UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WILLIAM JOSÉ BRUGINSKI

DESENVOLVIMENTO DE PLANILHAS DINÂMICAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CURITIBA

2014

WILLIAM JOSÉ BRUGINSKI

DESENVOLVIMENTO DE PLANILHAS DINÂMICAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Dr.Vitor José Petry

CURITIBA

2014

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 010

"Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o *software* Geogebra para o estudo de funções trigonométricas"

por

William José Bruginski

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 21 de fevereiro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profª. Ivanete Zuchi Siple, Drª.
(UDESC/Joinville)

Prof. Fabio Antonio Dorini, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

B891 Bruginski, William José
Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software GeoGebra para o estudo de funções trigonométricas / William José Bruginski. – 2013.
55 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Vitor José Petry.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 54.

1. Funções trigonométricas. 2. Trigonometria. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Tecnologia educacional. 5. Software educacional. 6. Matemática – Dissertações. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, José e Rosi, pelo amor incondicional e apoio em todos os momentos da minha vida.
- Ao meu irmão Bruno, grande parceiro, com quem sempre posso contar, Deus não poderia ter escolhido um irmão melhor.
- A minha namorada Bruna que nesse tempo juntos sempre me apoiou principalmente nos momentos mais difíceis e me incentivou a concluir mais esta etapa.
- Aos meus tios, tias e avós pela presença constante, pelos conselhos e pela torcida.
- Ao meu grande amigo Daniel Almeida pela parceria deste dos tempos da graduação, seus sempre bem-vindos conselhos e seu estímulo para eu não desistir dos meus objetivos.
- Ao meu amigo Guilherme Egg que durante esta caminhada do mestrado sempre esteve presente e acreditou na minha capacidade.
- Ao meu orientador Dr.Vitor José Petry que com seus conselhos, sabedoria e uma boa dose de insistência, foi o grande responsável pela conclusão desta dissertação.

  A todos os mencionados o meu mais sincero obrigado.

RESUMO

BRUGINSKI, William José . DESENVOLVIMENTO DE PLANILHAS DINÂMICAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. 55 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Esta dissertação foi desenvolvida com o intuito de criar uma ferramenta para auxiliar no ensino da trigonometria. A ferramenta foi criada com o apoio de recursos tecnológicos e o Geogebra foi o software escolhido para a elaboração deste projeto. Devido a quantidade de recursos que o software dispõe principalmente a possibilidade de trabalhar de forma integrada a geometria com a álgebra, este foi um grande aliado na criação das planilhas dinâmicas. Na sequência foi desenvolvida a parte teórica das funções trigonométricas com as suas definições, as características, construções dos gráficos e foram apresentadas as contribuições que as planilhas dinâmicas proporcionam neste estudo.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas, Geogebra, Ensino da Matemática.

ABSTRACT

BRUGINSKI, William José . DEVELOPMENT OF DYNAMIC SPREADSHEETS USING GEOGEBRA SOFTWARE FOR THE STUDY OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS. 55 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This work was developed with the intention of creating a new tool to assist in teaching trigonometry. The tool has been created with the support of technological resources and Geogebra software has been chosen for the development of this project. Because the amount of resources that the software provides, especially the ability to work seamlessly geometry and algebra, this was a great ally in the creation of dynamic spreadsheets. Following was developed theoretical part of trigonometric functions with their definitions, characteristics, construction of graphs and contributions that dynamic spreadsheets provide this study were presented.

Keywords: Trigonometric Functions, Geogebra, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante a formação acadêmica muitos alunos apresentam dificuldade na compreensão de diferentes conteúdos matemáticos, às vezes por serem muito teóricos e outras pela ênfase dada pelo professor nas definições e conceitos, não transpondo para uma situação mais prática e até mesmo visual.

A partir da percepção dessas dificuldades surgiu a motivação para o desenvolvimento desta dissertação. Observando a abordagem de conteúdos de matemática em sala de aula do ponto de vista de um Professor nota-se que a aprendizagem pode ser melhor assimilada pelo educando quando acompanhada de algum recurso que desperte sua atenção. Nesta vertente Gabriela Zóboli (ZÓBOLI, 1995. p.23.) afirma: "Quando a escola não oferece motivação, a criança desinteressa-see muitas vezes, fica indisciplinada". Sendo assim, este trabalho é uma tentativa de apresentar para os educadores ferramentas para serem adotadas em sala de aula e estimulá-las ao uso dos recursos tecnológicos.

É importante destacar que o uso de recursos tecnológicos é algo que vem sendo difundidos por diversos matemáticos para que sejam usados amplamente nas salas de aula no intuito de auxilar os professores, (SANT'ANNA, 2004) recomenda que o professor insira os recursos tecnológicos disponíveis para que a informação ganhe vida.

A adoção desses recursos passou a ser essencial e inevitável para a educação, pois com a revolução tecnológica que vem ocorrendo nas últimas décadas a sociedade passa por uma forte mudança, conseguindo várias informações com apenas um "click"e numa velocidade muito grande. Se a escola não acompanha essa mudança e não traz recursos atuais para auxiliar no ensino provavelmente não conseguirá manter os alunos interessados com a aprendizagem, uma vez que esta acontece num ritmo muito abaixo do promovido fora do ambiente escolar. Considerando que na atualidade a tecnologia esta institucionalizada em tudo ao nosso redor, aproveitar estes recursos e melhorar a maneira tradicional de ensinar é quase um dever dos professores.

Corroborando com o exposto Vanderley Pereira Gomes (GOMES, 2013. p.02.) escreve:

> Hoje, parece ser consenso geral a necessidade de ensinar matemática de forma contextualizada e que tenha relevância ao educando. É nesse contexto que a utilização dos recursos tecnológicos no processo ensino-aprendizagem permite a interação de todos os que nele estão envolvidos: escola, família e sociedade.

Como o citado há uma corrente em favor do uso dos recursos tecnológicos para auxiliar no ensino da matemática. Entretanto, há educadores que não são adeptos a esta inovação por diversos fatores, entre eles o comodismo e a falta de tempo em incorporar este recursos em suas aulas. No entanto, é necessário sair dessa “zona de conforto”e mudar sua forma de atuar buscando novos recursos e metodologias para o ensino. O que esses professores precisam perceber é que o uso destes recursos vem contribuir com a educação tornando conceitos matemáticos vistos como abstratos e complexos mais claros e concretos. A abordagem do conteúdo através das novas práticas pode deixar a matemática mais fácil e significativa, tornando-a mais acessível e compreensível.

Vanderley Pereira Gomes (GOMES, 2013. p.05.), ainda, usa uma metáfora de Mikhail L. Gromov:

> Estando em nossa torre de marfim, o que podemos dizer? Estamos nesta torre de marfim, e nos sentimos confortáveis nela. Mas, realmente, não podemos dizer muito porque não vemos bem o mundo. Temos que sair, mas isto não é tão fácil. (Gromov, apud D’Ambro’sio, 2010)

Portanto, para manter o educando estimulado em sala de aula, o professor precisa ser criativo e fazer da escola uma extensão da realidade que o aluno vive fora dela. De acordo com Ábila (p-34, 2010) “descobrir novos métodos e meios de ensino é uma forma de inovar, a fim de motivar e encantar os estudantes para a aprendizagem”.

A especialista em tecnologias educacionais Sueli Scherer (SCHERER, 2013) relata a importância do uso de tecnologia na educação “a linguagem digital acaba sendo estruturante do pensamento humano, pois a atual geração já nasceu na era digital e os professores devem usar esse conhecimento a favor do aprendizado”.

Com a certeza que o uso de recursos tecnológicos podem contribuir para o ensino de matemática, foi selecionado o conteúdo de trigonometria para se desenvolver uma ferramenta com o intuito de auxiliar os professores na explanação deste conteúdo. A escolha desse conteúdo foi motivada devido a dificuldade de compreensão apresentada pelo alunos, seja pela aparente falta de sintonia entre a parte teórica e visual, ou pela fragmentação desse conteúdo nos programas escolares. Nota-se que a trigonometria é estuda em três momentos distintos, inicia-se com a aprendizagem das relações trigonométricas no 9º ano, o ensino do ciclo trigonométrico é desenvolvido no 1º do ensino médio e as funções trigonométricas estudas, em alguns casos, no 2º ano.

Para o desenvolvimento dessa ferramenta foi utilizado o Geogebra, um software gratuito, que pode ser utilizado em diversos níveis de educação porque reúne geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculos de uma maneira geral e prática. É um software premiado com diversos títulos de software educacional, podendo ser acessado e baixado pelo site www.geogebra.org.

Após a escolha do conteúdo a ser abordado e do software para o desenvolvimento da ferramenta, o objetivo do trabalho é criar uma ferramenta que auxilie os professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, por meio das planilhas dinâmicas do Geogebra. Essa ferramenta foi criada especialmente para o ensino de nível médio, podendo até ser aproveitada em algumas disciplinas de nível superior que envolvam as funções trigonométricas, por exemplo, as disciplinas de cálculo.

A dissertação inicia no processo de elaboração das planilhas dinâmicas do Geogebra. Utilizou-se a palavra planilha por um de seus significados: "Zona ou área de planejamento de algo. Colocação de resultados ou exercício na zona ou área de planejamento", que é exatamente o que se fez nesta dissertação, criou-se no Geogebra áreas onde se desenvolvem as funções trigonométricas. A palavra dinâmica é pelo fato do software oferecer a opção de movimentação dos objetos inseridos, com o botão de "play"dinamizando as funções.

As planilhas dinâmicas basicamente consistem em ambientes nos quais se desenvolvem simultaneamente o ciclo trigonométrico e as funções trigonométricas. O processo de desenvolvimento das planilhas dinâmicas foi longo, exigiu um estudo aprofundado dos recursos disponíveis. Foram criadas um total de 33 planilhas dinâmicas, todas hospedadas no link www.geogebratube.org/student/b91463, mostrando as relações necessárias para o estudo da trigonometria. O estudo inicia-se pelas principais funções: seno, cosseno e tangente, passando por algumas propriedades básicas como por exemplo, a Relação Fundamental da Trigonometria, conclui-se com as demais funções trigonométricas e alguns parâmetros que alteram o comportamento das funções.

Após a criação das planilhas dinâmicas passou-se a desenvolver o conteúdo de trigonometria e mostrar que com o auxílio das planilhas cada definições, teorema ou propriedade pode ser explicada de uma maneira mais interativa e visual. Como o Geogebra tem o recurso de acionar o “play”e “pausa”nas funções, o professor pode no momento que julgar mais oportuno, enfatizar algumas situações como, por exemplo, os quadrantes nos quais as funções trigonométricas são positivas ou negativas, os pontos de máximo ou mínimo das funções e até mesmo a paridade e a periodicidade das funções.

Na dissertação há uma seção prelimimar na qual são apresentadas algumas definições úteis para o desenvolvimento do trabalho como: periodicidade, paridade, monotonicidade de uma função e as unidades de medida de um ângulo: grau e radiano. Ainda, nas próximas subseções é feita uma abordagem completa sobre o ciclo trigonométrico, desde a sua construção passando pelas definições das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente e a obtenção da Relação Fundamental da Trigonometria, finalizando com a definição do que são os arcos côngruos. Nas seções seguintes são trabalhadas as funções trigonométricas com suas definições formais, as principais características de cada função e o que as planilhas dinâmicas podem contribuir para o estudo das mesmas. Esse estudo é separado em quatro seções. Inicialmente defini-se a função seno e a partir do desenvolvimento do seu gráfico juntamente com o auxílio das planilhas dinâmicas são analisadas as contribuições que essas podem dar ao estudo dessa função, tais como: domínio, imagem, período, paridade, intervalos de crescimento e decrescimento e momentos que a função é positiva ou negativa. Nas duas seções seguintes, são feitas estas mesmas análises para as funções trigométricas: cosseno e tangente. Após o estudo das principais funções trigonométricas são abordados de uma maneira sucinta as demais funções: secante, cossecante e cotangente. Finalizando o capítulo 2, na sua última seção, há um estudo detalhado dos parâmetros que podem alterar o gráfico das funções trigonométricas. Para esse estudo foi elaborada uma planilha dinâmica que aborda as alterações promovidas pela soma e/ou multiplicação da função trigonométrica por uma constante e a soma e/ou multiplicação do argumento da função trigonométrica por uma constante. No capítulo 3, são apresentados alguns resultados julgados importantes para o estudo das funções trigonométricas que foram apenas mencionados ao longo da dissertação e que neste momento são demonstrados algebricamente, tais como: a paridade das funções seno e cosseno, a fórmula da soma de dois arcos para o seno e cosseno, parte importante na justificativa da fórmula do período das funções seno e cosseno. No capítulo 4, são apresentadas as considerações finais referentes a esse trabalho.

2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Antes de explanar o tema principal desse trabalho, faz-se necessário definir alguns conceitos que são importantes no estudo das funções trigonométricas.

2.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Inicialmente, convém abordar três definições gerais sobre função: a periodicidade, a paridade e a monotonicidade de uma função. Esses conceitos são essenciais para a compreensão do estudo e das conclusões obtidas nesta dissertação. Ainda, é relevante se definir o que é o ciclo trigonométrico e as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo qualquer neste ciclo para, posteriormente, ampliar estes conceitos para as funções trigonométricas.

2.1.1 FUNÇÃO PERIÓDICA

Definição 2.1 (função periódica)**.** *Uma função f chamada periódica de período p se para todo valor x pertencente ao seu domínio, tem-se:* $f(x) = f(x+p)$*.*

O menor valor positivo de p que satisfaz essa igualdade é chamado período fundamental ou, simplesmente, período de f.

2.1.2 PARIDADE DE UMA FUNÇÃO

Ao estudar o gráfico das funções nota-se que esses podem apresentar algum tipos de simetria ou nenhum. A presença de algum tipo de simetria pode ser útil para se determinar o gráfico de uma função em uma região de simetria. Nessa dissertação é observado dois tipos de simetria.

O primeiro caso a ser definido é quando a simetria da função é em relação ao eixo das ordenadas. Este tipo de simetria ocorre se um ponto $(-x, y)$ pertencer ao gráfico da função, então o ponto (x, y) também pertencerá. Assim, como o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos do tipo $(x, f(x))$, tem-se que: $f(-x) = f(x)$.

Portanto, a função que tiver o eixo y como eixo de simetria é denominada uma função par.

Definição 2.2 (função par)**.** *Seja o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que, se $x \in A$ então $(-x) \in A$. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.*

O segundo caso analisado é das funções que apresentam simetria em relação a origem do plano cartesiano. Nesta situação, a simetria acontece se um ponto $(-x, -y)$ pertencer ao gráfico da função, então o ponto (x, y) também pertencerá. Como o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$, tem-se: $f(-x) = -f(x)$. Assim, se a origem é o ponto de simetria de uma função, então ela é denominada função ímpar e é definida como:

Definição 2.3 (função ímpar)**.** *Seja o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que, se $x \in A$ então $(-x) \in A$. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.*

Após as definições de função par e ímpar, convém demonstrar algumas propriedades que são consequências destas definições.

Proposição 2.4. *Sejam f e g funções ímpares. Então, $f\,.\,g$ e $f\,/\,g$ são funções pares.*

Demonstração. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ ímpares e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$.

Então, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)}$.

Pela definição 2.3, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} = h(x)$.

Assim, como $h(-x) = h(x)$, conclui-se que $h(x)$ é uma função par.

□

A demonstração para o produto é análoga.

Proposição 2.5. *Sejam f e g funções pares. Então, $f\,.\,g$ e $f\,/\,g$ são funções pares.*

Demonstração. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ pares e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$.

Então, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)}$.

Pela definição 2.2, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x)$.

Assim, como $h(-x) = h(x)$, conclui-se que $h(x)$ é uma função par.

□

A demonstração para o produto é análoga.

Proposição 2.6. *Seja f uma função par e g uma função ímpar. Então, f . g e f / g são funções ímpares.*

Demonstração. Sejam as funções: $f(x)$ par, $g(x)$ ímpar e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$.

Então, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)}$.

Pelas definições 2.2 e 2.3, tem-se que: $h(-x) = \dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{-g(x)} = -h(x)$.

Assim, como $h(-x) = -h(x)$, conclui-se que $h(x)$ é uma função ímpar.

□

A demonstração para o produto é análoga.

Há outras propriedades envolvendo a paridade das funções, porém não serão apresentadas e demonstradas nesta dissertação por não serem o foco do estudo.

2.1.3 MONOTOCIDADE DE UMA FUNÇÃO

Dada uma função $f : A \to B$ tem-se que ela pode assumir quatro condições:

- f é crescente, se $\forall x,\ y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- f é estritamente crescente, se $\forall x,\ y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f é decrescente, se $\forall x,\ y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- f é estritamente decrescente, se $\forall x,\ y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

2.1.4 UNIDADES DE MEDIDA DE ARCOS

Para o estudo trigonometria é necessário definir as unidades de medida de ângulos e arcos de circunferência que são adotadas nesta dissertação.

GRAU

Ao se dividir uma circunferência em 360 partes congruentes, definiu-se que cada uma destas partes determinaria um arco de um grau (1º).

RADIANOS

Desde a Grécia antiga já era sabido que a razão entre o comprimento C e o diâmetro d de uma circunferência qualquer de raio r é uma constante. Esta constante, posteriormente, foi representada pela letra grega π , ou seja:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = d.\pi \Rightarrow C = 2\pi.r$$

Ainda, observar-se que os arcos de circunferência que determinam o mesmo ângulo central são semelhantes na mesma razão dos respectivos raios. Isso significa que, dado um ângulo central a razão entre o arco que esse determina e o raio associado a essa circunferência é um valor constante.

Logo, tem-se um número associado a cada ângulo de maneira única. Esse fato permite definir a razão anterior como uma outra maneira de medir ângulos, denominada **Radianos**.

Pela forma que os radianos foram definidos, tem-se que a medida de 1 rad (um radiano) é a medida do ângulo cujo arco determinado por ele tem comprimento igual ao raio da circunferência. Ainda, uma circunferência completa de raio r tem comprimento $C = 2\pi.r$, conforme a figura 1, assim seu ângulo central α é dado por $\alpha = \frac{2\pi.r}{r}$. Desta forma, o ângulo central de uma volta completa na circunferência tem a medida de 2π rad o que pode ser visto pelo link http://www.geogebratube.org/student/m91486.

2.1.5 CICLO TRIGONOMÉTRICO

As relações trigonométricas seno, cosseno e tangente são conhecidas para ângulos agudos no triângulo retângulo. A partir de agora esses conceitos serão trabalhados de maneira mais ampla, sendo estendidos para os demais ângulos e trabalhados dentro de um círculo denominado ciclo trigonométrico.

O ciclo trigonométrico é uma circunferência centrada na origem dos eixos cartesianos e com raio unitário. Da intersecção do ciclo trigonométrico com os eixos coordenados determina-se quatro pontos A, B, C e D de coordenadas $(1,0), (0,1), (0,-1)$ e $(-1,0)$, respectivamente. Esses pontos determinam quatro arcos congruentes chamados de quadrantes, os quais são contados no sentido anti-horário, iniciando no ponto A, conforme a figura 2.

Ainda, a determinação destes quadrantes também pode ser analisada pela abertura de

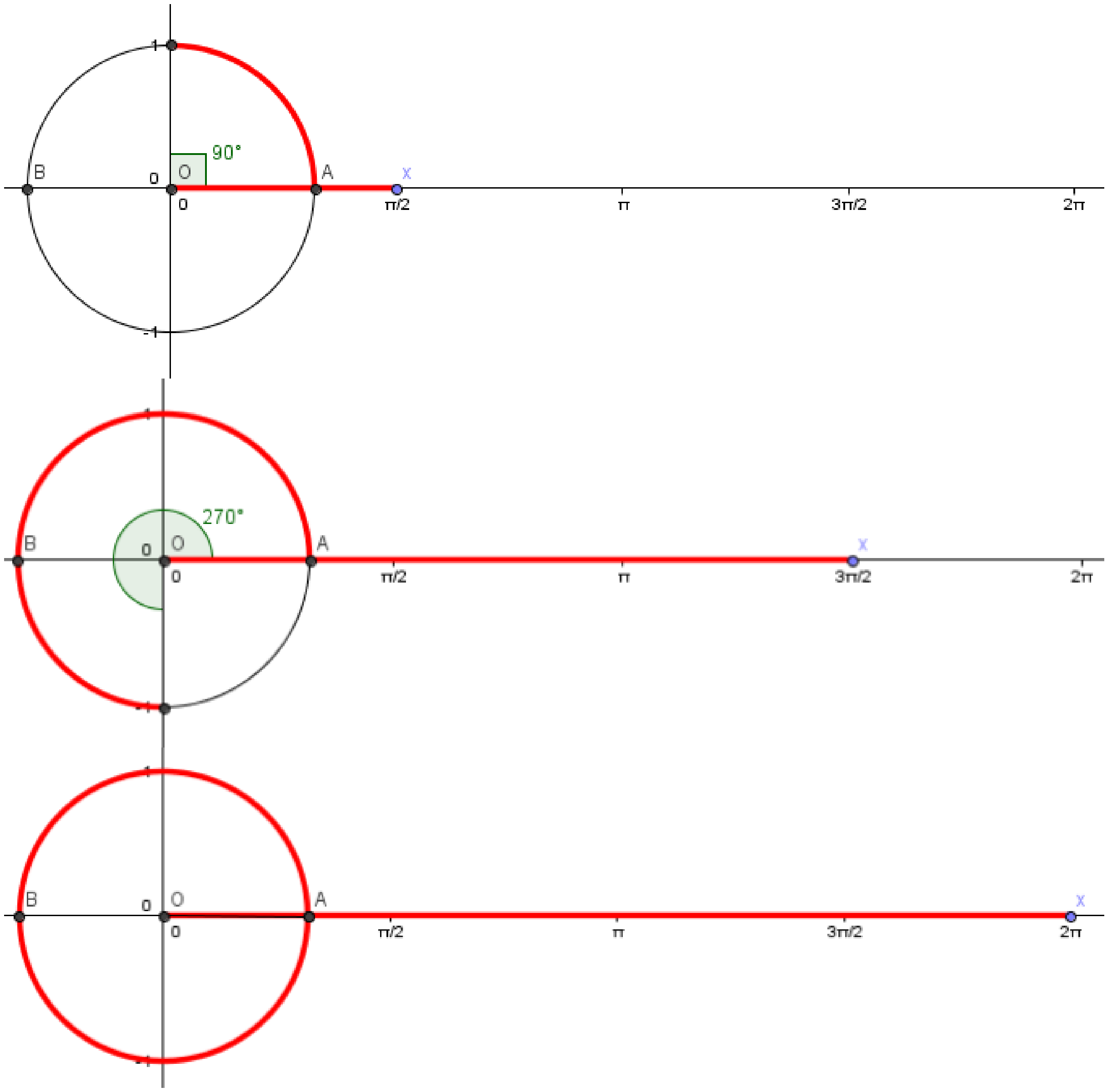

Figura 1: Comprimento da circunferência.

um arco $\widehat{AP}$ de ângulo α, conforme a tabela 1.

Tabela 1: Quadrantes no ciclo trigonométrico

Quadrante	Medida em graus	Medida em radianos
$P \in QI$	$0 < med(\widehat{AP}) < 90$	$0 < med(\widehat{AP}) < \frac{\pi}{2}$
$P \in QII$	$90 < med(\widehat{AP}) < 180$	$\frac{\pi}{2} < med(\widehat{AP}) < \pi$
$P \in QIII$	$180 < med(\widehat{AP}) < 270$	$\pi < med(\widehat{AP}) < \frac{3\pi}{2}$
$P \in QIV$	$270 < med(\widehat{AP}) < 360$	$\frac{3\pi}{2} < med(\widehat{AP}) < 2\pi$

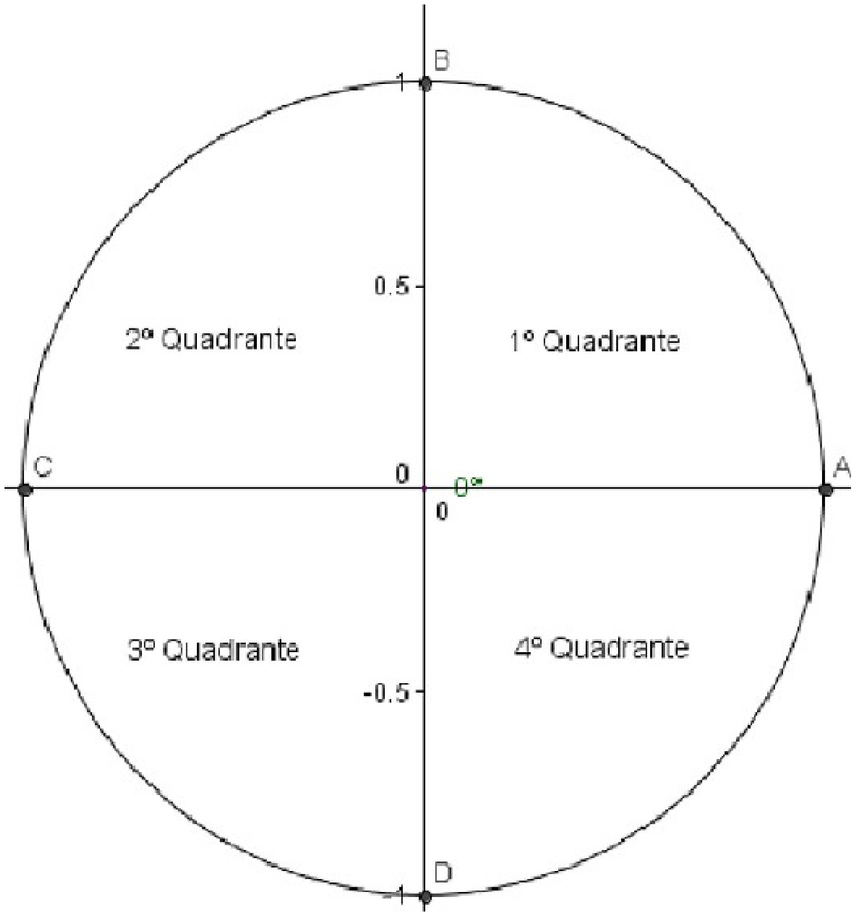

Figura 2: Divisão do ciclo trigonométricos em quadrantes.

2.1.6 DEFINIÇÃO DO SENO E COSSENO

No primeiro quadrante do ciclo trigonométrico observa-se um arco $\widehat{AP}$ de ângulo central PÔQ=α. Verifica-se que o raio $\overline{OP}$ e as projeções sobre os eixos coordenados do ponto *P* formam o triângulo *OPQ* retângulo no ponto *Q*, o qual tem *PQ* como cateto oposto ao ângulo α, $\overline{OQ}$ como cateto adjacente ao ângulo α e $\overline{OP}$ como hipotenusa, conforme a figura 3.

Assim, sendo o raio unitário, tem-se que:

$$sen(\alpha) = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{1}} = \overline{PQ} \tag{1}$$

$$cos(\alpha) = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{1}} = \overline{OQ} \tag{2}$$

Chegou-se a essas relações a partir do triângulo retângulo *OPQ*, quando o ponto *P* determina uma arco $\widehat{AP}$ no primeiro quadrante. Destas relações, tem-se que a projeção do ponto *P* sobre o eixo das abscissas é dado pelo cosseno do ângulo α e de maneira análoga a

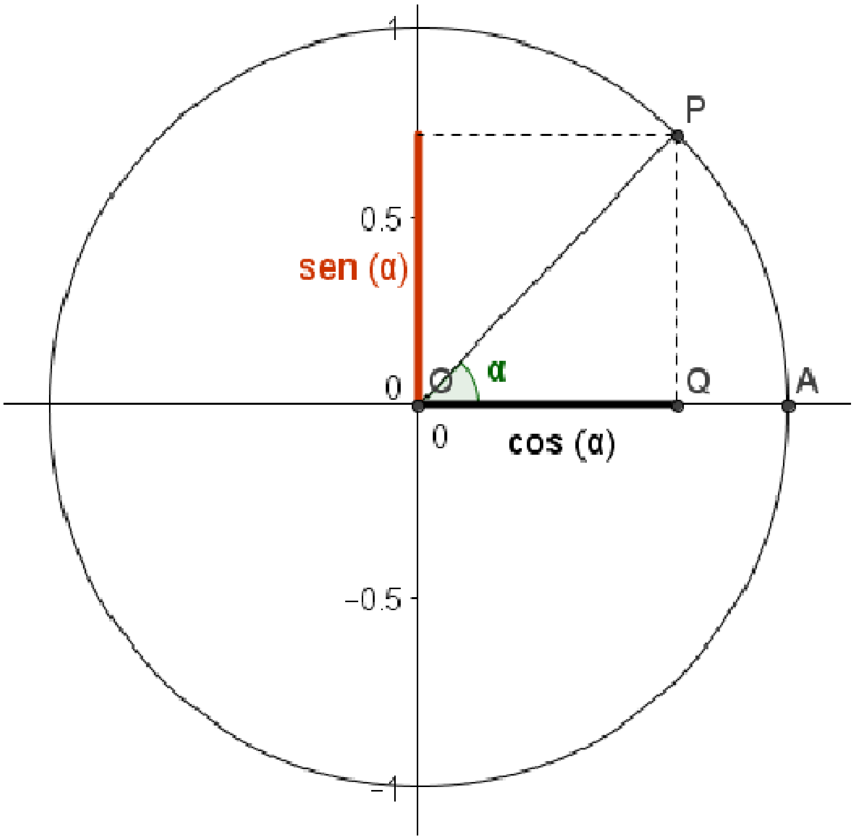

Figura 3: Definição seno e cosseno.

projeção do ponto P sobre o eixo das ordenadas é dado pelo seno do ângulo α.

Generalizando o conceito de seno e cosseno de um ângulo, para um ponto $P(m,n)$ sobre o ciclo trigonométrico, com m e n pertencentes ao intervalo $[-1,1]$:

Definição 2.7 (seno)**.** *Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ no ciclo trigonométrico, com $A(1,0)$ e med($\overset{\frown}{AP}$) = α com $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se seno como o valor da ordenada do ponto P.*

Definição 2.8 (cosseno)**.** *Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ no ciclo trigonométrico, com $A(1,0)$ e med($\overset{\frown}{AP}$) = α com $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se cosseno como o valor da abscissa do ponto P.*

Observa-se, ainda, que no triângulo OPQ pode ser aplicado o Teorema de Pitágoras, o que fornece a seguinte relação:

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \tag{3}$$

Essa relação é válida para qualquer arco e denomina-se **Relação Fundamental da Trigonometria**. Para o aluno visualizar a veracidade da igualdade 3 foi criada a planilha dinâmica http://www.geogebratube.org/student/m91483.

2.1.7 DEFINIÇÃO DA TANGENTE

Observa-se no ciclo trigonométrico, conforme a figura 4, o arco $\widehat{AP}$, a reta t tangente ao ciclo passando pelo ponto $A(1,0)$ e os triângulos OPQ e OAT. A partir destes elementos e aplicando a definição de tangente no triângulo OAT, obtêm-se:

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \tag{4}$$

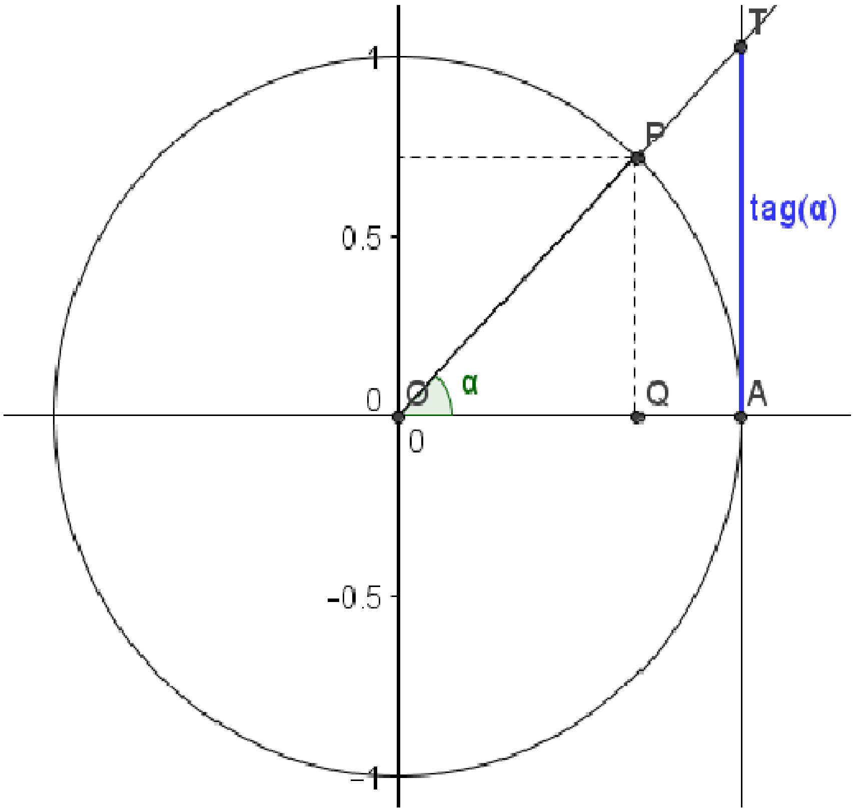

Figura 4: Definição da tangente.

Essa definição é válida para ângulos agudos. Generalizando para um ponto $P(m,n)$ com m e n pertencentes ao intervalo $[-1,1]$, tem-se que a tangente de um ângulo qualquer do ciclo trigonométrico é a ordenada do ponto T no plano cartesiano. Portanto, define-se:

Definição 2.9 (tangente)**.** *Dado um arco $\widehat{AP}$ no ciclo trigonométrico, com $A(1,0)$ e med($\widehat{AP}$) = α onde $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se tangente do ângulo α como o valor da ordenada do ponto T.*

2.1.8 ARCOS CÔNGRUOS

No ciclo trigonométrico pode-se obter infinitos arcos com origem em A e extremidade num ponto P. Quando se tem um arco $\widehat{AP}$ na primeira volta do ciclo diz-se que esta é a 1ª determinação do arco. Ao girar o ponto P em 2π rad (360º), observa-se que este ponto dá uma volta completa e retorna na mesma posição anterior, esta nova marcação chama-se 2ª determinação do arco $\widehat{AP}$. A cada novo giro de 2π rad (360º) do ponto P, encontram-se novas determinações para este arco, que coincidem com a abertura da 1ª determinação do arco. Os arcos que possuem a mesma determinação, são chamados arcos côngruos, os quais são definidos da seguinte maneira:

Definição 2.10 (Arcos côngruos)**.** *Dado um arco* $\widehat{AP}$ *de medida* α*, com* $0 \leq \alpha \leq 360$ *ou* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ *e um número k* ($k \in \mathbb{Z}$)*, pode-se dizer que todos os arcos côngruos a este serão do tipo:* $\alpha + k.360$ *ou* $\alpha + k : 2\pi$*.*

2.2 FUNÇÃO SENO

Para o estudo da função seno tem-se alguns objetivos, tais como a definição da função, construir o gráfico, o domínio, a imagem, a periodicidade e a paridade.

Definição 2.11 (função seno)**.** *A função seno é a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, que associa cada número real x ao valor* $sen(x)$*, ou seja,* $f(x) = sen(x)$*.*

Uma maneira para o professor introduzir o conteúdo é através da construção do gráfico da função seno para verificar seu comportamento, suas características e algumas particularidades. A construção pode ser facilitada com o uso do software Geogebra, através da planilha dinâmica criada e hospedada no http://www.geogebratube.org/student/m91465. Nessa planilha ao dar o "play", o ponto P extremidade do raio $\overline{OP}$ sobre a circunferência, descreve um arco $\widehat{AP}$ de ângulo central x e percorre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário. Simultaneamente a este fato, observa-se a trajetória de um ponto B de coordenadas $(x, sen(x))$ no plano cartesiano e conforme há variação no valor de x o ponto B é deslocado deixando um rastro que descreve o gráfico da função seno, de acordo com a figura 5.

Aproveitando a construção do gráfico na planilha dinâmica o professor mostra porque na definição da função seno o domínio é constituído de todos os números reais, uma vez que para cada valor no eixo das abscissas encontra-se um valor correspondente no eixo das ordenadas. A visualização desse comportamento, é facilitada pela opção de pausar a planilha dinâmica quando julgar conveniente.

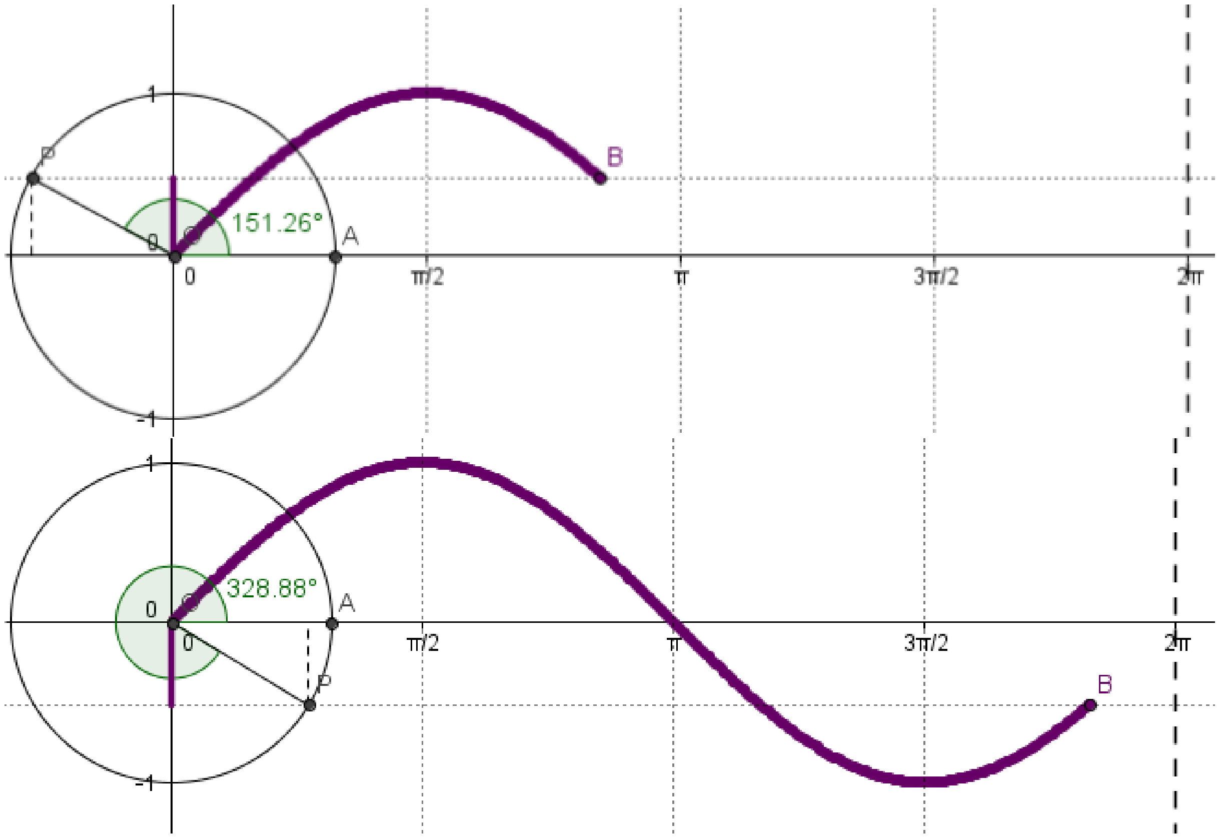

Figura 5: Gráfico da função seno.

Durante a execução da planilha dinâmica é interessante os alunos perceberem que a projeção do ponto P sobre o eixo y definida como seno do ângulo x tem o mesmo valor da ordenada do ponto B. Esse fato ajuda o educando a entender o conjunto imagem da função seno e o motivo deste conjunto conter apenas valores pertencentes ao intervalo $[-1,1]$. Isso ocorre, pois no ciclo trigonométrico o maior valor da ordenada é 1, quando o ângulo x é de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos (90º) e o seu menor valor é atingido na ordenada -1 quando x vale $\dfrac{3\pi}{2}$ radianos (270º).

Ainda, de uma maneira intuitiva, o professor pode instigar os educandos a observarem o comportamento do gráfico da função seno com o objetivo de concluirem que a ordenada do ponto B se “repete”a cada intervalo de 2π radianos, ou seja, que a função seno é periódico. Através da planilha www.geogebratube.org/student/m91487 e da figura 6 esta conclusão é facilitada pelo fato de que o aluno pode visualizar que conforme o arco $\widehat{AP}$ percorre o ciclo trigonométrico a função seno deixa um rastro sobre o eixo das abscissas e quando o arco completa a 1º volta no ciclo o processo se repete e a função passa a admitir os mesmos valores de ordenadas para o ponto B, porém com os valores de abscissa dados por $x+2p$ radianos.

Esta conclusão da periodicidade da função pode ser formalizada pelo professor a partir da definição 2.10, pois $f(x+2kp) = sen(x+2kp) = sen(x) = f(x)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Ainda, pela definição 2.1 determina-se o período desta função como $p = 2\pi$, uma vez que $f(x) = f(x+p)$.

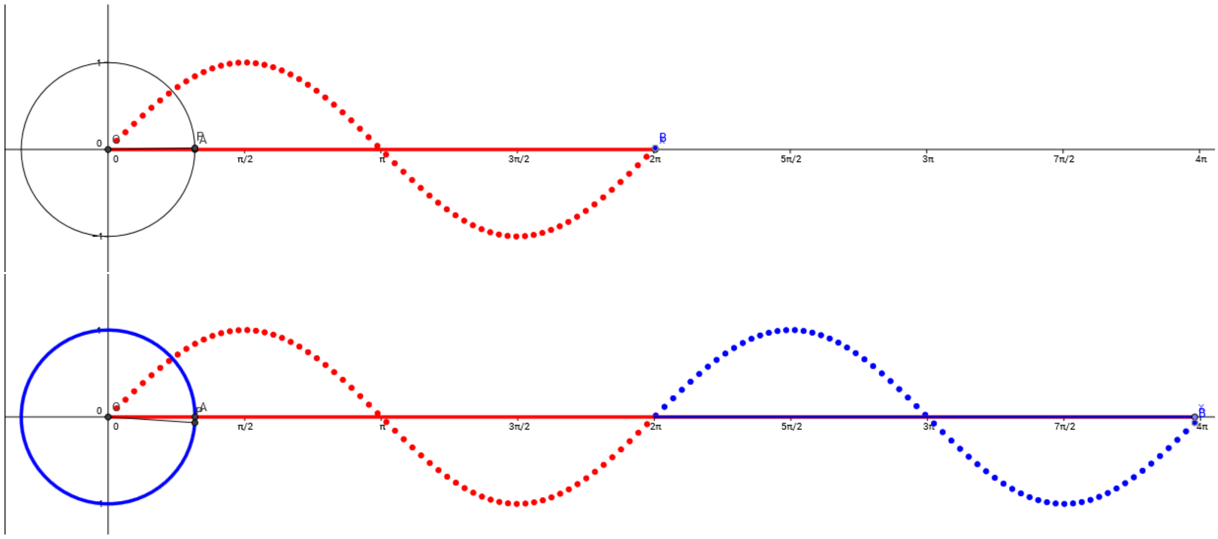

Figura 6: Período da função seno.

Da construção do gráfico da função seno o professor pode trabalhar os intervalos de crescimento e decrescimento desta função. Durante a execução da planilha dinâmica o arco $\widehat{AP}$ gira no sentido anti-horário e de uma forma bem visível, através de um segmento colorido representando a projeção do arco $\widehat{AP}$ sobre o eixo das ordenadas, nota-se que no 1º quadrante este segmento passa de apenas um ponto quando a medida do arco é de 0 rad para o comprimento de 1 u.m quando o arco tem a abertura de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos. Como no mesmo momento a função seno descreve seu gráfico, tem-se que no 1º quadrante esta função é crescente. De forma análoga, é analisado o seu comportamento nos demais quadrantes, a partir da figura 7. Obtem-se então:

- no intervalo de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (1º quadrante) a função f é crescente e $f(x) > 0$
- no intervalo de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (2º quadrante) a função f é decrescente e $f(x) > 0$
- no intervalo de $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (3º quadrante) a função f é decrescente e $f(x) < 0$
- no intervalo de $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (4º quadrante) a função f é crescente e $f(x) < 0$

Para se trabalhar os sinais que a função seno assume o professor pode aproveitar o estudo do crescimento e decrescimento para esclarecer em quais quadrantes a função é positiva ou negativa.

Pela figura 7, pode se fazer a análise passo a passo do comportamento da função seno para que o aluno entenda também o sinal que a função assume em cada quadrante. Como há o

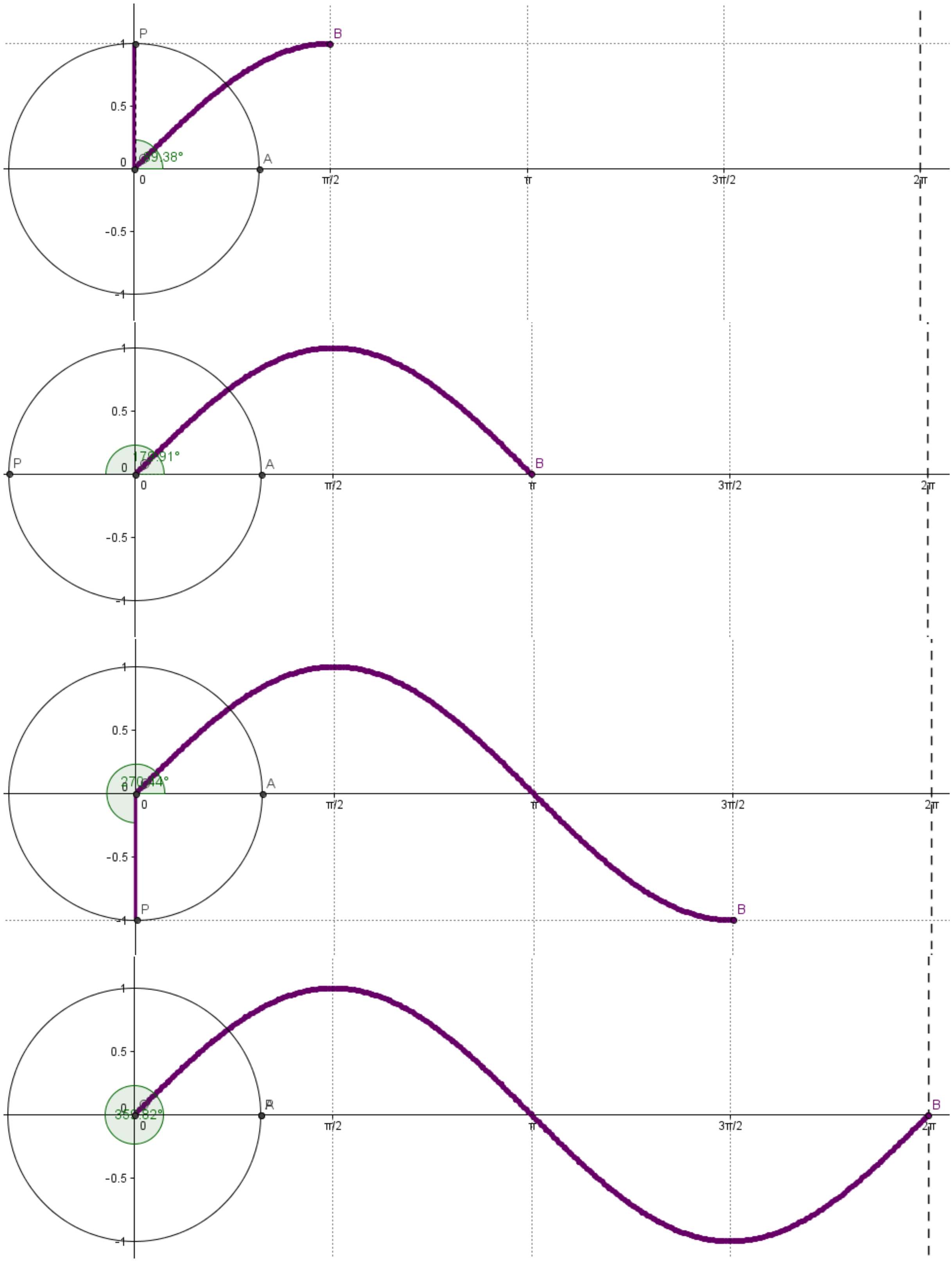

Figura 7: Intervalos de decrescimento e crescimento da função seno.

conhecimento prévio que o seno é representado pela projeção do ponto *P* sobre o eixo *y* nota-se que, conforme este ponto é rotacionado no ciclo trigonométrico ele tem valores de ordenadas positivas e negativas. Assim, nos dois primeiros quadrantes a função seno é positiva, pois a projeção do ponto P está na parte positiva do eixo y, já no 3º e 4º quadrantes a função assume valores negativos, pois a projeção do ponto P está na parte negativa deste eixo.

Na tabela 2 apresenta-se um resumo do sinal da função seno em cada quadrante.

Tabela 2: Sinais da função seno

Quadrante	Sinais
Quadrante 1	positiva
Quadrante 2	positiva
Quadrante 3	negativa
Quadrante 4	negativa

Como os alunos visualizam a rotação do arco $\overset{\frown}{AP}$ no ciclo trigonométrico sempre no sentido anti-horário é relevante o professor mostrar que há a possibilidade de girar o arco no sentido horário. Para exemplificar esta situação foi criada a planilha dinâmica, www.geogebratube.org/student/m91466, na qual ao girar o arco no sentido horário é possível perceber que o gráfico da função seno percorre o sentido negativo do eixo das abscissas. A rotação no sentido horário do ciclo trigonométrico é representada por valores negativos do argumento x da função seno, ou seja, girar o arco $\dfrac{11\pi}{6}$ rad (330º) no sentido horário é representado por um argumento $(x = -330)$, conforme mostrado na figura 8.

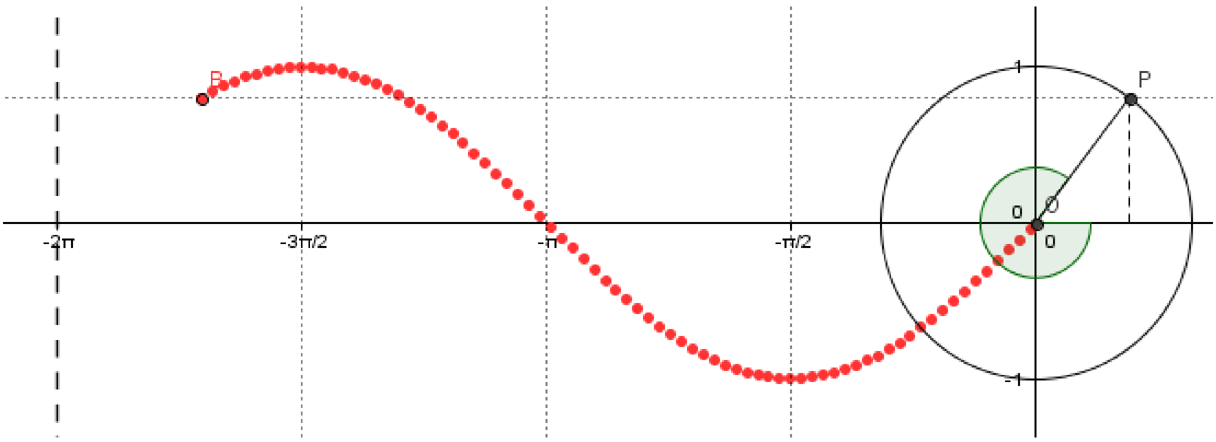

Figura 8: Rotação no sentido horário do ciclo.

Compreendido que o gráfico da função seno estende-se infinitamente tanto a esquerda quanto a direita da origem pode-se iniciar a análise da paridade de função seno. Para este estudo há a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91493, na qual o aluno observa a movimentação de A e B dois pontos que partem, simultaneamente, da origem do plano cartesiano em sentidos opostos, ou seja, enquanto A percorre o sentido positivo do eixo x o ponto B

percorre o sentido negativo, ambos descrevendo a trajetória da função seno. Este movimento ajuda os alunos a perceberem que escolhidos argumentos opostos no eixo x encontra-se valores também opostos de ordenada no gráfico da função seno. Com isso, auxiliado pelo gráfico da função descrito na figura 9, os alunos podem notar que há uma simetria em relação a origem e aproveitando a definição 2.3, visualmente, conclui-se que a função seno é uma função ímpar, fato que é provado algebricamente no capítulo 3.

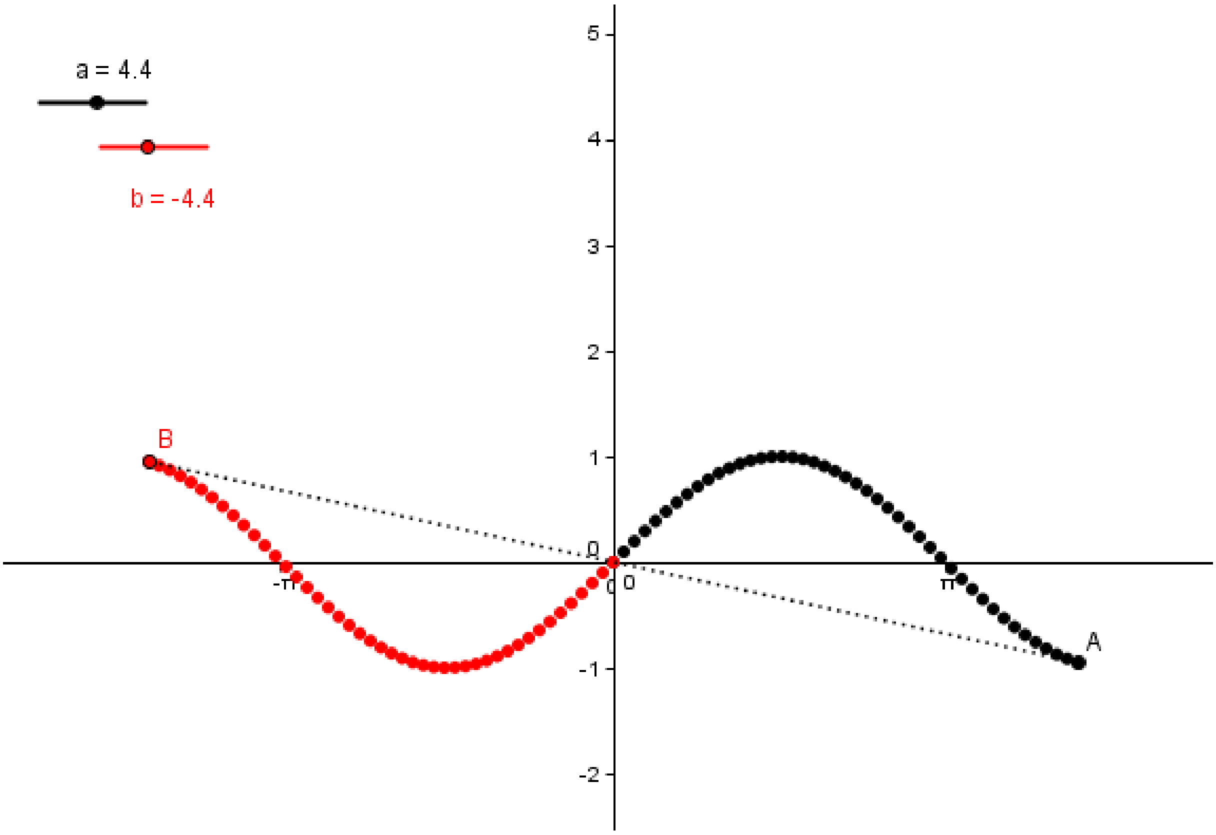

Figura 9: Simetria da função seno.

2.3 FUNÇÃO COSSENO

No estudo da função cosseno observa-se várias considerações análogas as estudadas na função seno, o que facilita sua análise, desde que as características desta estejam bem compreendidas pelo aluno. Define-se a função cosseno como:

Definição 2.12 (função cosseno)**.** *A função cosseno é a função* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *que associa cada número real* x *ao valor* $cos(x)$*, ou seja,* $f(x)=cos(x)$*.*

A partir da definição da função cosseno pode-se construir o gráfico desta para os argumentos positivos de x através da planilha dinâmica hospedada no link www.geogebratube.org/

student/m91467 e o gráfico para os argumentos negativos de x pelo link www.geogebratube.org/student/m91468. Construído o gráfico da função cosseno o professor pode mostrar que esta tem o mesmo domínio da função seno, ou seja, todos os números reais. O conjunto imagem da função cosseno também não se altera em relação a imagem da função seno, também pertencendo ao intervalo $[-1,1]$ no eixo das ordenadas. Porém, pela planilha dinâmica os alunos podem notar uma diferença entre as funções cosseno e seno, uma vez que a função cosseno tem seu ponto de máximo (ordenada 1) quando o ângulo $x+2k\pi$, com $k \in \mathbb{R}$ for de 0 rad (0) e seu ponto de mínimo (ordenada -1) ocorre quando o ângulo $x+2k\pi$ for π rad (180º), conforme figura 10.

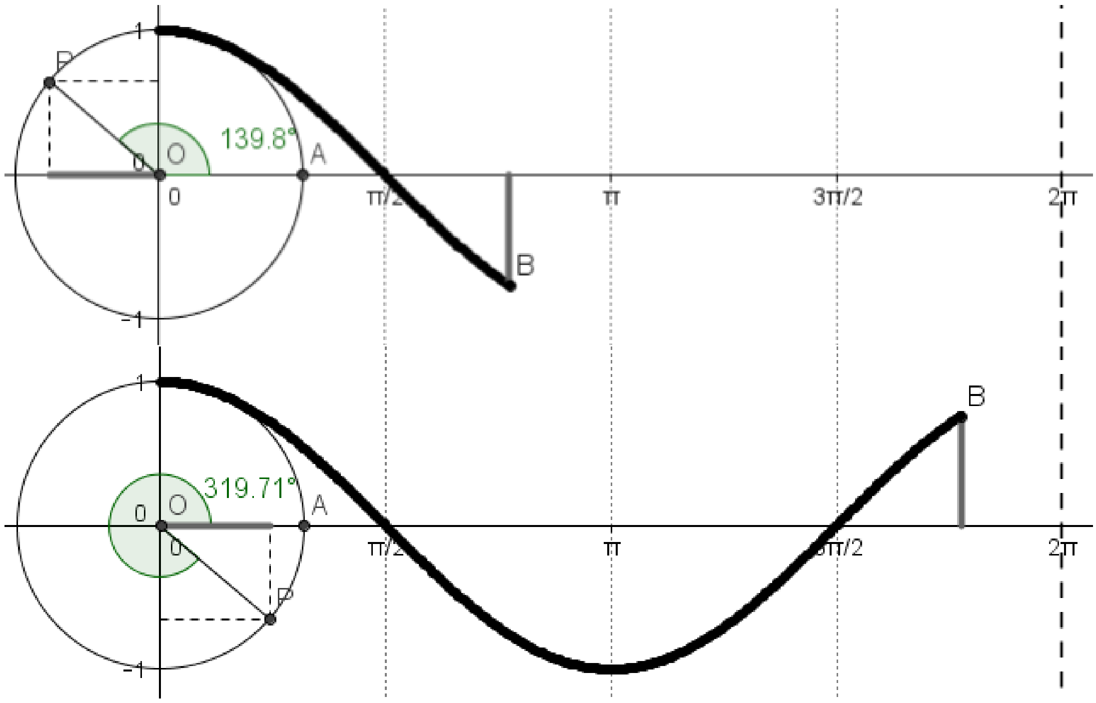

Figura 10: Gráfico da função cosseno.

Ainda, analisando as semelhança existentes entre as duas funções, tem-se que a função cosseno também é periódicas de período 2π , o que pode ser observado na planilha dinâmica, www.geogebratube.org/student/m91491. Por essa conclusão ser análoga a estuda na função seno, apenas será ilustrada através da figura 11.

Com o auxilio da planilha dinâmica, www.geogebratube.org/student/m91467, pode ser estudado os intervalos de crescimento e decrescimento da função cosseno. Durante a execução desta planilha o arco $\overset{\frown}{AP}$ é rotacionado no sentido anti-horário, de tal forma que o raio $\overline{OP}$ projeta sobre o eixo das abscissas um segmento $\overline{OQ}$ que terá a mesma medida de um segmento $\overline{BC}$ que esta sobre a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo das abscissas, conforme figura 10.

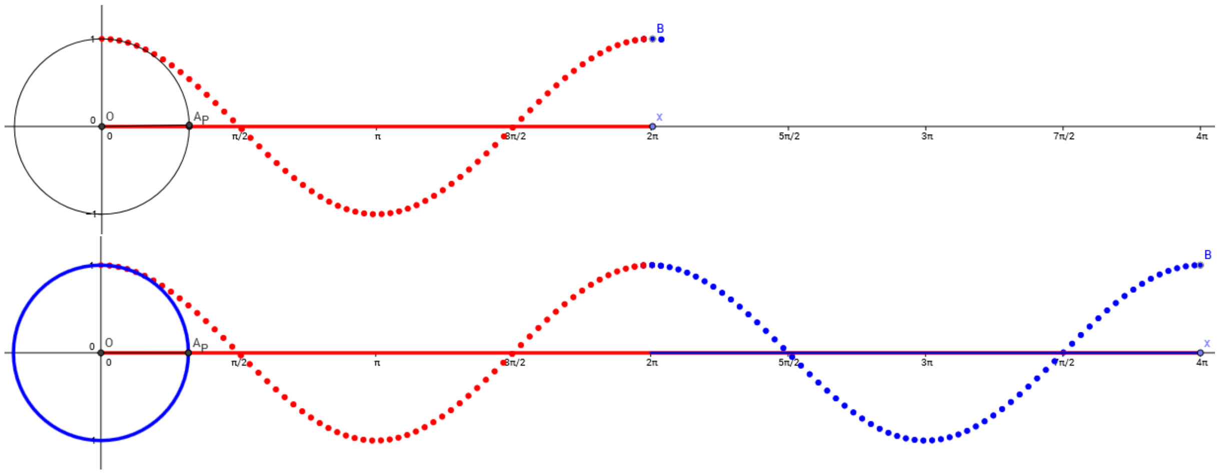

Figura 11: Período da função do cosseno.

Durante a execução da planilha dinâmica percebe-se que no 1º quadrante o segmento *overlineOQ* inicia com o comprimento de 1 u.m quando a medida do arco $\widehat{AP}$ é de 0 rad e passa para o comprimento de 0 u.m quando este arco tem a abertura de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Como no mesmo momento a função cosseno descreve seu gráfico se observa que esta função no 1º quadrante é decrescente. De forma similar, conforme figura 12, pode ser analisado o comportamento nos demais quadrantes, concluindo-se que de acordo com o intervalo a função varia da seguinte forma:

- no intervalo de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (1º quadrante) a função f é decrescente e $f(x) > 0$
- no intervalo de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (2º quadrante) a função f é decrescente e $f(x) < 0$
- no intervalo de $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ (3º quadrante) a função f é crescente e $f(x) < 0$
- no intervalo de $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (4º quadrante) a função f é crescente e $f(x) > 0$

O estudo do sinal da função cosseno deve ter um enfoque especial, pois também difere da função seno. Aproveitando o estudo do comportamento da função cosseno dentro de cada quadrante o professor deve instigar os alunos a notarem que, enquanto o ponto P rotaciona sobre o ciclo trigonométrico ele apresenta uma projeção sobre o eixo x que é negativa ou positiva de acordo com o quadrante que o arco $\widehat{AP}$ encontra-se, o que indica o sinal da função cosseno nesses momentos. Assim, pelos instantes exemplificados na figura 12 tem-se que a função cosseno assume valores positivos no 1º e 4º quadrantes e seus valores negativos ocorrem quando o ponto P se encontrar no 2º e 3º quadrantes. Esta análise é compilada na tabela 3.

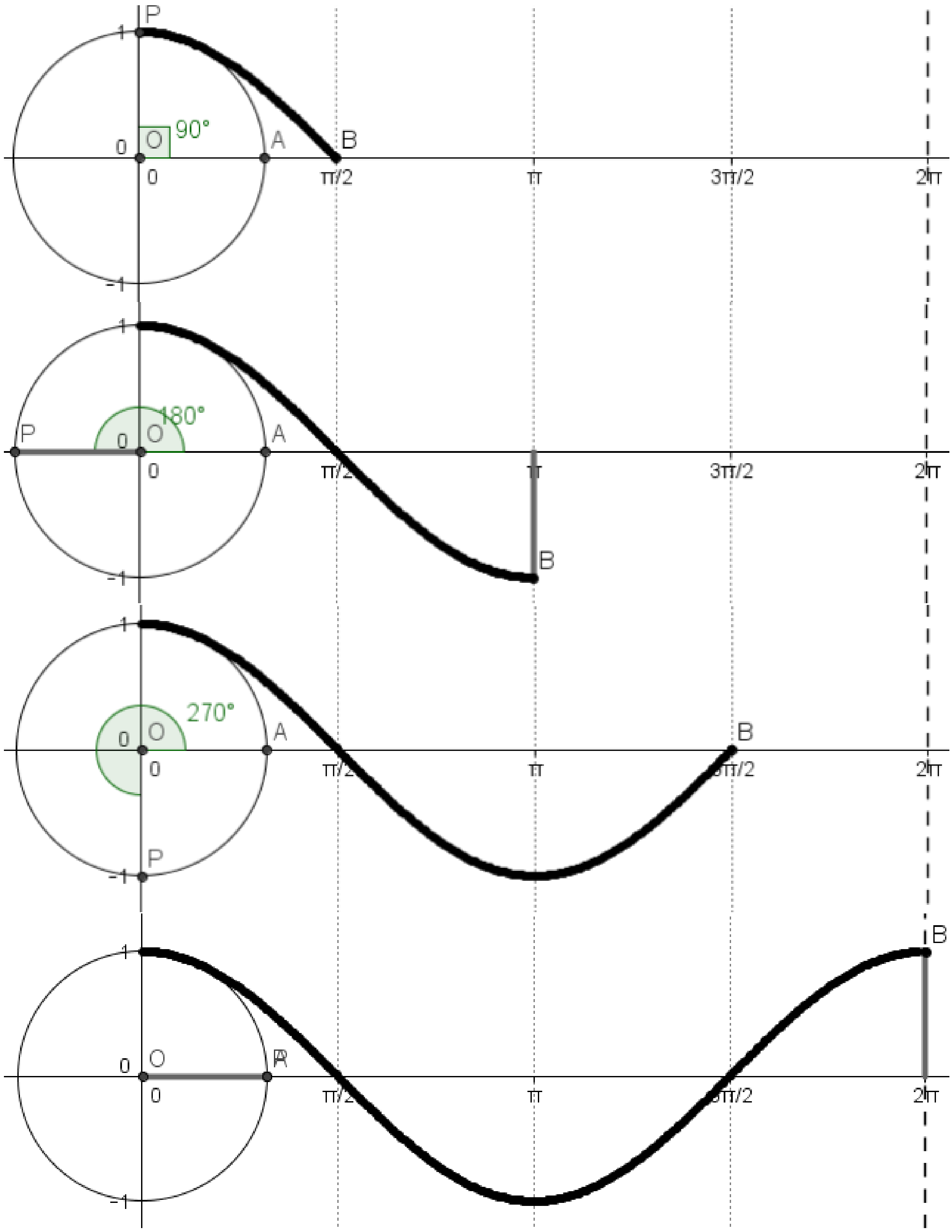

Figura 12: Intervalos de decrescimento e crescimento da função cosseno.

Para o estudo da paridade da função cosseno foi criada a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91492 que tem seu funcionamento semelhante ao da função seno. No momento inicial tem-se os pontos A e B na posição $(0,1)$ e ao acionar o play da planilha esses pontos deslocam-se com valores sempre opostos de x e sendo suas ordenadas definidas pelo cossseno do ângulo tem-se ordenadas iguais para A e B, ou seja, $cos(x) = cos(-x)$, conforme a figura 13. Esse fato, atrelado a definição 2.2 direciona os alunos a interpretarem e

Tabela 3: Sinais da função cosseno

Quadrante	Sinais
Quadrante 1	positiva
Quadrante 2	negativa
Quadrante 3	negativa
Quadrante 4	positiva

concluirem que a função cosseno é uma função par, fato que será provado algebricamente no capítulo 3.

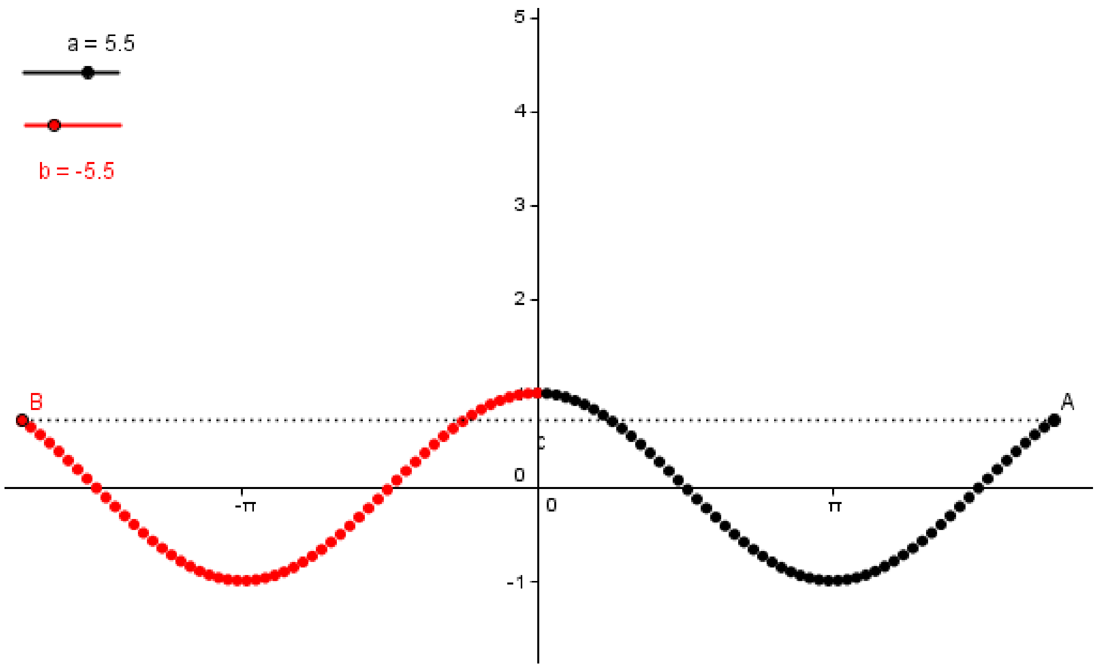

Figura 13: Simetria da função cosseno.

2.4 FUNÇÃO TANGENTE

A função tangente é definida como:

Definição 2.13 (função tangente)**.** *A função tangente é a função o* $f : \mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, com k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\rightarrow \mathbb{R}$ *que associa cada número real* $x \in \mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, com k \in \mathbb{Z}\right\}$ *ao valor* $tg(x)$*, ou seja,* $f(x) = tg(x)$.

Após a definição faz-se necessário esclarecer porque o domínio da função tangente não são todos os números reais. Para essa explicação o professor pode utilizar a definiçao de tangente, uma vez que é representada pelo quociente entre o seno e o cosseno de um ângulo qualquer, tem-se que o denominador de uma fração deve ser diferente de zero, isto é, $cos(x) = 0$. Por este fato, o domínio da função tangente exclui o conjunto f.

Corroborando com esta explicação tem-se a construção do gráfico da função tangente, representado pela figura 14 e pela planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91469. Iniciando na planilha dinâmica há a rotação do ponto P no ciclo trigonométrico e o aluno pode notar que em dois momentos na primeira volta do ciclo a reta suporte do raio $\overline{OP}$ não cruza a reta tangente, fato que ocorre nos pontos $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, situações que a reta que passa por $\overline{OP}$ é paralela a reta tangente, sendo indeterminado seu comprimento.

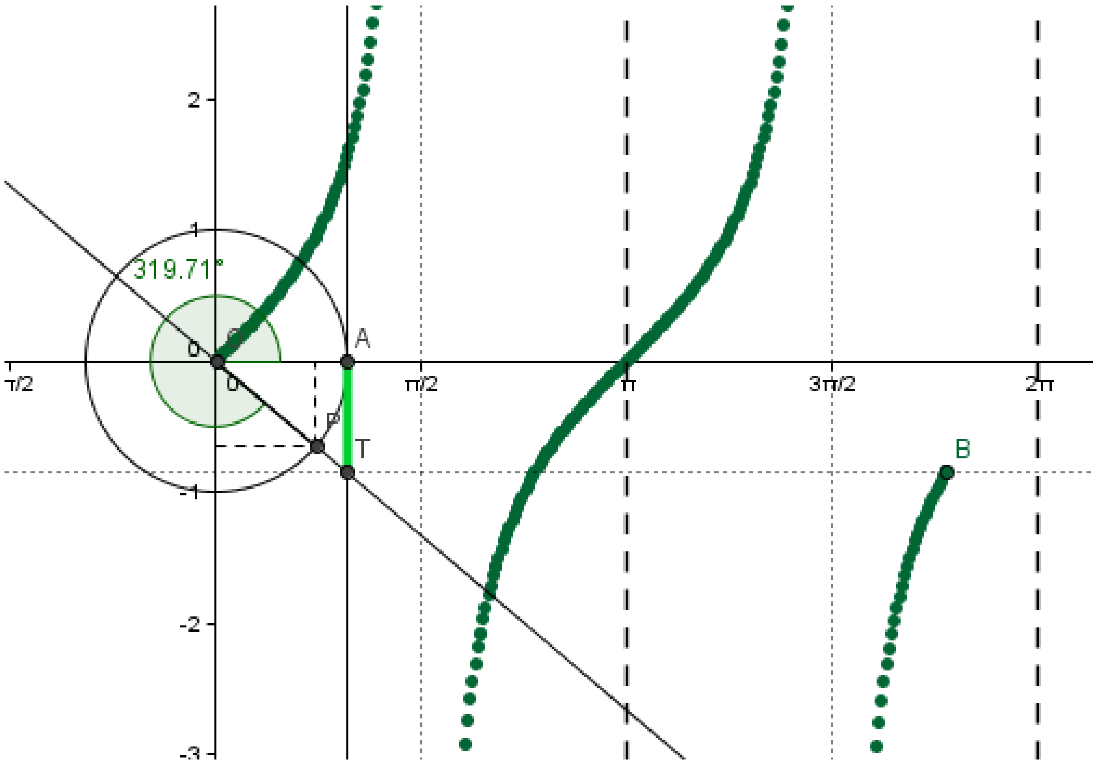

Figura 14: Gráfico da função tangente.

Pela construção do gráfico nota-se que a função tangente aproxima-se das retas $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}$ (paralelas ao eixo das ordenadas), porém sem nunca interceptá-las, estas retas são denominadas assíntotas desta função. Quando o gráfico da função tangente aproxima-se de uma assíntota pela sua direita visualiza-se que o valor da função aumenta tendendo para o infinito, enquanto que ao se aproximar pela esquerda este valor diminui tendendo para o menos infinito. Desta forma, de maneira intuitiva pode-se mostrar para os alunos que o conjunto imagem da função tangente assume todos os valores reais. Formalmente este limite é escrito como: $\lim_{x \to x_0^-} tg\, x = +\infty$.

Na sequência do estudo pode se determinar a periodicidade da função tangente. Visualmente, figura 14, pelo gráfico da função tangente o aluno pode notar que a cada inter-

Tabela 4: Sinais da função tangente

Quadrante	Sinais
Quadrante 1	positiva
Quadrante 2	negativa
Quadrante 3	positiva
Quadrante 4	negativa

valo de π radianos a função admite os mesmos valores no eixo das ordenadas e intuitivamente concluir que o período é π rad. Porém, a prova de tal fato se dá pelo fato de que $f(x+k\pi) = tg(x+k\pi) = tg(x) = f(x)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 < x \leq \pi$, e pela definição 2.1, pois $f(x+p) = f(x)$, logo a função tangente é periódica.

A função tangente é estritamente crescente nos intervalos em que é continua, pois em cada quadrante quando aumenta-se o valor do argumento x o valor da tangente também aumenta. Como exemplo, cita-se os dois primeiros quadrantes, figura 14. No 1º quadrante variando o argumento x no intervalo de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tem-se que a função varia de $[0, +\infty[$. No 2º quadrante a função também é crescente, apesar de ser negativa, pois variando argumento x no intervalo de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tem-se que a função varia de $]-\infty, 0]$.

Desenvolvendo a função tangente verifica-se que ela é positiva ou negativa conforme a localização do ponto T sobre a reta tangente. Para análise dos sinais desta função o professor deve observá-la em cada quadrante separadamente. No 1º quadrante do ciclo trigonométrico, conforme o arco $\widehat{AP}$ rotaciona no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ o ponto T percorre o intervalo de $[0, +\infty[$ sobre a reta tangente, sendo assim a ordenada do ponto T é um valor positivo, o que mostra que a função tangente é positiva neste 1º quadrante. No 2º quadrante, a rotação do $\widehat{AP}$ faz o prolongamento do segmento $\overline{OP}$ interceptar a reta tangente no seu intervalo de $]-\infty, 0]$, o que evidência que neste quadrante a função tangente assume valores negativos. Desenvolvendo o arco $\widehat{AP}$ no 3º quadrante tem-se que a função tangente novamente admite valores positivos, pois o ponto T intercepta a reta tangente nos valores de ordenada positivos. No 4º quadrante tem-se a função tangente negativa, pois ao passo que rotaciona-se o $\widehat{AP}$ sobre o ciclo trigonométrico o ponto T descreve sua tragetória sobre a reta tangente no intervalo de $]-\infty, 0]$. O processo para obtenção dos sinais admitidos pela função tangente em cada quadrante é ilustrado pela figura 14 e resumido na tabela 4.

Como já foi visto na função seno e se aplica também a função tangente, pode-se rotacionar o ponto P no sentido horário do ciclo trigonométrico e descrever a função no sentido negativo do eixo das abscissas, conforme a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91470. Ainda, pode-se utilizar a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91495 que propicia o estudo da paridade da função tangente. A partir do movimento dos pontos A e B, conforme a figura 15, que têm como abscissas valores opostos e suas ordenadas, definidas pela tangente de uma ângulo, também com valores opostos os alunos podem observar que há uma simetria da função tangente em relação a origem. Desta visualização e auxiliado pela definição 2.3 o aluno conclui que a função tangente é ímpar, pois para cada argumento x e $-x$ tem que $f(-x) = tg(-x) = -tg(x) = -f(x)$.

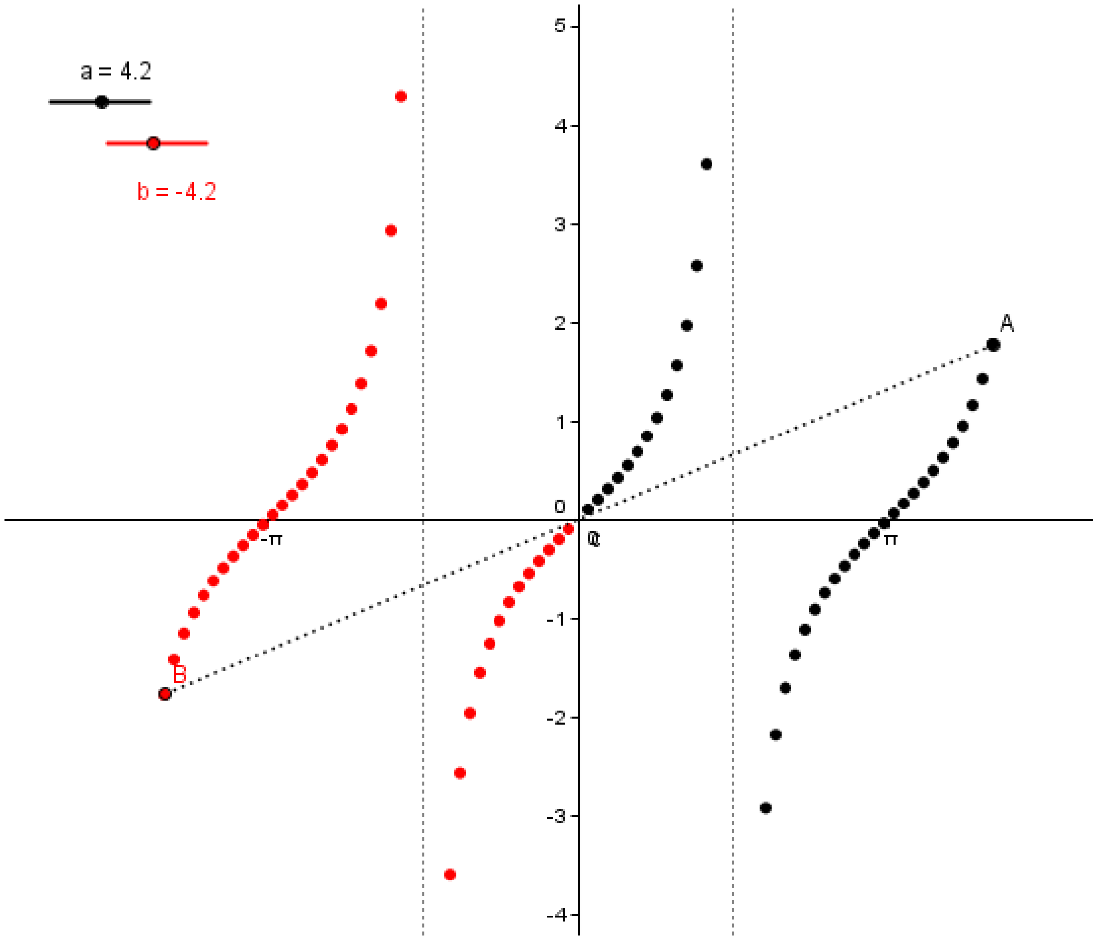

Figura 15: Simetria no gráfico da função tangente.

2.5 OUTRAS FUNÇÕES

Na presente seção é apresentado um estudo das funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente. É uma análise mais sucinta, abordando apenas as características mais requisitadas e que podem ser exploradas através das planilhas dinâmicas, tais como: domínio, imagem, período e a paridade destas funções.

2.5.1 FUNÇÃO SECANTE

A função secante é definida como:

Definição 2.14 (função secante)**.** *A função secante é a função o* $f:\mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, comk \in \mathbb{Z}\right\}$ $\rightarrow \mathbb{R}$ *que associa cada número real x, com* $x \in \mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, comk \in \mathbb{Z}\right\}$ *ao valor* $sec(x)$*, ou seja,* $f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$.

Após a definição pode-se construir o gráfico da função secante, conforme a figura 16 através da planilha dinâmica, www.geogebratube.org/student/m91478. A partir da construção do gráfico tem-se o estudo da função secante e as suas características.

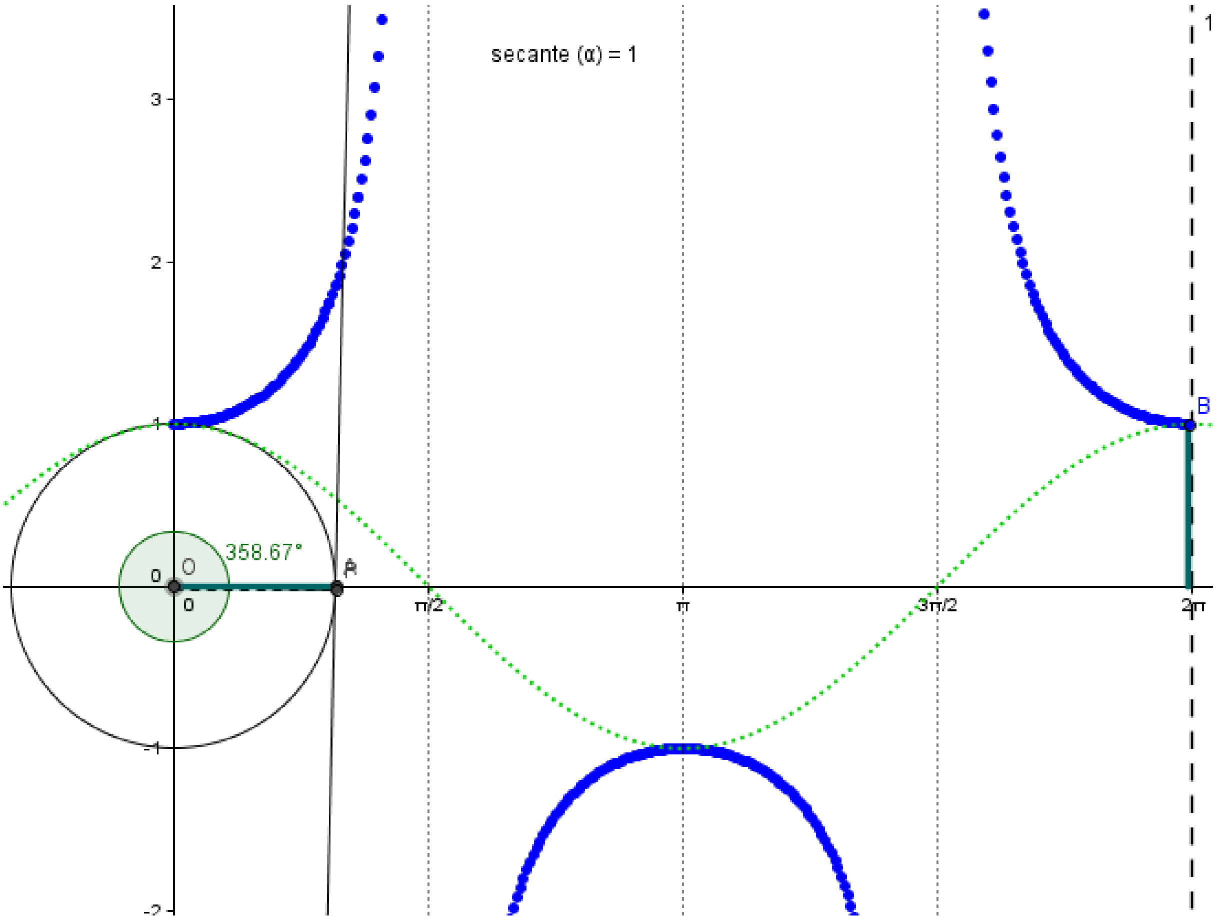

Figura 16: Gráfico da função secante.

Pela própria definição da secante que é dada pela relação inversa do cosseno, ou seja, $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$, entende-se o dominío da função secante, função que não está definida nos pontos $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ os quais o denominador $cos(x)$ é igual a zero.

Ainda, observando o desenvolvimento da planilha dinâmica é importante trabalhar com os alunos o conjunto imagem da função secante, pois pela reprodução simultânea das funções cosseno e secante o aluno pode perceber que o conjunto imagem da secante é o intervalo não compreendido pela função cosseno, a exceção é quando $x = k\pi$ momento que as duas funções apresentam a mesma imagem. Então, da observação feita, concluí-se que a imagem da função secante é o intervalo de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. É interessante o professor fazer os alunos entenderem que pelo fato da secante ser a relação inversa do cosseno e este assumir valores entre -1 e 1, ao se dividir 1 pelo $cos(x)$ sempre há valores superiores a 1 quando $cos(x) > 0$ e valores inferiores a -1 quando $cos(x) < 0$. Ainda, mostrar que a secante só admite o valor 1 nos pontos $x = k\pi$ que $cos(x) = 1$, assim $sec(x) = cos(x)$.

A função secante terá o mesmo período da função cosseno, 2π radianos, conforme ilustrado na figura 16.

A paridade da função secante pode ser analisada geometricamente, através da figura 17, pois se observa que há simetria do gráfico da função em relação ao eixo das ordenadas. Desta forma, pelo exposto na seção 2.1.2 conclui-se que a função secante é par.

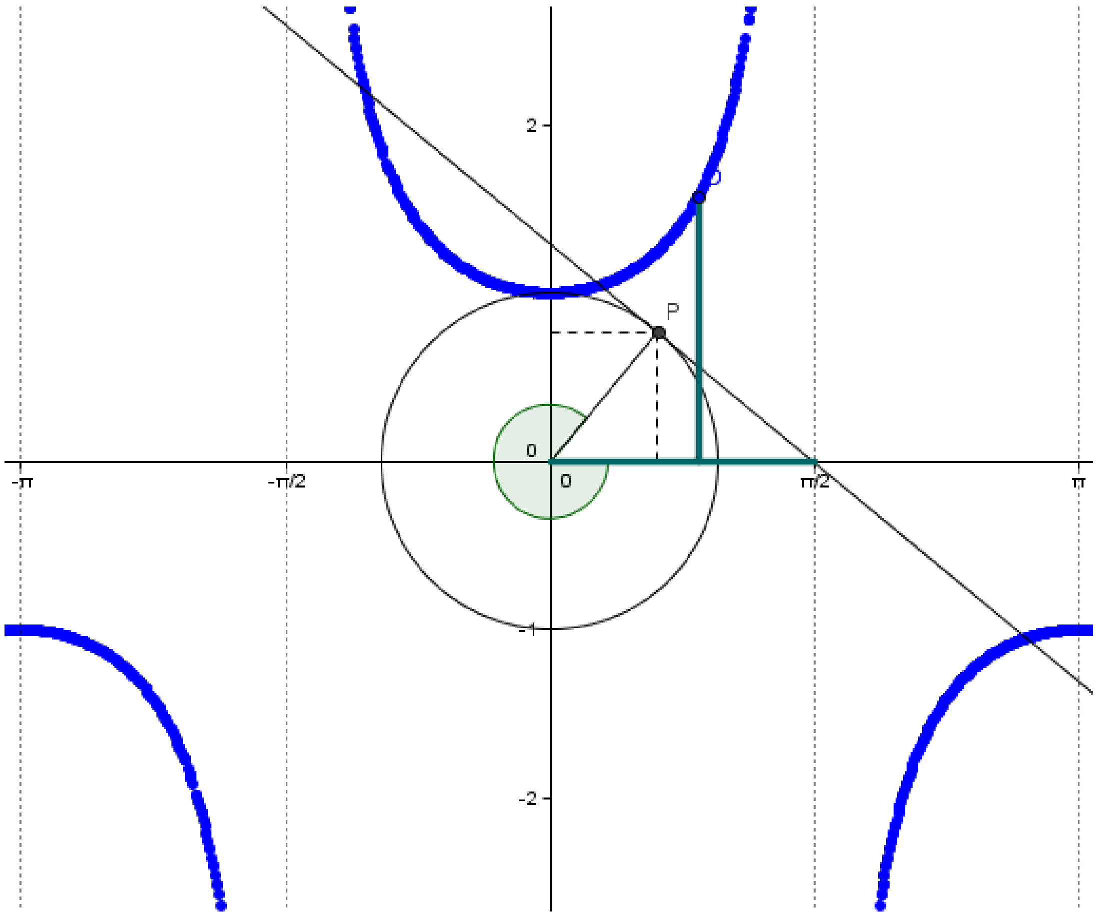

Figura 17: Simetria no gráfico da função secante.

Ainda pode ser analisado o comportamento do gráfico da função secante para a rotação do arco $\widehat{AP}$ no sentido horário do ciclo trigonométrico pelo link www.geogebratube.org/student/

m91479.

2.5.2 FUNÇÃO COSSECANTE

A função cossecante é definida como:

Definição 2.15 (função cossecante). *A função cossecante é a função o* $f : \mathbb{R}$ - $k\pi, comk \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow \mathbb{R}$ *que associa cada número real x, com* $x \in \mathbb{R}$ - $k\pi, comk \in \mathbb{Z}$ *ao valor* $cossec(x)$*, ou seja,* $f(x) = cossec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$.

Com a construção do gráfico da função cossecante na planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91474 há o estudo de alguns aspectos desta função, tais como: domínio, imagem, período e paridade.

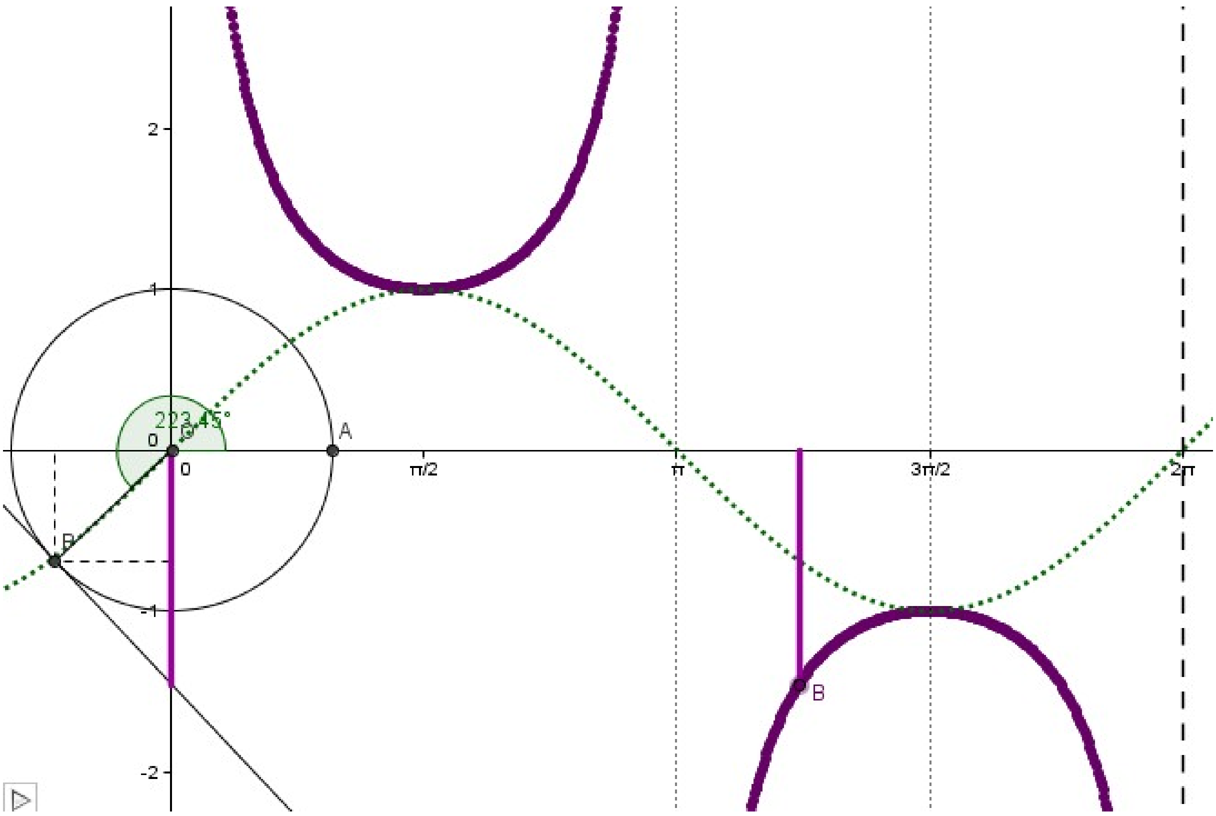

Figura 18: Gráfico da função cossecante.

Como a cossecante é dada pela relação inversa do seno e este é nulo para arcos da forma $k\pi$ é compreensível o domínio da função cossecante ser válido para todos os números reais, exceto quando $x = k\pi$.

O processo de estudo do conjunto imagem da função cossecante pode ser feito pelo link www.geogebratube.org/student/m91474, sendo análogo ao feito para a função secante e com a mesma conclusão, ou seja, que a imagem desta função também pertence ao intervalo $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, como ilustrado na figura 18.

Como já foi estudado na função seno esta é periódica de período 2π e, sendo a cossecante a relação inversa do seno tem-se que a função cossecante tem o mesmo período da função seno, o que é ilustrado na figura 19.

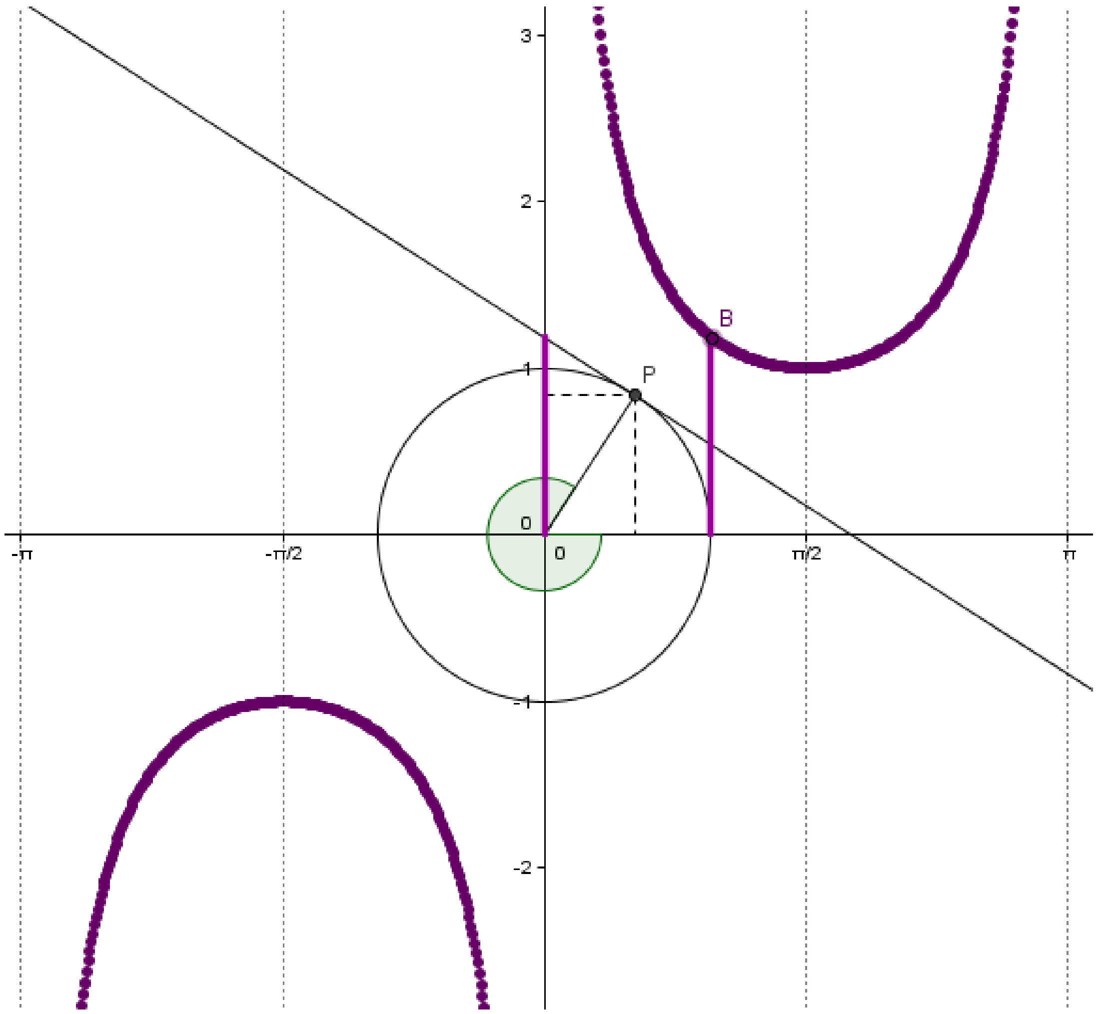

Figura 19: Simetria no gráfico da função cossecante.

Como feito para a função secante a paridade da função cossecante também é observada apenas geometricamente através da figura 19, porém nesta figura observa-se que a simetria do gráfico da função cossecante ocorre em relação a origem, o que pelo exposto na seção 2.1.2 conclui-se que a função cossecante é ímpar.

Para finalizar o estudo da função cossecante, o professor pode analisar o comportamento do gráfico desta função ao se rotacionar o arco $\widehat{AP}$ no sentido horário do ciclo trigonométrico pelo link www.geogebratube.org/student/m91476.

2.5.3 FUNÇÃO CONTANGENTE

A função cotangente é definida como:

Definição 2.16 (função cotangente)**.** *A função cotangente é a função o* $f : \mathbb{R}$ - $k\pi, comk \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow \mathbb{R}$ *que associa cada número real x, com* $x \in \mathbb{R}$ - $k\pi, comk \in \mathbb{Z}$ *ao valor* $cotg(x)$*, ou seja,* $f(x) = cotg(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$.

A construção do gráfico da função cotangente na planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91481 é o balizador para a análise mais geométrica que é feito nesta função. A figura 20 ilustra o passo a passo do desenvolvimento da função cotangente.

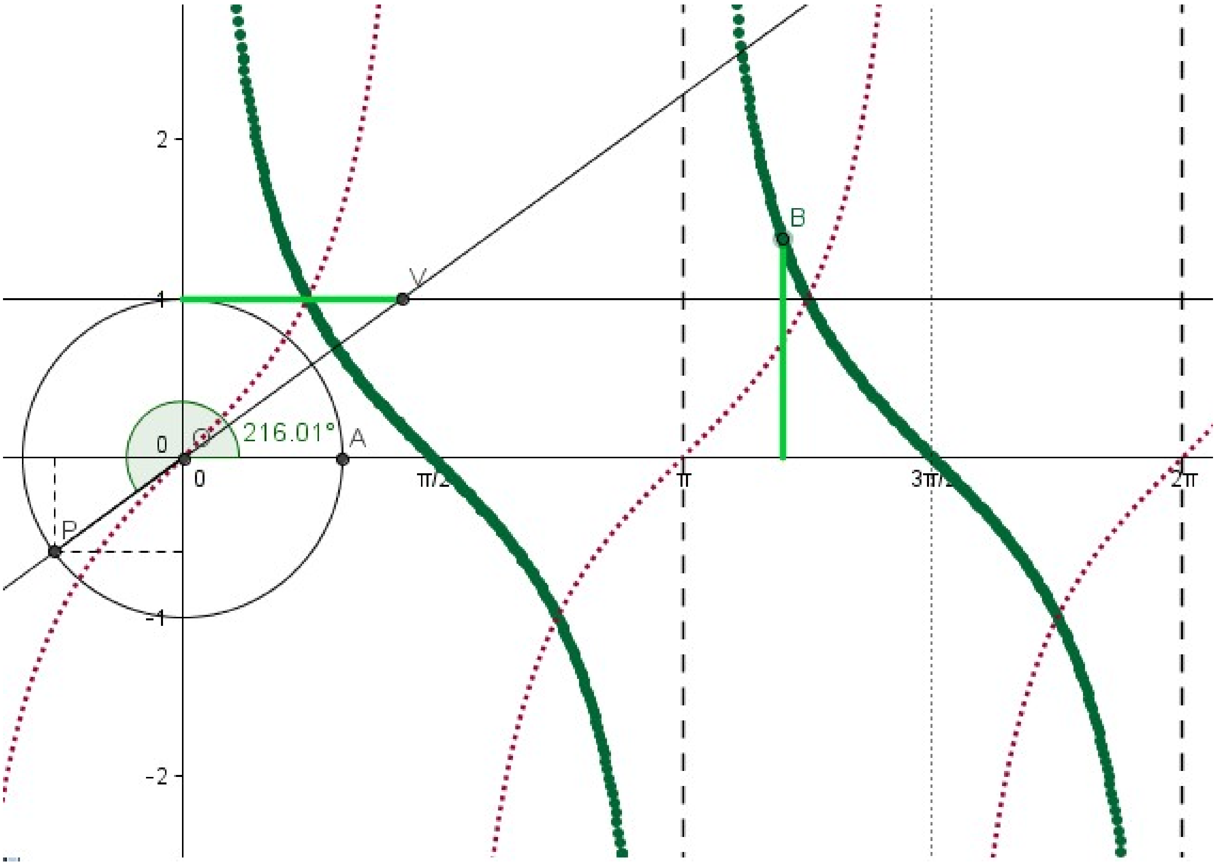

Figura 20: Gráfico da função cotangente.

Ao observar o domínio da função cotangente o aluno pode perceber que é o mesmo que o da função cossecante, fato que é confirmado geometricamente pela construção do gráfico. Isto se deve ao fato que assim como na cossecante a cotangente é representada por uma relação que apresenta o seno como denominador, o que faz que as duas funções tenham a mesma restrição, ou seja, os pontos que $x = k\pi$.

No estudo do conjunto imagem da função cotangente é interessante o professor utilizar a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91481 que reproduz simultaneamente as funções tangente e cotangente. No desenvolvimento da planilha o aluno nota que em cada quadrante a função cotangente apresenta um comportamento inverso ao apresentado pela função tangente. Desta manenira, conclui-se que a imagem da função contangente são todos os números $\mathbb{R}$, assim como o da função tangente.

Da análise simultânea das funções tangente e cotangente nota-se que apresentam o mesmo período, ou seja, π radianos.

A paridade da função cotangente pode ser obtida algebricamente, uma vez que função é definida pelo quociente da função cosseno pela função seno, ou seja, o quociente entre uma função par por uma função ímpar, o que pela propriedade 2.6 leva a conclusão que a função cotangente é ímpar. A análise pode ser feita também geometricamente através da figura 21, pois nesta figura observar-se que a simetria do gráfico da função cotangente ocorre em relação a origem do plano cartesiano, o que pela seção 2.1.2 se conclui que a função cotangente é ímpar.

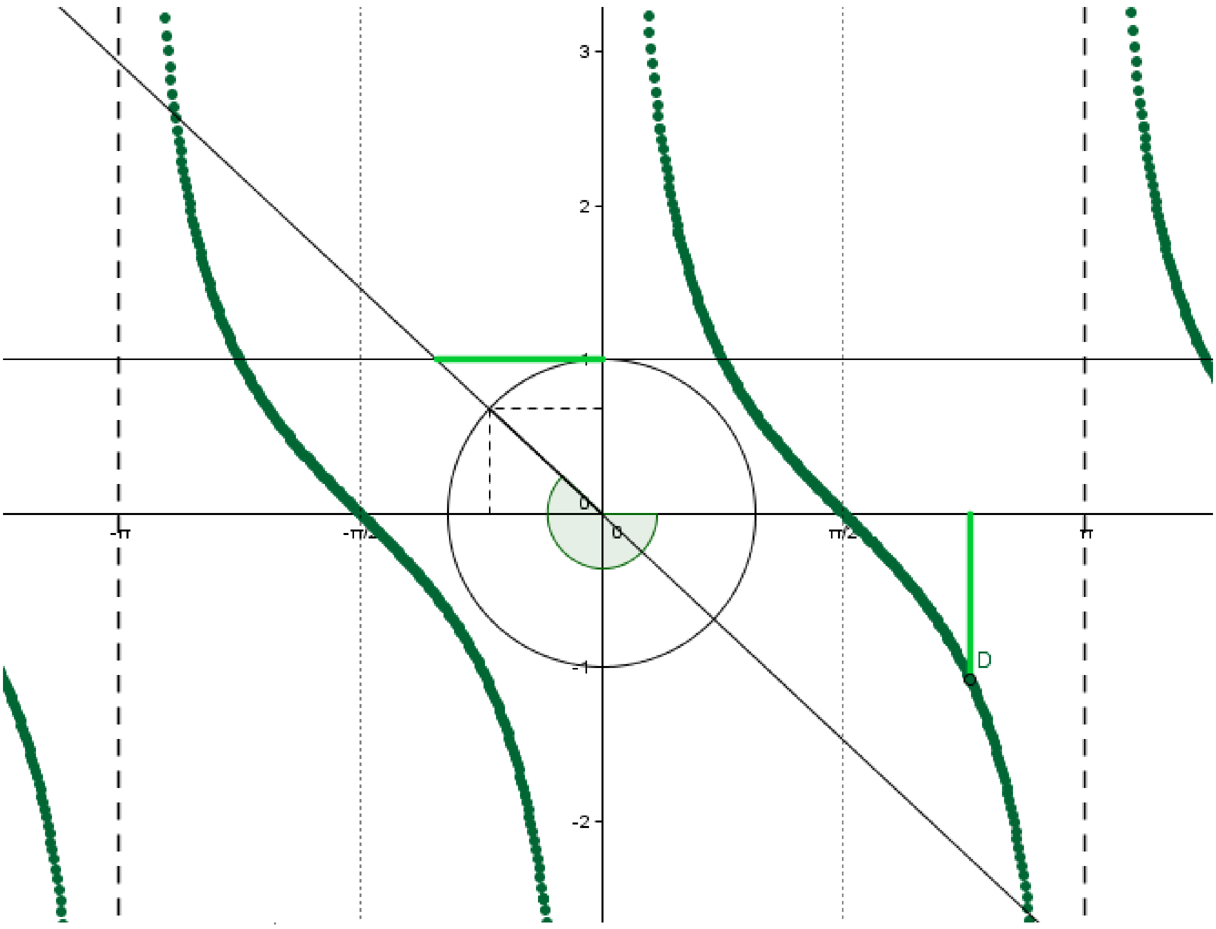

Figura 21: Simetria no gráfico da função cotangente.

Concluindo o estudo da função cotangente pode-se utilizar a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91482 para verificar a construção do seu gráfico a partir da rotação do arco $\overset{\frown}{AP}$ no sentido horário do ciclo trigonométrico.

2.6 PARÂMETROS QUE ALTERAM A FUNÇÃO

De uma maneira geral toda função trigonométrica pode ser escrita da seguinte forma $f(x) = a+b.®(c.x+d)$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ onde ® esta representando a função trigonométrica abordada.

As funções trigonométricas até agora foram estudadas com as constantes admitindo os seguintes valores $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. Nesta seção é estudado que tipo de alteração as constantes reais a,b,c,d promovem no gráfico das funções trigonométricas. Para este estudo foi elaborada a planilha dinâmica www.geogebratu be.org/student/m91484 que estuda os parâmetros que alteram a função seno e a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91485 que estuda as alterações que podem ocorrer na função cosseno. Para facilitar a visualização da alteração promovida por cada constante é mantida o gráfico "original"da função trigonométrica através de uma linha pontilhada.

A primeira alteração a ser estudada é a promovida pela adição de uma constante a uma função trigonométrica. Esta constante é representada pela letra a e para exemplificar esta alteração é usado o gráfico da função seno. Selecionando a seletora a na planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91484, nota-se que conforme há modificação no valor de a há o deslocamento vertical do gráfico da função. Esse deslocamento é balizado pelo valor atribuido a constante a, quando ela for positiva a função se desloca verticalmente no sentido positivo do eixo y e quando a constante for negativa a função se desloca verticalmente no sentido negativo do eixo y, nas duas situações é sempre tantas unidades quando a constante a determinar. Assim, quando $a = 2$ a função é desloca duas unidades para cima, já quando $a = -2$ a função é deslocada duas unidades para baixo, exemplos ilustrados na figura 22.

Dando continuidade no estudo dos parâmetros pode se observar o que ocorre com uma função trigonométrica quando é multiplicada por uma constante, para exemplificar esta situações é utilizado a função cosseno e o fator multiplicador é a constante b. No desenvolvimento da planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91485 percebe-se que modificando os valores na seletora b o gráfico da função cosseno sofre uma alteração na sua amplitude, ou seja, a diferença entre seu ponto de máximo e mínimo é modificado. Para saber exatamente as modificações causadas por esta constante o estudo pode ser separado em quatro casos, ilustrados nas figuras 23 e 24. O primeiro é para $b \geq 1$, nesta situação a função cosseno tem sua amplitude aumentada de acordo com o valor de b, ou seja, por exemplo para $b = 3$ a amplitude é três vezes maior que a amplitude da função cosseno no seu estado "original". O segundo caso, quando $0 < b < 1$ tem-se que a amplitude da função se reduz tantas unidades quanto for o valor

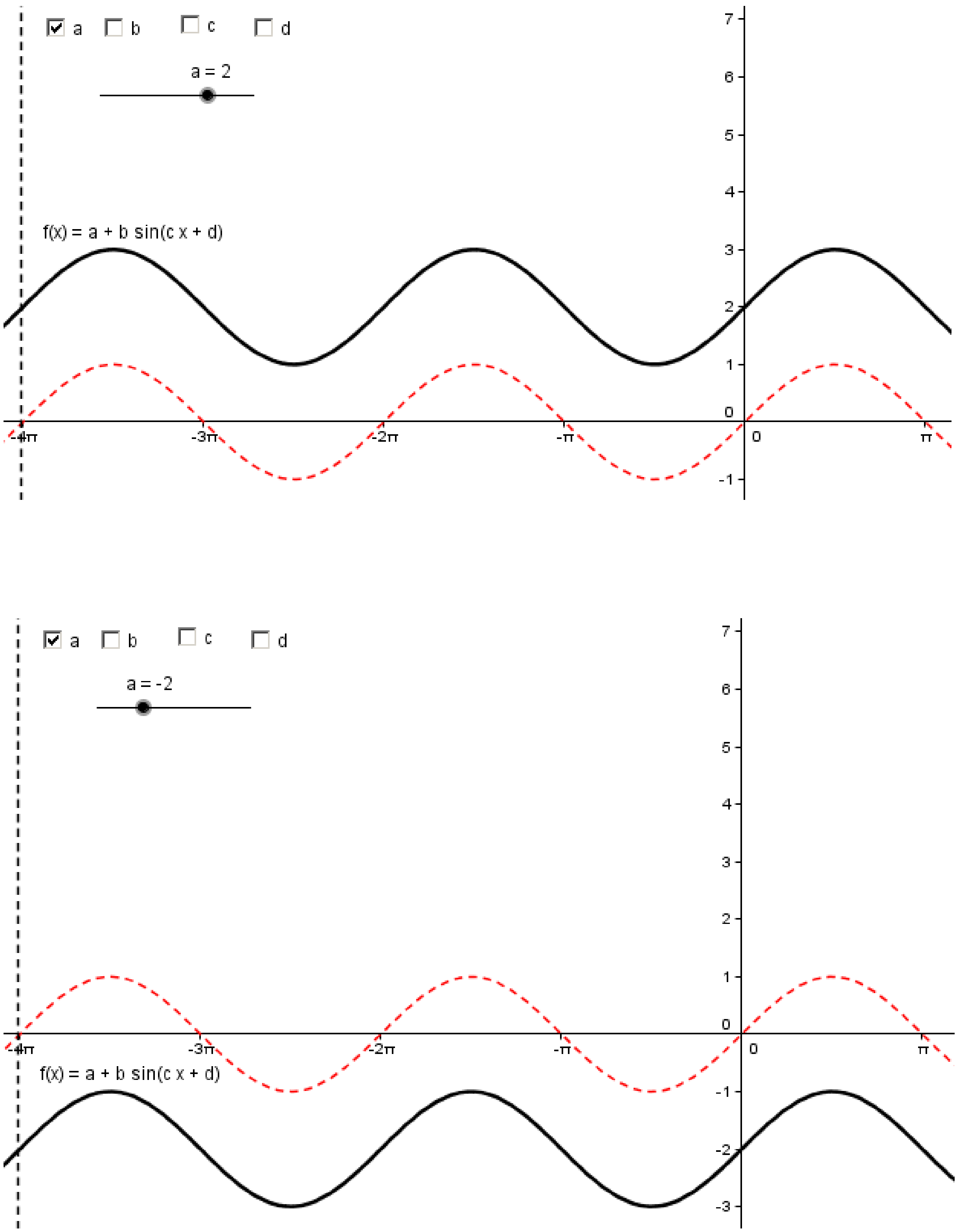

Figura 22: Adição/Subtração de uma constante a função seno.

da constante b, assim se $b = 2$ então a função terá este mesmo valor de amplitude. No terceiro caso multiplicamos a função cosseno por $b = 0$ o que gera a função constante $y = 0$. E por fim o quarto caso ocorre para $b < 0$ esta fato faz que ocorrá uma reflexãoo da função em relação ao eixo das abscissas, mas a amplitude é a mesma para valores positivos de b.

Nota-se ainda, que as modificações nas constantes a e b alteram também a imagem das funções trigonométricas.

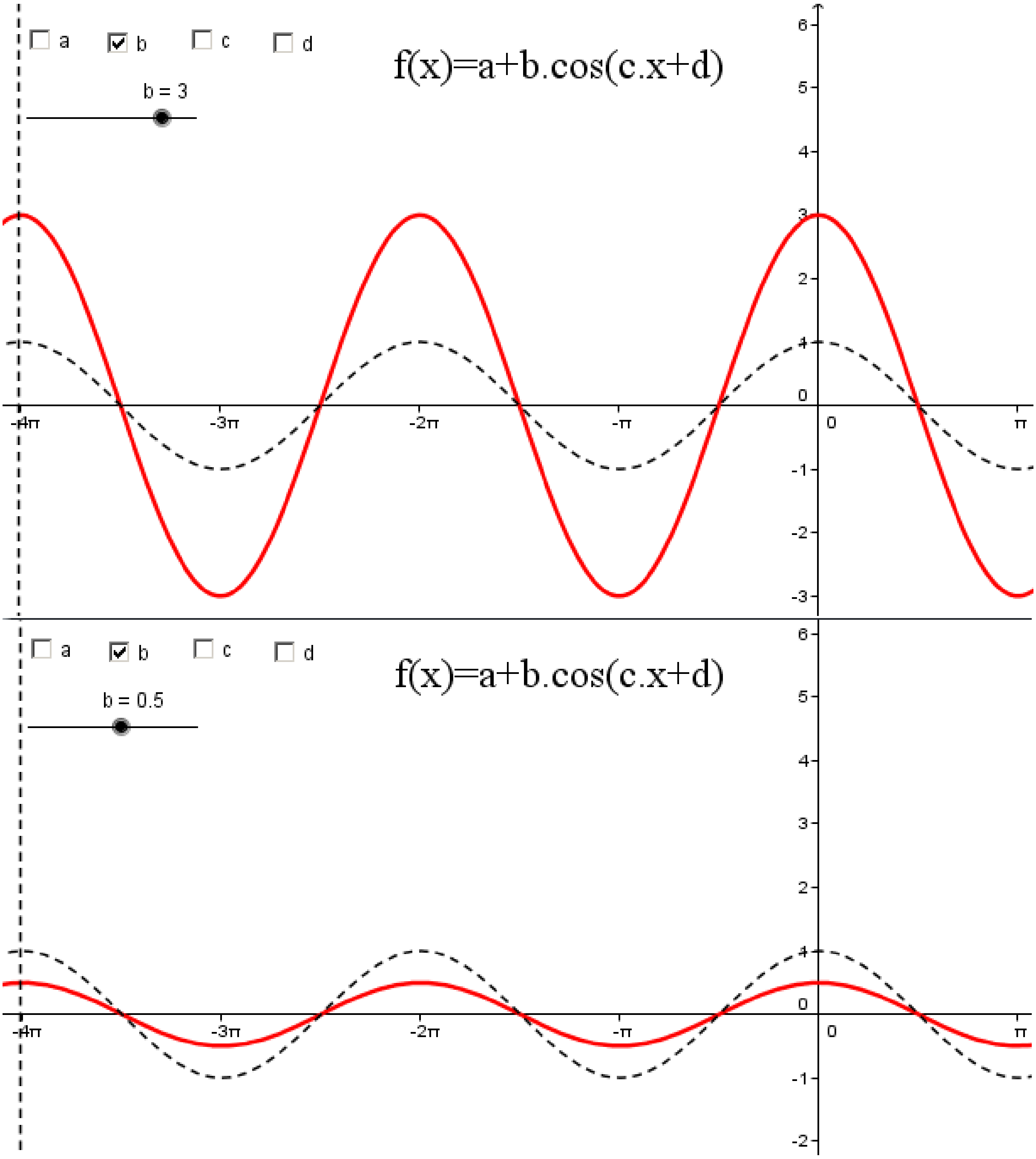

Figura 23: Produto de uma constante pela função cosseno - parte 1.

Para o estudo da modificação realizada pela constante c ao multiplicar o argumento x da função trigonométrica é usado a planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91484 que representa a função seno. De uma maneira intuitiva nota-se que ao promover a alteração na constante c o gráfico da função se comprime ou se estende horizontalmente em relação ao

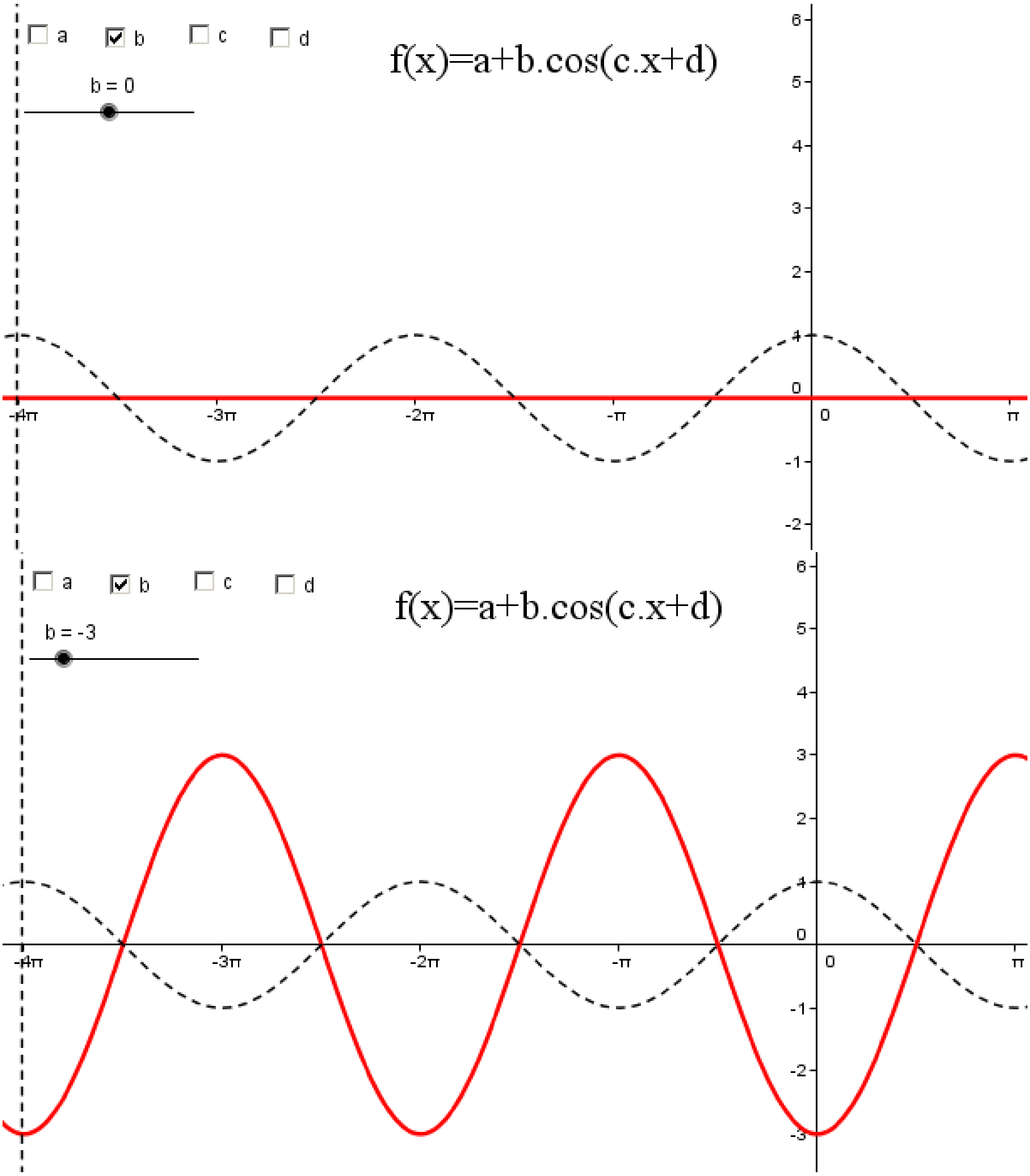

Figura 24: Produto de uma constante pela função cosseno - parte 2.

seu estado "padrão". De um modo mais formal pode-se analisar que a constante c altera o período da função seno. Assim como a constante b, pode-se analisar a alteração promovida pela constante c em quatro momentos, exemplificados nas figuras 25 e 26.

- 1º) quando $c > 1$, aumentando o valor de c o período é reduzido na proporção inversa de c.

- 2º) quando $c = 0$, como o argumento da função é multiplicado por 0, tem-se a função constante $f(x) = 0$.

- 3º) quando $-1 < c < 1$, aumenta-se o período da função na proporção inversa do valor da constante, porém há uma reflexão da função em relação ao eixo x quando c for negativo.
- 4º) quando $c < -1$, diminuindo o valor de c o período é reduzido na proporção inversa de c e há uma reflexão da função em relação ao eixo x.

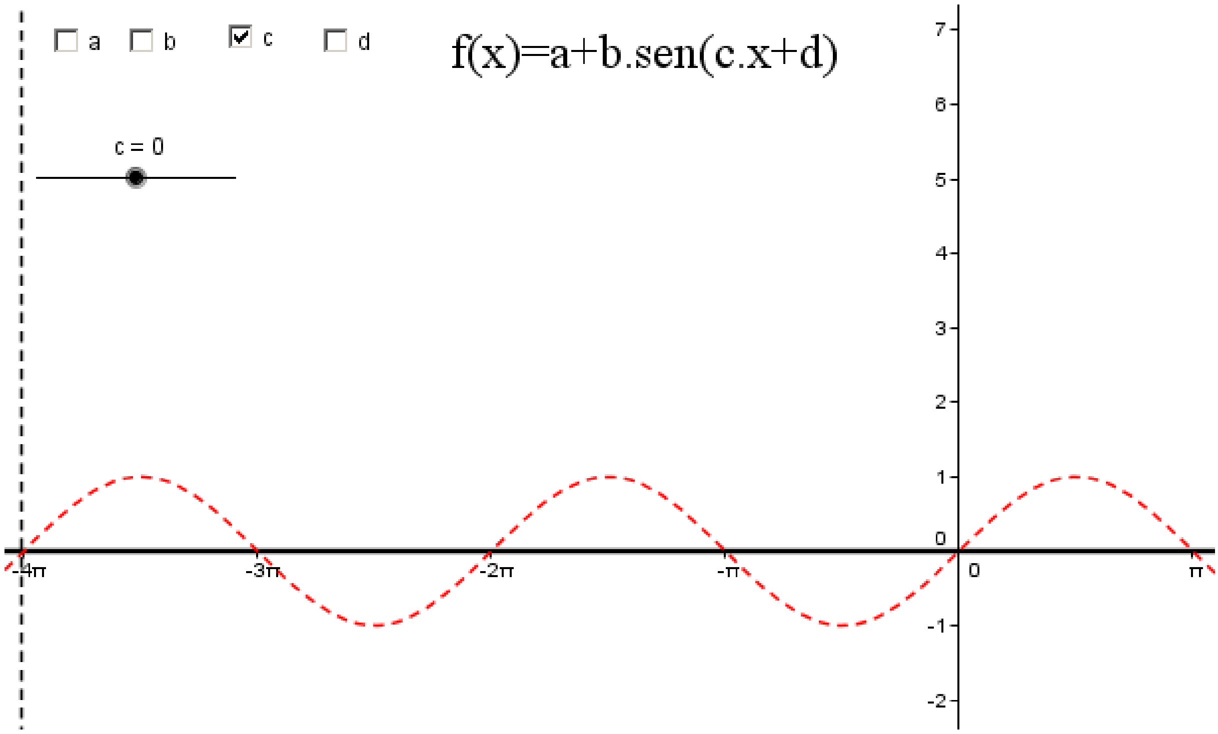

Figura 25: Produto de uma constante pelo argumento da função seno - parte 1.

A consequência da proporção inversa entre o período e a constante c é a fórmula $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$, que determina o período das funções trigonométricas seno e cosseno, resultado que é demonstrado no capítulo 3. Já para as funções tangente e cotangente a fórmula é $P = \dfrac{\pi}{|c|}$.

O último parâmetro analisado é a constante d, representando o valor que pode ser adicionado ao argumento x. Este estudo pode ser realizado através da planilha dinâmica www.geogebratube.org/student/m91485, na qual ao se promover alterações na constante d nota-se um deslocamento horizontal da função cosseno. Assim, para valores de d positivo a função é deslocada para esquerda tantas unidades quanto for o valor atribuido esta constante, enquanto para valores negativos de d a função de desloca horizontalmente para a sua direita tantas unidades quanto sugerir o valor de d, conforme a figura 27.

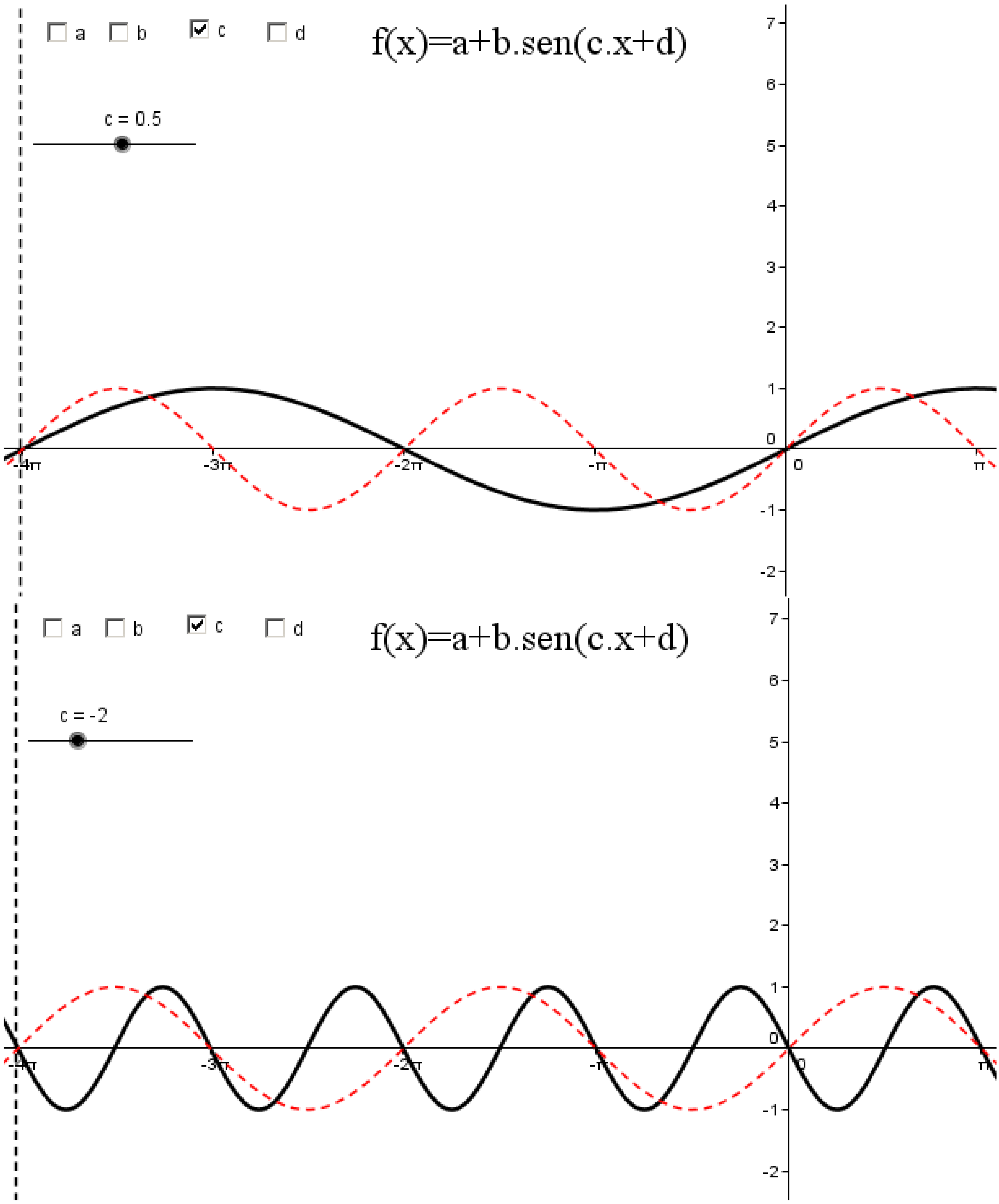

Figura 26: Produto de uma constante pelo argumento da função seno - parte 2.

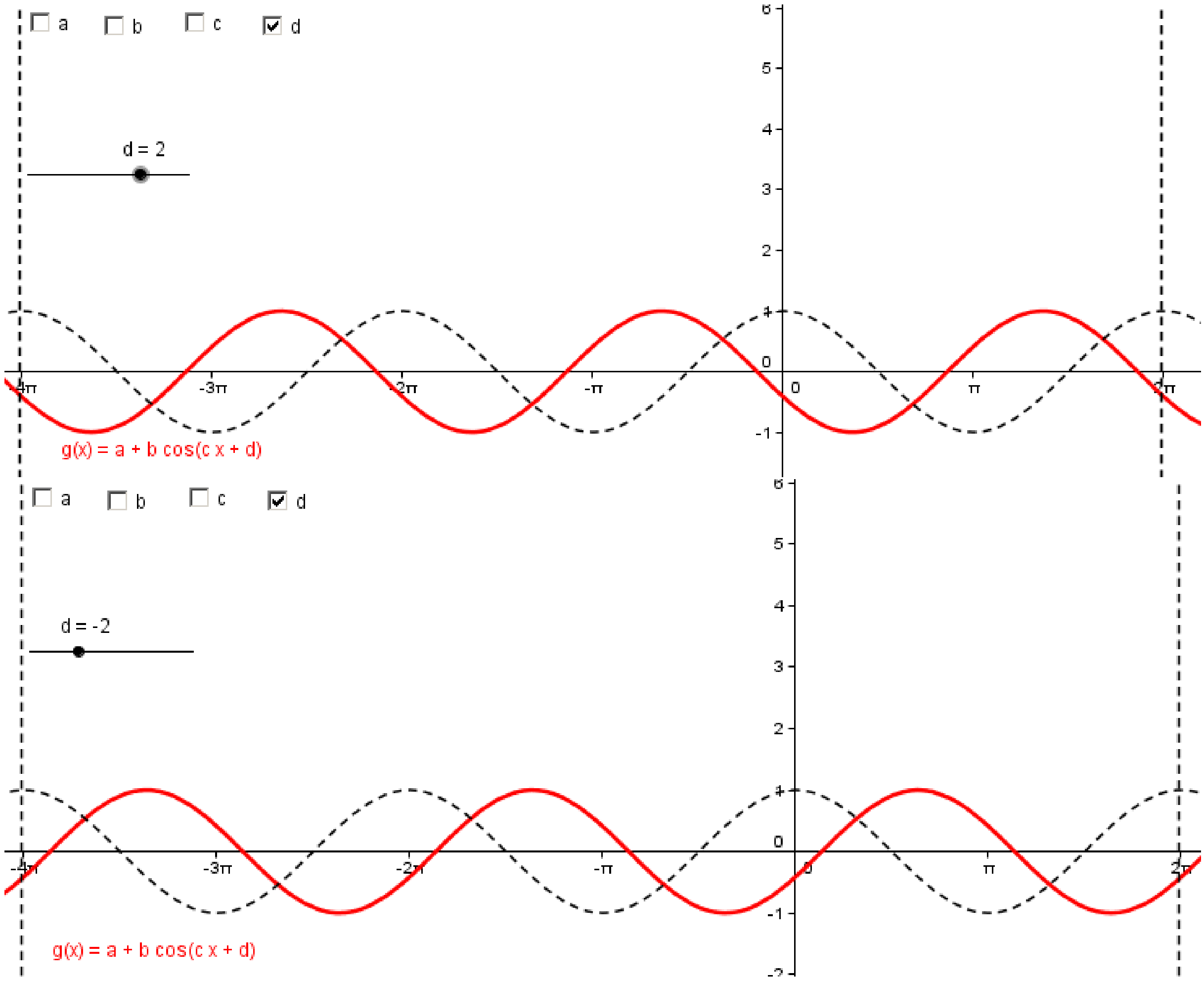

Figura 27: Adição/Subtração de uma constante ao argumento da função cosseno.

3 DEMONSTRAÇÃO DE ALGUMAS PROPOSIÇÕES

Neste capítulo objetiva-se demonstrar algebricamente algumas proposições matemáticas obtidas de uma maneira intuitiva ou geométrica ao longo do trabalho.

Inicialmente, demonstra-se a paridade das funções seno e cosseno que foram analisadas apenas geometricamente.

Proposição 3.1. *A função seno é uma função ímpar.*

Demonstração. Sejam α e β ângulos no ciclo trigonométrico, tais que $\alpha = -\beta$.

Seja y o valor da projeção do ângulo α sobre o eixo das ordenadas, enquanto $-y$ o valor da projeção do ângulo β sobre este mesmo eixo.

Assim, $sen(\alpha) = y = -sen(\beta) = -sen(-\alpha) \Leftrightarrow sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$. Portanto, a função seno é ímpar.

□

Proposição 3.2. *A função cosseno é uma função par.*

Demonstração. Sejam α e β ângulos no ciclo trigonométrico, tais que $\alpha = -\beta$.

Seja x o valor da projeção do ângulo α sobre o eixo das abscissas, enquanto x o valor da projeção do ângulo β sobre o mesmo eixo.

Tem-se que, $cos(\alpha) = x = cos(\beta) = cos(-\alpha) \Leftrightarrow cos(-\alpha) = cos(\alpha)$. Portanto, a função cosseno é par.

□

Durante o estudo dos parâmetros que alteram as funções trigonométricas observou-se 2π que a constante c modifica o período das funções e se utilizou a fórmula $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$ para chegar a alguns resultados relacionados a esta constante. Porém, faz-se necessário esclarecer como se determina essa fórmula. Para isso, antes é necessário provar o seno e cosseno da soma de dois arcos, ou seja, provar a igualdade $sen(a+b) = sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a$ e $cos(a+b) = cos\ a.cos\ b + sen\ a.sen\ b$.

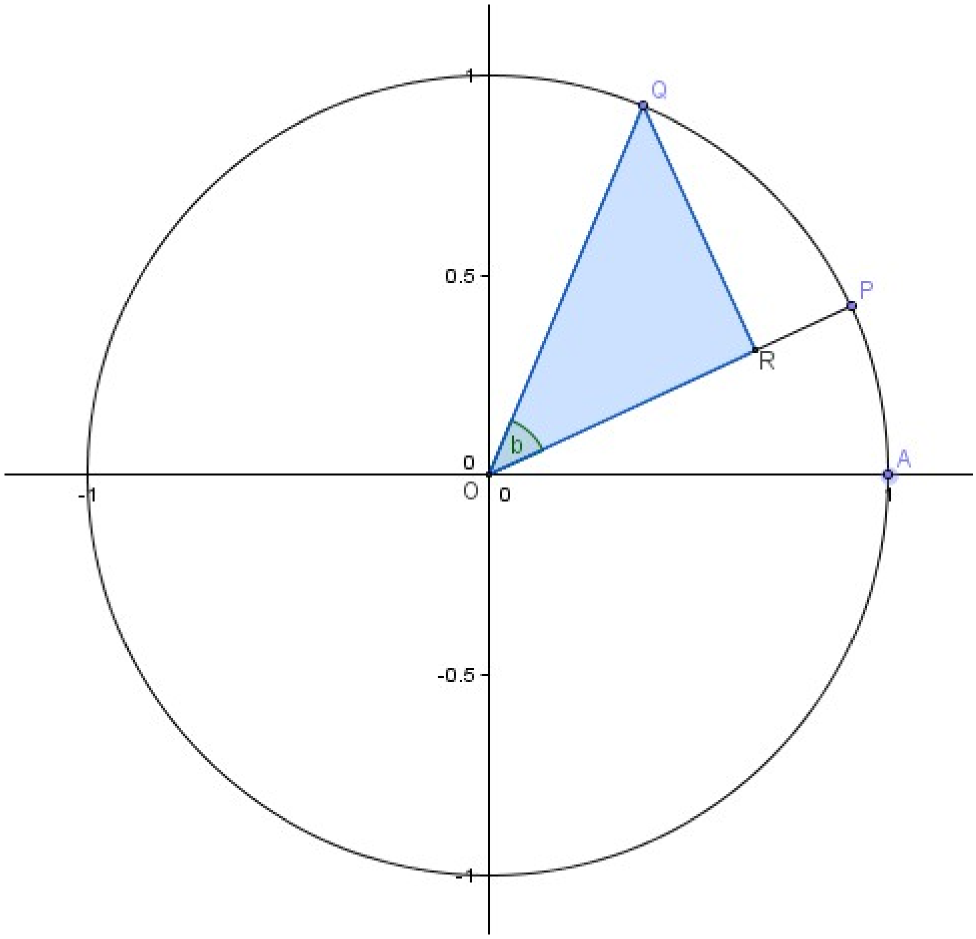

Figura 28: Adição de arcos - parte 1.

Demonstração. Pela figura 28, tem-se o triângulo ORQ retângulo em R, com $R\hat{O}Q = b$. Neste triângulo:

$$sen(b) = \frac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{QR}}{1} \Rightarrow \overline{QR} = sen(b) \tag{5}$$

$$cos(b) = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ}}{1} \Rightarrow \overline{OR} = cos(b) \tag{6}$$

Da figura 29 segue que os triângulos retângulos OMU e QRU , têm os ângulos $O\hat{U}M$ e $Q\hat{U}R$ opostos pelo vértice. Logo, por semelhança de triângulos, tem-se $M\hat{O}U = R\hat{Q}U = a$. Assim, no triângulo RSQ:

$$sen(a) = \frac{\overline{RS}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{RS}}{sen(b)} \Rightarrow \overline{RS} = sen(a).sen(b) \tag{7}$$

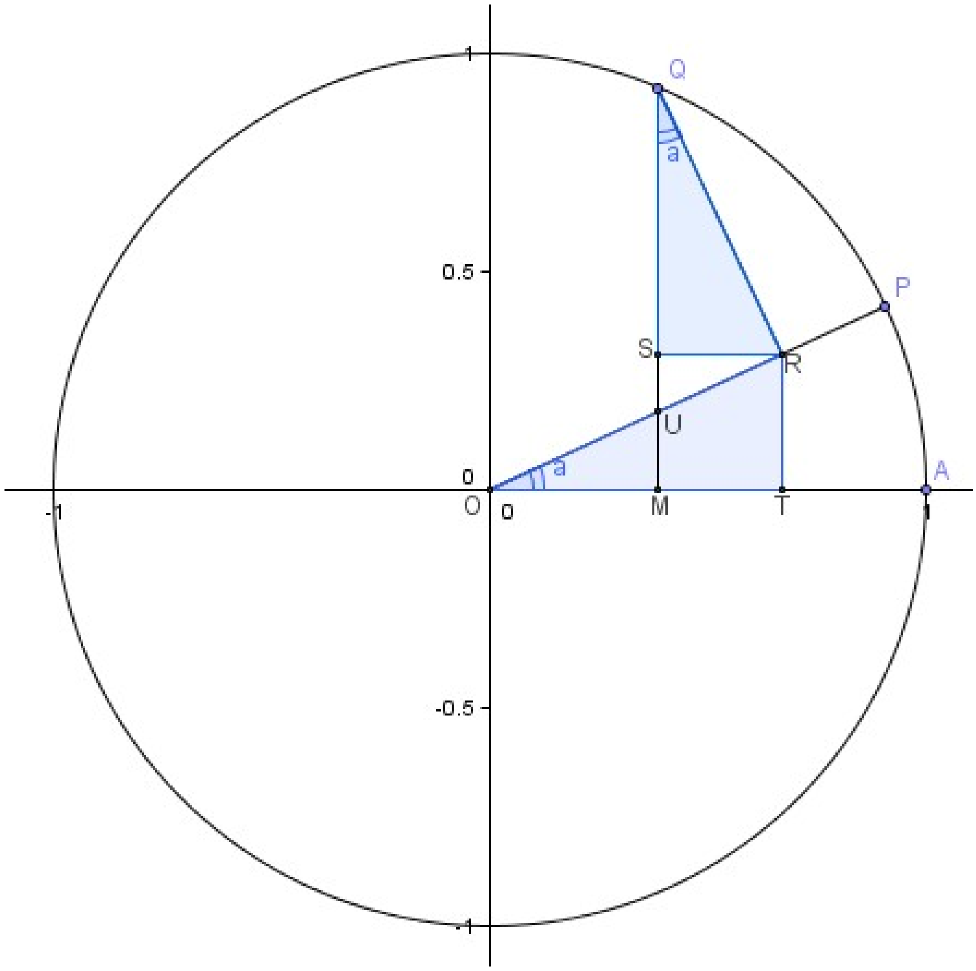

Figura 29: Adição de arcos - parte 1.

$$cos(a) = \frac{\overline{SQ}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{SQ}}{sen(b)} \Rightarrow \overline{SQ} = sen(b).sen(a) \tag{8}$$

E no triângulo OTR:

$$sen(a) = \frac{\overline{TR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{TR}}{cos(b)} \Rightarrow \overline{TR} = sen(a).cos(b) \tag{9}$$

$$cos(a) = \frac{\overline{OT}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OT}}{cos(b)} \Rightarrow \overline{OT} = cos(a).cos(b) \tag{10}$$

Na figura 28 tem-se que $sen(a+b) = \overline{MQ} = \overline{MS} + \overline{SQ} = \overline{TR} + \overline{SQ}$, então:

$$sen(a+b) = sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a \tag{11}$$

De maneira análoga se prova que $sen(a-b) = sen\ a.cos\ b - sen\ b.cos\ a$.
E como $cos(a+b) = \overline{OM} = \overline{OT} - \overline{MT} = \overline{OT} - \overline{RS}$, então:

$$cos(a+b) = cos\ a.cos\ b + sen\ a.sen\ b \tag{12}$$

□

De maneira análoga tem-se que $cos(a-b) = cos\ a.cos\ b - sen\ a.sen\ b$.

Como consequência destes resultados tem-se a igualdade $sen(a+b) - sen(a-b) = 2sen\ a.cos\ b$, obtida através da igualdade 9, pois $sen(a+b) = sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a - sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a = 2sen\ b.cos\ a$.

Esta última igualdade pode ser transformada no produto da diferença de dois senos.

Para isso é necessário provar a igualdade $sen\ p - sen\ q = 2.sen\dfrac{(p-q)}{2}.cos\dfrac{(p+q)}{2}$.

Demonstração. Sejam $a+b=p$ e $a-b=q$ resolvendo este sistema obtem-se $a = \dfrac{p+q}{2}$ e $b = \dfrac{p-q}{2}$.

Substituindo estas equações na igualdade $sen(a+b) - sen(a-b) = 2sen\ a.cos\ b$, tem-se:

$$sen\ p - sen\ q = 2.sen\left(\frac{p-q}{2}\right).cos\left(\frac{p+q}{2}\right). \tag{13}$$

□

Após estes resultados tem-se argumentos para demonstrar o porque a fórmula do período 2π das funções seno e cosseno é $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

Proposição 3.3. *Se p o período da função $f(x) = sen(cx)$, então $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.*

Demonstração. Sabe-se que $f(x)$ é uma função periódica quando para $p > 0$, tem-se $f(x+p) = f(x)$ para $\forall x \in D_f$.

Como $f(x) = sen(cx)$, tem-se:

$$f(x+p) = f(x) \Rightarrow sen(cx+p) = sen(cx) \Rightarrow sen(cx+cp) - sen(cx) = 0$$

Dá igualdade 13:

$$\Rightarrow 2.sen\frac{(cx+cp)-cx}{2}.cos\frac{(cx+cp)+cx}{2} = 0 \Rightarrow 2.sen\frac{cp}{2}.cos\left(cx+\frac{cp}{2}\right) = 0.$$

Esta igualdade vale para todo x real, assim quando:

$sen\dfrac{cp}{2} = 0$, tem-se $\dfrac{cp}{2} = k\pi \Rightarrow p = \dfrac{2k\pi}{c}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Desta maneira, para $k = 1$ tem-se o menor valor de p e usando $|c|$ pois, nao há períoodo negativo da função, tem-se que o período da função seno é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

$\square$

Para a demonstração do período da função cosseno o processo e a conclusão são análogos aos resultados encontrados para a função seno..

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação é resultado da criação de uma ferramenta para auxiliar no ensino da trigonometria. Com os recursos do Geogebra este objetivo foi atingido, pois através dele criaram-se as planilhas dinâmicas que aparentam ser uma boa opção de dinamizar o desenvolvimento do ciclo trigonométrico e relacioná-lo com o gráfico das funções trigonométricas.

Para os educadores essas planilhas surgem como uma oportunidade de atrair atenção dos educandos para as funções trigonométricas. Por conseguinte, também permitem trabalhar simultaneamente a rotação de um arco no ciclo trigonométrico com a construção do gráfico das funções, além de aproveitar a dinâmica das planilhas para instigar os alunos a buscarem, durante o desenvolvimento das funções, seus respectivos padrões, características e propriedades. Ainda, para os professores as planilhas dinâmicas tem um papel de otimizar o tempo de aula, uma vez que a construção do gráfico pode ocorrer mais rapidamente que ao se determinar apenas alguns pontos para construir o gráfico da função no quadro.

Para os alunos, as planilhas podem ser um resgate do seu interesse pela trigonometria. Hoje os alunos têm muitos recursos tecnológicos fora da sala de aula, jogos eletrônicos, internet e celulares, equipamentos que despertam a curiosidade e os instigam a desvendarem seus recursos e funções. Desta forma, se não ocorrer a união dos recursos tecnológicos com a realidade do aluno, é natural que ele perca a afeição pela matéria. As planilhas tem a seu favor a parte gráfica que é bem visual, estimulando o aluno a prestar atenção e observar o comportamento do gráfico que se desenvolve. Neste momento os alunos criam conjecturas que podem e devem ser exploradas pelos professores. As planilhas dinâmicas foram desenvolvidas com o objetivo de auxiliar os professores à ministrar , mais didáticamente, o conteúdo de trigonometria na sala de aula. Mas também podem ser utilizadas pelos alunos fora do ambiente escolar, uma vez que esse recurso possui um bom layout e fácil manuseio,o que as tornam bem intuitivas e até mesmo auto explicativas.

A construção das planilhas foi demorado devido ao fato que a cada atualização feita surgiam novas ideias para deixá-las mais interativas, como por exemplo, a opção de promover a movimentação através do “play”ou movimentá-las manualmente através da seletora. Tem-se também outro exemplo, que é inserir em algumas planilhas dinâmicas o gráfico “original”da função, para enfatizar o comportamento deste quando se altera o valor de algumas de suas constantes.

Para fornecer um suporte teórico a essas planilhas dinâmicas, formalizou-se ao longo da dissertação o conteúdo de trigonometria, iniciando com alguns conceitos preliminares, referentes ao ciclo trigonométrico, as definições do seno, cosseno e tangente e os conceitos de paridade e periodicidade de uma função. Estes conceitos servem de suporte para o assunto principal da dissertação, as funções trigonométricas. Estas foram formalmente definidas e tiveram suas principais características explanadas, sendo sempre feitas referências as contribuições que as planilhas dinâmicas podem acrescentar a este conteúdo.

Ainda, durante a elaboraçãoo das planilhas dinâmicas foram desenvolvidas algumas planilhas referentes aos arcos duplos e triplos das funções trigonométricas, conteúdo que, por opção, não é abordado no desenrolar da dissertação. Porém, como as planilhas são uma ferramenta para auxiliar os educadores, também foram disponibilizadas no site Geogebratube no link www.geogebratube.org/student/b91463 e estão no apêndice do trabalho para que possam ser utilizadas em sala de aula.

Existem dois projetos que poderão ser desenvolvidos a partir desta dissertação. O primeiro é voltado para os educadores e consiste na elaboração de uma oficina de Geometria Dinâmica, na qual os professores poderão explorar os recursos do Geogebra para que esse os auxiliem em sala de aula. O segundo projeto consiste em instituir em sala de aula o estudo da trigonometria a partir das planilhas dinâmicas, para poder averiguar os resultados concretos sobre as contribuições que as planilhas podem trazer aos discentes.

Desta forma, esta dissertação é uma contribuição para o desenvolvimento do ensino da trigonometria, pois a adoção de softwares dinâmicos como o Geogebra se farão cada vez mais presentes dentro da sala de aula. O caminho não é simples, porém é possível. A busca por novos métodos, softwares e recursos metodológicos deve ser constante pelos educadores, porque promover uma acessível compreensão dos conteúdos pelos alunos é fundamental para que ocorra um aprendizado satisfatório.

REFERÊNCIAS

ÁBILA. Fernanda., Inovação na Educação, Revista Aprendizagem, Paraná, v.2 n.17, p.34- 39, març/abril 2010.

BATISTA. João Miguel Nobre,. Revisões de Trigonometria. - Setubal, 2000. Disponível em: http://pt.scribd.com/doc/50533684/14/Paridade-das-funcoes-trigonometricas. Data de acesso: 28/02/2014.

GOMES. Vanderley Pereira,. A importância dos recursos tecnológicos no processo ensino-aprendizagem para professores e alunos de matemática, Vanderley Pereira Gomes, Claudia Georgia Sabba, 2013. Disponível em: www.uninove.br/marketing/ixcoloquio/PDF/claudiageorgia.pdf. Data de acesso: 28/02/2014.

IEZZI. Gelson,. Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria, volume 2: São Paulo: Atual, 1977-78.

LIMA. Elon Lages, CARVALHO. Paulo Cezar Pinto, WAGNER. Eduardo, MORGADO. Augusto César. A matemática do ensino médio, volume 1 - 9.ed, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO. Antonio dos Santos., Matemática ma escola do 2º grau, São Paulo: Atual,1996.

RIBEIRO. Jackson,. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, volume 2: ensino médio/Jackson Ribero. - São Paulo: Scipione, 2010.

SANT'ANNA, V. M., Recursos educacionais para o ensino: quando e por quê?, Petrópolis: Vozes, 2004.

SCHERER. Sueli. Professores devem incentivar o uso de novas tecnologias, Disponível em: www.curitiba.pr.gov.br/radio/professores-devem-incentivar-o-uso-de-novas-tecnologias/136154/30480. Data de acesso: 28/02/2014.

SMOLE. Kátia Cristina Stocco, DINIZ. Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio, volume 2. -6.ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.

ZÓBOLI, Gabriela., Práticas de ensino: subsídios para a atividade docente, São Paulo: Ática, 1995. p.23.

ANEXO A – ARCOS

No desenvolvimento das planilhas dinâmicas no Geogebra, foram criadas algumas planilhas dinâmicas para estudar a questão das funções trigonométricas quando aplicadas a arcos duplos e triplos. Porém, como esta parte do conteúdo não foi abordada no trabalho foram disponibilizados os links das planilhas dinâmicas para apoio aos educadores durante as aulas.

Os seguintes links podem ser utilizados para se trabalhar os arcos duplos aplicados em cada umas das funções trigonométricas.

www.geogebratube.org/student/m/91498

www.geogebratube.org/student/m/91499

www.geogebratube.org/student/m/91500

www.geogebratube.org/student/m/91501

www.geogebratube.org/student/m/91503

www.geogebratube.org/student/m/91504

Os próximos links auxiliam no ensino dos arcos triplos das funções trigonométricas.

www.geogebratube.org/student/m/91505

www.geogebratube.org/student/m/91506

www.geogebratube.org/student/m/91507

www.geogebratube.org/student/m/91508

www.geogebratube.org/student/m/91509

www.geogebratube.org/student/m/91510