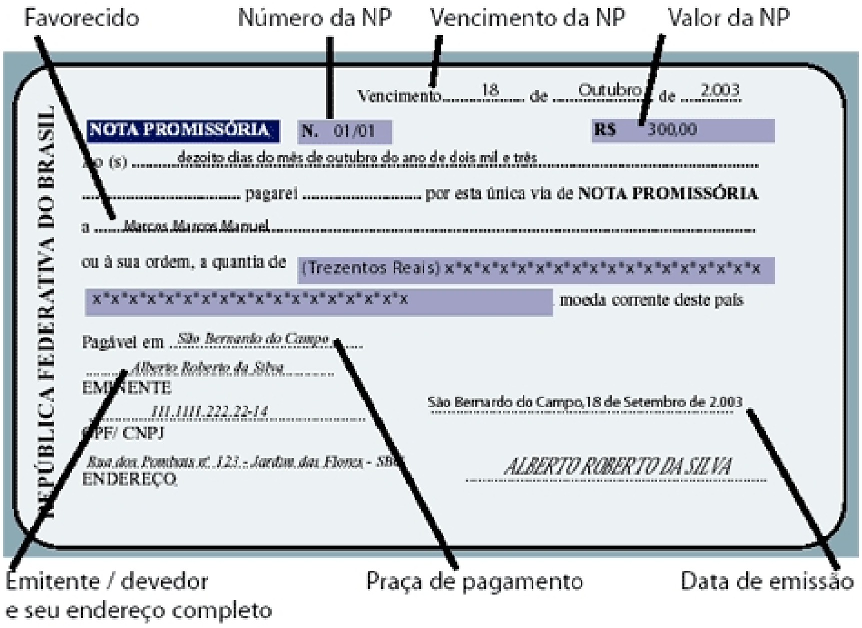


Figura 3.4: Nota promissória

Em muitas cidades do interior do Brasil, os comerciantes utilizam as notas promissórias para realizar as vendas. O cliente, ao adquirir um produto, assina a nota promissória se comprometendo a pagar o valor nominal do título.

Capítulo 4

Regimes Financeiros

Em um ato econômico as condições do contrato já estão previamente estabelecidas entre o tomador e o credor. Dentre elas está a remuneração paga pelo tomador ao credor pela utilização do capital. E a forma de como o tomador pagará a recompensa ao credor é denominada Regime financeiro. Nas transações bancárias existem dois tipos de regimes financeiros: o regime de juro simples, também conhecido como capitalização simples, e o de juros compostos, conhecido como capitalização composta.

4.1 Regime de Juros Simples

Consideremos uma aplicação de um capital C num prazo de n períodos a uma taxa i . O juros no regime simples se constrói ao final de cada período, onde a taxa i é calculada sobre o capital inicial, isto é, no regime simples, apenas o capital inicial rende juros.

Exemplo 3. *Um capital de R\$1000,00 aplicado a uma taxa de 5 % ao mês, a um regime de juros simples, terá gerado após três meses um juros de R\$ 150,00. Veja porquê.*

- juro no final do primeiro mês: $5\% \, de \, 1.000 = 50$
- juro no final do segundo mês: $5\% \, de \, 1.000 = 50$
- juro no final do terceiro mes: $5\% \, de \, 1.000 = 50$

Poderíamos calcular os juros nos três meses da seguinte forma: $J = 1.000 \cdot 0,05 \cdot 3 = 150$.

Generalizando,

Um capital C a uma taxa i num período n irá produzir juros simples de

$$J = C \cdot i \cdot n. \tag{4.1}$$

Obs. Ao indicar a taxa de juros, usa-se uma referência temporal, que pode ser mensal, anual, diária, quinzenal, etc., que deve estar em consonância com a unidade de medida do período.

O montante gerado por um capital C aplicado durante n períodos a uma taxa i % a.p., na capitalização simples é

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n) \tag{4.2}$$

Exemplo 4. *Foi feito um empréstimo de R\$ 3.000,00 a uma taxa de 2,8% ao mês para ser pago numa única vez após 1 ano e meio. Qual será o valor do pagamento?*

Solução:

Como a referência temporal da taxa é o mês, representaremos o prazo em períodos mensais. Daí, $n = 18$ (*um ano e meio equivale a 18 meses*).

Utilizando a equação (4.2), temos

$M = 3.000,00 \cdot (1 + 0,028 \cdot 18) = 4.512,00.$

Logo, o valor do pagamento será de R\$4.512,00.

4.2 Regime de Juros Compostos

No regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados em cima da dívida do início desse período.

Exemplo 5. *Se uma pessoa solicita um empréstimo de R\$ 1.000,00 a uma taxa de 10% a.m. (ao mês) para pagar depois de 3 meses, na capitalização de juros compostos, ela desembolsará após o período considerado uma quantia de R\$ 1.331,00. Veja porquê.*

- juro no final do primeiro mês: $10\%\ de\ 1.000,00 = 100,00$
- juro no final do segundo mês: $10\%\ de\ 1.100,00 = 110,00$
- juro no final do terceiro mês: $10\%\ de\ 1.210,00 = 121,00$

Verifica-se que no início do primeiro mês, o tomador só devia o valor da dívida, que era de $R\$1.000,00$. Quando se inicia o segundo mês, o tomador já devia $R\$1.100,00$, daí vimos que o cálculo dos juros relativos ao segundo mês foi sobre a soma do capital com os juros produzidos. No início do terceiro mês, o tomador já tinha uma dívida de $R\$1.210,00$. Logo, os juros gerados nesse mês foram calculados sobre o total da dívida até aquele momento. Sendo assim, no final do terceiro mês o tomador teve que desembolsar

$\underbrace{1.000}_{capital} + \underbrace{100 + 110 + 121}_{juros} = R\$1.331,00$

Se um capital C sofre um aumento a uma taxa i num determinado período, então seu valor passa a ser $C(1+i)$.

Por exemplo, se um capital C tiver um aumento de 10% , seu valor após o aumento será $C + 10\%\ de\ C = C + 0,10.C = C \cdot \underbrace{(1 + 0,10)}_{fator\ de\ aumento}$

Exemplo 6. *Um mercadoria que hoje custa R\$ 400,00 sofrerá um aumento de 12% num certo período.Quanto ela passará a custar?*

Solução

Temos:
$400,00 + 12\%\ de\ 400,00 = 400 + 0,12 \cdot 400 = 400 \cdot \underbrace{(1 + 0,12)}_{fator\ de\ aumento}$

No regime de juros compostos de taxa i, o capital C transforma-se, após n períodos, em um montante igual a

$$M = C(1+i)^n \tag{4.3}$$

No final do 1º período o capital terá sofrido um aumento (devido ao juros do período) a uma taxa i, logo teremos $M_1 = C(1+i)$, onde M_1 é o capital C mais os juros do mês 1.

No final do 2º período o montante M_1 terá sofrido um aumento a uma taxa i, logo $M_2 = C(1+i)(1+i)$, $M_2 = C(1+i)^2$, onde M_2 é o capital C mais os juros do 1º e 2º mês.

No final do 3º período o montante M_2 sofrerá um aumento a uma taxa i. Logo
$M_3 = C(1+i)^2(1+i)$
$M_3 = C(1+i)^3$, onde M_3 é o capital C mais os juros dos meses 1, 2 e 3.
Sendo M, o montante gerado pelo capital C durante n períodos, teremos:

$$M = C(1+i)^n$$

.

A figura 12 ilustra o *modus operandi* do regime composto.

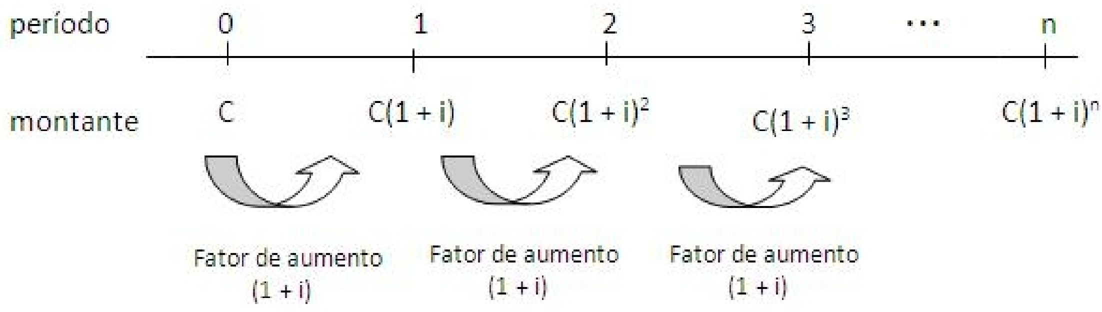
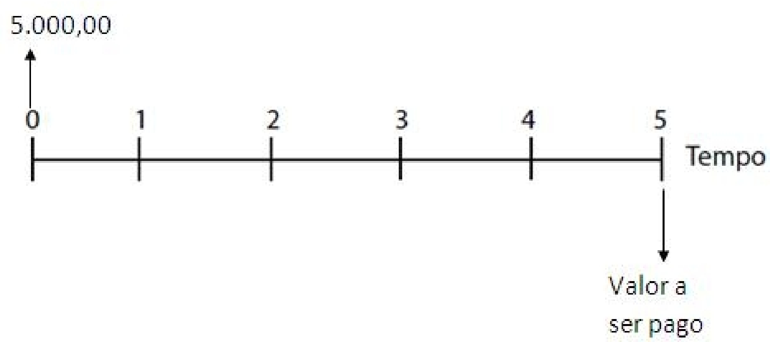


Figura 4.1: Regime de capitalização composta.

Exemplo 7. *Um empréstimo foi solicitado num valor de R$ 5.000,00 a uma taxa de 0,8% a.m. (ao mês) e será pago de uma só vez depois de 6 meses. Qual será o valor a pagar?*



Solução:

Usando a equação (4.3), teremos:
$M = 5.000 \cdot (1 + 0,008)^6$
$M = R\$ \ 5.203,23$

4.3 Regime de capitalização x Sequências numéricas

No regime de capitalização simples, com taxa i, um capital C e os montantes observados ao final de cada período geram uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é C e a razão é $r = i \cdot C$.

Exemplo 8. *Seja um capital* C = $R\$$ 100, 00 *que será aplicado num regime de capitalização simples a uma taxa de 5% ao mês.*

Temos uma progressão aritmética (100, 105, 110, 115, ...) de razão $r = 100 \cdot 0,05 = 5$ e $a_1 = 100$. Observe o fluxo abaixo que representa o capital aplicado e o montante ao final de cada período.

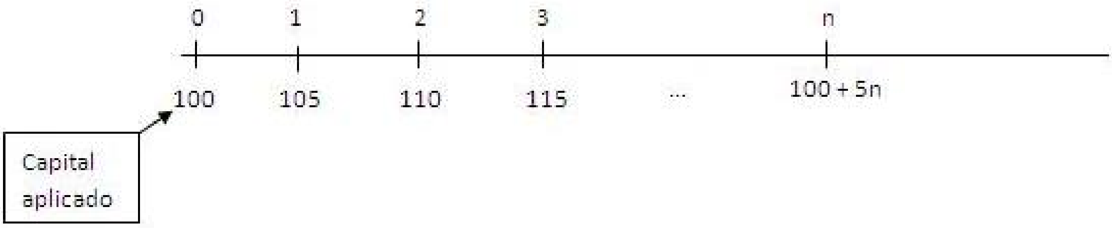


Figura 4.2: Progressão Aritmética de razão $r = 5$ e $a_1 = 100$.

O mesmo capital C aplicado num regime composto formará juntamente com os montantes M_1, M_2, ..., M_n, ... gerados no final dos períodos 1, 2, ..., n, ..., respectivamente, uma progressão geométrica, com $a_1 = C$ e $q = (1 + i)$, sendo i a taxa de juros .

Exemplo 9. *Seja um capital* C = *R\$ 100,00 que será aplicado num regime de capitalização composta a uma taxa de 5% ao mês durante n meses.*

Temos uma progressão geométrica cuja razão é q = (1,05) e $a_1 = 100$.

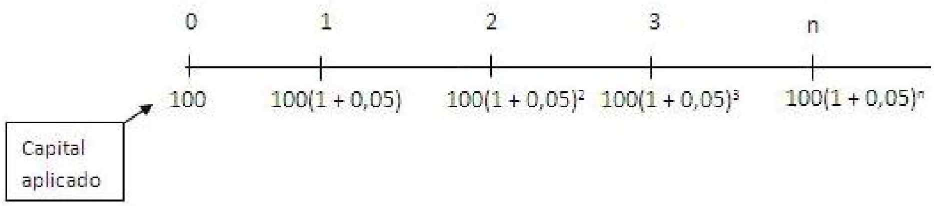


Figura 4.3: Progressão Geométrica cuja razão é $q = (1 + 0,05)$ e $a_1 = 100$.

4.4 Regime finaceiro x função

Tratando as equações (4.2) e (4.3) como funções, podemos fazer a seguinte relação.

- Capitalização simples: $M = C(1 + n.i)$ (Função polinomial do 1º grau)
- Capitalização composta: $M = C(1 + i)^n$ (Função exponencial)

  As variáveis M e n sãao números reais positivos.

Anotando-se em um gráfico as funções características das capitalizações simples e composta, conclui-se que:

- Para $0 < n < 1$, o juro simples é maior que o juro composto;
- Para n = 1, o juro composto é igual ao juro simples;
- Para $n > 1$, o juro composto é maior que o juro simples.

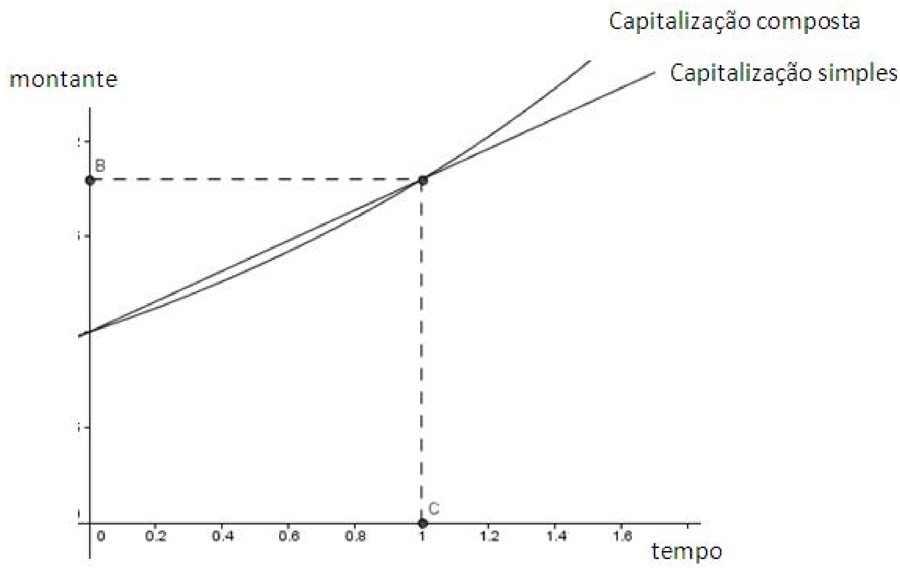


Figura 4.4: Capitalização Simples x Capitalização Composta.

Na vida real, juros simples são raramente usados. O motivo para isso é o que o humorista já definiu como sendo a "regra de ouro" da Matemática Financeira – e também da vida: "Na vida, que tem o ouro é que faz as regras". O gráfico acima mostra que os montantes a juros compostos são maiores quando o período de pagamento ultrapassa a unidade. É, portanto, de interesse dos detentores do capital que os juros sejam compostos. A exceção ocorre se o prazo for menor que a unidade de tempo (n ¡ 1); neste caso, juros simples dariam maior montante. Esta é a única situação da vida real – que ocorre tipicamente em juros de mora, isto é, nos juros que são cobrados por pequenos atrasos em pagamentos – em que juros simples são usados [3].

Exemplo 10. *Uma conta no valor de R$ 129,00 foi paga com atraso de 5 dias. Determine o montante pago se os juros são de 2 % ao mês.*

Solução:

Ora, os juros são de 2% ao mês, de $\frac{0,02}{30}$ ao dia, de $\frac{0,02}{30} \cdot 5 = \frac{0,1}{30}$ no período de 5 dias. Portanto, os juros são $J = \frac{0,1}{30} \cdot 129 = 0{,}43$ e o montante será de R$ 129,43.

Nota-se também que no cálculo dos juros acima, usa-se o mês comercial de 30 e o ano comercial com 12 meses de 30 dias, ou seja, com 360 dias. O motivo é explicado pela "regra de ouro": o montante é maior do que seria se considerássemos meses com 31 dias ou anos com 365 (ou 366) dias. Os juros assim calculados são chamados de juros ordinários [3].
O problema abaixo ilustrará com precisão a regra de ouro.

Exemplo 11. *Qual o montante de um principal de R$ 520,00, a juros de 6 % ao mês, em 3 meses e 10 dias?*

Há três modos possíveis de fazer tal cálculo.

a) Quando nos pagam juros, é claro que só se levam em conta os 3 meses – afinal, foram combinados juros ao mês, não ao dia! Por exemplo, é o que acontece quando retiramos antes do prazo um capital investido.
O montante é $520 \cdot (1 + 0,06)^3 = R\$619,33$.

b) Considerar juros compostos durante os 3 meses e 10 dias. Esta é a chamada convenção exponencial.
O montante é $520 \cdot (1 + 0,06)^{3+\frac{10}{30}} = R\$631,48$.

c) Considerar juros compostos durante os 3 meses e juros simples durante os 10 dias. Esta é a chamada convenção linear, usada quando nos cobram juros. Por exemplo, quando atrasamos um pagamento o montante é calculado em duas etapas. Primeiro achamos o montante em três meses, R$ 619,33, conforme calculado na parte a. Agora calculamos os juros (simples) relativos aos 10 dias:

$$J = \frac{0,06}{30} \cdot 10 \cdot 619,33 = R\$12,39.$$

O montante é R$ 619,33 + R$ 12,39 = R$ 631,72.

4.5 Equivalência de capitais

Já vimos que se um capital PV for aplicado a uma taxa i durante n meses no regime de capitalização composta resultará em

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

onde $(1 + i)^n$ é chamado de fator de capitalização passados os n períodos de capitalização composta à taxa i. Se pensarmos num capital cujo valor daqui a n meses é FV, podemos afirmar, de acordo com o princípio de equivalência de capitais, que seu valor PV na data de hoje é

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n} \tag{4.4}$$

O fator $\dfrac{1}{(1 + i)^n}$ é chamado de *fator de descapitalização.*

Dois ou mais capitais são chamados de capitais equivalentes se, ao serem deslocados para uma mesma data, assumem o mesmo valor.

Trabalhando com equivalência de capitais vemos que capitais equivalentes situados em épocas distintas, têm valores diferentes. Como vimos na explicação acima, PV e FV são capitais equivalentes, porém como estão em datas diferentes, estão representados por valores monetários diferentes.

A equivalência de capitais permite a troca de um título de crédito por outro, um título por vários ou até mesmo vários títulos por um único título, contanto que ao serem levados para uma mesma data tenham o mesmo valor.

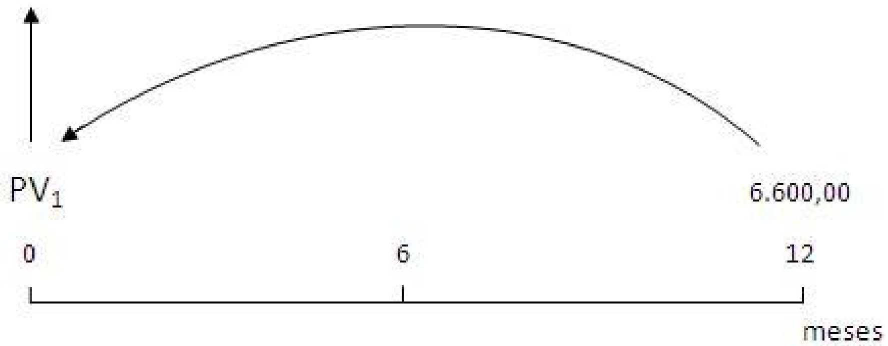
O que possibilita a análise da equivalência de capitais é o fator de capitalização $(1+i)^n$, utilizado quando deseja-se um capital equivalente a PV numa data futura a n períodos, e o fator de descapitalização $\dfrac{1}{(1+i)^n}$, que é usado quando queremos representar um valor futuro FV em uma data com n períodos de antecedência.

Exemplo 12. *João irá receber R\$ 6.600,00 dentro de um ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma nota promissória no valor de R\$ 6.000,00, com vencimento para 6 meses. João fez bom negócio, se a taxa de mercado for de 20% a.a.?*

Solução:

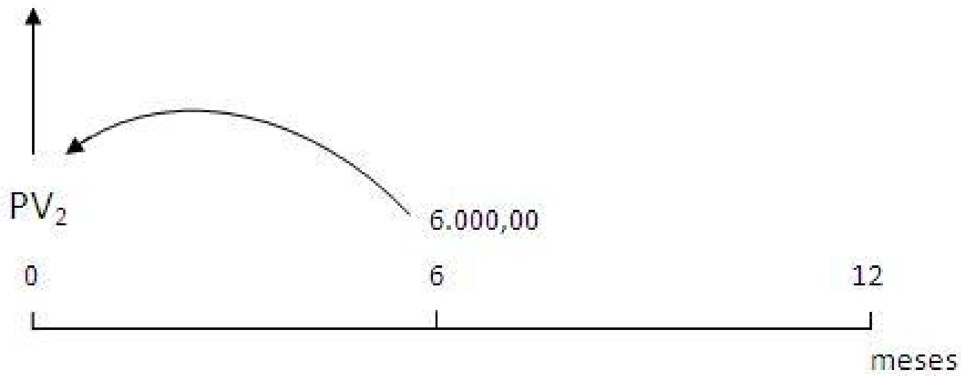
Iremos levar para a data zero os valores $R\$6.600,00$, recebível daqui a 1 ano, e $R\$6.000,00$, recebível daqui a 6 meses.

Chamando de PV_1 o valor na data zero da quantia R\$ 6.600,00 recebível daqui a 1 ano, temos



$$PV_1 = \frac{6.600}{1,2} = R\$5.500,00.$$

Chamando de PV_2 o valor da nota promissória na data de hoje, temos:



$$PV_2 = \frac{6000}{(1,2)^{0,5}} = R\$5.477,23.$$

Como $PV_1 > PV_2$, podemos afirmar que João não fez um bom negócio.

Capítulo 5

Descontos

Em muitas operações financeiras existe algum título de crédito que garante às operações a sua legitimação, devido às informações contidas neste título.

O conceito de desconto se dá quando o detentor de um título de crédito necessita resgatar esse título imediatamente,e este se encontra fora da data de resgate.

Vamos considerar que um detentor de uma nota promissória deseja transformar seu título de crédito em dinheiro antes da sua data de vencimento; nesse caso poderá negociar com o agente financeiro que lhe antecipará um valor inferior ao valor do título.

A diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado avaliado n períodos antes do seu vencimento é denominada *desconto*. Assim,

$$D = FV - PV, \tag{5.1}$$

onde,

- D é o desconto;
- FV é o valor nominal do título (na data de vencimento);
- PV é o valor atual do título (pago pela instituição financeira).

O desconto é calculado usando a taxa de desconto d e o período de antecipação do pagamento n, isto é, o período verificado entre a data de face do título de crédito (data oficial do pagamento ou recebimento do valor de face do título) e a data na qual se realizará o desconto.

5.1 Desconto Racional

Chama-se de desconto racional ou por dentro o desconto cujo valor representa o juro que se obteria se o valor atual fosse aplicado pelo prazo de desconto do título.

$$D = PV \cdot d \cdot n \tag{5.2}$$

5.1.1 Desconto racional utilizando a capitalização simples

Utilizando a equação 5.1, temos

$$D = FV - PV,$$

Porém

$$FV = PV \cdot (1 + d \cdot n) \text{ ou } PV = \frac{FV}{1 + d \cdot n}$$
$$\text{e } D = FV - \frac{FV}{1 + d \cdot n}$$

Simplificando, teremos

$$D = \frac{FV \cdot d \cdot n}{1 + d \cdot n}. \tag{5.3}$$

Exemplo 13. *Qual é o valor atual de um título cujo valor de vencimento é de R\$ 256.000,00, daqui a 7 meses, sendo o desconto racional simples, utilizado para o cálculo, de 4% a.m.?*

Solução:

Temos:
$FV = R\$256.000,00$
n = 7 meses
$d = 4$ % a.m.
$PV = ?$
Sabemos que $PV = \dfrac{FV}{1 + d \cdot n}$, daí temos:

$$PV = \frac{256.000}{1,28} = R\$200.000,00$$

.

5.1.2 Desconto racional utilizando a capitalização composta

Utilizando novamente a equação (5.1), e sabendo que $PV = \dfrac{FV}{(1 + d)^n}$, temos:

$$D = FV - \frac{FV}{(1+d)^n}$$

Simplificando, teremos:

$$D = FV \cdot [1 - (1+d)^{-n}] \tag{5.4}$$

5.2 Desconto comercial

Desconto comercial é o juro que se obtém aplicando o valor nominal do título de crédito durante o prazo que equivale ao período de antecipação n à taxa de desconto d.

5.2.1 Desconto comercial utilizando a capitalização simples

No regime simples, temos

$$D = FV \cdot d \cdot n \tag{5.5}$$

onde:

- D é o Desconto;
- FV é o valor nominal;
- d é a taxa de desconto;
- n é o período de antecipação.

Chama-se de *Valor Descontado* o valor nominal do título subtraído pelo desconto. Utilizando as equações (5.1) e (5.5), determinaremos o *Valor Descontado*.

$$D = FV - PV$$

$$PV = FV - FV \cdot d \cdot n$$

$$PV = FV \cdot (1 - d \cdot n) \tag{5.6}$$

Na equação (5.6) PV representa o Valor Descontado. O desconto comercial no regime simples é o mais utilizado pelas instituições financeiras, por isso nas atividades propostas utilizaremos esse tipo de desconto.

Exemplo 14. *Magda desconta uma nota promissória de R\$ 1000,00 com vencimento de 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é 4% ao mês.*

1. *Quanto Magda receberá?*

2. *Qual a taxa mensal de juros que Magda está pagando?*

Solução:

1. Ora, $PV = FV \cdot (1 – n \cdot d)$= $1.000(1 – 0,04 \cdot 2) = R\$920,00$.

   Logo, Magda receberá agora 920 reais para pagar 1000 reais em 60 dias.

2. Se i é a taxa mensal de juros, $1000 = 920 \cdot (1 + i)^2$. Daí, $i = 4,26\%$ *a.m.*.

Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer aos mais ingênuos estarem eles pagando juros menores do que os que realmente estão sendo cobrados [3].

Exemplo 15. *Um título de valor nominal $R\$25.893,00$ foi descontado Naquela Caixa cinco meses antes do vencimento à taxa de 4,75 % a.m.. Qual o valor do desconto e o líquido recebido, considerando o desconto comercial simples?*

Solução:

Nesse problema, temos:

$N = R\$25.893,00$;

$d = 4,75\% a.m.$

$n = 5 meses$

Daí, chegamos a $D = 25.893 \cdot 0,0475 \cdot 5 = 6.149,59$.

O valor líquido é o valor presente, logo

$PV = 25.893,00 – 6.149,59$= $R\$19.743,41$ [3]

Exemplo 16. *Uma duplicata com vencimento para daqui a 5 meses será descontada hoje no valor de R\$ 30.000,00, sendo 10 % a.m. a taxa de desconto simples comercial. Pede-se:*

1. O valor nominal da duplicata.

2. a taxa de juros efetiva.

Solução:

1. Isolando FV na equação (5.5), temos:

$$FV = \frac{30.000}{1 - \frac{10}{100} \cdot 5} = 60.000,00$$

.

2. A taxa de juros efetiva é a taxa na qual o valor descontado (30.000,00) ao ser capitalizado durante 5 meses, resulta no valor nominal (60.000,00) da duplicata. Logo, chamando de i a taxa de juros efetiva, temos:

$$60.000 = 30.000 \cdot (1 + i)^5$$
$$2 = (1 + i)^5$$
$$i = 14,86\% \ a.m.$$

Exemplo 17. *Uma empresa descontou em um banco uma duplicata de R\$ 600.000,00, recebendo o líquido de R\$ 516.000,00. Sabe-se que o banco cobra uma comissão de 2% sobre o valor do título, e que o regime é de juros simples comerciais. Sendo a taxa de juros de 96% a.a., qual foi o prazo de desconto (prazo de antecipação) da operação?*

Solução:

Temos:

$FV = 600.000$

d = 96% a.a. = 8% a.m.

$PV - 0,02 \cdot 600.000 = 516.000$

Logo, $PV = R\$528.000,00$.

Usando (5.5) temos:

$528.000 = 600.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot n)$

n = 1,5 mês.

5.2.2 Prazo médio em desconto de duplicatas

Frequentemente empresas recebem várias duplicatas como forma de pagamento quando vendem seus produtos ou quando prestam serviços. Porém, como cada duplicata tem sua data de vencimento, então as empresas acumulam esses títulos de crédito e descontam de uma só vez em um banco. As duplicatas, juntas, determinam um só valor a ser descontado (o banco soma todos os valores nominais de cada duplicata), e o período de antecipação do desconto (prazo médio n) é calculado por:

$$n = \frac{\sum C_t \cdot n_t}{\sum C_t} \tag{5.7}$$

Exemplo 18. *Três duplicatas com valores nominais de R $ 1200,00, R$ 2000,00 e R$ 1500,00 e vencimentos em 12/08/13, 03/10/13 e 05/09/13, respectivamente, serão descontadas em 01/08/13 a uma taxa de desconto de 2,5 % a.m. Pede-se:*

a) O prazo médio desse conjunto de títulos;

b) valor descontado.

Solução:

a) O título $C_1 = R\$1200,00$ será antecipado em 11 dias, logo $n_1 = 11$. Também temos

$C_2 = R\$2000,00$, sendo $n_2 = 63$, e

$C_3 = R\$1500,00$, sendo $n_3 = 35$.

Então

$$n = \frac{1200 \cdot 11 + 2000 \cdot 63 + 1500 \cdot 35}{1200 + 2000 + 1500} = 64,79$$

b) Calculando primeiramente o desconto, temos:

$$D = (1200 + 2000 + 1500) \cdot 0,025 \cdot \frac{64,79}{30} = 253,75$$

Logo, o valor descontado é de $R\$4.446,25$.

5.2.3 Desconto comercial utilizando a capitalização composta

O desconto comercial composto é pouquíssimo utilizado nas transações bancárias, devido a este fato não aprofundaremos nossos estudos nesse tipo de desconto.

O desconto comercial da capitalização composta é:

$$D = FV \cdot [1 - (1 - d)^n] \tag{5.8}$$

Onde:

- FV é o valor nominal;
- d é a taxa de desconto;
- n é o período de antecipação.

Capítulo 6

Taxas e juros

Estudaremos neste capítulo as diferentes taxas que são abordadas em todo estudo da Matemática Financeira. Como já falamos, a taxa percentual é uma razão bastante utilizado nas finanças, principalmente no cálculo de juros.

6.1 Taxas proporcionais e taxas equivalentes

Definição 4 (Taxas proporcionais)**.** *Taxas proporcionais são aquelas que se relacionam com os prazos a que se referem formando uma proporção. Assim, a taxa de 24% ao ano é proporcional a 12 % ao semestre, a 2% ao mês, etc.*

Exemplo 19. *As taxas 2 % a.m. e 24 % a.a são proporcionais.*

Observemos que as taxas acima formam uma proporção com os prazos a que se referem.

$$\frac{24}{2} = \frac{12}{1}$$

Exemplo 20. *Qual a taxa trimestral proporcional a 45 % a.a. (ao ano)?*

Solução:

Consideremos:

i_a : taxa anual

i_t : taxa trimestral

$$\frac{45}{i_t} = \frac{4}{1}$$

$$i_t = 11,25\% \ \ a.t.$$

Definição 5 (Taxas equivalentes)**.** *Duas taxas de juros são ditas equivalentes quando aplicadas ao mesmo capital pelo mesmo prazo geram o mesmo montante.*

Para relacionar de modo sistemático essas equivalências consideremos as seguintes nomenclaturas:

- i_a : taxa de juros anual;
- i_s : taxa de juros semestral;
- i_t : taxa de juros trimestral;
- i_m : taxa de juros mensal;
- i_d : taxa de juros diária.

Em juros simples, as taxas proporcionais são equivalentes, isto é, se um capital é aplicado a uma taxa de 24% a.a durante 1 ano, a taxa mensal equivalente será de 2% a.m..

De fato, consideremos o montante M, resultante da aplicação de um capital C após o período de 1 ano. Considerando i_a e i_m taxas equivalentes, teremos:

$$M = C \cdot (1 + i_a \cdot 1) \tag{6.1}$$

ou

$$M = C \cdot (1 + i_m \cdot 12) \tag{6.2}$$

Igualando (I) e (II) temos:

$$i_a = 12 \cdot i_m \ .$$

A igualdade acima mostra a proporcionalidade das taxas.

Já no regime composto as taxas equivalentes não são proporcionais.

Consideremos um montante M gerado por um capital C em 1 ano, e sejam i_a e i_m taxas efetivas.

$$M = C \cdot (1 + i_a)^1 \tag{6.3}$$

ou

$$M = C \cdot (1 + i_m)^{12} \tag{6.4}$$

Igualando (6.3) e (6.4) temos:

$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_a)$

Consequentemente, chegaremos a

$i_m = (1 + i_a)^{\frac{1}{12}} - 1$

Generalizando, considerando as taxas i_a, i_s, i_t, i_m e i_d equivalentes, então num mesmo período produzirão um mesmo montante. Admitindo o período de 1 ano, temos:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

A relação acima será muito útil para realizarmos as conversões de taxas equivalentes na capitalização composta.

Exemplo 21. *Considerando a taxa de $i_a = 45\% a.a.$, encontre a taxa efetiva mensal equivalente i_m.*

Solução:

Sabendo que as taxas são equivalentes, temos:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$.

Substituindo $i_a = 0,45$, temos:

$i_m = (1,45)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0314$.

Daí, $i_m = 3,14\% a.m.$.

Definição 6 (Taxa de juros efetiva)**.** *A taxa de juros é dita efetiva quando está expressa com a mesma unidade de tempo do período da capitalização.*

Exemplo:

- 2 % a.m. com capitalização mensal;
- 12 % a.b. (ao bimestre) com capitalização bimestral.

Obs. Ao se tratar da taxa efetiva, não é necessário indicar o período de capitalização. Exemplo, 2% a.m. indica que mensalmente será calculado o juros, que é de 2%.

Definição 7 (Taxa nominal)**.** *A taxa nominal é aquela que não está expressa com a mesma unidade de tempo do período da capitalização.*

Exemplo:

- 20 % a.a. (ao ano) com capitalização mensal;
- 2% a.m. (ao mês) com capitalização diária.

Exemplo 22. *Suponha que você irá fazer um empréstimo de R$ 10.000,00 num banco e o gerente lhe informa que para a aplicação escolhida a taxa de juros anual é de 24 % a.a., com capitalização mensal. Você consegue compreender o gerente? O que o gerente quis dizer com "24 % a.a., com capitalização mensal"?*

Ele quis dizer que você estará fazendo uma aplicação no regime de capitalização composta. O acréscimo dos juros ao montante será feito mensalmente. A taxa 24% a.a. é denominada de taxa nominal, ela aparece expressa nos contratos financeiros. Como foi dito que a capitalização é realizada mensalmente, devemos saber qual será a taxa que irá gerar o rendimento (juros) ao final de cada mês. Essa taxa é denominada taxa efetiva. Por definição, ela será a taxa proporcional à taxa nominal. No exemplo considerado, a taxa nominal é de 24 % a.a., logo a taxa mensal proporcional será de 2% a.m.. Sendo assim, a taxa efetiva desse investimento é de 2% a.m..

Exemplo 23. *Aplica-se um determinado capital a 24% aa, com capitalização mensal, obtendo-se um montante de R$ 12.900,00 ao final de 4 anos. Qual o valor do capital? Qual a taxa efetiva anual?*

Solução:
A taxa 24% a.a. é a taxa nominal, se dividirmos por 12, encontraremos a taxa mensal efetiva.

$$i_m = \frac{24\%}{12} = 2\% a.m..$$

Agora, iremos determinar a taxa anual efetiva:

$$(1 + i_a) = (1 + 0,02)^{12}$$

$i_a = 26,82\% a.a..$

Encontraremos o capital usando a equação (4.3):

$12.900 = C \cdot (1,2682)^4.$

$$C = R\$ \ 4.986,33$$

.

6.2 Taxa Aparente

Taxa aparente é aquela que agrega juro real e correção monetária.

O fator $(1+i)$ é obtido pelo produto do fator $(1+r)$, responsável pelo juro real, com o fator $(1+j)$, fator correspondente à correção monetária. Logo

$$i = (i+r)(i+j) - 1 \tag{6.5}$$

em que r é a taxa de juros real e j é a taxa de correção monetária do período.

Exemplo 24. *Em um período em que a inflação é de 6 % a.a., que taxa de juros um banco deve cobrar de seus clientes para obter juros reais de 10 % a.a.?*

Solução:

Com os dados $r = 10\% = 0,10$ e $j = 6\% = 0,06$, basta inserí-los em (6.5) que teremos
$i = (1,1)(1,06)–1 = 16,6\% a.a.$

6.3 Taxa real

A partir da relação

$$(1+i) = (1+r)(1+j)$$

em que r é a taxa de juros real, j é a taxa de correção monetária do período e i é a taxa aparente, podemos determinar a taxa real, que é a taxa deflacionada, isto é, descontada da correção monetária do período. Ela é dada por

$$r = \frac{1+i}{1+j} \; - \; 1 \tag{6.6}$$

Da equação acima temos que $r = 0$ para $i = j$, $r > 0$, para $i > j$ e $r < 0$ para $i < j$.

Exemplo 25. *Um banco faz um financiamento de 18 % ao ano, porém sabe-se que a inflação é de 6 % ao ano. Qual o ganho real do banco ao fazer tal financiamento?*

Solução:

A taxa de 18 % ao ano é a taxa aparente, então temos
$0,18 = (1,06)(1 + r) - 1$

$r = 11,32$ % $a.a.$, em que r é a taxa real cobrada pelo banco.

6.4 Taxa de juros acumulada

Em muitos financiamentos que consideram a correção monetária dos valores cedidos, as taxas de juros são diferentes de um período para o outro. Com isso, o montante M e a taxa de juros acumulada i_{AC} da capitalização composta serão dados por

$$M = C \cdot (1 + i_{AC}) \tag{6.7}$$

onde $i_{AC} = (1 + i_1)(1 + i_2)\dots(1 + i_n)$ -1 é relativa a todo o prazo de investimento e $i_1, i_2, ..., i_n$ são as taxas de capitalização dos respectivos períodos $1, 2, ..., n$.

Exemplo 26. *Quanto pode sacar um investidor que aplicou R$ 15.700,00 em um fundo que em três meses consecutivos rendeu respectivamente 2,32%, 1,75% e 1,79% ? Qual foi a taxa do período e quanto deve render o fundo no próximo mês para que ele possa sacar exatos R$ 17.000,00 ?*

Solução:

Vamos primeiramente encontrar a taxa acumulada i_{AC} do período.
$i_{AC} = (1 + 0,0232) \cdot (1 + 0,0175) \cdot (1 + 0,0179) - 1$
$i_{AC} = 5,9742\%$.
Logo, o que investidor poderá sacar ao fim desses três meses é:
$M = 15.700 \cdot (1 + 0,059742) = R\$16.637,95$

Para que o investidor tenha na conta os R$ 17.000,00 no final do mês seguinte, a taxa do período deve ser i_k de modo que:

$17.000 = 16.637,95 \cdot (1 + i_k)$
$i_k = 2,18\%$.

6.5 Taxas pré e pós-fixadas

A taxa de juros pré-fixada é composta por juros real mais inflação embutida. As operações financeiras com juros pré -fixados permitem o conhecimento prévio, no momento da aplicação, da taxa de juros que irá remunerar o capital investido.

As taxas de juros pós-fixadas não incorporam as expectativas inflacionárias em sua formação, pois estão sempre vinculadas à evolução de algum índice de preços. Desta forma, a taxa de juros pós-fixada corresponde à taxa de juros real completamente separada da inflação. As operações financeiras com juros pós-fixados permitem o conhecimento prévio, no momento da aplicação, apenas da taxa de juros real que irá remunerar o capital investido, uma vez que a taxa de juros total somente será conhecida ao final da operação, quando da divulgação do indexador escolhido. [5]

Exemplo 27. *A aplicação de um capital pode ser realizada à taxa de juros de 15% a.a. pré-fixada, ou à taxa de juros real de 7% a.a., mais correção monetária pós-fixada. Verifique qual é a melhor alternativa.*

Solução:

Consideremos um certo capital C sendo aplicado por 1 ano. Na aplicação com taxa pré-fixada, o montante será $M = C(1,15)$. Já na aplicação utilizando a taxa pós-fixada, teremos a taxa da correção monetária j. Logo, o montante resultante nessa segunda opção será $M = C(1,07)(1+j)$. Os dois tipos de aplicação terão o mesmo montante se

$$1,15 = (1,07) \cdot (1+j)$$

ou seja, quando a taxa de juros imbutida j for $j = 7,5\% a.a.$.

- se $j < 7,5\% a.a.$ é mais vantajoso aplicar a uma taxa pré;
- se $j > 7,5\% a.a.$ o poupador sairá com vantagem se aplicar a uma taxa pós-fixada.

6.6 Método hamburguês

O método hamburguês é um dispositivo de apuração do juro total devido pela aplicação de uma série de capitais a uma taxa única durante prazos distintos. No regime de capitalização simples, colocando a taxa comum em evidência, o juro total é dado por:

$$J = i \sum_{t=1}^{k} C_t \cdot n_t \tag{6.8}$$

Em que J é o juro total e C_t é o capital aplicado à taxa i pelo prazo n_t.

Em termos bancários, determina o juro a debitar em contas especiais, em razão da conta ter permanecido com saldo devedor SD por n dias, sendo $n_1, n_2, ...n_k$ os respectivos períodos dos saldos devedores $S_1, S_2, ...Sn$ no qual $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

A conta especial é um contrato realizado sem burocracia entre o banco e o correntista no qual uma quantia, denominada limite, é disponibilizada pelo banco na conta bancária do seu cliente. Quando o cliente utiliza o limite ou parte dele, o banco cobra encargos financeiros pelo uso dessa quantia. [1]

Exemplo 28. *Mario Ricardo possui uma conta especial num banco, com um limite de R $ 2.000,00. Em um certo mês, ele necessitou utilizar parte do limite.Determine o juro produzido no período, sabendo-se que o banco cobra 6 % a.m. e que a tabela a seguir mostra o saldo de Mario e o número de dias em que permaneceu com o saldo.*

CONTA CORRENTE		
Número de dias	saldo	valor retirado do limite
12	1700	300
5	1500	500
10	1000	1000

Solução:

Vemos que Mario usou 300 reais do banco durante 12 dias, 500 reais do banco foram cedidos a Mario durante 5 dias, e que durante 10 dias 1000 reais do banco ficaram sob posse do respectivo correntista. Logo, Mario pagará de juros

$$J = (12 \cdot 300 + 5 \cdot 500 + 10 \cdot 1000) \cdot \frac{0,06}{30} = R\$ \, 32,20.$$

Exemplo 29. *Durante o mês de março, o Sr. A. Aguiar movimentou sua conta corrente do Banco da República de São Paulo conforme o extrato a seguir. Quanto o Bancrespan deve debitar-lhe de juro em primeiro de abril, considerando juros simples de 7,2% a.m.? [1]*

CONTA CORRENTE				
data	operação	débito	crédito	saldo D/ C
01- 03	saldo anterior			687,40 D
05 - 03	Ch compensado	50,00		737,40 D
10 - 03	Líq. Vencimento		2.384,60	1.647,20 C
12 – 03	Ch compensado	180,00		1.467,20 C
15 – 03	em cartão	35,40		1.431,80 C
18 – 03	depósito		250,00	1.681,80 C
20 – 03	Ch compensado	750,00		931,80 C
23 – 03	Ch compensado	1.050,00		118,20 D
25 – 03	Dep. Cheque		300,00	181, 80 C

Solução:

Observando a tabela, vemos que ele usou durante 4 dias (01 à 04 de março) R$ 687,40 do banco, em seguida ficou com a posse de R$ 737,40 durante 5 dias (05 à 09 de março). Durante 2 dias (23 e 24 de março) ficou devendo ao banco R$ 118,20 e por fim durante 5 dias (27 à 31 de março) esteve no vermelho com R$ 238,20.

Logo, o juro a ser debitado em primeiro de abril será:

$$J = (687,40 \cdot 4 + 737,40 \cdot 5 + 118,20 \cdot 2 + 238,20 \cdot 5) \cdot \frac{0,072}{30} = R\$18,87.$$

Capítulo 7

Políticas econômicas

Todos os países desenvolvidos ou em desenvolvimento buscam crescimento econômico, estabilidade de preços e distribuição de renda. Para alcançar e/ou manter esses objetivos os governos utilizam-se das políticas econômicas.

Definição 8. *As políticas econômicas consistem no conjunto de ações do governo para atingir determinadas finalidades relacionadas à situação econômica de um país.*

Os principais objetivos das políticas econômicas são:

- promover o desenvolvimento da economia;
- garantir o pleno emprego;
- garantir a estabilidade de preços e controle inflacionário;
- promover a distribuição de renda do país.

As quatro grandes políticas que afetam toda a economia são a política monetária, fiscal, cambial e a política de rendas. A política monetária refere-se ao controle da oferta de moeda e a política fiscal trata das receitas e despesas do governo, a política cambial preocupa-se com o controle da taxa de câmbio (valor da moeda local), e a política de rendas busca a redistribuição de renda e justiça social.

7.1 Política monetária

O governo precisa estimular a economia. Mas quais são os artifícios? Será que aumentar a quantidade de capital no mercado melhora a situação econômica do país? A resposta é não. Pois, como já falamos, uma grande quantidade de moeda faz o mercado inflar, ocasionando a inflação. Sendo assim, o governo através do Banco Central trabalha com mecanismos para controlar a quantidade de moeda na economia.

Na política fiscal o governo deve fazer seu orçamento, isto é, o resultado das receitas menos os gastos públicos. Se os gastos forem maiores do que a receita, o governo vende títulos de crédito para angariar recursos, e a taxa que o governo paga para os investidores que lhe emprestam dinheiro é chamada de taxa Selic. Essa taxa baliza todas as outras transações no mercado financeiro. A taxa Selic é chamada taxa básica de juros do Brasil.

Dentro da política monetária, o governo controla essa taxa. O COPOM – Comissão de Política Monetária, órgão responsável em determinar a taxa Selic, indica o rumo da economia informando a cada 45 dias os dígitos da taxa Selic.
O aumento da taxa Selic é traduzido pelos economistas como uma barreira contra o aumento da inflação, pois com a taxa Selic alta, os juros para o crédito também aumentarão fazendo com que o dinheiro fique mais caro, dando uma espécie de *freio* nos financiamentos e empréstimos. A taxa Selic alta também atrai investidores, pois significa que o governo está pagando mais para quem o empresta capital, e, consequentemente, os bancos também pagarão mais aos investidores, já que toda a economia é balizada pela taxa básica de juros.
O governo também controla a oferta de moeda no mercado através dos depósitos compulsórios, que são depósitos sob a forma de reservas bancárias que cada banco comercial é obrigado a manter junto ao Banco Central (BACEN). Os depósitos compulsórios provêm de um percentual calculado sobre os depósitos que os bancos captam, sejam estes à vista ou a prazo, e que são recolhidos pelo BACEN. Este montante fica depositado junto ao BACEN, não sendo possível aos bancos utilizá-los para novos empréstimos. Para diminuir a liquidez do sistema financeiro, o BACEN eleva a taxa dos depósitos compulsórios e então os bancos ficam com menos recursos para emprestar. Com isso, toda a economia é afetada, pois existe uma relação inversa entre depósito compulsório e a oferta de moeda.

O CDI – Certificado de Depósitos Interbancários são títulos transferidos de um banco para outro, isto é, um banco deficitário faz um empréstimo pra um banco superavitário para poder fechar sua contar do dia.
Todos os dias os clientes da rede bancária fazem movimentações, depositando, sacando, resgatando ou aplicando recursos. Pagamos contas, fazemos empréstimos, muitas vezes fazemos transações entre instituições bancárias.
Eventualmente, a diferença entre o crédito (depósitos e aplicações feitas) e débitos (saques e empréstimos concedidos) dentro de um banco pode ser negativa, ou seja, mais dinheiro pode ter sido sacado daquele banco (incluindo todas as suas agências), do que depositado. Se este saldo for negativo, o banco procura se socorrer a outra instituição superavitária naquela data, fazendo um empréstimo pelo prazo de um dia.
A instituição tomadora, então, emite um certificado, que será adquirido pela outra instituição (título de crédito). A primeira movimentação do banco tomador no dia seguinte será devolver o empréstimo. Como se trata de uma transação entre os bancos em geral, eles utilizam uma taxa padrão chamada de taxa CDI. Hoje o CDI se tornou uma referência de taxa de juros. Para tomar dinheiro dos clientes aplicadores, os bancos pagam juros que vão de 80 % a 110 % do CDI.

Capítulo 8

Renda Fixa

O termo Renda Fixa é usado para denominar todos os títulos de renda fixa, que, como o nome sugere, são títulos que pagam, em períodos definidos, uma certa remuneração que pode ser determinada no momento da aplicação ou no momento do resgate. Dentre os exemplos de títulos de renda fixa podemos citar: as cadernetas de poupança, os certificados de depósito bancário (CDB), títulos do tesouro, letras do tesouro e títulos de crédito privado.

8.1 Caderneta de Poupança

Dentre todos os investimentos existentes no Brasil, a caderneta de poupança é disparada a preferida dos brasileiros. Isso se deve a sua simplicidade e também ao desconhecimento por parte dos brasileiros sobre os outros tipos de investimento. Em 2012 haviam 100 milhões de cadernetas de poupança ativas, o que representavam um total de R$ 431 bi.
Dentre as vantagens da caderneta de poupança encontram-se:

- fácil acesso a pequenos poupadores ao contrário de outras opções como ações, que exige um pouco mais de burocracia e estudo;
- quem escolhe a poupança como investimento estará livre de IOF (Imposto sobre Operações Financeiras) e Imposto de Renda (I.R.);
- com qualquer valor inicial, qualquer um pode investir na poupança ao contrário de outros tipos de investimentos que exigem um pouco ou muito mais recursos financeiros;
- garantia de até R$ 60.000 pelo FGC (Fundo Garantidor de Crédito) em caso de falência do banco. Salvo no caso da Caixa Econômica Federal onde a totalidade do investimento na poupança é garantido pela união por força de decreto-lei.

8.1.1 Rendimento da Caderneta de Poupança

Os rendimentos nas cadernetas de poupança sofreram uma alteração a partir de 04/05/2012.

Relembrando: caderneta de poupança aberta até 03/05/2012 tem remuneração de 0,5% a.m. ou 6,17 % a.a., conforme a lei número 8.177 de 1991.

Cadernetas de poupança abertas a partir de 04/05/2012 ou para depósitos em cadernetas antigas efetuados a partir dessa data, sofreram a seguinte alteração na remuneração:

NOVA POUPANÇA	
TAXA SELIC	RENDIMENTO
MAIOR QUE 8,5% a.a	0,5 % a.m.
MENOR OU IGUAL A 8,5 % a.a.	(70 % SELIC) a.m.

Exemplo: Se a taxa Selic for de 8% a.a. teremos a poupança com a seguinte remuneração $70\% \, de \dfrac{8}{100} = 5,6\%$ a.a..

O ministro da Fazenda Guido Mantega disse que a mudança deve-se à queda da taxa Selic, que vem provocando a queda das taxas de juros de outros investimentos. Em outras aplicações, investidores pagam I.R. e a taxa de administração para a instituição financeira, taxas que não são cobradas na poupança. Ele diz que comparando a remuneração da poupança com a taxa Selic ao longo dos anos conclui-se que a remuneração média que veio sendo aferida ao longo de 2002, 2003, ..., 2012 sempre veio abaixo ou igual a 70% da taxa Selic. Por exemplo, em 2010 a remuneração da poupança foi 7% a.a. e da Selic 9,9% a.a. , logo o rendimento foi de 70% da Selic.
Segundo Mantega, o Brasil está enfrentando um novo cenário, em que as taxas de aplicação estão caindo, não só no Brasil, mas também no exterior.
Para o ministro, essa mudança é necessária devido aos fatos a seguir:

- a rentabilidade de todos os ativos e aplicações financeiras (fundos de renda fixa, CDB, etc.) já estão caindo;
- a regra antiga do rendimento da poupança funcionava como obstáculo para a queda das taxas de juros (Selic) da economia;
- a remuneração fixa da poupança cria uma taxa mínima de juros para a captação dos bancos;
- a partir de um patamar da Selic, haveria uma forte migração de grandes investidores para a poupança. Assim, as instituições que realizam outras aplicações, não desejando perder os investidores, aumentaria as taxas de juros para o investimento.

- se a taxa Selic cair, conseqüentemente os juros que os bancos cobrarão pelos empréstimos também cairão, pois as operações financeiras se baseiam na taxa Selic.

8.2 Certificados de Depósito Bancário - CDB

O Certificado de Depósito Bancário (CDB) é um título emitido pelos bancos para captar recursos que serão utilizados nas suas operações de crédito. Por tanto, ao adquirir um CDB, o investidor está efetuando uma espécie de empréstimo para a instituição bancária em troca de uma rentabilidade diária.
Existem dois tipos principais de CDB: *CDB pré-fixado*, no qual o investidor negocia com o banco uma taxa pré-definida e, durante a vigência daquele título, receberá sempre a remuneração que foi acordada; *CDB pós-fixado*, onde a remuneração é determinada a partir de uma taxa referencial. A taxa referencial mais utilizada num CDB pós-fixado é a CDI (certificado de depósito interbancário), que é uma taxa bem próxima da SELIC. Porém, a porcentagem da CDI que representa o rendimento varia de banco para banco. Tem bancos que oferecem uma rentabilidade de 90% da CDI, outros chegam a pagar 110% da CDI. Por isso, antes de adquirir um CDB pós-fixado deve-se verificar qual o percentual da CDI que a rentabilidade representa.
Outro tipo de CDB pós-fixado é aquele cuja remuneração varia de acordo com um índice de inflação (principalmente o IPCA) e uma taxa de juros pré-fixada. Então o investidor pode ganhar, por exemplo, IPCA mais 5% ao ano na compra de um título.

Nos CDBs, o investidor tem a garantia de até R$ 250.000,00 caso a instituição financeira quebre.
Na hora de aplicar um dinheiro num CDB, o investidor deve pesquisar o banco que oferece uma maior rentabilidade. Não é necessário ser correntista do banco pra adquirir um CDB.
O IR é cobrado apenas na data do resgate ou no vencimento da aplicação. Desde janeiro de 2005, o imposto de renda passou a ser cobrado sobre os rendimentos de acordo com o prazo de permanência dos recursos - conforme tabela abaixo:

CÁLCULO DO I.R. NOS CDBs	
Tempo de permanência	Alíquota
até 180 dias	22,5%
de 181 dias a 360 dias	20 %
de 361 dias a 720 dias	17,5 %
acima de 720 dias	15 %

Dessa forma, quanto mais tempo os recursos permanecerem aplicados, menor será a alíquota do imposto cobrado.
Existe incidência de IOF nos resgates realizados antes de 30 dias, limitado ao rendimento da aplicação e em função do prazo, conforme tabela padrão para todas as instituições financeiras. A partir do trigésimo dia, a aplicação fica isenta da cobrança de IOF. Também costuma-se cobrar taxas administrativas sobre o rendimento. Portanto, o investidor pode

ter um rendimento baixo após os descontos da taxa de administracão e do Imposto de Renda.
Existem também os CDBs com carência, isto é, o investidor só poderá resgatar o capital com o rendimento após um certo período definido no ato da operação. estes CDBs apresentam restrições nos resgates antecipados, porém costumam oferecer melhor rentabilidade. CDBs com liquidez diária não apresentam restrições nos resgates, mas tendem a oferecer menor rentabilidade.

Exemplo 30. *Será aplicado um valor de R$ 10.000,00 em um CDB pré-fixado para ser resgatado após 90 dias, sendo 3% a taxa no período. Determine o valor resgatado. [7]*

Solução:
passo 1: cáculo dos juros brutos
J = Valor aplicado x taxa da aplicação
J =10.000,00 x 3%
J = 300,00

passo 2: cálculo da tributação do Imposto de Renda
A alíquota para aplicações até 180 dias é 22,5 %, logo:
I.R. = Juros x alíquota
I.R. = 300,00 x 22,5 %
I.R. = 67,50

passo 3: cálculo dos juros líquidos
Juros líquidos = Juros brutos - Imposto de renda
Juros líquidos = 232,50

Logo, o resgate final foi de $R\$10.232,50$.

8.3 Títulos públicos

O setor público (federal, estadual ou municipal) muitas vezes gasta mais do que arrecada. Arrecada recursos sob a forma de impostos, e gasta em investimentos nas áreas de infraestrutura, saúde, educação etc.

Para financiar este déficit, os governos emitem títulos. Os títulos públicos podem ser emitidos pelo Tesouro Nacional ou pelo Banco Central, bem como pelos governos estaduais e municipais. [7]

O poupador que adquire um título público, está na verdade emprestando dinheiro para o governo, que por sua vez devolverá, após um prazo, a quantia solicitada mais os juros.
Ao adquirir um título público, o investidor tem o conhecimento da sua data de vencimento, data na qual terá o valor investido mais os juros. Porém, se quiser resgatar o valor antes da data de vencimento, o poupador terá de vendê-lo,e essa venda é realizada no

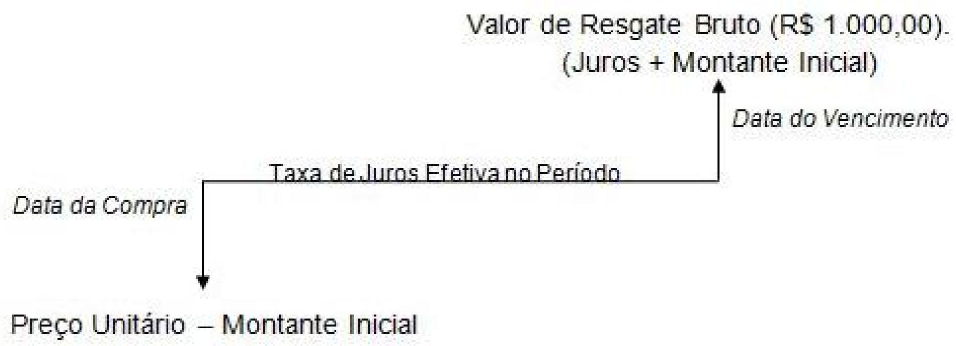
mercado de títulos públicos todas às quartas-feiras. O investidor receberá na venda do título um valor que corresponde o preço do título no mercado, que poderá ser inferior à quantia que receberia na data de vencimento.
Em 2002, houve um boato que o ex-presidente Luiz Inácio Lula da Silva tinha falado que não iria pagar a dívida pública (títulos públicos), daí as pessoas detentoras dos títulos venderam às pressas seus títulos com medo de não receberem seu dinheiro na data de vencimento. Isso fez os preços dos títulos públicos da época despencarem. Porém, quem vendeu seus títulos públicos por causa do boato, se deu mal. Os títulos públicos foram pagos regularmente na data prevista.

Além da tributação do Imposto de Renda e do IOF (para aplicações com prazo inferior a 30 dias), o investidor terá outros custos. Ao comprar o título é cobrada uma taxa de negociação de 0,10% sobre o valor da operação. A cada semestre ou no vencimento do título, é cobrada uma taxa de 0,30% ao ano, proporcional ao período em que o investidor mantiver o título. Isso sem contar as taxas pagas aos Agentes de Custódia e às taxas de prestação de outros serviços, quando for o caso. Desta forma, a taxa de 0,30% incide sobre o valor do título, assim como a de 0,10%.

8.3.1 Letra do Tesouro Nacional - LTN

É um título público com taxa pré-fixada e cujo valor de face é R$ 1.000,00,

As LTNs são títulos públicos com o fluxo de caixa simples, isto é, o investidor na data zero da negociação paga pelo preço de compra e após um período pré-definido resgatará o valor os R$ 1.000,00.



Exemplo 31. *Um investidor adquire um LTN em 15/04/13 que estava cotado por R$ 787,62 e quer vendê-lo no dia 31/12/13. Sendo a rentabilidade pré-fixada em 9,18 % a.a.,*

determine o valor aproximado da venda de modo que ele não tenha prejuízo.

Solução:

Nesse exemplo, desconsideraremos os encargos e impostos para facilitar nosso cálculo. Nas $LTNs$ adota-se o ano exato, ou seja, 1 ano corresponde a 365 dias (366 se for bissexto). Portanto,vamos descobrir a quantidade de dias corridos entre o dia da compra e o dia da venda.

Do dia 14/04/13 à 31/12/13 são 260 dias corridos.

Agora iremos determinar a taxa de juros equivalente ao dia i_d (consideremos 1 ano = 365 dias):

$(1 + i_d)^{260} = (1 + 0,0918)^{\frac{260}{365}}$

$i_d = 0,024\% \, a.d.$

Agora encontraremos "a rentabilidade" do título, usando a fórmula do montante:

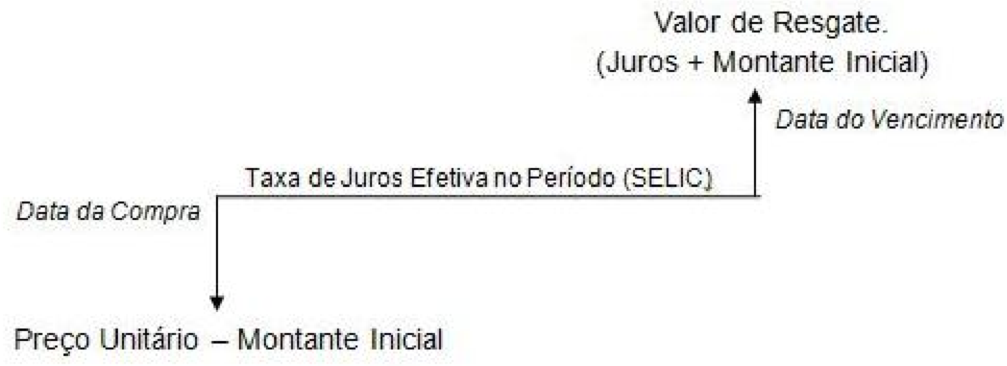
$FV = 787,62 \cdot (1 + 0,00024)^{260}$

$FV = R\$838,54$

Logo, o título no dia 31/12/13 tem valer no mínimo $R\$838,54$.

8.3.2 Letra Financeira do Tesouro - LFT

É um título público pós-fixado cuja estrutura é semelhante à do LTN, isto é, seu fluxo é simples, havendo um único pagamento na data do vencimento do título. O valor do capital principal é atualizado usando a taxa Selic diária acumulada no período, desde a data zero até a data do resgate (vencimento).
A seguir um exemplo do fluxo de caixa de uma LFT.



O Preço Unitário – Montante Inicial que é marcado pela data de compra, trata-se da quantia total que o investidor irá gastar comprando o(s) título(s). A taxa de juros efetiva no período é o total acumulado de juros da taxa Selic durante o período compreendido entre a compra até a venda do título. Essa taxa acumulada da Selic é calculada no site http://www.bcb.gov.br/?SELICVARIA.

O Valor de Resgate, marcado pela data de venda, é a quantia líquida que o investidor irá receber. Este valor compreende o montante que o investidor gastou comprando o título mais os juros acumulado no período.

Exemplo 32. *Uma LFT com vencimento em 07/03/2017 foi adquirida por R$ 5.625,49. Supondo que o investidor fique com o título por 22 dias úteis e a variação da taxa Selic fique em 8% a.a., determine o preço futuro projetado do título, isto é, o preço considerando a taxa Selic do período (22 dias úteis).*

Solução:

Nas Letras Financeiras do Tesouro considera-se apenas os dias úteis. Logo, 1 ano corresponderá a 252 dias. A partir dessa informação, determinaremos a taxa diária equivalente à 8% a.a..

$(1 + 0,08) = (1 + i_d)^{252}$

$i_d = 0,031\% ao dia.$

Portanto, vinte e dois dias úteis após a data-base, o valor futuro do título será:

$VF = (1 + 0,00031)^{22} = R\$5.663,41$

Obs: O valor futuro FV encontrado refere-se ao valor do título após 22 dias, de acordo com a taxa de referência (Selic), porém o valor de venda real poderá ser abaixo do valor calculado, pois existe um mercado secundário onde os títulos são negociados.

Capítulo 9

Série de Pagamentos Uniformes

Entende-se que para adquirir um bem ou um serviço, o consumidor necessita, no mínimo, do valor monetário do mesmo no ato da compra. Porém, na maioria das vezes o consumidor não dispõe desse valor inicial. Diante dessa realidade, o consumidor passa a ser devedor e poderá amortizar parceladamente a dívida que assumir no ato da compra. Esse parcelamento é realizado através de pagamentos sucessivos e períodicos de valores constantes (prestações PMT) que chamamos de **Série de Pagamentos Uniformes** .

Uma característica fundamental da Série de Pagamentos Uniformes é que as n prestações podem ser representadas todas elas na data da compra (data zero), e quando somadas nesta data, o resultado será o valor do bem ou do serviço.

Como exemplo podemos citar o finaciamento de automóveis, eletrodomésticos, etc., no qual o consumidor (devedor) paga mensalmente prestações fixas para liquidar sua dívida perante ao banco ou intistuição financeira.
Também existem situações onde uma pessoa (nesse caso credor) realiza uma série de depósitos uniformes para atingir, no futuro, um certo valor. Como exemplo temos uma situação onde um credor deposita mensalmente na sua poupança certo valor durante 12 meses para comprar um bem após esse tempo.

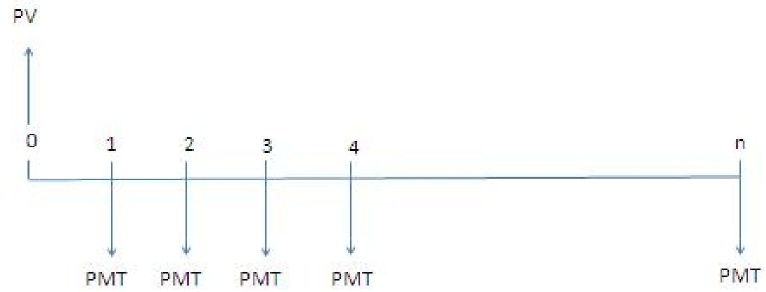
Afim de determinarmos uma fórmula para o valor das prestações de uma série uniforme, utilizaremos as seguintes notações:

- PMT : valor do pagamento períodico ou prestação;
- PV : Valor presente da série de pagamentos;
- i : a taxa de capitalização utilizada;
- n : o número de prestações da renda;
- FV : valor futuro da renda.

9.1 Série postecipada

Na Série postecipada,o primeiro pagamento é feito um período após a data zero.

Considere um empréstimo de valor PV, e que será pago em n prestações fixas PMT à taxa i, sendo a 1ª parcela paga 1 período após receber o valor do empréstimo. Teremos o seguinte fluxo de capital:



De acordo com o fluxo acima, se todas as prestações forem deslocadas para a data zero e somadas, darão o valor presente PV.

$$PV = \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + ... + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Percebemos que o segundo membro representa uma soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) finita cujo primeiro termo é $\frac{PMT}{1+i}$ e razão $q = \frac{1}{1+i}$.

$$PV = \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + ... + \frac{PMT}{(1+i)^n} \quad \Leftrightarrow \quad PV = \frac{PMT}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}.$$

Portanto,

$$PMT = PV \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{9.1}$$

Exemplo 33. *Um bem, cujo preço à vista é R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.*

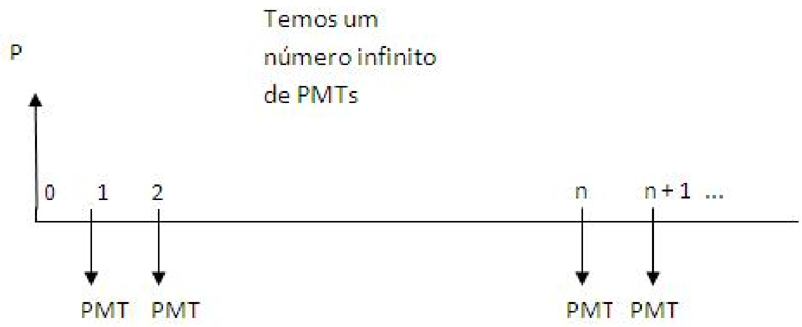
Solução:

Igualando os valores na época 0 (essa data é conhecida como data focal) e usando a equação (7.1) obtemos:

$$PMT = 120 \cdot \frac{0,08 \cdot (1+0,08)^8}{(1+0,08)^8 - 1} = R\$20,88$$

9.2 Séries Perpétuas

É uma série uniforme de pagamentos permanentes, tal como uma pensão mensal vitalícia, aposentadorias, etc.



Quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, o conjunto dos aluguéis constitui uma série perpétua. [3]

O valor presente de uma série perpétua é deduzido a partir do cálculo do limite da expressão

$$P = \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + ... + \frac{PMT}{(1+i)^n} + ...$$

com n tendendo ao infinito.

Daí, percebemos que o segundo membro da expressão acima é uma P.G. infinita, logo:

$$PV = \frac{\frac{PMT}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$$

Daí, chegamos à fórmula do valor dos pagamentos $PMTs$ de uma série perpétua:

$$PMT = PV \cdot i \tag{9.2}$$

onde i é a taxa da série perpétua e PV é o valor atual da mesma.

Exemplo 34. *Determine o valor teórico de um apartamento que rende mensalmente R$ 1.000, considerando-se a taxa de juros de mercado de 1,5 % a.m.*

Solução:

Como o aluguel mensal de um apartamento pode ser considerado uma série perpétua, pela fórmula (9.2) chega -se ao seu valor teórico PV:

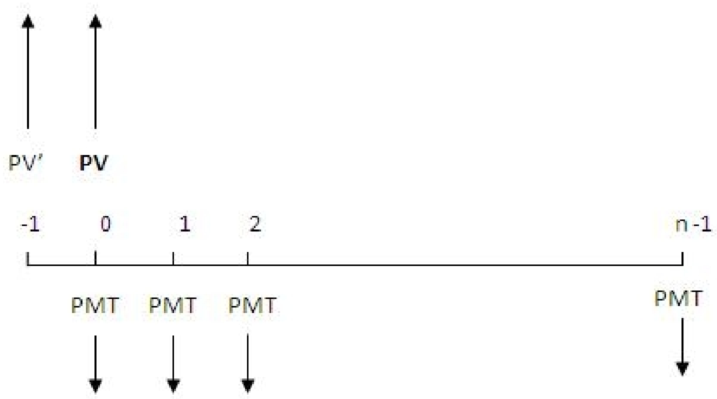
$$PV = \frac{1000}{0,015} = R\$ 66700.$$

9.3 Série antecipada

Na série antecipada, o primeiro pagamento é realizado no ato da compra.

Como o primeiro pagamento é realizado na data zero, então a n-ésima prestação será paga no período $(n-1)$.

Podemos somar todas as n prestações na data -1, que corresponde a 1 período anterior à data zero.



Chamando de PV' o valor da renda na data -1, temos

$$PV' = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}.$$

Na data zero, o valor presente da renda será de

$$PV = PV' \cdot (1+i) = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}.$$

Daí, o valor de cada uma das n prestações PMT de uma série antecipada cujo valor presente é PV é

$$PMT = PV \cdot \frac{i \cdot (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} \tag{9.3}$$

9.3.1 Valor Futuro de uma Série Uniforme

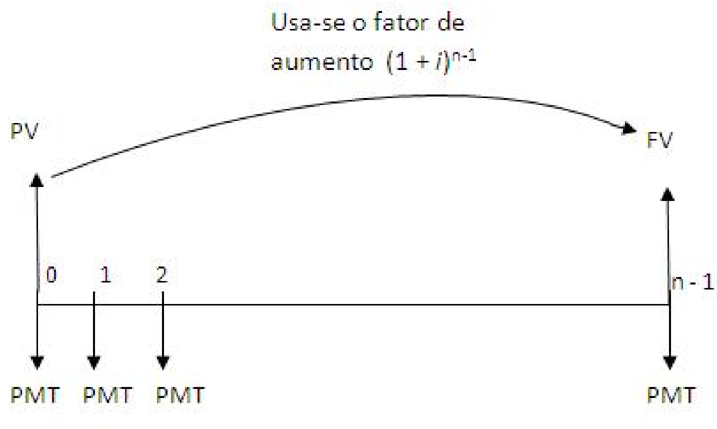
Quando se aplica em um título de capitalização, por exemplo, é acordado que o poupador irá depositar mensalmente valores constantes de forma que ano final dos n pagamentos uniformes o poupador tenha um valor futuro FV que poderá ser retirado. O valor futuro que o investidor receberá no último pagamento será:

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{9.4}$$

De fato, na série antecipada vimos que na data zero, o valor PV da série é

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}$$

Para encontrar valor FV ao final do período $n-1$, basta multiplicar PV por $(1+i)^{n-1}$.



Capítulo 10

Sistemas de Amortização

Amortização é um processo de liquidez de uma dívida através de pagamentos períodicos, onde o valor da prestação representa a soma dos juros do saldo devedor no final de um período com o reembolso de uma parte do capital, ou, de acordo com o contrato, o reembolso do total do capital pode ser pago na última prestação junto com os juros do último período. Se considerarmos os juros como o pagamento do aluguel do dinheiro de outrem, amortizar significa devolver o dinheiro alheio.
O que tem que ficar claro nas amortizações é que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor de cada período. Os diferentes modos de devolver o dinheiro alheio são denominados de Sistemas de Amortização. Os principais sistemas de amortização são:

- Sistema de pagamento único;
- Sistema de pagamentos variáveis;
- Sistema Americano;
- Sistema de Amortização Constante (SAC);
- Sistema Price ou Francês.

Em todos os sistemas de amortização, cada pagamento é a soma do valor amortizado com os juros do saldo devedor: $PMT = A + J$,
onde PMT é a prestação (pagamento), A é a amortização e J os juros .
Nas nossas análises dos diferentes tipos de sistemas de amortização, utilizaremos uma tabela onde terão as informações principais sobre o sistema adotado. Em todos os nossos exemplos, utilizaremos um financiamento hipotético de R$ 300.000,00 que será pago ao final de 5 meses a uma taxa de 4% a.m. [8]

10.1 Sistema de pagamento único

Esse sistema é realizado quando o tomador não dispõe brevemente de capital suficiente para amortizar a dívida e pagar os juros. Sendo assim, a devolução do capital juntamente com os juros capitalizados ao fim de cada período serão pagos no final do último período. Ele é usado em letras de câmbio, títulos descontados em bancos, certificados a prazo fixo com renda final, etc.

SISTEMA DE PAGAMENTO ÚNICO				
n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	0	0	312.000,00
2	12.480,00	0	0	324.480,00
3	12.979,20	0	0	337.459,20
4	13.498,37	0	0	350.957,57
5	14.038,30	300.000,00	364.995,87	0
Totais	64.995,87	300.000,00	364.995,87	

10.2 Sistema de pagamentos variáveis

O tomador amortiza periodicamente a dívida de acordo com suas condições ou o que foi acordado no momento do contrato da operação financeira, porém os juros são pagos no final de cada período. Esse tipo de amortização é muito utilizado em cartões de crédito.

Vamos considerar que o tomador se propôs amortizar a dívida da seguinte forma:

- final do 1º período: pagará juros + R$ 30.000,00;
- final do 2º período: pagará juros + R$ 45.000,00;
- final do 3º período: pagará juros + R$ 60.000,00;
- final do 4º período: pagará juros + R$ 75.000,00;
- final do 5º período: pagará juros + R$ 90.000,00.

SISTEMA DE PAGAMENTOS VARIÁVEIS				
n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	30.000,00	42.000,00	270.000,00
2	10.800,00	45.000,00	55.800,00	225.000,00
3	9.000,00	60.000,00	69.000,00	165.000,00
4	6.600,00	75.000,00	81.600,00	90.000,00
5	3.600,00	90.000,00	93.600,00	0
Totais	42.000,00	300.000,00	342.000,00	

10.3 Sistema Americano

O devedor paga a dívida no final do último período, porém se compromente a pagar os juros de cada período.

SISTEMA AMERICANO				
n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
2	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
3	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
4	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
5	12.000,00	300.000,00	312.000,00	0
Totais	60.000,00	300.000,00	360.000,00	

10.4 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Nesse sistema, o tomador realiza amortizações de mesmo valor no final de cada período. No nosso exemplo, como o valor financiado é R$ 300.000,00 e será amortizado em 5 parcelas, faremos R$ 300.000,00 : 5 = R$ 60.000,00. Este valor representa a amortização no final de cada período.
Este sistema é muito utilizado no financiamento da casa própria.

SISTEMA SAC				
n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	60.000,00	72.000,00	240.000,00
2	9.600,00	60.000,00	69.600,00	180.000,00
3	7.200,00	60.000,00	67.200,00	120.000,00
4	4.800,00	60.000,00	64.800,00	60.000,00
5	2.400,00	60.000,00	62.400,00	0
Totais	36.000,00	300.000,00	336.000,00	

10.5 Sistema Price ou Francês

Neste sistema, os valores das prestações são iguais. Ou seja, a soma dos juros com a amortização ao final de cada período é constante. É muito utilizado em financiamentos de bens duráveis como automóveis, eletrodomésticos, etc., e também no comércio em geral, como nas compras a prazo onde se cobram os juros.

Usando a equação (9.1), teremos $PMT = R\$67.388,13$.

SISTEMA FRANCÊS				
n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	55.388,13	67.388,13	244.611,87
2	9.784,47	57.603,66	67.388,13	187.008,21
3	7.480,32	59.907,81	67.388,13	127.100,40
4	5.084,01	62.304,12	67.388,13	64.796,28
5	2.591,85	64.796,28	67.388,13	0
Totais	36.940,65	300.000,00	336.940,65	

Capítulo 11

Indíces de Preços

Em termos financeiros, entende-se por *Índice de Preços* a variação relativa dos preços de um número determinado de bens. Para um único bem, esse índice é dado por

$$p_{0,t} = \frac{p_t}{p_0}, \tag{11.1}$$

em que $p_{0,t}$ é o relativo de preços entre zero e t, p_0, é o preço na data-base e p_t é o preço observado na data considerada. [1]

Exemplo 35. *A carne que Lucile comprava em julho de 2012 por R$ 12,00 o quilo, passou a custar R$ 18,00 o quilo em julho de 2013. Qual o Índice de Preço desse bem?*

Solução:

$p_{2012,2013} = \dfrac{18}{12} = 1,5$

Ou seja, em 1 ano, o preço aumentou 50 %.

O exemplo acima tratou do índice de preço de um único bem, todavia, em termos econômicos, o Índice de Preços mede a variação dos preços de um conjunto de bens e serviços que consumidores potenciais adquirem em dado instante, tomando por base condições diversas (necessidades, desejos e preferências, preços praticados e quantidades disponíveis do bem visado, dos substitutos e dos complementares). [1]

Os Índices de Preços são determinados a partir da variação do preço médio, entre duas datas, de um conjunto de itens que constituem uma demanda de um grupo da sociedade. O fator de ponderação de cada item que compõe o conjunto é a quantidade x preço deste item em relação ao preço total do conjunto.

A necessidade de identificar os costumes e necessidades imediatas de uma sociedade fez surgir as *POFs - Pesquisas de Orçamento Familiar.* As POFs realizam a coleta de preços de bens e serviços (como moradia, serviços, manutenção, consumo de bens duráveis e semi-duráveis, transporte, vestuário, saúde, educação, cultura e lazer). [1]

As POFs descobrem, a partir de suas pesquisas, quais os produtos demandados pelo grupo social pesquisado, os estabelecimentos onde as pessoas copram os produtos, as marcas dos produtos, e em seguida coletam os preços dos itens da demanda. Também determinam o salário médio das famílias pesquisadas e determinam o custo de vida dos elementos da pesquisa.

Os Índices de Preços também exercem um papel de indexadores da economia. O IPCA (Índice de Preços do Consumidor Amplo) é utilizada pelo governo como a taxa oficial da inflação no país. Já o IGPM é utilizado no reajuste de aluguéis.

11.1 IPCA

O IPCA verifica as variações dos custos com os gastos das pessoas que ganham de um a quarenta salários mínimos nas regiões metropolitanas de Belém, Belo Horizonte, Brasília, Curitiba, Fortaleza, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo e município de Goiânia. O Sistema Nacional de Preços ao Consumidor - SNIPC efetua a produção contínua e sistemática de índices de preços ao consumidor, tendo como unidade de coleta estabelecimentos comerciais e de prestação de serviços, concessionária de serviços públicos e domicílios (para levantamento de aluguel e condomínio).
Abaixo segue a variação do IPCA de janeiro de 2010 até junho de 2013.

ÍNDICE IPCA (VALORES PERCENTUAIS)													
	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Acumulado
2010	0,52	0,94	0,55	0,48	0,63	0,19	-0,09	-0,05	0,31	0,62	0,86	0,69	5,79%
2011	0,76	0,97	0,60	0,77	0,70	0,23	0,10	0,27	0,53	0,42	0,46	0,56	6,55%
2012	0,65	0,53	0,25	0,43	0,51	0,18	0,33	0,39	0,48	0,65	0,54	0,69	5,77%
2013	0,88	0,68	0,49	0,51	0,46	0,38	*	*	*	*	*	*	3,43%

Obs. Os valores negativos expressam uma queda do preço do conjunto de itens, que é ocasionada muitas vezes pelo aumento da oferta de certo produto fazendo seu preço cair.

Como os preços dos serviços e produtos coletados pelo IPCA são aqueles pagos pela maioria da população, ele é o indicador oficial da inflação no país. O IPCA determina o custo de vida da sociedade como um todo, portanto é utilizado como indexador para reajustar salários, mensalidades escolares, etc.

Exemplo 36. *Os funcionários de uma empresa reivindicaram reajuste salarial, o que não acontecia desde 2008. Foi acordado que em 2013 o salário seria reajustado utilizando o índice do IPCA como indexador. Sabendo que o reajuste será retroativo, pede-se:*

a) a taxa acumulada i_A do reajuste, referente às taxas do IPCA desde 2008.

b) Se um funcionário tinha um salário de R$ 1.800,00 em 2008, qual será o seu salário, em 2013, depois do reajuste?

Solução:

a) As taxas do IPCA de 2010, 2011 e 2012 foram de 5,79 %, 6,55% e 5,77 %, respectivamente.
Logo, a taxa i_A é igual a
$i_A = (1 + 0,0579) \cdot (1 + 0,0655) \cdot (1 + 0,577) - 1$
$i_A = 19,22\%$

b) Quem ganhava $R\$1.800,00$ ganhará após o reajuste o valor S de:

$S = (1 + 0,1922) \cdot 1.800,00 = R\$2.145,96$

11.2 IGPM

O Índice Geral de Preços do Mercado - IGPM é um índice determinado a partir de outros índices, isto é, o IGPM é a média ponderada do Índice de preços no Atacado (IPA), do Índice de Preços ao Consumidor (IPC) e do Índice Nacional da Construção Civil (INCC), de acordo com a seguinte equação:

$$IGPM = 0,6 \cdot IPA + 0,3 \cdot IPC + 0,1 \cdot INCC \tag{11.2}$$

Atualmente o IGPM é o índice utilizado para balizar os aumentos da energia elétrica e dos contratos de alugueis.

Veja a seguir a tabela da oscilação do IGPM.

ÍNDICE IGPM (VALORES PERCENTUAIS)													
	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Acumulado
2010	0,63	1,18	0,94	0,77	1,19	0,85	0,15	0,77	1,15	1,01	1,45	0,69	5,79%
2011	0,79	1,00	0,62	0,45	0,43	-0,18	-0,12	0,44	0,65	0,53	0,50	-0,12	6,55%
2012	0,25	-0,06	0,43	0,85	1,02	0,66	1,34	1,43	0,97	0,02	-0,03	0,68	5,77%
2013	0,34	0,29	0,21	0,15	0,00	0,75	*	*	*	*	*	*	3,43%

Exemplo 37. *Solange, aos 28 anos, decidiu sair da casa dos pais e ir morar sozinha, sendo assim alugou um apartamento em junho de 2010 por R$ 800,00, sendo este reajustado utilizando o IGPM como indexador a cada 12 meses. Sabendo-se que ainda hoje, Solange mora de aluguel nesse apartamento, use a tabela dos índices do IGPM e determine o valor atual do aluguel.*

Solução:

O índice do IGPM que será usado para reajustar o valor do aluguel será determinado pela soma dos índices mensais contados a partir de março de cada ano até fevereiro do ano seguinte.

Então, calculando os seguintes índices, temos:

- março/10 à fevereiro/11: IGPM de 5,77 % a.a.;
- março/11 à fevereiro/12: IGPM de 4,14 % a.a.;
- março/12 à fevereiro/13: IGPM de 5,78 % a.a.;

Logo, podemos determinar o valor N que será cobrado pelo alguel a partir de março de 2013:

$N = (1 + 0,0577) \cdot (1 + 0,0414) \cdot (1 + 0,0578) \cdot 800$

$N = R\$ 932,13$

11.3 INCC

O Índice de Construção Civil - INCC reflete a oscilação dos custos de materiais e mão-de-obra da construçao civil.
Quando alguém compra um imóvel na planta e começa a pagar a chamada poupança, que nada mais é que a amortização do valor do imóvel paga diretamente à construtora até iniciar o financiamento,vemos que as parcelas desse pagamento prévio são reajustadas pelo INCC.

Exemplo 38. *Rui comprou um imóvel no valor de R$ 256.000,00 em 10 novembro de 2010, pagando uma poupança de R$ 60.000,00 e financiando R$ 196.000,00.*

A poupança foi paga da seguinte maneira:

- *Entrada de R$ 21.000,00 no dia 10 de novembro de 2010;*
- *17 parcelas de R$ 1000,00, sendo a primeira paga em 10/12/2010;*
- *2 intermediárias de R$ 11.000,00 em 10/06/11 e 10/12/11;*

O saldo de R$ 196.000,00 foi financiado em 10/01/2012. Sabendo-se que o valor das parcelas mensais, das intermediárias e o saldo devedor são reajustados pelo INCC, pede-se:
a) O valor das parcelas dos meses fevereiro, março e abril de 2011.
b) Determine o valor da 1ª intermediária, após o reajuste do INCC.
c) Determine o valor a financiar após o reajuste do INCC.

Solução:

a) Temos que determinar o acumulado do INCC a partir de novembro de 2010 (data da assinatura do contrato) até janeiro, fevereiro e março de 2011 :

- o acumulado do INCC até janeiro de 2011, que será o indexador para o pagamento da parcela de fevereiro, é 1,32 %;
- até fevereiro de 2011, o índice do INCC é 1,71 %, que será o reajuste para o pagamento da parcela de março;
- 1,71 % + 0,44 % = 2,15 % corresponde o reajuste da mensalidade do mês de abril.

Daí, temos:

parcela de fevereiro $= 1000 \cdot (1 + 0,0132) = R\$1.013,20$

parcela de março $= 1000 \cdot (1 + 0,0171) = R\$1.017,10$

parcela de abril $= 1000 \cdot (1 + 0,0215) = R\$1.021,50$

b) A 1ª intermediária terá um reajuste de 4,93%, taxa que representa o acumulado do INCC desde novembro de 2010 à maio de 2011. Portanto, seu valor será de:

1ª intermediária $= 11.000 \cdot (1 + 0,0493) = R\$11.542,00$

c) Em 10/01/12 o saldo de R$ 196.000,00 (saldo referente à data da assinatura do contrato) será reajustado a partir do acumulado do INCC desde à data-base até 10/01/12. esse acumulado é de 8,30 %. Portanto, o valor a financiar será de:

valor a financiar $= 196.000 \cdot (1 + 0,083) = R\$212.268,00$

Capítulo 12

IOF e CET

12.1 IOF

IOF – Imposto sobre operações financeiras É um imposto criado pelo governo federal e incide sobre as operações de crédito, câmbio e seguros. O IOF foi desenvolvido no intuito de controlar o mercado financeiro, para evitar a chamada ciranda financeira de recursos, isto é, um investimento ficar hora em uma aplicação, depois em outra, etc., já que, na maioria das operações sobre as quais incide, sua alíquota diminui (em alguns casos chegando a zerar) com o aumento da permanência dos recursos nas aplicações. O IOF também tem por objetivo do governo federal arrecadar fundos para União, já que são previstos R$ 48 bilhões anuais de recolhimento através do IOF.

A alíquota atual é de 0,0082% ao dia, além da incidência de uma taxa fixa de 0,38% sobre o somatório dos acréscimos dos saldos devedores diários, apurado no último dia do mês.

Entenda esta dinâmica no exemplo abaixo:

Se o saldo devedor do último dia do mês anterior (que é transferido para o 1º dia do mês subseqüente) for de R$ 1.000,00, e assim permanecer até o último dia do mês corrente, o IOF será calculado:

- 0,0042% sobre 30.000,00 (somatório do saldo devedor de 30 dias);
- 0,38% sobre R$ 0 (não houve acréscimo de saldo devedor);
- Total devido: R$ 2,46.

  Se houver novo débito no dia seguinte, no valor de 500,00 (passando o saldo devedor para R$ 1.500,00), o IOF será cobrado:

- 0,0042% sobre R$ 44.500,00 (ou seja, R$ 1.000,00 x 1 dia + R$ 1.500,00 x 29 dias);
- 0,38% sobre R$ 500,00 (acréscimo de saldo devedor no mês);
- Total devido: R$ 3,65 + R$ 1,90 = R$ 5,55.

(Fonte: Ministério da Fazenda)

Nos financiamentos também incide o IOF. As alíquotas são calculadas mensalmente e incidem sobre a amortização de cada parcela (lembre-se que parcela = amortização + juros).

IOF = amortização x (0,000042 x dias acumulados + 0,0038).

12.2 CET

Custo Efetivo Total (CET) corresponde a todos os encargos e despesas incidentes nas operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratadas ou ofertadas a pessoas físicas, microempresas ou empresas de pequeno porte.

O CET deve ser informado pelas instituições financeiras e pelas sociedades de arrendamento mercantil antes da contratação de operações de crédito e de arrendamento mercantil e também em qualquer outro momento, a pedido do cliente.

O CET também deve constar dos informes publicitários das instituições quando forem veiculadas ofertas específicas (com divulgação da taxa de juros cobrada, do valor das prestações, etc).

O CET deve ser expresso na forma de taxa percentual anual, incluindo todos os encargos e despesas das operações, isto é, o CET deve englobar não apenas a taxa de juros, mas também tarifas, tributos, seguros e outras despesas cobradas do cliente. Por exemplo, suponha um financiamento nas seguintes condições:

- Valor Financiado – R$ 1.000,00
- Taxa de juros – 12% ao ano ou 0,95% ao mês
- Prazo da operação - 5 meses
- Prestação mensal – R$ 205,73

  Além desses dados, considere também a hipótese de pagamento à vista (sem inclusão no valor financiado), dos seguintes valores:

- Tarifa de confecção de cadastro para início de relacionamento – R$ 50,00
- IOF – R$ 10,00

  De acordo com a fórmula da Resolução CMN 3.517, de 2007, o FC_0 (valor do crédito concedido) e o FC_j (valores cobrados pela instituição), seriam os seguintes:

- $FC_0 = R\$940,00$
- $FC_j = R\$205,73$

  Considerando as prestações pagas a períodos fixos, e utilizando as fórmulas de matemática financeira (por meio de uma planilha de cálculo eletrônica ou calculadora científica), o cálculo do CET ficaria assim:

$$\frac{205,73}{(1+CET)^1}+\frac{205,73}{(1+CET)^2}+\frac{205,73}{(1+CET)^3}+\frac{205,73}{(1+CET)^4}+\frac{205,73}{(1+CET)^5}=940,00$$

CET = 43,93% ao ano ou 3,08% ao mês.

Nota-se: As instituições financeiras, em geral, não informam de imediato a CET ao consumidor, pois ela é mais alta do que a taxa que se encontra nos anúncios, o que poderia desestimular a compra ou o empréstimo. No exemplo dado, a taxa de 0,96% incidiu em cima de R$ 1.000,00 fazendo com que a parcela ficasse no valor de R$ 205,73. Ao financiar apenas os R$ 940,00 em 5 parcelas de R$ 205,73 a taxa se torna maior.

Capítulo 13

Atividades

Exemplo 39. *Adilza é uma mulher de sorte! Acabou de ganhar* $R\$1.000.000,00$ *na loteria e resolveu colocar a quantia numa poupança que rende* $0,5\%$*a.m.. Segundo ela, viverá de renda retirando todo mês* $R\$10.000,00$ *da conta poupança. Pergunta-se: durante quantos anos Adilza desfrutará dessa mordomia?*

Solução:
Abaixo esboçaremos a quantia que estará na sua conta ao final de cada período:

- no final do primeiro mês,n = 1, o rendimento de $0,05\%$ a.m. fez o capital inicial chegar a $1.000.000 \cdot (1,005)$. Como foi realizado um saque de $R\$10.000,00$ temos:

$$M_1 = 1.000.000 \cdot (1,005) - 10.000$$

  onde M_1 é o montante ao final do mês 1.

- para n = 2, temos:

$$\begin{aligned} M_2 &= [1.000.000 \cdot (1,005) - 10.000] \cdot (1,005) - 10.000 \\ &= 1.000.000 \cdot (1,005)^2 - 10.000 \cdot (1,005) - 10.000 \\ M_2 &= 1.000.000 \cdot (1,005)^2 - 10.000 \cdot (1 + 1,005) \end{aligned}$$

- para n = 3, temos:

$$\begin{aligned} M_3 &= [1.000.000 \cdot (1,005)^2 - 10.000 \cdot (1 + 1,005)] \cdot (1,005) - 10.000 \\ &= 1.000.000 \cdot (1,005)^3 - 10.000 \cdot (1 + 1,005) \cdot (1,005) - 10.000 \\ M_3 &= 1.000.000 \cdot (1,005)^3 - 10.000 \cdot [1 + 1,005 + (1,005)^2 + (1,005)^3] \end{aligned}$$

- Ao final de n meses, o montante M será de;

$$M = 1.000.000 \cdot (1,005)^n - 10.000 \cdot [1 + 1,005 + (1,005)^2 + (1,005)^3 + \ldots + (1,005)^{n-1}]$$

Mas

$$1 + 1,005 + (1,005)^2 + (1,005)^3 + \ldots + (1,005)^{n-1} \quad = \quad \frac{1 - (1,005)^{n-1}}{1 - 1,005}$$

Logo,

$$M \quad = \quad 1.000.000 \cdot (1,005)^n - 10.000 \cdot \frac{1 - (1,005)^{n-1}}{1 - 1,005} \tag{13.1}$$

Para descobrirmos quanto tempo durará a fortuna de Adilza, basta considerarmos $M = 0$ na equação (13.1).

$$\begin{aligned}
1.000.000 \cdot (1,005)^n - 10.000 \cdot \frac{1 - (1,005)^{n-1}}{1 - 1,005} &= 0 \\
1.000.000 \cdot (1,005)^n + 2.000.000 \cdot (1 - (1,005)^{n-1}) &= 0 \\
1.000.000 \cdot (1,005)^n + 2.000.000 \cdot (1 - \frac{(1,005)^n}{1,005}) &= 0 \\
1.000.000 \cdot (1,005)^n + 2.000.000 - \frac{2.000.000}{1,005} \cdot (1,005)^n &= 0 \\
1.000.000 \cdot (1,005)^n + 2.000.000 - 1.990049,75 \cdot (1,005)^n &= 0 \\
990.049,75 \cdot (1,005)^n &= 2.000.000 \\
(1,005)^n &= 2,0201 \\
n \cdot log1,005 &= log2,0201 \\
n &= 141
\end{aligned}$$

Exemplo 40. *Paulo deseja aplicar R\$ 10.000,00 durante 1 ano numa renda fixa porém não decidiu entre a caderneta de poupança e o CDB. Sabendo-se que:*

- *taxa CDI constante de 7% a.a.;*
- *taxa SELIC de 7,25 % a.a.;*
- *o CDB paga 105 % da CDI.*

Verifique qual renda fixa é a mais vantajosa para Paulo.

Solução:

Como a taxa SELIC é inferior a 8,5 % a.a., então a poupança renderá anualmente 70 % de 7, 25 % = 5,075 %. A taxa mensal equivalente é $i = (1,05075)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,4\%$ a.m..

Em seis meses o montante será $M = 10.000,00 \cdot (1,004)^6 = 10.250,61.$

Agora veremos o rendimento se Paulo aplicar no CDB.

Rendimento: 105% de 7% a.a. = 7,35 % a.a..

A taxa mensal equivalente é $k = (1,0735)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,6\%$ a.m..
em seis meses, o rendimento será $M = 10.000,00 \cdot (1,006)^6 = 10.360,98.$
Calculando o I.R. do rendimento, temos:

$0,20 \cdot 360,98 = R\$72,20$
Logo, no CDB o total resgatado será de $R\$10.288,78$, que será a melhor opção.

Capítulo 14

Atividades com recursos computacionais

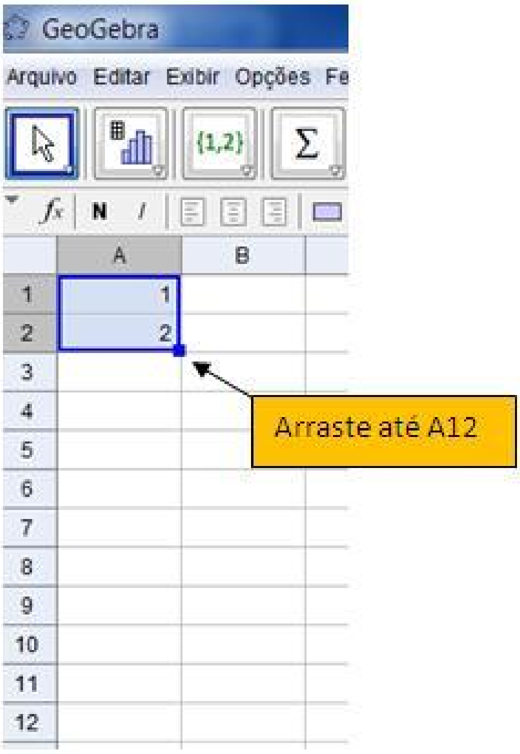
14.1 Atividade 1- Capitalização simples x capitalização composta

Um capital de R\$ 2.000,00 será aplicado durante 1 ano a uma taxa de 2% a.m. em dois sistemas de capitalização: a capitalização simples e a capitalização composta. Use a planilha do Geogebra para comparar os montantes mês a mês nos dois tipos de capitalização.

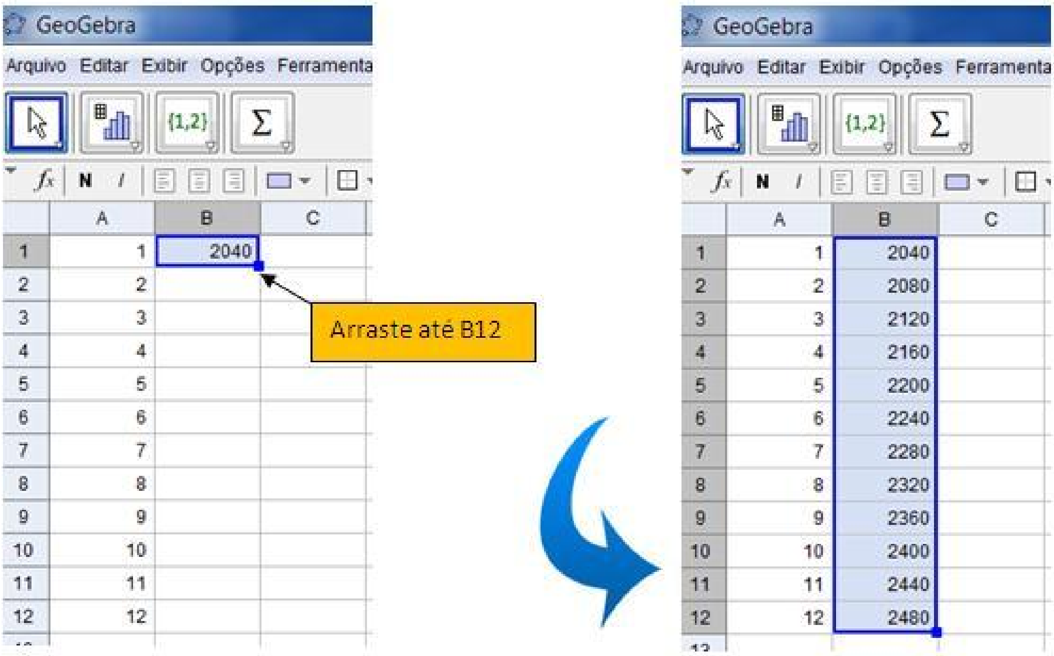
Solução:

Na coluna A estarão os períodos, que serão os meses 1, 2, 3,..., 12. Na coluna B serão exibidos os montantes obtidos no sistema de capitalização simples. Já na coluna C, estarão os montantes da capitalização composta.

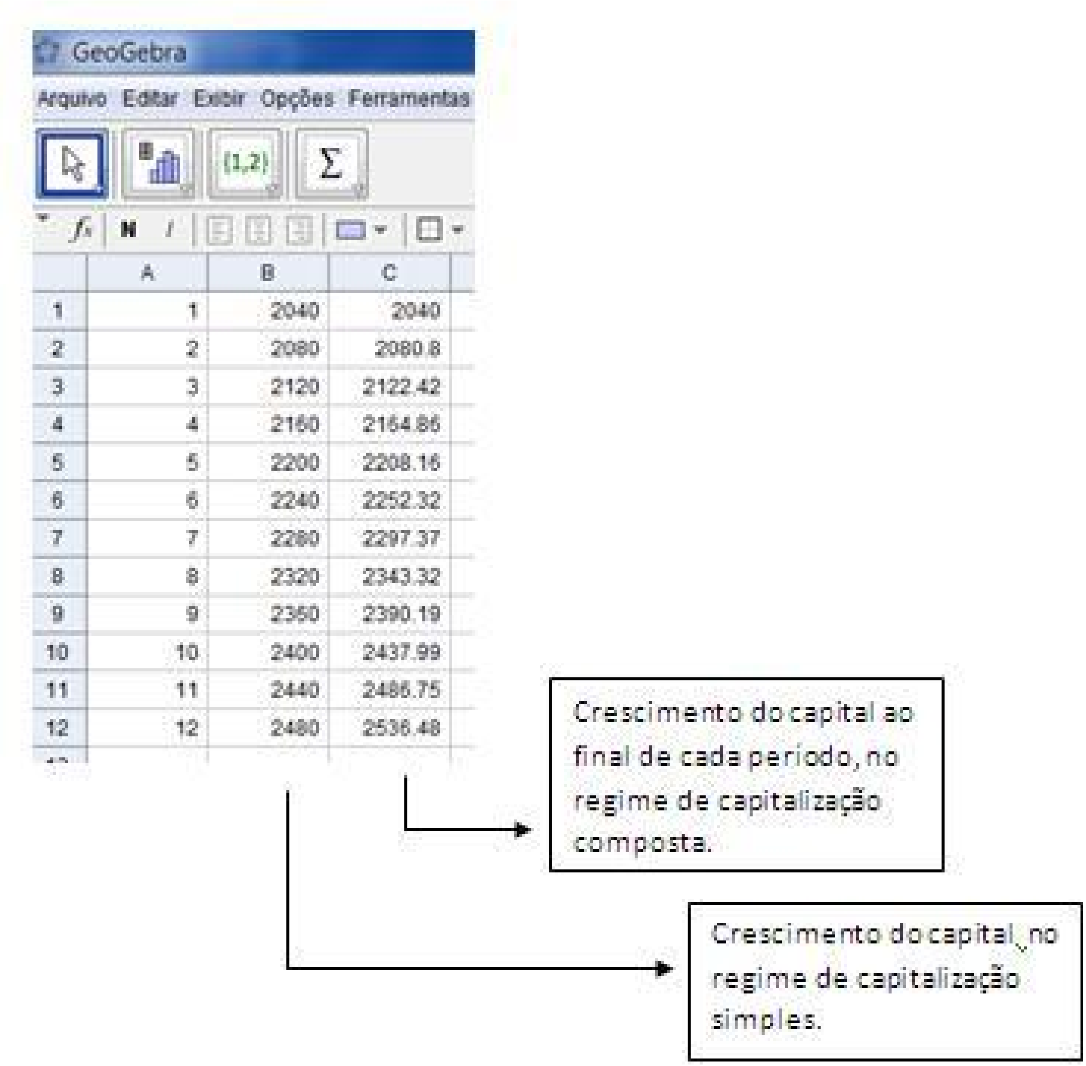
- ***1º passo:*** Na coluna A introduza os números de 1 a 12 da seguinte maneira: na célula A1 digite "1" , e na célula A2 digite "2" , em seguida selecione as mesmas células e arraste até a célula A12.



- ***2º passo:*** Na célula B1 digite "$2000 * (1 + 0.02 * (A1))''$ e tecle enter. Em seguida selecione a célula B1 e arraste o mouse até B12.



- ***3º passo:*** Para finalizar, digite na célula C1 "$2000 * ((1 + 0.02)^{A1})''$ e tecle enter, logo após selecione a célula C1 e arraste o mouse sobre a coluna C até a célula C12. Teremos o seguinte resultado:



	A	B	C
1	1	2040	2040
2	2	2080	2080.8
3	3	2120	2122.42
4	4	2160	2164.86
5	5	2200	2208.16
6	6	2240	2252.32
7	7	2280	2297.37
8	8	2320	2343.32
9	9	2360	2390.19
10	10	2400	2437.99
11	11	2440	2486.75
12	12	2480	2536.48

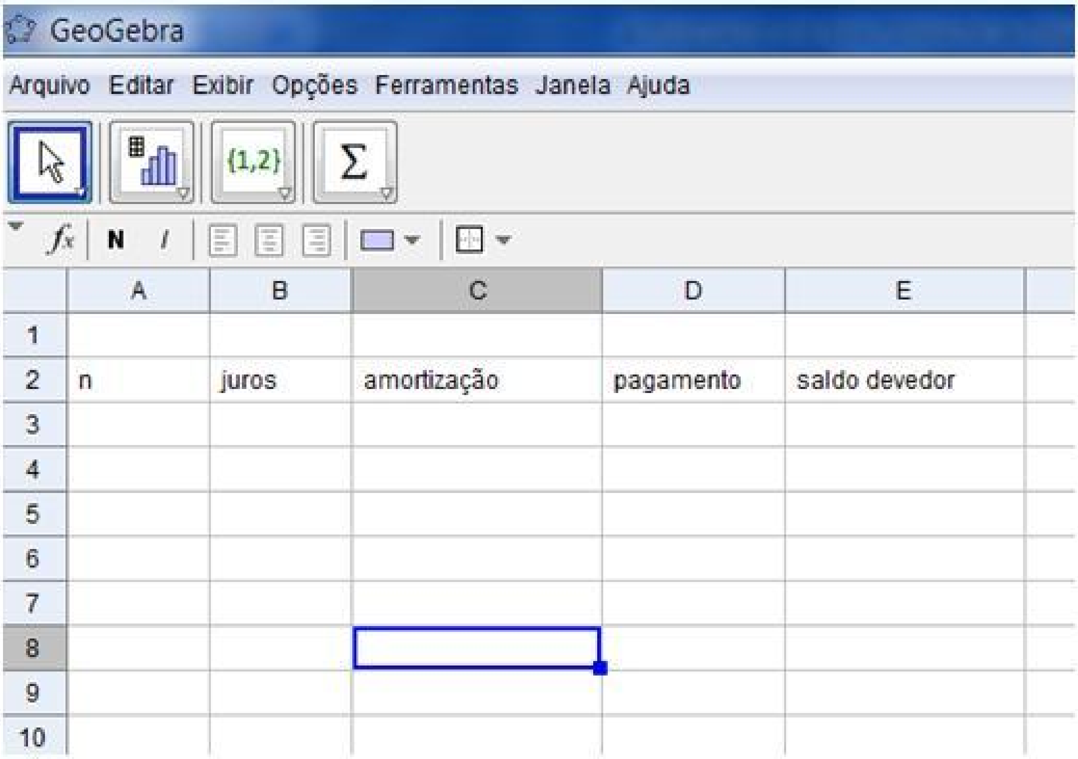
14.2 Atividade 2 - Sistema de Amortização constante (SAC)

Consideremos um financiamento de R$ 300.000,00 que será amortizado através do SAC durante 5 meses, sendo a taxa de 4% a.m..Use a planilha do software Geogebra para representar a amortização.

Solução:

Nós iremos criar uma tabela no Geogebra formada por 5 colunas e 8 linhas. Na coluna A estarão os períodos, na coluna B estarão os juros produzidos a cada período.

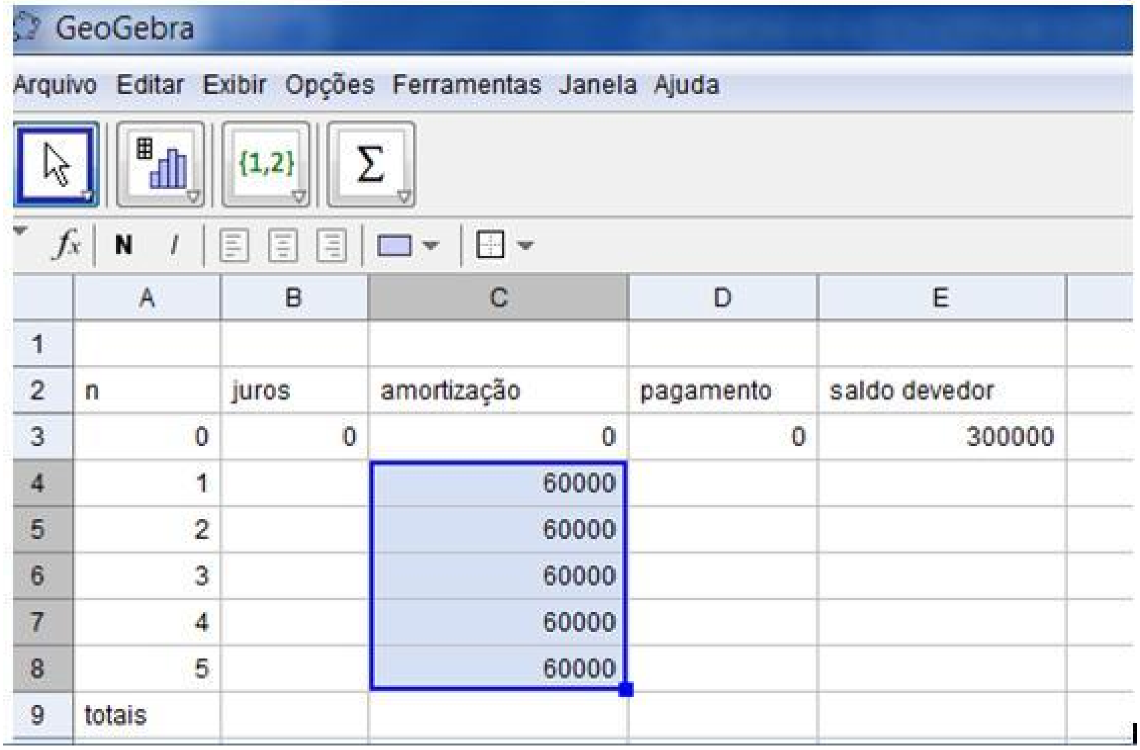
Na coluna C, cada célula representará a amortização do respectivo período. Já na coluna D serão exibidas as prestações de cada período e a coluna E mostrará o saldo devedor.



Solução:

- ***1º passo:*** Na célula A2 digite “n” , na célula A3 digite “zero”e na célula A4 digite “1” .Selecione a célula A4 e arraste o mouse até a célula A8. Na célula A9 digite“totais”.

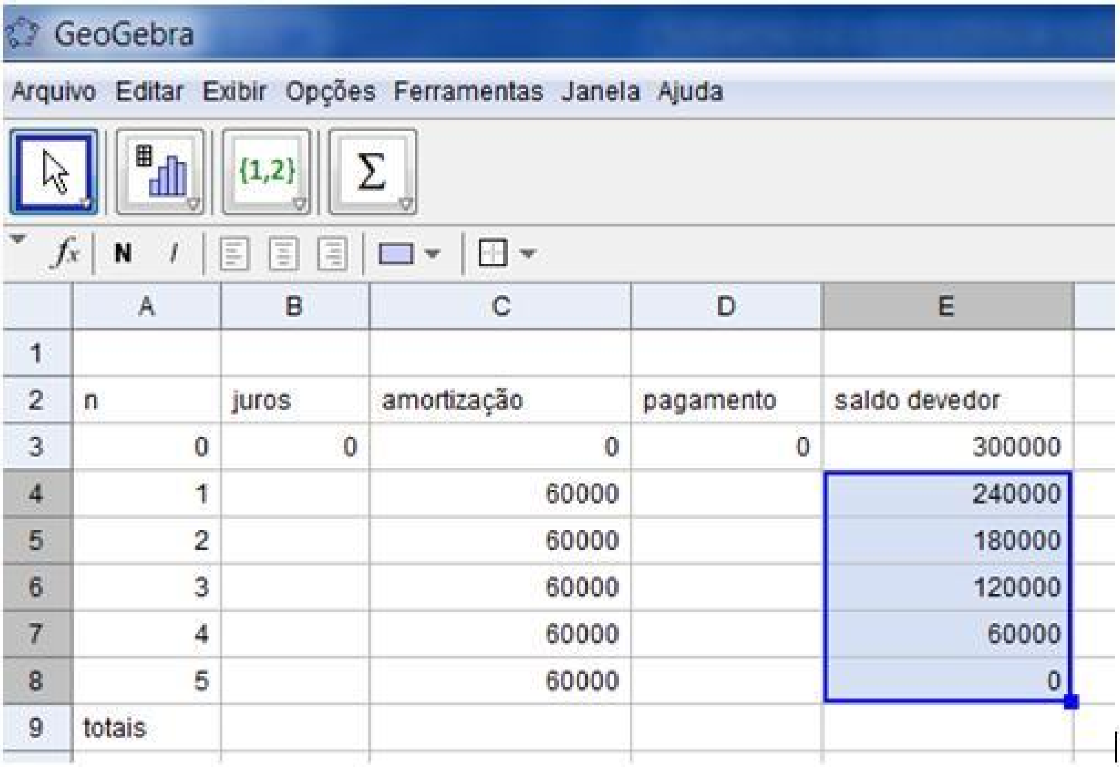
- ***2º passo:*** Na célula B3, C3 e D3 digite “0. Na célula E3 digite “300000”.Como a amortização é constante, seu valor será 300.000 : 5 = 60.000. Logo, digite “60000” na célula C4, selecione esta célula e arraste o mouse sobre a coluna C até a célula C8.



	A	B	C	D	E
1					
2	n	juros	amortização	pagamento	saldo devedor
3	0	0	0	0	300000
4	1		60000		
5	2		60000		
6	3		60000		
7	4		60000		
8	5		60000		
9	totais				

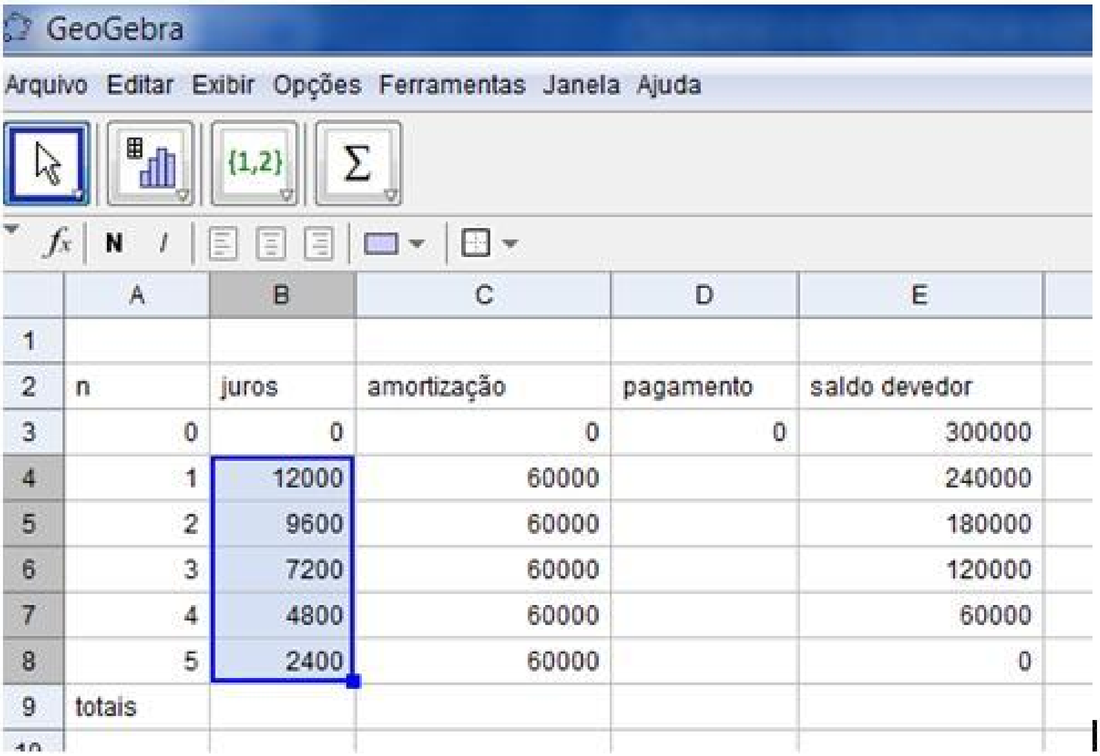
Agora já podemos amortizar o saldo devedor.

- ***3º passo:*** Na célula E4 digite "E3 – C4 . Essa regra vai valer pra todas as células da coluna E, por exemplo, a célula E5 (saldo devedor ao final do 2º período) será a diferença entre E4(Saldo devedor ao final do 1º período) e C5 (amortização). Selecione E4 e arraste o mouse sobre a coluna E até E8.



Os juros são calculados sobre o saldo devedor ao final de cada período. Como a coluna que mostra o saldo devedor se encontra preenchida, será fácil calcularmos os juros ao final de cada período.

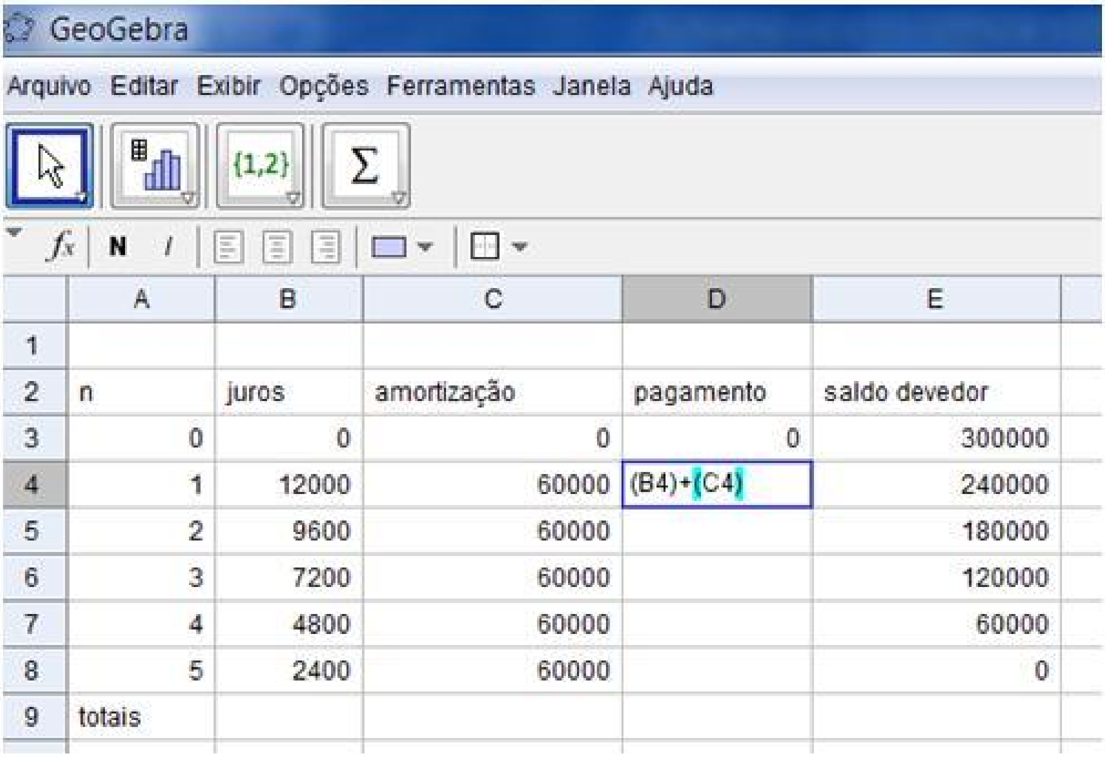
- ***4º passo:*** Digite na célula B4 "0.04*(E3)" e arraste o mouse a partir da célula B4 até B8. Todos os juros seguintes obedecerão a mesma regra.



	A	B	C	D	E
1					
2	n	juros	amortização	pagamento	saldo devedor
3	0	0	0	0	300000
4	1	12000	60000		240000
5	2	9600	60000		180000
6	3	7200	60000		120000
7	4	4800	60000		60000
8	5	2400	60000		0
9	totais				

Agora podemos determinar o valor da pagamento (prestação) ao final de cada mês, basta somar o valor que será amortizado com os juros do período. Procederemos da seguinte forma:

- ***5^o passo:*** na célula D4 digite “(B4)+(C4). Selecione a célula D4 e arraste o mouse até D8.



	A	B	C	D	E
1					
2	n	juros	amortização	pagamento	saldo devedor
3	0	0	0	0	300000
4	1	12000	60000	(B4)+(C4)	240000
5	2	9600	60000		180000
6	3	7200	60000		120000
7	4	4800	60000		60000
8	5	2400	60000		0
9	totais				

Abaixo segue a tabela que representa a amortização solicitada, utilizando o sistema de amortização constante (SAC).

	A	B	C	D	E	F
1						
2	n	juros	amortização	prestação	saldo devedor	
3	0	0	0	0	300000	
4	1	12000	60000	72000	240000	
5	2	9600	60000	69600	180000	
6	3	7200	60000	67200	120000	
7	4	4800	60000	64800	60000	
8	5	2400	60000	62400	0	
9	totais	36000	300000	336000		
10						

14.3 Atividade 3 - Série de pagamentos uniformes

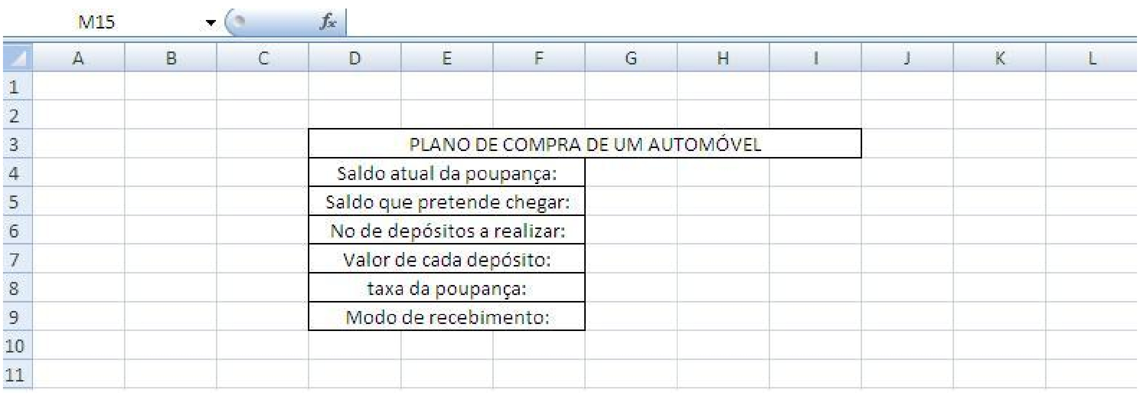
Carlos possui R$ 13.500,00 na poupança e pretende comprar um automóvel que custará R$ 65.000,00 daqui a 3 anos. Como ele não deseja pagar juros, irá fazer depósitos mensais de mesmo valor na sua poupança. Se a poupança estará com a taxa de 0,6% a.m., quanto Carlos deverá depositar, a partir de hoje para que possa comprar o carro daqui a 3 anos?

Usaremos a planilha do Excel como ferramenta facilitadora na resolução.

Solução:

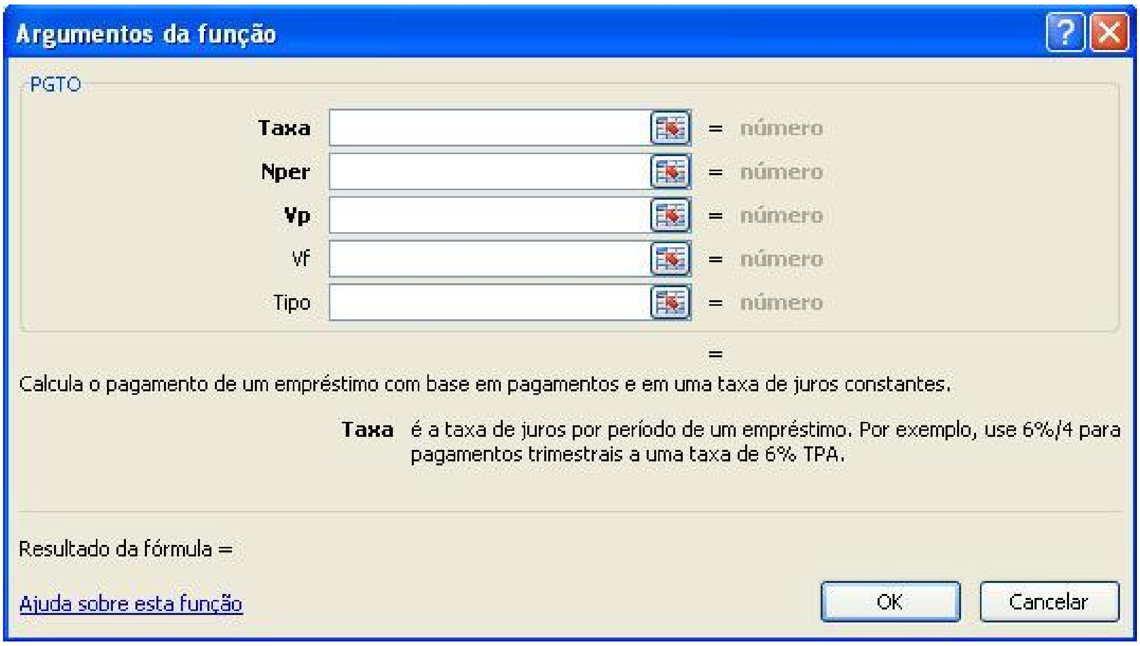
- ***1º passo:*** No Excel, selecione as células D3 a I3, use a tecla mesclar e centralizar, em seguida nas células já mescladas digite o título: **Plano de compra de um automóvel**.Também mescle as células D4 a F4, em seguida destaque e arraste o bloco das células até a linha 9, isso fará com que as células que estão abaixo também sejam mescladas . Digite nas células mescladas:
- D4 – F4 : Saldo atual da poupança:
- D5 – F5 : Saldo que pretende chegar:
- D6 – F6 : No de depósitos a realizar:
- D7 – F7 : Valor de cada depósito:
- D8 – F8 : taxa da poupança:
- D9 – F9 : Modo de recebimento:

  Colocaremos as bordas para formar uma tabela.



- ***2º passo:*** Com o mouse na célula G7,vá na barra de ferramentas, clique em *fórmulas*, depois em *financeiras*, e em seguida *PGTO.*

Abrirá a seguinte janela:

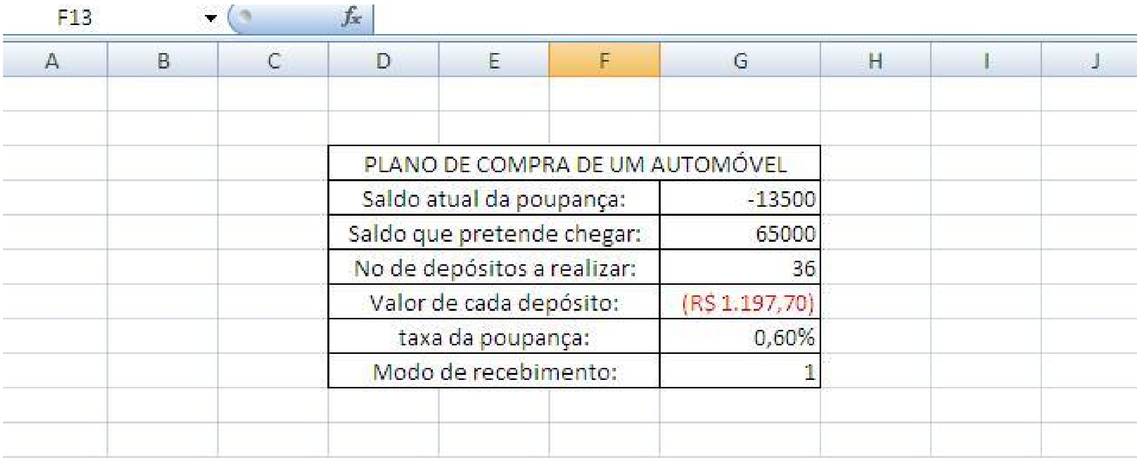


- no espaço da taxa digite G8;
- no espaço da Nper digite G6;
- no espaço Vp digite G4;
- no espaço Vf digite G5;
- no espaço “tipo digite G9.

De acordo com os dados da questão faremos as seguintes inserções:

- em G4 digite -13500;
- em G5 digite 65000;
- em G6 digite 36;
- em G8 digite 0,6%;
- em G9 digite 1.

Depois de realizar sequencialmente o roteiro anterior, teremos a seguinte tabela:



PLANO DE COMPRA DE UM AUTOMÓVEL	
Saldo atual da poupança:	-13500
Saldo que pretende chegar:	65000
No de depósitos a realizar:	36
Valor de cada depósito:	(R$ 1.197,70)
taxa da poupança:	0,60%
Modo de recebimento:	1

Logo, Carlos depositará R$ 1197,70 todo o mês.

14.4 Cálculo do IOF e CET de um financiamento

Um veículo no valor de $R\$25.000,00$ *será financiado num banco, a uma taxa de juros de* $1,5\%a.m.$, *em 36 parcelas fixas, sendo a 1ª paga no dia 14 de junho de 2013. Sabendo que o valor do financiamento foi concedido em 14 de maio de 2013, e que o IOF e as taxas administrativas foram financiados, pede-se:*

1. O valor das prestações;
2. O valor do IOF;
3. A CET.

Nas operações de financiamneto tem-se a tributação do IOF, que é constituída de uma alíquota fixa de 0,38% e uma diária de 0,0042 % que incidem sobre o valor da amortização de cada parcela.

TAXAS	
TAXAS ADMINISTRATIVAS	VALOR (EM REAIS)
Confecção de cadastro para início de relacionamento	30,00
Avaliação, reavaliação e substituição de bens recebidos em garantia	715,00
Fornecimento de atestados, certificados e declarações	180,00
Cópia ou 2ª via de comprovantes e documentos	180,00
IPVA, Multa e Licenciamento	610,96
Despachante	200,00
TOTAL	1.915,96

Solução:

Primeiramente, iremos determinar o valor do IOF, caso este fosse pago à vista. Em seguida faremos uma regra de três e encontraremos o valor do IOF que será financiado.

Para isso, utilizaremos a planilha do Excel, onde iremos elaborar uma tabela com as seguintes informações:

1. Data: nesta coluna (coluna A) constará a data da concessão do capital (data zero) a ser financiado e as datas dos pagamentos das parcelas;

2. Dias corridos/DC : na célula B3 estarão os dias transcorridos entre a data zero e a data do 1º pagamento, na célula B4 constará o número de dias transcorridos entre o 1º e o 2º pagamento, e assim sucessivamente, até chegar na célula B38, que constará o número de dias entre o 35º e o 36º pagamento.

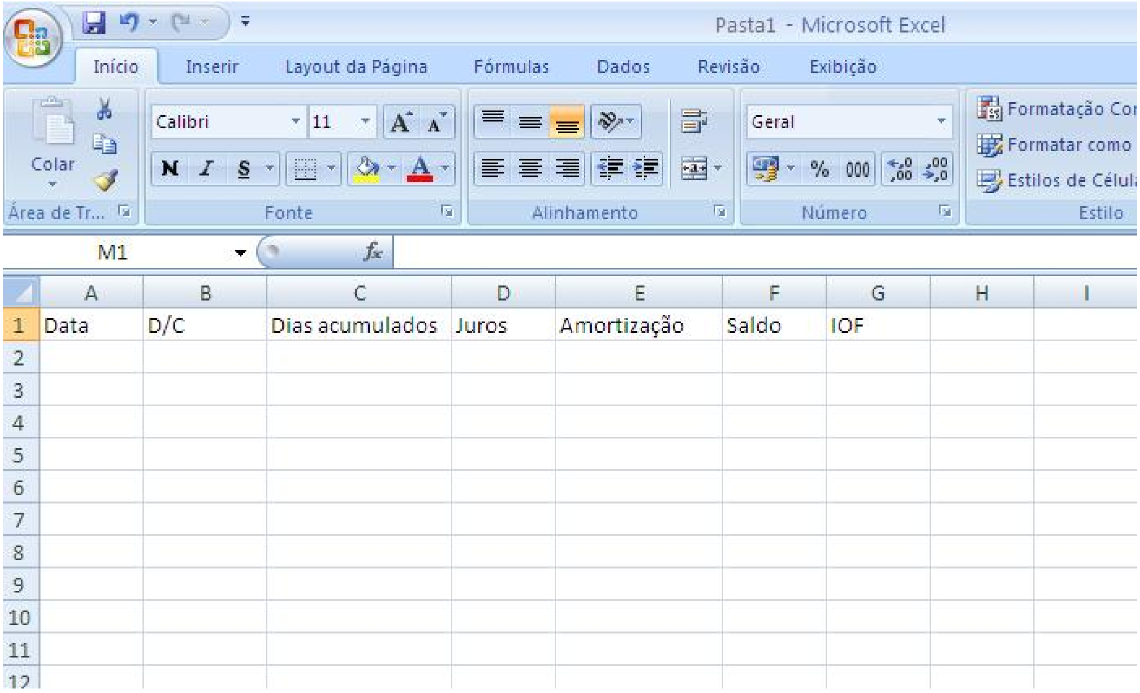
3. Dias acumulados: em cada célula da coluna C, estarão os dias transcorridos entre a data do respectivo pagamento e a data zero.

4. Juros do período: estarão na coluna D: determinarão os juros do período (os dias da coluna B) entre dois pagamentos;

5. Amortização: As amortizações estarão na coluna E. Como já sabemos será o valor da prestação subtraído dos juros do período.

6. Saldo (coluna F): em cada célula da coluna E terá o saldo ao final de cada período, que será determinado subtraindo o valor da amortização do saldo anterior.

7. IOF (coluna F) : Nessa coluna, cada célula indicará o IOF do respectivo período.



Sendo assim, podemos começar a elaborar a tabela no Excel.

- ***1º passo:*** Na célula A2, digite "14/5/2013".Na célula A3 digite "14/6/2013". Selecione essas duas células e arraste o mouse sobre a coluna A até a célula A38, onde aparecerá 14/52/2016, que é a data do último pagamento do financiamento. Na célula F2 digite " 26915,96.
- ***2º passo:*** Na célula B3 digite "=A3 – A2". O resultado será 31, que corresponde o número de dias entre as duas datas. Selecione a célula B3 e arraste o mouse sobre a coluna B até B38.

1	Data	D/C	Dias acumulados	Juros	Amortização	Saldo	IOF
2	14/5/2013						
3	14/6/2013	31					
4	14/7/2013	30					
5	14/8/2013	31					
6	14/9/2013	31					
7	14/10/2013	30					
8	14/11/2013	31					
9	14/12/2013	30					
10	14/1/2014	31					
11	14/2/2014	31					
12	14/3/2014	28					
13	14/4/2014	31					
14	14/5/2014	30					
15	14/6/2014	31					
16	14/7/2014	30					

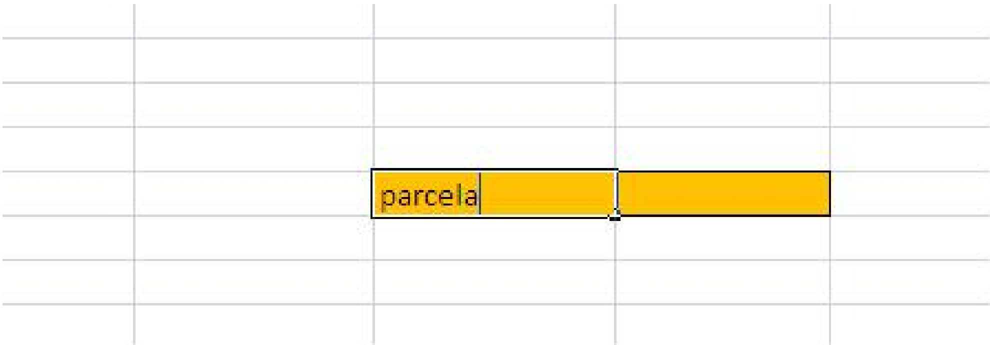
número de dias compreendido entre 14/11/13 à 14/10/13

- ***3º passo:*** Vamos preencher a coluna C. Em C3 digite 31. Em C4 digite "=C3 +B4". Selecione a célula C4 e arraste o mouse sobre a coluna C até C14, pois é nessa célula que os dias acumulados atingem 365 dias, que é o número de dias máximo utilizado no cálculo do IOF diário. Portanto, de C14 a C38 digite"365".
- ***4º passo:*** Cálculo da taxa de juros do período: A taxa de juros de 1,5 % refere-se ao período de 30 dias. Deve-se calcular a taxa de juros para períodos de 31 dias. Portanto, na célula D3 digite "$= (1,015)^{\frac{B3}{30}} - 1$". Selecione a célula D3 e arraste o mouse sobre a coluna D até D38.

18	14/9/2014	31	365	0,015504
19	14/10/2014	30	365	0,015
20	14/11/2014	31	365	0,015504
21	14/12/2014	30	365	0,015
22	14/1/2015	31	365	0,015504
23	14/2/2015	31	365	0,015504
24	14/3/2015	28	365	0,013993
25	14/4/2015	31	365	0,015504
26	14/5/2015	30	365	0,015
27	14/6/2015	31	365	0,015504
28	14/7/2015	30	365	0,015
29	14/8/2015	31	365	0,015504
30	14/9/2015	31	365	0,015504

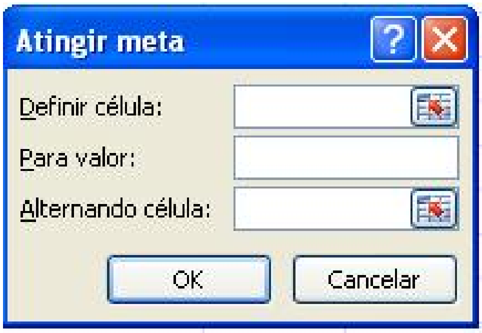
Observe a taxa de juros dos períodos de 31 e 28 dias.

- ***5º passo:*** na célula D40 escreva "parcela:" . Na célula E40 estará o valor das parcelas. Destaque as células com a cor laranja.

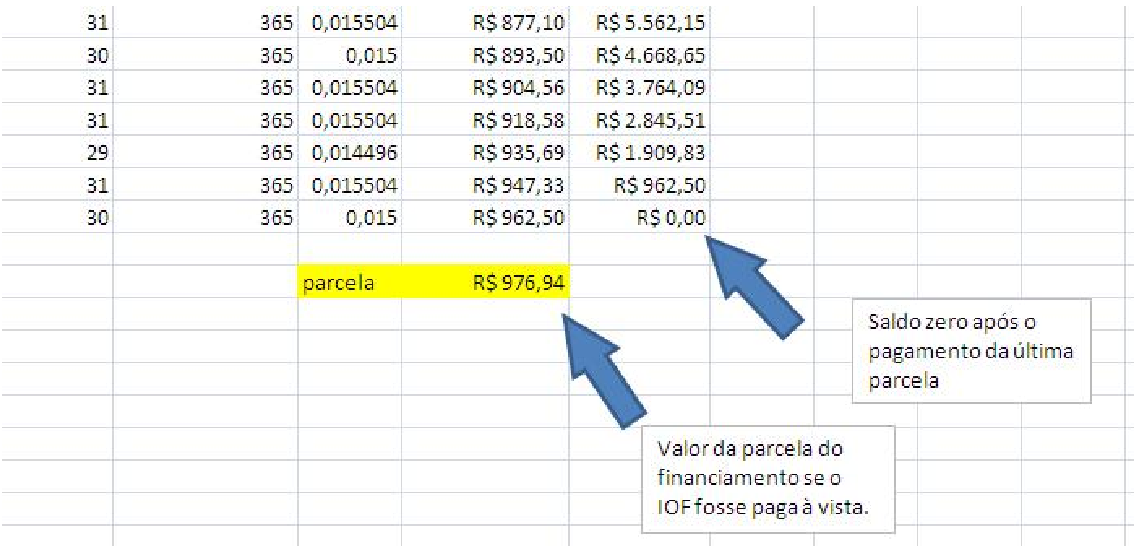


- ***6º passo:*** A amortização é a diferença entre o valor da prestação e os juros do período.O saldo devedor será amortizado até chegar ao valor zero em F38. Portanto digite em E3 "$=E40$ – D3*F2". Já em F3 digite "F2 – E3". Selecione E3 e F3 e arraste o mouse até as células E38 e F38.

Observe que os valores que encontramos nas colunas E e F estão estranhos. Por que aconteceu isso? Isso deve-se à parcela que não sabemos quanto vale. Temos que ter na célula F38 o valor zero. Para resolver esse problema, iremos até barra de ferramentas e teclaremos em "dados", em seguida, "teste de hipóteses" e por fim "atingir metas", onde aparecerá a seguinte janela:



Em definir célula digite "F38", em para valor digite "0" e em alternando célula digite "E40". Daí, teremos o valor da parcela do financiamento.



31	365	0,015504	R$ 877,10	R$ 5.562,15
30	365	0,015	R$ 893,50	R$ 4.668,65
31	365	0,015504	R$ 904,56	R$ 3.764,09
31	365	0,015504	R$ 918,58	R$ 2.845,51
29	365	0,014496	R$ 935,69	R$ 1.909,83
31	365	0,015504	R$ 947,33	R$ 962,50
30	365	0,015	R$ 962,50	R$ 0,00
		parcela	R$ 976,94	

- ***7º passo:*** Cálculo do IOF, no caso de pagamento à vista do mesmo. Nas células B43 e C43 digite “Al. Fixa” e “0,0038”, respectivamente. E nas células B44 e C44 digite “Al. Diária” e “0,000042”, respectivamente.Mescle as células B42 e C42 e digite “IOF”. Preencha as células com alguma cor formando uma tabela.

14/9/2015	31	365	0,015504	R$ 850,47	R$ 7.306,60
14/10/2015	30	365	0,015	R$ 867,34	R$ 6.439,26
14/11/2015	31	365	0,015504	R$ 877,10	R$ 5.562,15
14/12/2015	30	365	0,015	R$ 893,50	R$ 4.668,65
14/1/2016	31	365	0,015504	R$ 904,56	R$ 3.764,09
14/2/2016	31	365	0,015504	R$ 918,58	R$ 2.845,51
14/3/2016	29	365	0,014496	R$ 935,69	R$ 1.909,83
14/4/2016	31	365	0,015504	R$ 947,33	R$ 962,50
14/5/2016	30	365	0,015	R$ 962,50	R$ 0,00
			parcela	R$ 976,94	

IOF	
Al. Fixa	0,0038
Al. diária	0,000042

A seguir digite na célula G3 “=E3*(C41 + C42*C3)”. Selecione G3 e arraste o mouse até G38. Na célula G39, digite “=soma()”, daí selecione todos os valores que estão na coluna G.

Teremos o valor total do IOF de R$ 465,00. Esse seria o valor do IOF do financiamento caso fosse pago à vista. Fazendo uma regra de três encontraremos o valor do IOF que será financiado. Veja:

cálculo do IOF a financiar	
26.915,96	465,00
26.915,96 + x	x

Resolvendo a regra de três simples teremos x = R$ 473,17. Logo o saldo a financiar será de R$ 26.915,96 + R$ 473,17 = R$ 27.389,13. Logo, esse será o novo valor da célula F2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data	D/C	Dias acumulados	Juros	Amortização	Saldo	IOF
2	14/5/2013					R$ 27.389,13	
3	14/6/2013	31	31	0,015504	R$ 552,30	R$ 26.836,83	R$ 2,82
4	14/7/2013	30	61	0,015	R$ 574,38	R$ 26.262,45	R$ 3,65
5	14/8/2013	31	92	0,015504	R$ 569,77	R$ 25.692,68	R$ 4,37
6	14/9/2013	31	123	0,015504	R$ 578,60	R$ 25.114,08	R$ 5,19
7	14/10/2013	30	153	0,015	R$ 600,23	R$ 24.513,85	R$ 6,14
8	14/11/2013	31	184	0,015504	R$ 596,88	R$ 23.916,97	R$ 6,88
9	14/12/2013	30	214	0,015	R$ 618,18	R$ 23.298,79	R$ 7,91
10	14/1/2014	31	245	0,015504	R$ 615,72	R$ 22.683,07	R$ 8,68
11	14/2/2014	31	276	0,015504	R$ 625,26	R$ 22.057,81	R$ 9,62
12	14/3/2014	28	304	0,013993	R$ 668,28	R$ 21.389,53	R$ 11,07
13	14/4/2014	31	335	0,015504	R$ 645,32	R$ 20.744,21	R$ 11,53
14	14/5/2014	30	365	0,015	R$ 665,77	R$ 20.078,44	R$ 12,74
15	14/6/2014	31	365	0,015504	R$ 665,64	R$ 19.412,80	R$ 12,73

O valor que será financiado é a soma do valor do veículo + taxas administrativas + IOF.

Observemos que o saldo F38 não é zero, então procederemos da seguinte maneira: teclaremos em “dados” , em seguida “teste de hipóteses” e por fim “atingir metas” e repetiremos o processo do sexto passo.

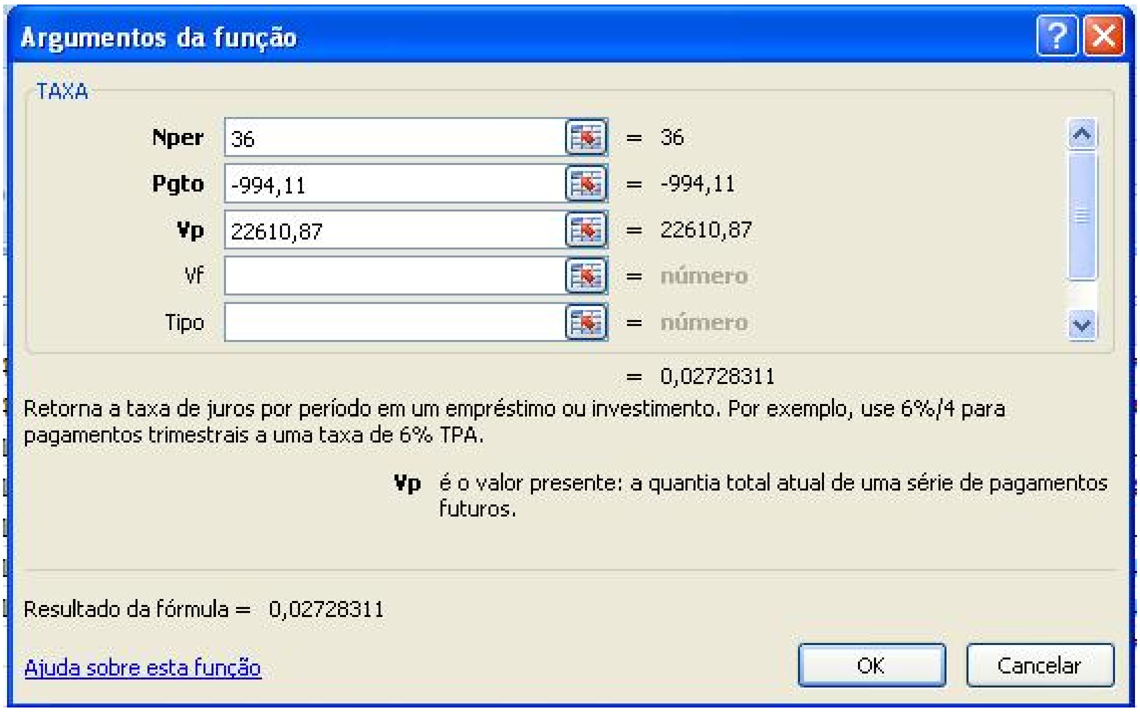
Observe agora na planilha a parcela que representa a prestação do financiamento, R$ 994,11, e perceba também que o valor do IOF (ver célula G39) realmente é R$ 473,17.

E40 | 1062,03909067498

	A	B	C	D	E	F	G
28	14/7/2015	30	365	1,50%	R$ 942,93	R$ 6.997,76	R$ 18,04
29	14/8/2015	31	365	1,55%	R$ 953,55	R$ 6.044,21	R$ 18,24
30	14/9/2015	31	365	1,55%	R$ 968,33	R$ 5.075,88	R$ 18,52
31	14/10/2015	30	365	1,50%	R$ 985,90	R$ 4.089,98	R$ 18,86
32	14/11/2015	31	365	1,55%	R$ 998,63	R$ 3.091,35	R$ 19,10
33	14/12/2015	30	365	1,50%	R$ 1.015,67	R$ 2.075,68	R$ 19,43
34	14/1/2016	31	365	1,55%	R$ 1.029,86	R$ 1.045,82	R$ 19,70
35	14/2/2016	31	365	1,55%	R$ 1.045,82	R$ 0,00	R$ 20,01
36	TOTAL						R$ 467,05
37							
38							
39							
40		IOF		parcela	R$ 1.062,04		
41		Al. fixa	0,0038				
42		Al. diária	0,000042				
43							
44							

A taxa CET será determinada a partir do valor a financiar subtraindo os encargos (IOF) e taxas. Logo , o valor a finaciar é $FC_0 = 25.000,00 - 1.915,96 - 473,17 = R\$22.610,87$

Daí, procederemos da seguinte forma:escreva “CET” na célula C46, e selecione a célula D46. A partir daí tecle “fórmulas”, em seguida “financeira” e logo após “taxa”, e então preencha a janela que aparecerá da seguinte maneira:



O valor do CET será de 2,7 % a.m. (bem maior do que a taxa de 1,5 % a.m. anunciada).

14/11/2015	31	365	0,01550386	R$ 892,52	R$ 5.659,93	R$ 17,07
14/12/2015	30	365	0,015	R$ 909,21	R$ 4.750,72	R$ 17,39
14/1/2016	31	365	0,01550386	R$ 920,46	R$ 3.830,26	R$ 17,61
14/2/2016	31	365	0,01550386	R$ 934,73	R$ 2.895,54	R$ 17,88
14/3/2016	29	365	0,01449639	R$ 952,14	R$ 1.943,40	R$ 18,21
14/4/2016	31	365	0,01550386	R$ 963,98	R$ 979,42	R$ 18,44
14/5/2016	30	365	0,015	R$ 979,42	R$ 0,00	R$ 18,74
						R$ 473,17
			parcela	R$ 994,11		
	IOF					
	Al. Fixa	0,0038				
	Al. diária	0,000042				
		CET	2,7%			

14.5 Desconto de duplicatas

*A empresa **Mente Brilhante** possui algumas duplicatas a receber como mostra a tabela a seguir.*

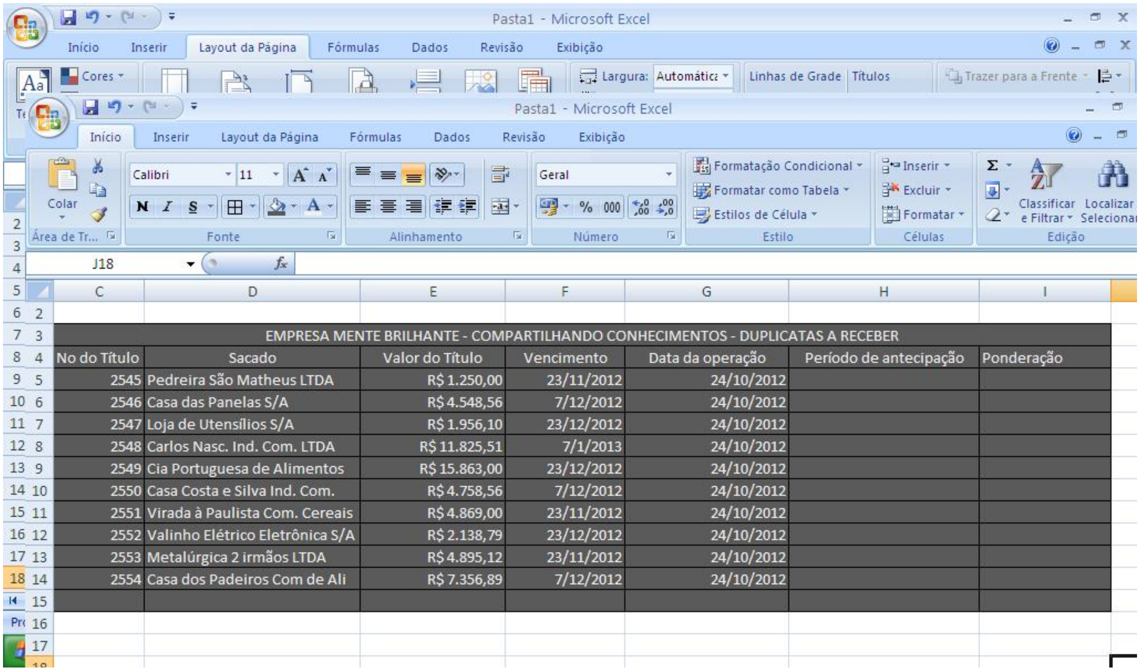
DUPLICATAS A RECEBER			
Nº	SACADO	VALOR DO TÍTULO	VENCIMENTO
2545	Pedreira S. Matheus	1.250,00	23/11/2012
2546	Casa das Panelas	4.548,56	07/12/12
2547	Loja de Utensílios S/A	1.956,10	23/12/12
2548	Carlos Nascimento - Ind. Com.	11.825,51	07/01/13
2549	Cia Portuguesa de Al.	15.863,00	23/12/12
2550	Casa Costa e Silva	4.758,56	07/12/12
2551	Virado à Paulista Com. Cereais	4.869,00	23/11/12
2552	Valinhos El. Eletrônicos S/A	2.138,79	23/12/12
2553	Metalúrgica 2 irmãos	4.895,12	23/11/12
2554	Casa dos padeiros	7.356,89	07/12/12

Sabe-se que a data de antecipação das duplicatas é 24/10/12, pede-se:

(a) O valor do desconto;

(b) O valor descontado total.

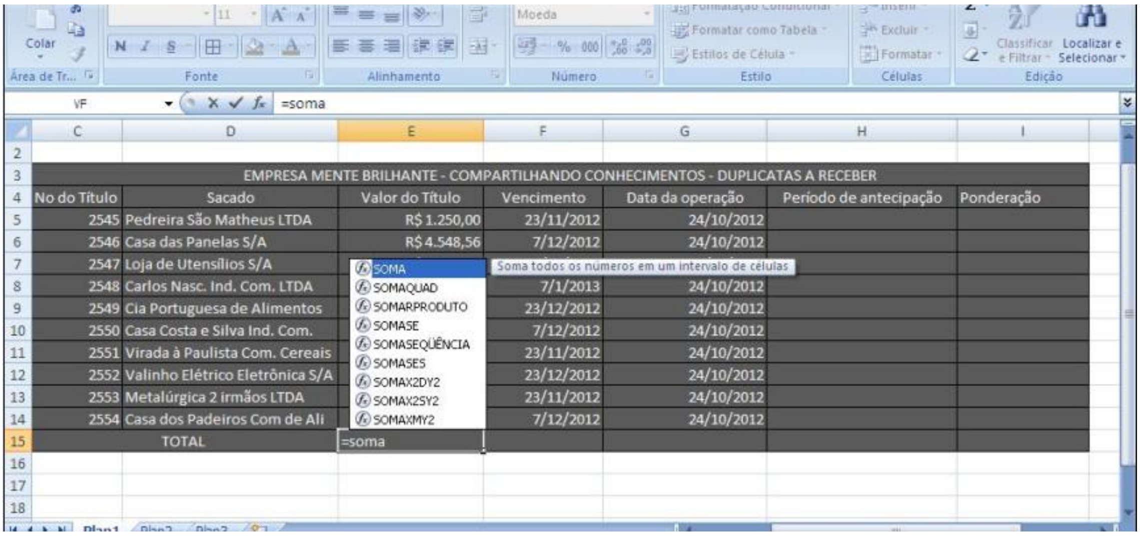
Solução:
Iremos utilizar o excel para nos auxiliar na resolução.
Inicialmente formaremos a seguinte tabela no excel:



EMPRESA MENTE BRILHANTE - COMPARTILHANDO CONHECIMENTOS - DUPLICATAS A RECEBER						
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012		
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012		
2547	Loja de Utensílios S/A	R$ 1.956,10	23/12/2012	24/10/2012		
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA	R$ 11.825,51	7/1/2013	24/10/2012		
2549	Cia Portuguesa de Alimentos	R$ 15.863,00	23/12/2012	24/10/2012		
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.	R$ 4.758,56	7/12/2012	24/10/2012		
2551	Virada à Paulista Com. Cereais	R$ 4.869,00	23/11/2012	24/10/2012		
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A	R$ 2.138,79	23/12/2012	24/10/2012		
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA	R$ 4.895,12	23/11/2012	24/10/2012		
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali	R$ 7.356,89	7/12/2012	24/10/2012		

Para sabermos o valor descontado das duplicatas, não será necessário calcular o desconto em cima do valor de cada uma delas separadamente. Para isso, somaremos os valores de todas as duplicatas. O prazo de antecipação será a média de todos os

prazos, ponderada pelo valor nominal de cada duplicata.
Na célula E15 digitaremos "=SOMA ", clique em soma, e em seguida selecione as células E5, E6, ... e E14 e tecle enter.



EMPRESA MENTE BRILHANTE - COMPARTILHANDO CONHECIMENTOS - DUPLICATAS A RECEBER						
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012		
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012		
2547	Loja de Utensílios S/A					
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA		7/1/2013	24/10/2012		
2549	Cia Portuguesa de Alimentos		23/12/2012	24/10/2012		
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.		7/12/2012	24/10/2012		
2551	Virada à Paulista Com. Cereais		23/11/2012	24/10/2012		
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A		23/12/2012	24/10/2012		
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA		23/11/2012	24/10/2012		
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali		7/12/2012	24/10/2012		
TOTAL		=soma				

Para determinar o prazo de antecipaçao da duplicata 2545, digite na célula H5 "=F5 - G5"e tecle enter. Para determinar os prazos de antecipação de todas as outras duplicatas, selecione a célula H5 e arraste com o mouse até a célula H14.

EMPRESA MENTE BRILHANTE - COMPARTILHANDO CONHECIMENTOS - DUPLICATAS A RECEBER						
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012	30	
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012	44	
2547	Loja de Utensílios S/A	R$ 1.956,10	23/12/2012	24/10/2012	60	
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA	R$ 11.825,51	7/1/2013	24/10/2012	75	
2549	Cia Portuguesa de Alimentos	R$ 15.863,00	23/12/2012	24/10/2012	60	
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.	R$ 4.758,56	7/12/2012	24/10/2012	44	
2551	Virada à Paulista Com. Cereais	R$ 4.869,00	23/11/2012	24/10/2012	30	
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A	R$ 2.138,79	23/12/2012	24/10/2012	60	
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA	R$ 4.895,12	23/11/2012	24/10/2012	30	
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali	R$ 7.356,89	7/12/2012	24/10/2012	44	
TOTAL		R$ 59.461,53				

Para determinar a ponderação, na célula I5 digite "=E5*H5"e tecle enter. Em seguida selecione a célula I5 e arraste o mouse sobre a coluna I até a célula I14. Na célula I15 determinaremos a soma das ponderações.

Sendo assim, podemos determinar o prazo médio, que será exposto na célula H15.

Na célula H15 digite "=I15/E15"e tecle enter. Encontraremos o valor 53.

C	D	E	F	G	H	I
EMPRESA MENTE BRILHANTE - COMPARTILHANDO CONHECIMENTOS - DUPLICATAS A RECEBER						
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 37.500,00
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 200.136,64
2547	Loja de Utensílios S/A	R$ 1.956,10	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 117.366,00
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA	R$ 11.825,51	7/1/2013	24/10/2012	75	R$ 886.913,25
2549	Cia Portuguesa de Alimentos	R$ 15.863,00	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 951.780,00
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.	R$ 4.758,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 209.376,64
2551	Virada à Paulista Com. Cereais	R$ 4.869,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.070,00
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A	R$ 2.138,79	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 128.327,40
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA	R$ 4.895,12	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.853,60
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali	R$ 7.356,89	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 323.703,16
TOTAL		R$ 59.461,53			53	R$ 3.148.026,69

Agora iremos determinar a taxa de desconto do período. Sabemos que a taxa nominal de desconto é 1,8 % a.m. , dividindo por 30 dá 0,06 % ao dia, que é a taxa efetiva. Agora iremos determinar a taxa relativa ao prazo de 53 dias. Digitaremos na célula F18 ”=((1,0006)53)-1”e tecla enter. Encontraremos o valor 0,32301178, que em porcentagem é 3,23%.

=((1,0006)^53)-1

C	D	E	F	G	H	I
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 37.500,00
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 200.136,64
2547	Loja de Utensílios S/A	R$ 1.956,10	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 117.366,00
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA	R$ 11.825,51	7/1/2013	24/10/2012	75	R$ 886.913,25
2549	Cia Portuguesa de Alimentos	R$ 15.863,00	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 951.780,00
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.	R$ 4.758,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 209.376,64
2551	Virada à Paulista Com. Cereais	R$ 4.869,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.070,00
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A	R$ 2.138,79	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 128.327,40
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA	R$ 4.895,12	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.853,60
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali	R$ 7.356,89	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 323.703,16
TOTAL		R$ 59.461,53			53	R$ 3.148.026,69
	Taxa efetiva do prazo médio:		=((1,0006)^53)-1			

Pra finalizar, na célula F19 digite ”=F18*E15”. Encontraremos $R\$1.920,68$, que é o valor do desconto.
Para encontrarmos o valor descontado, digitaremos em F20 ”=E15 - F19”.

C	D	E	F	G	H	I
No do Título	Sacado	Valor do Título	Vencimento	Data da operação	Período de antecipação	Ponderação
2545	Pedreira São Matheus LTDA	R$ 1.250,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 37.500,00
2546	Casa das Panelas S/A	R$ 4.548,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 200.136,64
2547	Loja de Utensílios S/A	R$ 1.956,10	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 117.366,00
2548	Carlos Nasc. Ind. Com. LTDA	R$ 11.825,51	7/1/2013	24/10/2012	75	R$ 886.913,25
2549	Cia Portuguesa de Alimentos	R$ 15.863,00	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 951.780,00
2550	Casa Costa e Silva Ind. Com.	R$ 4.758,56	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 209.376,64
2551	Virada à Paulista Com. Cereais	R$ 4.869,00	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.070,00
2552	Valinho Elétrico Eletrônica S/A	R$ 2.138,79	23/12/2012	24/10/2012	60	R$ 128.327,40
2553	Metalúrgica 2 irmãos LTDA	R$ 4.895,12	23/11/2012	24/10/2012	30	R$ 146.853,60
2554	Casa dos Padeiros Com de Ali	R$ 7.356,89	7/12/2012	24/10/2012	44	R$ 323.703,16
	TOTAL	R$ 59.461,53			53	R$ 3.148.026,69

Taxa efetiva do prazo médio:	3,23%
valor do desconto	R$ 1.920,68
Valor descontado	R$ 57.540,85

Referências Bibliográficas

[1] Milone, C.: *M*atemática Financeira, Ed. xxx (2002)

[2] Puccini, E. C.: *Matemática Financeira*, Notas de aula do Sistema Universidade Aberta do Brasil (2007) Disponível em `http://portal.mec.gov.br`

[3] Morgado, A.C.:*A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, SBM (2006)

[4] Coelho, Fábio Ulhoa. *Curso de Direito Comercial*, V. 1. São Paulo: Saraiva, 2010. Pág. 397-398.

[5] Cury, Marcus Vinícius Quintela. *Matemática Financeira*, Volume 1,FGV

[6] Globo, vários autores. *O Livro da Economia*, Globo (2013)

[7] Ramos, I. B.: *Mercado de capitais*, Ed. UNIASSELVI (2011).

[8] Sodré, U.: *Matemática Financeira*, disponível em `http://http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/financeira/amortiza/amortiza.htm`