Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Lilian de Lima Madeira

Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo

Juiz de Fora

2014

Lilian de Lima Madeira

Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Sofia Carolina da Costa Melo

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Madeira, Lilian de Lima.
Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo/ Lilian de Lima Madeira. - 2014.
76 f. : il.

Orientador: Sofia Carolina da Costa Melo. Dissertação (PROFMAT)
Universidade Federal de Juiz de Fora - Instituto de Ciências Exatas.
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Sólido de revolução. 2. Definição. 3. Volume. 4.Aproximação. 5. Técnica dos discos.
I. Melo, Sofia Carolina da Costa, orient. II. Título.

Lilian de Lima Madeira

Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 26 de março de 2014

Prof. Dr. Sofia Carolina da Costa Melo - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Valéria Mattos da Rosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Allan de Oliveira Moura
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho àqueles que foram escolhidos por Deus para serem meus anjos da guarda aqui na Terra: meus pais, Jorge José e Zilma. Pai, como teria conseguido chegar até aqui se não fosse você e sua companhia em tantas viagens de Areal/ Paraíba do Sul até Juiz de Fora? Nenhum de seus compromissos era mais importante que me levar até "os estudos", não é mesmo? Largava tudo para me levar quando eu não conseguia dirigir, deixava tudo de lado para me acompanhar em todos os lugares em que precisei ir. Mãe, como teria chegado até aqui se não fosse você, suas palavras e orações em tantos momentos em que pensei que as dificuldades pelas quais passei me venceriam? Mesmo que eu lhe tratasse com alguma ignorância, devido à essas dificuldades, suas palavras eram doces e havia sempre um "eu te amo" ao final de cada telefonema. Sei que pensam que erraram muito, que as dificuldades pelas quais passamos durante nossas vidas foram responsáveis por minhas dificuldades nesta etapa, mas não seria quem sou se não tivesse vocês em minha vida e em nenhum momento vejo erros em nada do que fizeram. Pelo contrário, vejo duas pessoas que sempre se sacrificaram para que eu e minha irmã pudéssemos ter o que vocês não tiveram. Mesmo com tantas dificuldades, conseguimos. Vencemos, juntos, mais um etapa. E essa conquista não é minha, é nossa! Pois sem vocês, eu não teria chegado até aqui (tenho total certeza disso). Vocês são minha inspiração, fonte do meu amor infinito, reflexo de sabedoria, integridade, fé, esperança e determinação. Para vocês dedico este trabalho e cada uma de minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Preciso e devo começar agradecendo a Deus. Não por ser normal, não por ser comum, mas porque Ele me deu forças para que eu vencesse muitos desafios e conseguisse chegar até aqui. O caminho nestes três anos não foi fácil, mas foi graças a Ele que consegui continuar caminhando, mesmo quando meus pés pediam para parar. Obrigada meus Deus por todas as bênçãos concedidas e pelo seu infinito amor.

Também devo agradecer ao meu esposo Gustavo, que tanto amo e que no início ainda era meu namorado, mas que independente do título que receba, sempre foi meu companheiro, meu amor, meu amigo. Gu, obrigada por ter ficado ao meu lado em todas as tribulações, obrigada pela compreensão de tantos dias em que eu estive ausente, mesmo de corpo presente. Foram sábados e mais sábados sem sua companhia. Foi o primeiro ano de nosso casamento, já iniciado com minha falta de tempo. Mas seu amor esteve sempre me acompanhando e me manteve de pé quando achei que iria cair. Esta foi mais uma jornada que enfrentamos juntos! Seu apoio foi essencial para que eu chegasse aqui. Obrigada amor por tudo o que fez e faz por mim!

Agradeço à minha irmã, Nathalia, um pedaço de mim fora do meu corpo, tão diferente, mas ao mesmo tempo tão igual. A irmã caçula de quem eu deveria cuidar, mas que cuida de mim. Seu amor me deu forças e suas palavras me fizeram continuar quando eu queria parar. Obrigada irmã, por sacrificar seu tempo para tantas vezes me ajudar. Você nunca duvidou de que eu seria capaz e tantas vezes acreditou mais em mim do que eu mesma. Sua crença em meu potencial era tão grande que me convenceu de que eu era capaz. Essa conquista também é sua! Amo você irmã-amiga!

Obrigada aos meus pais, Jorge e Zilma. Não tenho palavras para descrever o imenso amor que tenho por vocês, a imensa gratidão que sinto. Vocês são meu alicerce, vocês são minha fortaleza. Sempre que precisei, vocês estiveram ao meu lado. Mesmo longe, vocês estavam perto. O amor de vocês me fez suportar a dor e o cansaço e chegar ao final de mais essa caminhada. Obrigada meus pais por tudo o que fizeram e ainda fazem por mim. Nunca poderei agradecer a tudo, mesmo que viva mil anos. A vida não foi fácil para vocês, mas vocês sempre me fizeram ver a beleza de cada momento, mesmo naquelas situações em que parecia impossível encontrar algo de belo. Se cheguei aqui, é porque vocês estão comigo.

Obrigada à todos os colegas da turma de 2011 do PROFMAT. Começamos juntos, terminamos em tempos diferentes, mas vocês fizeram parte dessa conquista e serão para sempre lembrados em meus coração.

Obrigada, em especial, aos amigos Rodrigo e Karolyne, que me ajudaram num momento do curso em que achei que teria que largar tudo, num momento em que a esperança parecia ter desaparecido. Vocês foram minha voz no curso, quando eu mal conseguia falar. Vocês me deram força para continuar e estiveram ao meu lado quando tudo parecia que iria desabar. Vocês não tem ideia de quanto sou grata por terem estado ao meu lado, por terem me ajudado a hoje eu estar aqui e poder dizer: eu venci essa etapa! Obrigada, amigos!

Obrigada ainda aos colegas Augusto, Jones e Marcelo – além do já citado Rodrigo – pela companhia nas viagens de sábado. Mesmo tendo que ouvir tanto sobre futebol, mulher e, o pior, sobre o Fluminense, vocês tornaram esses dias mais fáceis e divertidos.

Obrigada às minhas amigas Vivian e Maria Clara, que continuaram a ser minhas amigas mesmo com tantas desculpas de que não poderia estar presente em nossas reuniões devido aos estudos. Agora vamos poder colocar as conversas em dia!

Agradeço à todos os professores do PROFMAT da UFJF, em especial ao José Barbosa, que me compreendeu e acolheu meus problemas quando tanto precisei, ao Rogério Casagrande, pela sua solicitude e por me ajudar a recomeçar a estudar quando achei que isso seria impossível e ao Luiz Fernando Faria pela sua paciência e compreensão.

Agradeço à Sofia, minha orientadora, que me ajudou não só a conseguir concluir este trabalho, mas também me ajudou durante o curso com suas palavras. Você me ajudou a construir essa proposta, vendo beleza e potencial onde eu via defeito, me fazendo perceber como cada detalhe criado era especial, sempre apoiando e incentivando para que eu não desistisse. Mesmo impondo continuava doce. Obrigada por tudo!

Agradeço aos professores Allan de Oliveira Moura e Valéria Mattos da Rosa por aceitarem fazer parte da banca avaliadora deste trabalho e por ampliarem ainda mais minha visão sobre a proposta.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática e a Universidade Federal de Juiz de Fora por me proporcionar a oportunidade de cursar um Mestrado de qualidade e excelência como este.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos, por estarem sempre ao meu lado quando foi preciso, por acreditarem em mim e a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui. Acho que vou acabar esquecendo de alguém se for listar os nomes, então a todos vocês que sabem que foram importantes para a conclusão deste curso, o meu muito obrigada!

“Como é que a Matemática, que é um produto do pensamento humano e independente de qualquer experiência, se adapta de uma maneira tão admirável aos objetos da realidade? A razão humana seria capaz, sem recurso à experiência, de descobrir só pela sua atividade as propriedades dos objetos reais?”(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo resgatar um conceito matemático pouco visto pelos alunos – o conceito de sólido de revolução – e, através deste conceito, fazê-los perceber inúmeras variáveis de estudo e relações matemáticas, além de buscar um avanço no raciocínio lógico-dedutivo e uma percepção mais significativa de espaço. Percebeu-se que tais sólidos são pouco explorados no Ensino Médio e, no entanto, mostram-se muito comuns em nosso cotidiano. Desta forma, foi elaborada uma proposta de estudo para alunos do Ensino Médio com atividades que visam construir paulatinamente a definição de sólidos de revolução, utilizando materiais concretos e o *software winplot*, despertando a curiosidade, o interesse, trabalhando a visualização, a abstração, a capacidade de elaboração de conceitos, a investigação, enfim, o pensar e fazer matemáticos. Além de explorar a definição e o cálculo de volumes conhecidos, a proposta tem como um dos principais objetivos introduzir a técnica dos discos para o cálculo aproximado de volumes de sólidos gerados pela rotação de regiões planas delimitadas em parte pelos gráficos de funções já conhecidas pelos alunos (que são sólidos de revolução). Através desta proposta de estudo, espera-se que os alunos desenvolvam uma compreensão melhor dos sólidos de revolução, o que são e como calcular seus volumes aproximados mesmo quando não existe uma fórmula para tal.

Palavras-Chave: Sólido de revolução. Definição. Volume. Aproximação. Técnica dos discos.

ABSTRACT

This paper aims to redeem a mathematical concept rarely seen by students – the concept of solid of revolution – and, through this concept, make them realize several variables studies and mathematical relations, seeking for a breakthrough in logic deductive reasoning and a more significant space perception. Was noticed that those solids are underexplored in High School, and yet, so common in our daily lives. Thus, a study proposal was developed for those High School students with activities designed to gradually built the definition of solid of revolution, using concrete materials and the winplot software, arousing the curiosity, interest, visualization, abstraction, the capacity building concepts, investigation and finally, the mathematical thinking and problem solving. In addition to explore the volumes of known definition and calculation, the major goal of this proposal is to introduce the disks technique to make the approximate volume calculus of solid generated by the rotation of plane regions, partially bounded by functions graphics already familiar to students (which are revolution solids). Through this study proposal is expected that students develop a better comprehension of revolution solids, what they are and how to calculate their approximated volumes even without a formula.

Key-words: Revolution solid. Definition. Volume. Approximation. Disks technique

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo o texto da Reorientação Curricular do Estado do Rio de Janeiro, em [6], página 43, "a aquisição de conhecimentos matemáticos tem sido apontada como relevante para o desenvolvimento de diversas formas de pensar (...) tais como a percepção geométrica". De acordo com este mesmo documento, esta capacidade desempenha um papel importante na vida prática do aluno. Sabe-se que a percepção geométrica é necessária até mesmo para a compreensão do mundo e suas formas.

A Geometria espacial é de fundamental importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração e da criatividade. Através dela os alunos conseguem ampliar a sua habilidade de visualização e percepção da beleza e harmonia das formas. Enxergar o mundo com a noção de profundidade que o espaço traz é simplesmente enxergar o mundo.

Faz-se necessário que o aluno perceba a Matemática como "um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la" ([3], p. 40). Neste sentido, a Geometria deve ser vista como um instrumento fundamental para a leitura e interpretação do espaço. Além disso, no Ensino Médio, o aluno deve perceber a estrutura da Matemática como Ciência, com todos os seus métodos investigativos, demonstrações e teoremas. Ele deve estar apto a adquirir conhecimentos técnico-científicos e, através desses conhecimentos, formular hipóteses, construir conjecturas, aplicar teorias, desenvolvendo, assim, um raciocínio lógico. E para isso um trabalho investigativo que permita o aluno buscar suas próprias respostas para os problemas e confrontá-las com as soluções é fundamental. Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) em [3], página 41 "cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida."

Através do que foi dito acima, percebe-se a importância do trabalho matemático no Ensino Médio e de como a Geometria Espacial tem um papel fundamental nessa questão. É ela a responsável por relacionar o espaço e suas formas com outras áreas matemáticas, buscando a formalização de conceitos e a construção de um pensar matemático. Segundo [3], página 41: "A aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático".

Em particular, sobre a Geometria, de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, em [5], página 75:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os

> alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

E, ainda de acordo com este mesmo documento, “o trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização”.

Desta forma, percebe-se a real importância de que todos os conhecimentos adquiridos nesta etapa sejam bem internalizados. E é isso que este trabalho se propõe a fazer, tendo como base o assunto sólidos de revolução. Através de atividades que busquem atender aos pressupostos listados acima, atividades que integrem a Geometria e a Álgebra, a visualização e a abstração, a teoria e suas aplicações, este trabalho busca desenvolver nos alunos um novo modo de ver esses sólidos, fazendo-os perceber que nem tudo em Matemática são fórmulas e busca fazê-los usar a criatividade e capacidade imaginativa em prol do aprendizado significativo. Desta forma, os alunos poderão perceber que fazer matemática está ao alcance de todos e que o conhecimento avançado pode sim, de uma forma menos formal, ser compreendido por eles.

Mas a pergunta é: por que a escolha pelos sólidos de revolução?

Bom, a resposta a esta pergunta encontra-se em cada linha deste trabalho.

1.1 JUSTIFICATIVA

O tema deste trabalho é pouco abordado no Ensino Médio sendo, na maioria das vezes, apenas citado por alguns autores. Os sólidos de revolução são tratados como pequenas observações nos cantos dos livros didáticos. Mas por que isso? Por que não estudar com mais detalhes esses sólidos tão comuns no dia-a-dia?

Afinal, qual sólido representaria uma lata cheia do delicioso leite condensado, por exemplo? E os funis, tão comuns em todas as cozinhas, não seriam um ótimo exemplo de como um cone e um cilindro podem se unir, formando um novo sólido? Se vocês pararem para observar, certamente encontrarão outros diversos exemplos de como os sólidos de revolução são comuns no cotidiano. E, no entanto, a maioria dos alunos saem do Ensino Médio sem, ao menos, compreender a ideia do que é um sólido de revolução.

E foi nesta questão que este trabalho se apoiou. Buscando resgatar algo que quase não é estudado pelos alunos, pretende-se fazê-los desenvolver uma visão de espaço mais aguçada, trabalhar a abstração, relacionar temas matemáticos diferentes, utilizar materiais concretos e as tecnologias em busca de construir um conhecimento matemático mais significativo e, ao mesmo tempo, despertar a curiosidade para o “ir além”. Esta é uma das propostas deste trabalho: aguçar a vontade dos alunos em descobrir coisas novas, novos conhecimentos matemáticos, fazendo-os perceber que nem todo conhecimento dito de Ensino Superior é tão inalcançável para eles.

É claro que tudo tem suas restrições, cada etapa do desenvolvimento humano possui limitações e assim também acontece com o conhecimento matemático. Os alunos do Ensino Médio podem sim, compreender parte de um conteúdo que somente alunos de Ensino Superior estudariam, mas para isso deve-se adequar a linguagem, ocultar detalhes, proporcionando uma visão mais simplista da teoria.

Legitimando as palavras acima e a proposta deste trabalho, os Parâmetros Curriculares Nacionais para a Matemática (PCN), em [2], página 23 destacam que: "para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos". E essas palavras serviram como alicerce para as atividades desenvolvidas aqui.

Esta pesquisa ainda se apoia na ideia de que os alunos devem conseguir "identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades"([4], p.116). Assim, através das atividades desenvolvidas, que trabalham algumas regularidades entre outras questões, espera-se que os próprios alunos percebam o que são os sólidos de revolução e busquem construir uma definição para o mesmo, além de aplicar conhecimentos prévios para cálculo de volumes, para a percepção de sólidos gerados através da rotação de diferentes figuras planas, buscando "perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto" e "identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos". ([4], p.116).

E, finalizando, tem-se ainda a preocupação com a relação entre um sólido de revolução e uma função, dando especial atenção às funções já estudadas pelos alunos, a fim de que os mesmos consigam articular diferentes teorias dentro da Matemática e estabeleçam relações entre elas. Desta forma, de acordo com [4], página 116, busca-se "construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada", percebendo que "a forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta".

1.2 OBJETIVOS

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Pcn+), em [4], página 123: "a Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços".

Sendo assim, trabalhar Geometria deve ir além de aplicar fórmulas. Deve permitir ao aluno reconhecer o espaço que o rodeia, perceber-se como parte deste espaço e compreendê-lo em suas particularidades, além de permitir aos alunos alçar voos mais altos. Estimular a criatividade e a capacidade argumentativa e lógica do aluno devem ser constantes no ensino de Matemática.

A Geometria Espacial traz consigo uma beleza única, pois espaço é exatamente o lugar onde todos vivem. Muitos estudam o espaço: Astrônomos, Físicos, Biólogos, Matemáticos, etc., cada qual trabalhando este espaço dentro de sua área, buscando respostas, calculando medidas, estudando elementos deste espaço dentro de seu campo, buscando, assim, descrever as características peculiares desta imensidão que rodeia a todos. E por que os alunos, em Matemática, veem este espaço de maneira tão superficial? Por que a visão de espaço dos alunos restringe-se a fórmulas, cálculos complicados e figuras que eles não compreendem? Se o espaço é o local que eles vivem, deveria ser simples para eles conseguir enxergar elementos desse espaço. No entanto, não é isso que se nota. Poucos são os alunos que dizem compreender essa Geometria Espacial estudada no Ensino Médio. Poucos alunos demonstram estabelecer relações entre os sólidos de seu dia-a-dia e os sólidos estudados em sala de aula. E pouquíssimos alunos conseguem perceber relações entre a Geometria Espacial e outros temas matemáticos, além da própria Geometria.

De acordo com [4], página 125:

> é importante destacar que este tema estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana.

Desta forma, o objetivo geral deste trabalho é resgatar um conceito matemático pouco visto pelos alunos – o conceito de sólido de revolução – e, através deste conceito, fazê-los perceber inúmeras variáveis de estudo e relações matemáticas, além de buscar um avanço no raciocínio lógico-dedutivo e uma percepção mais significativa de espaço.

Para alcançar tal objetivo, esta pesquisa tem como objetivos específicos:

- Trabalhar mais profundamente o conceito de sólido de revolução e o cálculo de seus volumes, procurando introduzir conhecimentos pouco estudados (ou não estudados) pelos alunos, como eixo de rotação, sólido gerado, região plana, volume através da decomposição e da aproximação por cilindros, entre outros;

- Utilizar materiais concretos e recursos tecnológicos, em especial o *software livre winplot* [18], para desenvolver no aluno uma melhor compreensão e visão dos sólidos estudados, além de estimulá-lo em busca do aprendizado significativo;
- Promover uma sequência de atividades que despertem o interesse, a imaginação e a criatividade do aluno, trabalhando a percepção de regularidades e a aplicação de pré-conceitos e visando a construção da definição de sólido de revolução pelo próprio aluno e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo para aplicação no cálculo de volumes;
- Mostrar ao aluno uma nova maneira de calcular volumes de sólidos de revolução, sem a utilização de fórmulas, introduzindo uma teoria de nível superior de uma maneira simplista, mas que desperte nos alunos a vontade de buscar novos conhecimentos e novas aplicações e de estarem em constante processo de aprendizado e sempre buscando novos modelos de resolução de problemas.

Enfim, através das atividades propostas, pretende-se que o aluno do Ensino Médio compreenda a definição de um sólido de revolução, sua relação com as funções que o geram e o cálculo de seus volumes. Para este último item, o aluno verá várias formas de se chegar a um resultado: seja através da aplicação das fórmulas já conhecidas, através da decomposição em sólidos comuns, seja buscando uma aproximação através da técnica dos discos (não formalizada) para volumes de sólidos desconhecidos. Tudo isto está em forma de atividades a serem desenvolvidas com os alunos, seguindo uma estrutura que valorize cada etapa do conhecimento e cada etapa de desenvolvimento do aluno.

1.3 PÚBLICO-ALVO

Este trabalho destina-se à aplicação em turmas do terceiro ano do Ensino Médio, podendo ser aplicado em turmas de segundo ano, desde que sejam observados os pré-requisitos necessários ao entendimento das atividades.

Optou-se pela aplicação no último ano de estudos do Ensino Médio devido à previsão de que, neste ano, os alunos já estudaram diversos conceitos como áreas de figuras planas, volumes, funções e, desta forma, possuem todos os pré-requisitos e a sensatez necessária para ampliar e relacionar esses conceitos. Além disso, deduz-se que neste ano de ensino, os alunos já possuem uma maturidade de raciocínio lógico, estando aptos a aplicar os conhecimentos prévios que possuem na busca por soluções e aplicações inovadoras, além de estarem prontos para serem introduzidos numa forma diferente de fazer matemática: uma forma mais investigativa, onde os mesmos buscarão por respostas e serão apresentados a conteúdos um pouco mais sofisticados, fazendo aplicações destes conteúdos.

1.4 PRÉ-REQUISITOS

Para o desenvolvimento das atividades desta pesquisa, primeiramente os alunos devem deter conhecimentos básicos de Aritmética, como cálculos numéricos e interpretação de textos e solução de problemas. Além disso, pressupõe-se um estudo anterior sobre as funções afim, quadrática e exponencial. Também são pré-requisitos: conhecimentos de Geometria Plana, como tipos de figuras planas e suas áreas, além de conhecimentos da própria Geometria Espacial, como os tipos de sólidos geométricos (paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas) e as fórmulas para cálculo de seus volumes.

Nesta pesquisa optou-se por fazer apenas um breve resumo sobre o volume dos principais sólidos citados acima, pois tomou-se como pressuposto que os alunos já estudaram este conteúdo. Desta forma, pode-se dar mais ênfase ao assunto da pesquisa, que são os sólidos de revolução.

1.5 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Neste trabalho serão utilizados materiais concretos para que os alunos consigam visualizar os sólidos de rotação, seus respectivos eixos de revolução e região plana geradora. Estes materiais são bem simples e constituem-se de espécies de bandeirinhas, produzidas com papel cartão e palitos para churrasco. As bandeirinhas utilizadas na proposta tem os formatos de retângulo, triângulo, semicírculo e uma última, utilizando arame para distanciá-la do eixo, no formato de círculo. A imagem destas bandeirinhas podem ser encontradas no ANEXO A.

Além do material concreto, será utilizado o *software* livre *winplot* para plotagem de gráficos de funções e posterior rotação destes gráficos, em um intervalo definido, gerando superfícies de revolução. Sendo assim, deverá haver à disposição um laboratório de informática com computadores suficientes. Este recurso – *winplot* – é muito importante para que os alunos consigam visualizar sólidos desconhecidos, gerados pela rotação das mais diferentes funções em torno do eixo x. O professor pode abusar deste *software* como recurso de visualização, buscando trabalhar com os alunos os diferentes sólidos gerados pelas diferentes funções e por uma única função, mudando o intervalo ou o eixo de rotação. Essa visualização é muito importante para que os alunos consigam perceber o que acontece ao rotacionarmos um intervalo de uma função contínua ao redor de um dos eixos coordenados.

1.6 DIFICULDADES PREVISTAS

As dificuldades listadas nesta seção foram fruto de uma cuidadosa reflexão sobre cada uma das etapas da proposta e estão baseadas na experiência docente da autora.

Geralmente, ao estudar um conteúdo de Geometria Espacial, os alunos apresentam muitas dificuldades iniciais de visualização. Passar do plano abstrato (ideias) para o concreto (visualização) costuma ser um grande desafio. No entanto, as atividades desta pesquisa foram construídas pautadas na minimização dessas dificuldades através do trabalho com materiais concretos e com o *software winplot*. Desta forma, espera-se que as dificuldades neste campo sejam bem poucas, caso ocorram.

Outra posterior dificuldade poderia acontecer nos cálculos de volume através da aplicação das fórmulas já conhecidas pelos alunos, devido à alguma lacuna na aprendizagem desses conceitos. Para isso, foi pensado num resumo sobre os principais volumes dos sólidos que eles já conhecem, onde o professor fará uma pequena revisão, também buscando com que as dificuldades nessa etapa sejam minimizadas.

Já mais na parte específica voltada para a definição de sólidos de rotação, os alunos podem apresentar dificuldades em relação a formalização de seus pensamentos através de palavras que traduzam o que pensam ser um sólido de revolução. Para que isso não ocorra, o ideal é que o professor os encoraje e escrever sem se preocuparem com erros, falhas, formalização da linguagem, etc. Desta forma, os alunos se sentirão mais à vontade para expressar seus pensamentos na forma escrita e o professor pode acabar se surpreendendo com o resultado e, assim, espera-se que não haja grandes dificuldades nessa etapa.

Na etapa final, onde a ideia da técnica dos discos para cálculo de volumes de sólidos de rotação será introduzida, podem surgir algumas dificuldades em perceber a relação das regiões delimitadas em parte pelos gráficos das funções com os sólidos – apesar da sequência de atividades estar voltada para a minimização destas – e, em especial, na parte de aplicação da ideia. O ideal é que o professor avance cada etapa com bastante cautela, procurando sempre reforçar a necessidade dos alunos não deixarem nenhuma dúvida, pois uma dúvida em alguma das etapas do trabalho poderá prejudicar o entendimento de todo o projeto. E é importante destacar que toda a sequência de atividades foi construída pensando exatamente nos momentos onde poderiam surgir as dificuldades e em como saná-las. Sendo assim, ao seguir a sequência, o que se espera é que as dificuldades com o assunto do trabalho em si sejam mínimas e, caso surjam, que estas dificuldades apareçam mais na última etapa, onde um conteúdo de Ensino Superior será, de forma mais simples, introduzido para os alunos.

1.7 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

A quantidade de aulas previstas para esta proposta pode variar de acordo com a necessidade do professor ou dos alunos mas, em média, são previstas 18 aulas de 50 minutos cada, sendo:

- Uma aula para a aplicação do questionário de sondagem;

- Duas aulas para revisão de volumes e discussão das dificuldades detectadas pelo professor no questionário de sondagem;
- Duas aulas para a exploração do conceito de sólidos de revolução (Atividades 2.3.1 a 2.3.5);
- Duas aulas para consolidação do conceito de sólido de revolução e cálculo de volumes de sólidos de revolução já conhecidos (Atividades 2.3.6 e 2.3.7);
- Uma aula para a introdução da ideia da técnica dos discos (Atividades 2.3.8 a 2.3.11);
- Duas aulas para as atividades no laboratório que introduzem a técnica do discos (Atividades 2.3.12 a 2.3.15)
- Duas aulas para discussão sobre o que é a técnica dos discos e para aplicação da atividade 2.3.16
- Seis aulas para as atividades de aplicação da técnica dos discos e consolidação do aprendizado (Atividades 2.3.16 a 2.3.22).

Antes de iniciar as atividades propostas neste trabalho, é importante que se aplique o questionário de sondagem, de maneira individual, para que o professor saiba onde seus alunos poderão apresentar dificuldades, a quais pontos do conteúdo ele deve dar maior atenção e até mesmo revisar para que os alunos consigam acompanhar toda a proposta de maneira satisfatória. Aplicado o questionário, é importante que o professor analise todas as respostas dadas e destaque onde estão as dificuldades iniciais dos seus alunos.

Para a Atividade Exploratória (atividade 2.3.1), o ideal é que a turma seja dividida em grupos de quatro ou cinco alunos, a fim de propiciar um ambiente favorável às discussões. Desta maneira, os alunos poderão, inicialmente, discutir os conceitos dentro de cada grupo e, posteriormente, o professor poderá ampliar essa discussão entre os grupos, utilizando os resultados de cada um deles, discutindo pontos importantes para que eles consigam construir uma definição de sólidos de revolução.

Ainda na atividade exploratória, serão utilizados materiais concretos (bandeirinhas) e o professor deve se preparar anteriormente, construindo o material de acordo com a quantidade de alunos para o qual a proposta será aplicada e de acordo com os grupos em que dividirá a(s) turma(s).

Nas atividades para internalização do conceito de sólido de revolução (atividades 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 e 2.3.5) é importante que a turma continue dividida nos mesmos grupos da atividade inicial, promovendo assim, uma troca maior de ideias. Após ser dada a definição de sólidos de revolução e a realização das atividades desta seção, o professor deve fomentar outra discussão sobre os resultados encontrados por cada grupo, chegando a um senso comum sobre os conceitos discutidos e buscando sanar quaisquer dúvidas que os alunos possam ter.

Para as atividades 2.3.6 e 2.3.7 o ideal é que os grupos sejam separados, para que cada aluno busque sua própria resposta e para que o professor consiga identificar possíveis problemas com a teoria. Esses problemas são individuais e, por esta razão, nesta etapa, é interessante separar os alunos.

As atividades 2.3.8 a 2.3.11 podem ser feitas em grupos a fim de que os alunos discutam entre si possíveis dúvidas que possam surgir. Não são esperadas grandes dúvidas nesta etapa, mas se as mesmas surgirem, o ideal é que os alunos discutam primeiro entre eles antes de consultar o professor, buscando um certo grau de autonomia na busca pelo aprendizado. E é importante que o professor incentive isso, não dando respostas aos seus alunos e sim fazendo-os pensar, refletir sobre possíveis soluções, sempre incentivando a troca entre os elementos de cada grupo.

Para as atividades 2.3.12 a 2.3.14 será necessário a utilização do *software winplot* e, desta forma, o professor deverá levar seus alunos a um laboratório de informática que já tenha o *software* instalado em cada máquina. Logo, para esta etapa também deve haver um preparo anterior pois, caso os computadores não possuam o *software* instalado, o professor deverá providenciar essa instalação. O *winplot* é um *software* livre, logo, pode ser encontrado facilmente na *internet*. Tendo tudo preparado, o ideal aqui seria que a turma fosse dividida em duplas, pois a troca seria mais direta e nenhum dos integrantes correria o risco de virar apenas observador na realização das atividades. No entanto, caso haja impossibilidade desta divisão, o professor pode adequar a mesma de acordo com o número de computadores disponíveis, estando atento ao surgimento de possíveis observadores.

Após a etapa descrita, o professor deve fomentar mais uma discussão, buscando construir junto com seus alunos a noção de que existem sólidos de revolução que não são conhecidos e para os quais não existem fórmulas para o cálculo de seus volumes. Para tal, a atividade 2.3.15 pode ser o ponto de partida, pois nela é solicitado que os alunos calculem o volume de um cone e de um cilindro, utilizando conhecimentos já adquiridos e, posteriormente, nesta mesma atividade, eles são questionados sobre o cálculo de volumes de sólidos que não conhecem. Neste debate também deve-se discutir sobre como os sólidos podem ser comparados com cilindros justapostos e aguçar a curiosidade de seus alunos para a próxima etapa: a aplicação da técnica dos discos.

A atividade 2.3.16 também precisará da utilização de computadores, logo, a turma pode continuar dividida como na etapa anterior. As últimas atividades – 2.3.17, 2.3.18 e 2.3.19 – buscam introduzir a ideia da utilização da técnica dos discos, logo, o professor deverá inicialmente realizar tais atividades juntos aos alunos, explicando cada etapa e buscando perceber possíveis dúvidas que surgirem e, posteriormente, lançar outros exemplos semelhantes para que os próprios alunos apliquem a técnica sozinhos.

Para finalizar, uma discussão geral sobre a proposta é interessante para o professor perceber a reação de seus alunos frente a tudo o que foi dado. Também pode ser aplicada uma lista de atividades para que o professor analise se o objetivo da proposta foi atingido.

1.8 POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES OU DESDOBRAMENTOS

Este estudo utiliza-se de funções bem simples – constante, afim, quadrática e exponencial – com a intenção de facilitar os cálculos manuais pelos alunos. Se o professor achar conveniente, ele pode utilizar calculadoras científicas, por exemplo, que permitem aproximações rápidas de cálculos mais complicados e que permitiriam uma exploração de gráficos de funções um pouco mais complexas – logarítmica e trigonométrica, por exemplo –, além de propiciar mais facilmente a aplicação em intervalos cada vez menores.

1.9 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 1 deste trabalho faz uma introdução sobre o mesmo, expondo as justificativas pela escolha do tema, sua importância entre outros. Nesta seção o leitor poderá ter uma visão geral do trabalho e como o assunto sólidos de revolução será abordado de maneira mais geral. Além disso, este capítulo ainda apresenta os objetivos do trabalho, o público-alvo, os pré-requisitos, o material e as tecnologias que serão utilizadas no desenvolvimento da proposta, as dificuldades previstas, algumas recomendações metodológicas, possíveis continuações e desdobramentos e como o trabalho está organizado, que é o tópico presente.

No capítulo 2 tem-se todo o desenvolvimento da proposta. Nele é apresentada uma pequena pesquisa de como o assunto sólidos de revolução é tratado no Ensino Médio e um resumo sobre os volumes dos principais sólidos estudados neste nível de ensino. Mas o ponto principal deste capítulo é a descrição de todas as atividades a serem aplicadas. Sendo assim, tal capítulo contém cada uma das atividades da proposta, uma a uma, explicando-as e apresentando-as conforme espera-se que sejam apresentadas ao aluno. Este capítulo contém as atividades que visam construir uma definição para sólidos de revolução, atividades que introduzem a técnica dos discos para o cálculo aproximado de volumes de sólidos de revolução, entre outras atividades.

Já no capítulo 3 é apresentada a base teórica que fundamenta a proposta, dando detalhes sobre a teoria de nível superior utilizada, em formalizando os conceitos e estando voltada para o professor que queira aplicar a proposta e conhecer um pouco mais sobre a técnica utilizada para o cálculo dos volumes.

Tem-se ainda: as referências bibliográficas; um apêndice com um questionário de sondagem que visa diagnosticar quais conteúdos necessários para a aplicação da proposta os alunos já dominem; um segundo apêndice com a demonstração do Princípio de Cavalieri e um anexo com as figuras do material concreto utilizado.

2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

2.1 PESQUISANDO SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM LIVROS DO ENSINO MÉDIO

A questão dos sólidos de revolução é pouco explorada no Ensino Médio e, na maioria das vezes, o aluno nem sabe o que esse termo significa. Pode-se constatar isso explorando livros de Ensino Médio que falam de alguns exemplos de sólidos de revolução.

IEZZI em [10] faz apenas algumas observações sobre o cilindro circular reto [1] , o cone circular reto [2] e a esfera, dizendo que tais sólidos são sólidos de revolução, mas não explora esses conceitos posteriormente. Veja abaixo como é tratado o assunto nesse livro:

“O cilindro circular reto é também chamado *cilindro de revolução*, pelo fato de ser gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados” (p.454)

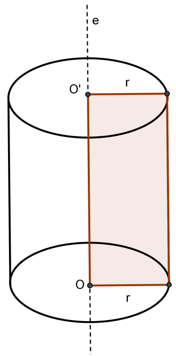

Figura 1 – Rotação do retângulo

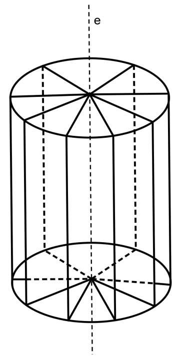

Figura 2 – Cilindro gerado pela rotação

“O cone circular reto é também chamado *cone de revolução*, pelo fato de ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos” (p.466)

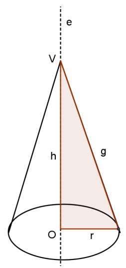

Figura 3 – Rotação do triângulo retângulo

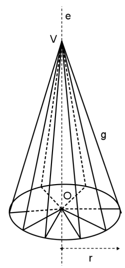

Figura 4 – Cone gerado pela rotação

“Observe que num cone de revolução vale a relação: $r^2 + h^2 = g^2$ [3]” (p.466)

[1] Um cilindro circular reto é um sólido delimitado por dois círculos congruentes C_1 e C_2, situados em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, com seus extremos sobre os limites de C_1 e C_2, que se move de modo a ser sempre perpendicular aos planos de C_1 e C_2.

[2] Um cone circular reto é um sólido cuja base é círculo C e cuja superfície lateral é formada pela reunião de segmentos de reta que ligam um ponto P a todos os pontos de C e é tal que P está situado sobre a perpendicular ao plano do círculo C que passa pelo seu centro.

[3] Onde r é o raio da base deste cone, h é a altura do cone e g é comprimento da geratriz desse cone.

“A esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro” (p.479)

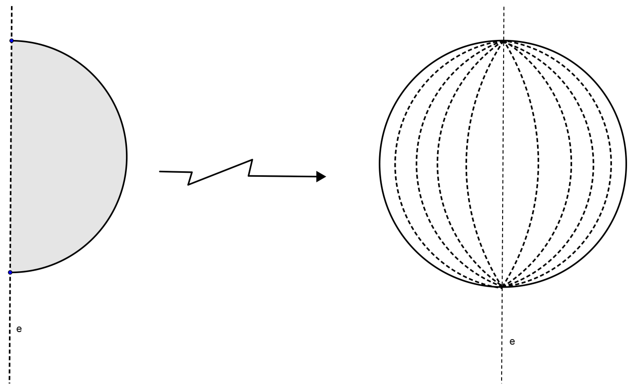

Figura 5 – Rotação do semicírculo e esfera gerada

Percebe-se acima que o conceito de sólido de revolução não é explorado verdadeiramente, sendo apenas citado com a ajuda de alguns poucos exemplos. Além disso, tal conceito é incluído somente como uma observação, ou seja, constata-se que não é dada importância ao tema.

Da mesma forma, DANTE em [7] destaca apenas que o cilindro circular reto e o cone circular reto são sólidos de revolução, mas não dá explicações sobre esse conceito e tampouco comenta que a esfera também faz parte deste grupo de sólidos de revolução. Observe abaixo como o autor trata o assunto:

> Um cilindro reto pode ser obtido também girando-se uma região retangular em torno de uma reta que contém um de seus lados. Por isso, o cilindro circular reto pode ser chamado também de *cilindro de revolução*, uma vez que é o sólido gerado quando uma região retangular faz um giro completo em torno do eixo determinado por um de seus lados. (p.383)

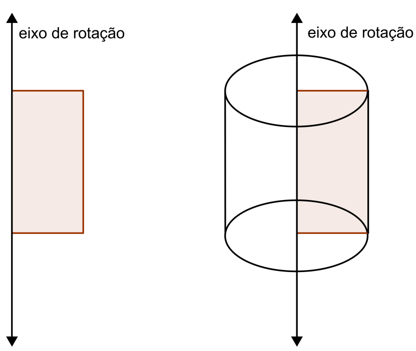

Figura 6 – Rotação do retângulo e cilindro gerado

> Um cone reto pode ser obtido girando-se uma região triangular cujo entorno é um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos.
>
> Por este motivo, o cone reto é considerado um *sólido* ou *corpo de revolução* e é chamado *cone de revolução*. (p.386)

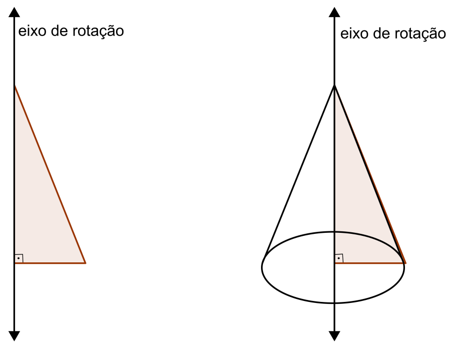

Figura 7 – Rotação do triângulo retângulo e cone gerado

Através da pesquisa a alguns livros de Ensino Médio, percebeu-se que os sólidos de revolução são tidos apenas como algo a ser observado e não como um conteúdo que pode ser explorado a fim de que os alunos desenvolvam sua capacidade de visualização e abstração, além de construir relações entre diferentes conceitos e teorias da Matemática. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) em [4], página 117, destacam a importância do aluno "articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência" então, percebe-se a necessidade de trabalhar conceitos que se completam, que se complementam dentro de uma mesma área da Matemática.

Esta superficialidade com que o assunto sólidos de revolução é tratado no Ensino Médio foi um dos motivos que impulsionaram esta pesquisa. Além deste motivo, destaca-se aqui a importância de se aprofundar os conceitos matemáticos através de teorias um pouco mais avançadas, teorias que permitam ao aluno ampliar sua capacidade investigativa e aguçar sua curiosidade.

E como forma de aprofundar a abordagem dos sólidos de revolução, o foco central deste trabalho será o volume dos mesmos.

Novamente, através de investigações em livros do Ensino Médio, percebe-se que o volume de sólidos de revolução são tratados simplesmente por meio de fórmulas e não é explorada uma visão mais minuciosa do assunto, buscando relações com outros conceitos já estudados pelos alunos, como o conceito de funções, por exemplo.

Só para exemplificar essa questão, perceba abaixo como IEZZI em [10] introduz o volume do cilindro, do cone e da esfera:

“O volume de um cilindro é obtido da mesma forma que o volume de um prisma, ou seja

$$V = A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos: $V = \pi r^2 h$ ” (p.455). Aqui, A_b significa área da base.

“O volume de um cone é obtido da mesma forma que se obtém o volume da pirâmide, ou seja:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$” (p.468), onde h é a altura do cone e r o raio da base deste cone.

“O volume V da esfera de raio r é dado por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ” (p.480)

Nota-se que há um grande foco nas fórmulas e não há nenhum tipo de exploração mais detalhada sobre a questão do volume dos sólidos de revolução. Os exercícios também estão mais voltados para aplicação das fórmulas do que para o desenvolvimento do pensamento crítico, investigativo e reflexivo do aluno. Em nenhum momento percebeu-se uma exploração de volumes de sólidos de revolução que diferissem daqueles que os alunos já conhecem. Desta forma, conclui-se que há pouca exploração da percepção do “caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas” ([2], p.47).

Assim, neste trabalho, foram construídas sequências de atividades que buscassem explorar mais o conceito de sólidos de revolução e seus volumes, inserindo conteúdos mais avançados e buscando despertar a curiosidade do aluno e mostrar a este aluno relações entre diferentes teorias matemáticas, além de trabalhar a parte da visualização e a abstração e desenvolver a capacidade investigativa deste aluno.

2.2 UM BREVE RESUMO SOBRE O VOLUME DE ALGUNS SÓLIDOS SIMPLES

Intuitivamente, o volume de um sólido é visto como a quantidade de espaço ocupada por ele. De acordo com LIMA et al. em [14], página 251, “para exprimir essa “quantidade de espaço” através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado volume”.

Como este assunto - volumes de sólidos simples- é pré-requisito para o assunto deste trabalho, aqui se fará apenas um pequeno resumo sobre os volumes de alguns sólidos simples. Para isso, serão utilizadas as teorias destacadas em [7], páginas 368 - 392 e [14], páginas 251 - 171. Portanto, todo conteúdo da seção seguinte foi baseado nos livros citados acima.

Para iniciar o resumo, este trabalho considerará que a unidade de volume é o cubo de aresta 1, isto é, o cubo unitário. Desta maneira, para cada unidade de comprimento, tem-se uma unidade correspondente de volume.

2.2.1 Volume do paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo é um poliedro formado por seis faces retangulares. Ele fica determinado perfeitamente por três medidas: o seu comprimento a, a sua largura b e a sua altura c. O volume desse sólido será indicado por $V(a, b, c)$ e, sendo o cubo unitário um paralelepípedo retângulo cujo comprimento, largura e altura medem 1, então seu volume será indicado por $V(1, 1, 1) = 1$.

Observe que o volume do paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, mantendo constantes a largura e a altura e multiplicando o seu comprimento por um número natural n, o volume também ficará multiplicado por n.

$$V(na, b, c) = n \cdot V(a, b, c)$$

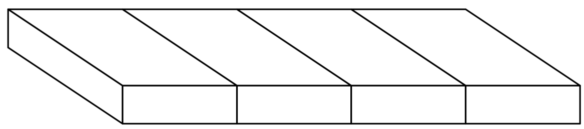

Figura 8 – Justaposição de paralelepípedos

A figura acima mostra quatro paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é quatro vezes maior que o volume de um deles.

Este fato constatado para números naturais também vale para qualquer número real positivo e, assim, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Portanto, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$
\begin{aligned}
V(a,b,c) &= V(a\cdot 1,b,c)\\
&= a\cdot V(1,b,c) = a\cdot V(1,b\cdot 1,c)\\
&= a\cdot b\cdot V(1,1,c) = a\cdot b\cdot V(1,1,c\cdot 1)\\
&= a\cdot b\cdot c\cdot V(1,1,1)\\
&= a\cdot b\cdot c\cdot 1\\
&= a\cdot b\cdot c
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Em particular, estando sua face de dimensões a e b contida em um plano, costuma-se chamar essa face de base e a dimensão c de altura. Assim, $a\cdot b$ indica a área da base. E, desta forma, pode-se representar o volume de um paralelepípedo como o produto da base pela altura.

$$Volume\ \ do\ \ paralelepípedo = (área\ \ da\ \ base)\cdot(altura)$$

2.2.2 Princípio de Cavalieri

Suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em um plano horizontal e que qualquer outro plano também horizontal corte ambos segundo seções de mesma área. O Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.

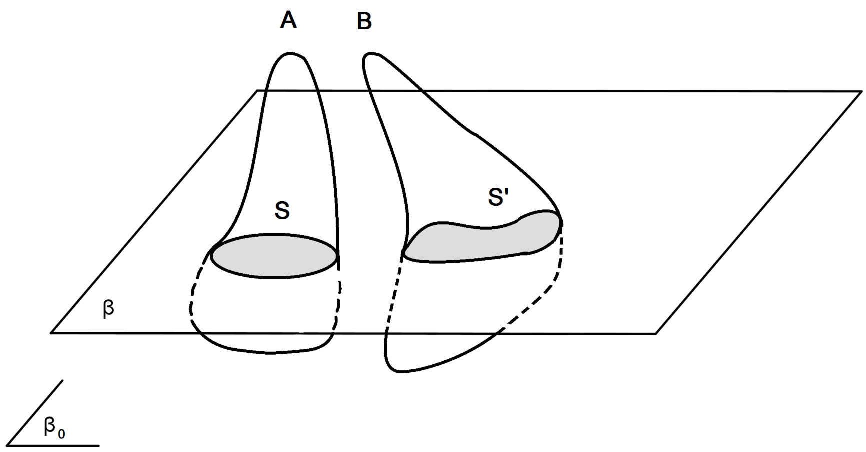

Figura 9 – Ilustração do Princípio de Cavalieri

Axioma 2.2.1 (Princípio de Cavalieri) *: São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

Observação 2.2.2 *Aqui não há preocupação com demonstrações que ultrapassariam os limites dos alunos, pois trata-se apenas de um resumo de algumas teorias envolvendo volumes. Mas, o professor que quiser saber mais, pode encontrar a demonstração do Princípio de Cavalieri no Apêndice B.*

Para trabalhar este princípio com os alunos, o professor pode inserir alguns exemplos que indiquem que tal princípio é verdadeiro, como utilizar uma pilha de folhas de papel e modificar sua forma, levando os alunos a concluírem que o volume continua o mesmo e que tais pilhas atendem ao princípio de Cavalieri. Depois de alguns exemplos, pode-se utilizar este princípio como verdade, como axioma, da forma que está enunciado acima.

2.2.3 Volume do Prisma

Será utilizado o Princípio de Cavalieri para obtenção do volume do prisma.

Tome um prisma de altura h e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Ao lado deste prisma construa um paralelepípedo retângulo também com altura h e cuja base seja um retângulo de área A.

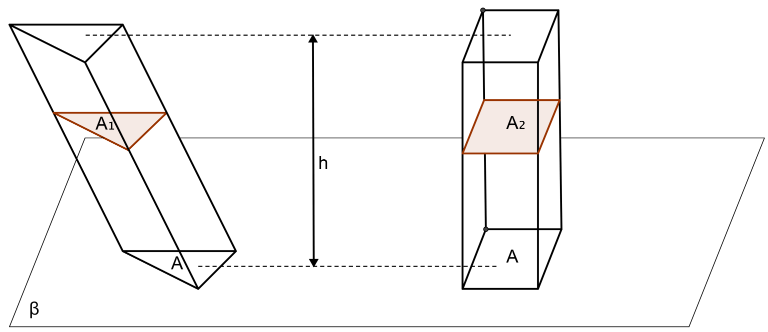

Figura 10 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Prisma

Em qualquer prisma uma seção paralela à base será sempre congruente a esta base. Desta forma, suponha que os dois sólidos acima sejam cortados por outro plano horizontal, paralelo ao plano da base, produzindo seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Bom, todo paralelepípedo é um prisma, logo, as seções produzidas serão congruentes às bases de cada sólido. E sabe-se que figuras congruentes possuem áreas iguais. Logo, tem-se que $A_1 = A = A_2$. Como o plano horizontal foi tomado de maneira aleatória, pelo Princípio de Cavalieri estes dois sólidos tem volumes iguais.

Do volume do paralelepípedo, que já é conhecido, obtém-se:

$$Volume \;\; do \;\; prisma = (área \;\; da \;\; base) \cdot (altura)$$

2.2.4 Volume da Pirâmide

O volume da pirâmide já não é tão simples e será preciso alguns resultados adicionais para obtê-lo. Para isso, será utilizada a teoria exposta em LIMA et al em [14], páginas 258-264.

O importante aqui é ter a certeza de que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume desta pirâmide não se altera. Será feito, agora, um exame do que ocorre quando a pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

Observe a figura a seguir, que mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC e altura H. Esta pirâmide foi seccionada por um plano paralelo a ABC, distando h do vértice V, produzindo uma seção DEF.

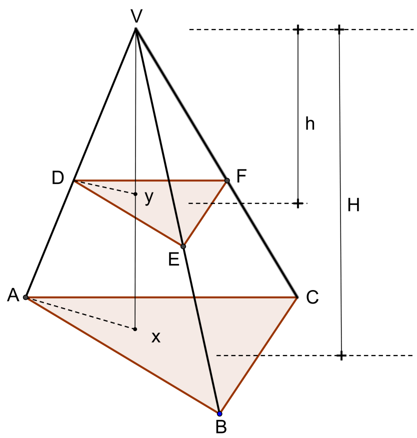

Figura 11 – Ilustração da secção da pirâmide

Observe que:

1) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

2) A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Para maiores explicações sobre semelhanças, o leitor pode ver [13], páginas 30-48.

Para obter o volume da pirâmide primeiramente se fará necessário considerar o seguinte teorema preparatório.

Teorema 2.2.3 *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura tem mesmo volume.*

Para demonstrar tal teorema, observe a figura a seguir, que mostra duas pirâmides de mesma base ABC, vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao plano que contém ABC e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 das duas pirâmides.

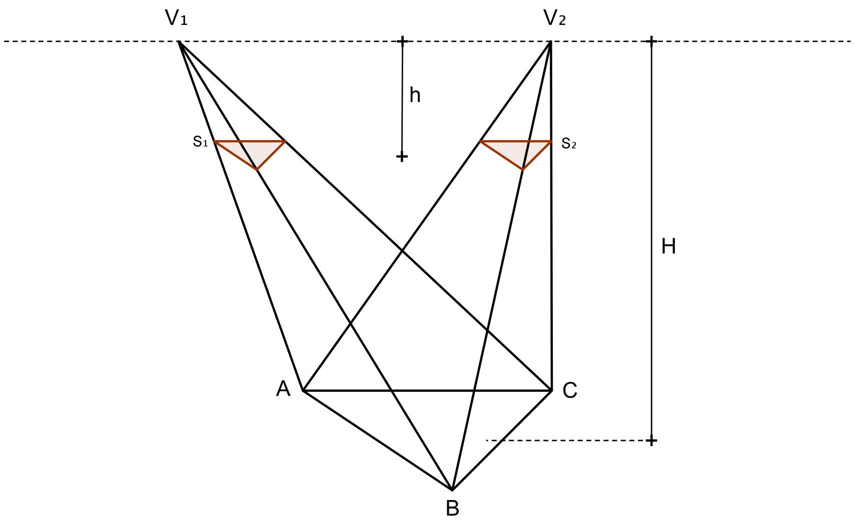

Figura 12 – Ilustração para visualização da demonstração

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos citados acima, tem-se que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides tem o mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato de poder mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para demonstração do volume da pirâmide de base triangular. Isto será visto no teorema a seguir.

Teorema 2.2.4 *O volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

A fim de facilitar o entendimento da demonstração deste teorema, será convencionado que em um tetraedro de vértices A, B, C e D se a face ABC for vista como base e o ponto D como vértice dessa pirâmide, então o tetraedro será representado por $D - ABC$. Ainda o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC), V(B - ACD), ..., etc.,$$

dependendo de qual face está sendo considerada como base.

Considere, então, um prisma cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$ como mostra a figura abaixo.

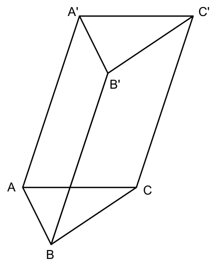

Figura 13 – Prisma de base triangular

Seja $\mathcal{A}$ a área de ABC e seja h a altura do prisma. Sabe-se que seu volume é $\mathcal{A}h$. Agora, divida esse prisma em três tetraedros a saber: $A - A'B'C', B' - ACC'\ \ e\ \ B' - ABC$, conforme as figuras a seguir (Figuras 14, 15, 16).

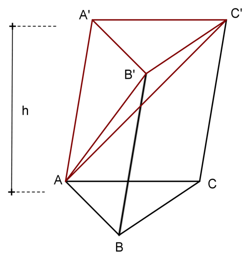

Figura 14 – Divisão do prisma em tetraedro I

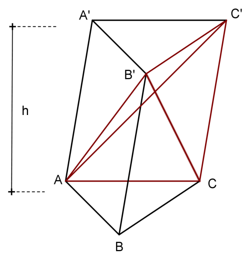

Figura 15 – Divisão do prisma em tetraedro II

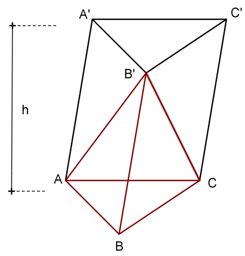

Figura 16 – Divisão do prisma em tetraedro III

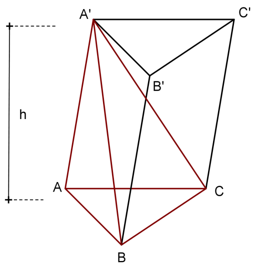

Figura 17 – Divisão do prisma em tetraedro IV

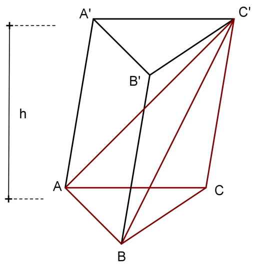

Figura 18 – Divisão do prisma em tetraedro V

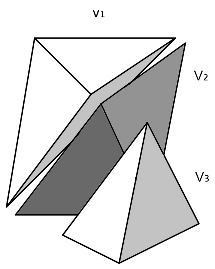

Figura 19 – Divisão do prisma em tetraedro VI

Sejam V_1, V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema 2.2.3, sabe-se que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, mantendo a base fixa, o vértice é movido em um plano paralelo a essa base, ou seja, pirâmides de mesma base e mesma altura tem volumes iguais. Assim:

$$\begin{array}{lllll} V_1 & = V(A - A'B'C') & = V(A' - ABC), & & pois \ ABC \ é \ congruente \ a \ A'B'C' \\ V_2 & = V(B' - ACC') & = V(B - ACC') & = V(C' - ABC), conforme \ Figura \ 18 \\ V_3 & = V(B' - ABC) & & & \end{array}$$

Conclui-se então, pelo teorema 2.2.3, que o volume dos três tetraedros acima são iguais:

$$V(A' - ABC) = V(B' - ABC) = V(C' - ABC),$$

e eles possuem a mesma base e altura do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma, pois a soma dos seus volumes é exatamente o volume do prisma. Portanto, o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

O teorema a seguir estende o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema 2.2.5 *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

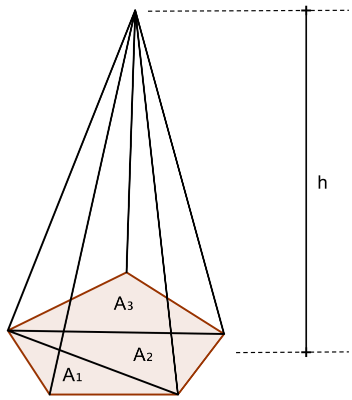

Figura 20 – Divisão da pirâmide em pirâmides de base triangular

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, ..., A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}A_1h + \tfrac{1}{3}A_2h + ... + \tfrac{1}{3}A_nh \\ V &= \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h \\ V &= \tfrac{1}{3}Ah \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Fica então estabelecido que:

$$Volume \;\; da \;\; pirâmide = \frac{1}{3}(área \;\; da \;\; base) \cdot (altura)$$

2.2.5 Volume do Cilindro

No cilindro, toda seção paralela à base é congruente com essa base.

Desta forma, tome um cilindro de altura h e base de área A contida em um plano horizontal. Considere agora um prisma qualquer de altura h e base de área A contida no mesmo plano horizontal da base do cilindro. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então $A_1 = A = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que os dois sólidos tem o mesmo volume. Logo, o volume do cilindro também é o produto da área da base pela altura.

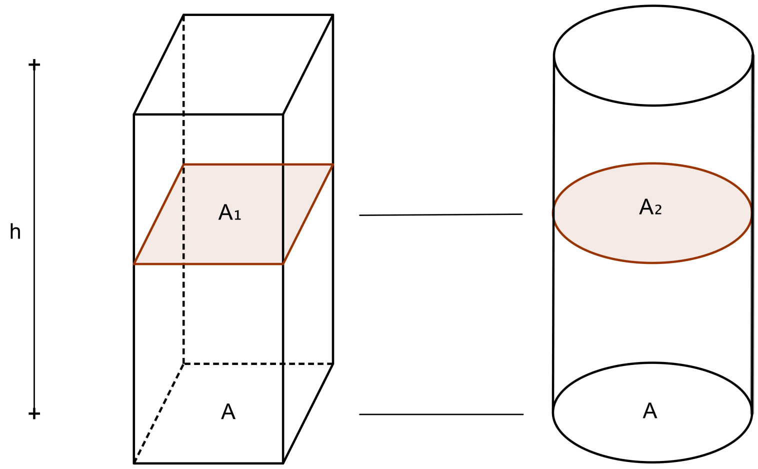

Figura 21 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Cilindro

$$Volume \;\; do \;\; cilindro = (área \;\; da \;\; base) \cdot (altura)$$

2.2.6 Volume do Cone

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre a pirâmide e o cone. Assim, o volume do cone segue o mesmo caminho trilhado anteriormente para o volume da pirâmide.

Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, considere uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano.

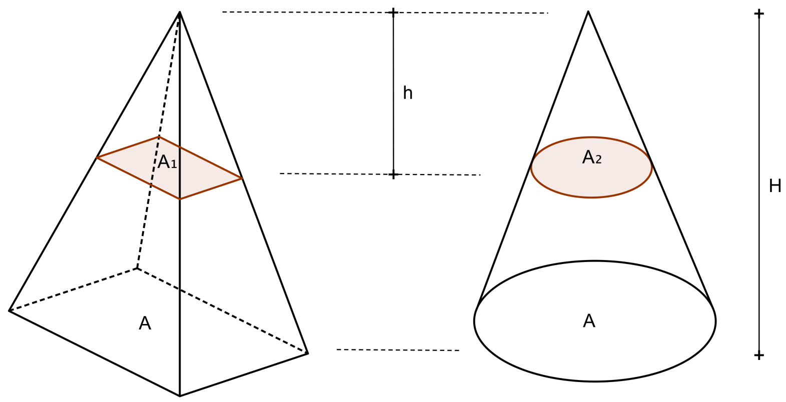

Figura 22 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Cone

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri garante que os dois sólidos tem o mesmo volume e, portanto, conclui-se que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$Volume \;\; do \;\; cone = \frac{1}{3}(\acute{a}rea \;\; da \;\; base) \cdot (altura)$$

2.2.7 Volume da Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, imagine um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.

Considere então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero [4] de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro subtrai-se dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes do centro do cilindro. Este sólido C é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C.

[4] Um cilindro equilátero é um cilindro no qual toda secção plana que contém seu eixo de rotação é um quadrado.

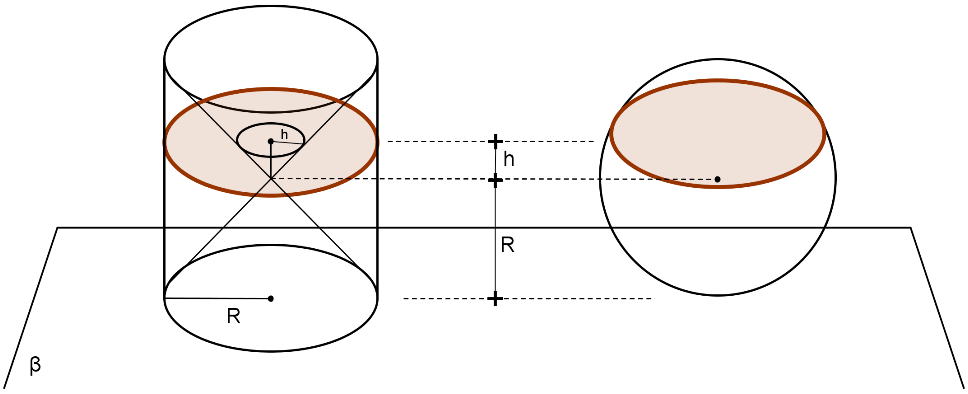

Figura 23 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Esfera

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraido de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

que é o volume da esfera. Assim:

$$Volume\ \ da\ \ esfera = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2.3 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

2.3.1 **Questionário de Sondagem dos Pré-Requisitos**

Antes de iniciar o assunto deste trabalho com os alunos é importante que o professor verifique se os mesmos possuem os pré-requisitos necessários para o entendimento da abordagem do tema. Para isso, será aplicado este questionário a fim de averiguar quais conteúdos necessários os alunos já dominam e quais conteúdos deverão ser revisados para que os mesmos possam acompanhar o desenvolvimento das atividades de maneira satisfatória.

É importante lembrar que o conteúdo do resumo do item anterior já deverá ter sido aplicado à turma anteriormente e trabalhado em forma de exemplos e exercícios.

O modelo do questionário pode ser encontrado no APÊNDICE A.

2.3.2 O Conceito de Sólido de Revolução

Para que os alunos compreendam a ideia do que é um sólido de revolução, inicialmente será feita uma atividade de descoberta, visando explorar a capacidade de visualização e abstração dos alunos. Segundo [6], página 47 "a abordagem de geometria no ensino de matemática deve estimular a percepção intuitiva do espaço físico no sentido concreto, objetivando a compreensão de objetos geométricos em seu aspecto abstrato". Desta forma, através dessa atividade introdutória, os alunos terão a oportunidade de construir seus próprios conceitos sobre os objetos geométricos que irão estudar. Para aplicação desta atividade é interessante reunir a turma em grupos de 4 ou 5 alunos para que eles possam trocar ideias e debater opiniões visando chegar a uma conclusão.

2.3.2.1 *Atividade Exploratória*

Esta atividade tem o objetivo de explorar o conceito, a ideia de sólido de revolução. Para isso, serão utilizadas bandeirinhas com algumas figuras planas a fim de que os alunos a rotacionem em suas mãos e consigam visualizar o sólido formado. Através da visualização de diferentes sólidos e da exploração de algumas características dos sólidos de revolução, a atividade busca fazer com que os próprios alunos construam suas definições de sólidos de revolução. Os modelos de bandeirinha podem ser encontrados no ANEXO A.

Atividade 2.3.1 *Vocês já estudaram os sólidos geométricos e seus volumes, mas agora estudaremos um grupo particular desses sólidos: os sólidos de revolução.*

Antes de definir formalmente tais sólidos, vocês terão a oportunidade de construir seus próprios conceitos baseados na experimentação. Para isso, cada grupo recebeu três bandeirinhas diferentes: uma em forma de retângulo, outra de triângulo e uma última em forma de semicircunferência.

Inicialmente vocês deverão girar as bandeirinhas entre suas mãos e descobrir qual sólido cada bandeirinha irá formar. Desenhem cada sólido numa folha de papel, colocando suas respectivas medidas representadas na bandeirinha e nomeiem este sólido de acordo com os conhecimentos que já adquiriram até aqui.

Conseguem perceber algo em comum entre os três sólidos? Anotem suas observações para posteriormente comparar os resultados com os conceitos dados.

Imaginem agora um plano, perpendicular à haste da bandeirinha, seccionando os três sólidos encontrados. Que figura cada secção formaria?

Agora cada grupo receberá uma bandeirinha diferente, com uma figura afastada na haste por meio de um arame. Imaginem que este arame não existe para fins de visualização. Girem a bandeirinha como fizeram anteriormente e tentem desenhar o sólido formado. Este sólido possui alguma característica comum aos outros três? Discutam entre si e anotem as suas observações.

Novamente, imaginem um plano perpendicular à haste seccionando o sólido formado. Que figura esta secção forma?

Procurem agora atributos semelhantes entre os quatro sólidos. Estes quatro sólidos são sólidos de revolução!

A partir desses modelos, das observações de vocês e dos atributos semelhantes, conseguiriam pensar em uma definição para sólidos de revolução? Se for ajudar, busquem o significado da palavra revolução em um dicionário. Guardem todas essas obervações para atividades futuras.

2.3.2.2 *Afinal, o que são sólidos de revolução?*

A maioria dos autores pesquisados definem sólidos de revolução com base na definição dada para superfícies de revolução. Para este trabalho, será feita uma análise de algumas definições pesquisadas e posteriormente será estabelecida a definição a ser utilizada.

Para LIMA et al em [14], página 275, dados em um plano "uma reta E chamada de eixo e uma linha L, simples, que não corta esse eixo", será imaginado que "essa linha "gire" em torno do eixo, ou seja, cada ponto L descreva uma circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E".

Desta forma,

> cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências é chamada uma *superfície de revolução*. Se essa linha L for fechada ou se dois de seus extremos pertencerem ao eixo, a superfície de revolução delimita um sólido chamado *sólido de revolução*.

Perceba que nesta definição é utilizado o conceito de linha simples, que no contexto seria uma linha que não se cruza. A definição não deixa explícito porém, se esta linha é finita ou infinita e isso pode gerar divergências de opiniões. Há um desenho na página citada que leva a crer que a definição trata de linhas finitas, assim como o fato de dizer que esta linha não corta o eixo, mas isso deveria ter ficado mais claro. Uma reta, por exemplo, aos olhos de um leitor que prioriza a definição ao desenho poderia ser considerada uma linha simples, e esta tem comprimento infinito e atende à definição. Ao passo que um segmento de reta, de comprimento finito, também poderia ser considerado uma linha simples que atende à definição. E aí o leitor entraria num debate individual de suas ideias com as ideias do autor: O que o autor estaria querendo explicitar como linha simples? Será que minha ideia de linha simples correspondem às ideias do autor? Enfim, estes seriam alguns questionamentos que este leitor poderia fazer e que talvez se tornassem um entrave para o entendimento da definição.

Perceba ainda que, ao ser utilizado na definição de superfície de revolução o conceito de que esta linha simples não corta o eixo ao ser rotacionada, pode-se deduzir que esta linha também não pode intersectar o eixo em um único ponto. No entanto, BAIRRAL e SILVA em [1], páginas 9-10 definem superfícies de revolução como "superfícies geradas pela rotação de uma linha simples (geratriz) em torno de uma reta (eixo de rotação) que não lhe intercepta, exceto, talvez, numa das extremidades". Há aqui incluída, portanto, uma exceção. Esta exceção faz referência exatamente à interseção em um único extremo da linha. Ainda de acordo com [1], se a linha simples considerada na definição de superfícies de revolução "for fechada ou o eixo de rotação interceptá-la nos dois extremos, a figura gerada será chamada sólido de revolução. Sendo uma linha fechada, o eixo de rotação poderá interceptar um ponto ou um de seus lados."E aí entram mais algumas reflexões:

- Na definição de LIMA et al em [14] para sólidos de revolução, assim como na definição de BAIRRAL e SILVA em [1], fala-se em extremos da linha simples. Se tal linha tem extremos, deduz-se que a mesma deve ser finita. Mas isso não fica claro quando se define a superfície de revolução;

- O eixo de rotação poderá ou não intersectar a linha simples? - *Aqui faz-se uma ressalva sobre o verbete interceptar, utilizado por BAIRRAL e SILVA em [1]: com o sentido de cortar, o correto seria a utilização do verbete intersectar, já que interceptar é utilizado para o sentido de impedir.*

Ainda buscando definir sólidos de revolução de maneira a deixar claro o entendimento de todos os conceitos, observou-se mais uma definição um pouco diferente das duas anteriores. Segundo DOLCE e POMPEO em [8], página 335: "Consideremos um semiplano de origem e (eixo) e nele uma superfície S; girando o semiplano em torno de e, a superfície S gera um sólido chamado sólido de revolução." Aqui não fica claro o tipo de superfície considerada, por exemplo, e tampouco se tal superfície pode intersectar o eixo ou não.

Notou-se, assim, uma diversidade de definições, cada qual com suas particularidades e todas elas diferentes entre si, o que pode gerar certa confusão no entendimento do que é um sólido de revolução e, consequentemente, uma diversidade de ideias sobre tal conceito. Desta forma, baseado em tais definições e ainda buscando um maior rigor, optou-se por definir sólido de revolução da seguinte maneira:

Definição 2.3.1 *Sejam dados uma reta "E" chamada de eixo de rotação e uma linha simples (linha que não se cruza) L, de comprimento finito, chamada de geratriz. Se esta linha for fechada ou se seus extremos pertencerem ao eixo, formando uma região plana, ao fazê-la girar em torno do eixo, ou seja, ao fazer cada ponto de L descrever uma* *circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E, forma-se um corpo chamado de sólido de revolução.*

Alguns exemplos de linhas fechadas que geram sólidos de revolução:

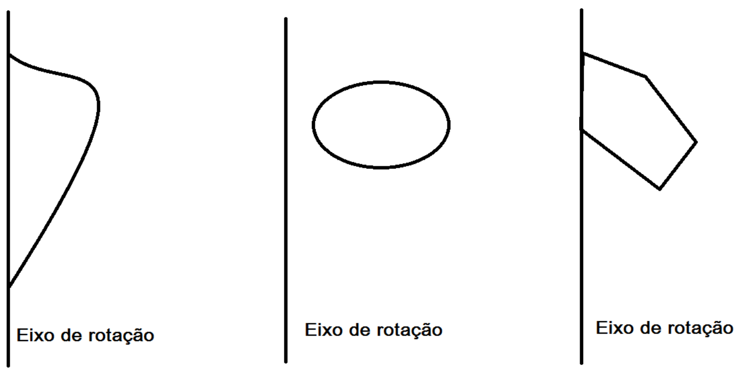

Figura 24 – Linhas fechadas que geram sólidos de revolução

Observe que optou-se aqui por definir sólido de revolução sem fazer relação com a definição de superfície de revolução. No entanto, algumas atividades deste estudo falam de superfícies de revolução e, por isso, é preciso defini-la.

Para tal, foram utilizadas as definições de [8] e [14]. Desta forma, **superfície de revolução** será considerada a superfície obtida girando-se uma linha L simples e não fechada, contida em um plano, em torno de um eixo E. Cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências será chamada se superfície de revolução.

O professor pode usar a comparação de superfície de revolução com a "casca do sólido de revolução" para tentar fazer uma diferenciação para seus alunos, por exemplo. O importante é que os alunos saibam que existe uma diferença entre esses dois conceitos.

2.3.2.3 *Atividades para internalização do conceito de sólidos de revolução*

As atividades a seguir visam aprofundar a definição de sólido de revolução, fazendo com que os alunos realmente compreendam este conceito. Para essas atividades é interessante que a turma continue dividida em grupos de quatro ou cinco alunos, buscando um debate maior de ideias.

Na atividade 2.3.2, busca-se um confronto entre as ideias iniciais dos alunos sobre a definição de sólidos de revolução construídas na atividade exploratória (atividade 2.3.1) e a definição dada pelo professor. É interessante que seja feita uma discussão sobre as diferenças e semelhanças entre essas ideias, para que os alunos consigam internalizar este conceito.

A atividade 2.3.3 busca verificar se os alunos realmente compreenderam o que é um sólido de revolução através da checagem de alguns sólidos dados como sendo ou não sólidos de revolução.

A atividade 2.3.4 busca verificar se os alunos reconhecem alguns elementos de sólidos de revolução, como eixo de rotação e a figura plana geradora do sólido.

Já na atividade 2.3.5, o que se espera é que os alunos percebam os elementos essenciais da definição de sólido de revolução e consigam descrever, com suas próprias palavras, o que é um sólido de revolução, agora atendendo a todas as características já trabalhadas, encorajando, assim, o lado investigativo e crítico dos alunos.

Abaixo encontram-se as atividades.

Atividade 2.3.2 *Analise a definição que criou na atividade exploratória (Atividade 2.3.1) com a definição dada pelo professor. Elas tem pontos em comum? Quais? E quais foram as divergências?*

Atividade 2.3.3 *Diga se os sólidos descritos/ mostrados abaixo são sólidos de revolução:*

a) O cubo de aresta a.

b) Um cilindro de raio da base r e altura h.

c) Um cone reto de altura h e raio da base r.

d) Uma semi-esfera de raio r.

e) Um tetraedro de aresta l.

Atividade 2.3.4 *Identifique nos sólidos de revolução da atividade 2.3.3 o eixo de rotação e a região plana rotacionada. Se preferir, pode utilizar desenhos.*

Atividade 2.3.5 *Agora, busque definir sólidos de revolução com suas palavras e com base em tudo o que viu e estudou e compare sua definição com a de seus colegas e com a definição dada pelo professor. Será que todas elas definem a mesma "coisa"?*

2.3.3 O volume de sólidos de revolução

2.3.3.1 *Calculando volumes de sólidos de revolução a partir de volumes já conhecidos*

Agora serão trabalhadas algumas atividades que visam o cálculo de volumes de sólidos de revolução comuns, aplicando conhecimentos já vistos. Também serão inseridos alguns sólidos diferentes, mas que possam ter seus volumes calculados através da decomposição em sólidos já conhecidos.

Tanto a atividade 2.3.6 quanto a atividade 2.3.7 buscam apenas a aplicação de conhecimentos já vistos – no caso o cálculo de volumes – para os casos em que os sólidos são sólidos de revolução. A única diferença é que, em ambas as atividades, não está sendo dado o sólido diretamente e sim a região plana a ser rotacionada e seu eixo de rotação.

Atividade 2.3.6: *Aplicando os conhecimentos já adquiridos, calcule o volume dos três primeiros sólidos – cone, cilindro e esfera – descobertos na atividade exploratória (atividade 2.3.1). Você conseguiria calcular o volume do quarto sólido? Explique.*

Atividade 2.3.7: *Calcule agora o volume dos sólidos de revolução gerados pela rotação da região plana destacada em vermelho ao redor do eixo de rotação dado:*

a)

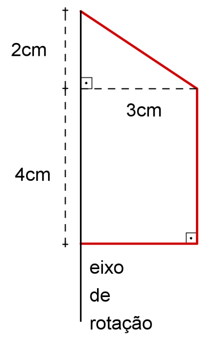

Figura 25 – Atividade 2.3.7 – Item (a)

b)

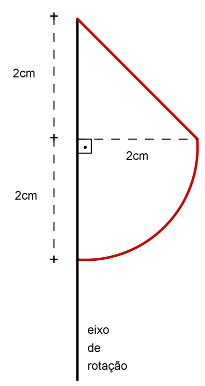

Figura 26 – Atividade 2.3.7 – Item (b)

c)

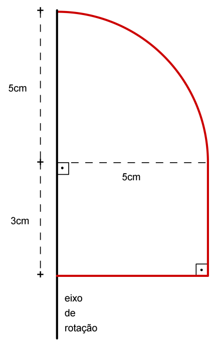

Figura 27 – Atividade 2.3.7 – Item (c)

Todas estas atividades iniciais tem como objetivo consolidar o aprendizado do conceito de sólido de revolução e do cálculo de volumes de sólidos de revolução conhecidos. Agora serão iniciadas as atividades que buscam desenvolver um olhar diferente para estes sólidos, aplicando uma "nova técnica" no cálculo de seus volumes.

2.3.3.2 *Estimando volumes de sólidos de revolução através da aproximação por cilindros*

Nesta seção serão trabalhadas atividades que objetivam introduzir o cálculo de volumes de sólidos de revolução através da técnica dos discos, fazendo aproximações de sólidos incomuns com cilindros. Primeiramente serão inseridas as atividades para os alunos. Tais atividades não visam o cálculo exato de volumes, já que o assunto é deveras avançado para o nível de ensino dos mesmos. Mas as atividades buscam mostrar aos alunos que é possível estimar volumes de sólidos de revolução diferentes daqueles que são trabalhados repetidamente no Ensino Médio. Isso aguçará a curiosidade dos alunos e fará com que eles ampliem a sua visão. Além disso, as atividades também buscam relacionar os sólidos de revolução com as funções, fazendo os alunos perceberem que as regiões planas a serem giradas não precisam ser conhecidas para que o sólido de revolução seja formado.

As atividades 2.3.8 e 2.3.9 objetivam verificar se os alunos tem alguma dificuldade em perceber que um cilindro pode estar em diferentes posições, mas continua a ter seu volume calculado da mesma forma. Isso é muito importante, pois os alunos precisam reconhecer e saber calcular o volume de "cilindros deitados" para o desenvolvimento da proposta.

Na atividade 2.3.10 o objetivo é fazer o aluno calcular o volume total de figuras formadas por cilindros justapostos, como se os mesmos formassem uma espécia de "bolo deitado".

A atividade 2.3.11 é uma aplicação da fórmula para cálculo de volume do cone. No entanto, tal atividade objetiva fazer o aluno perceber uma semelhança visual entre o cone e a justaposição de cilindros para posterior aplicação do método dos discos para cálculo de volumes, adaptado para o Ensino Médio.

Atividade 2.3.8 *Calcule o volume do seguinte sólido:*

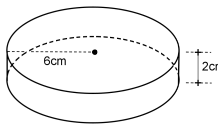

Figura 28 – Cilindro "em pé"

Atividade 2.3.9 *Agora tente calcular o volume do sólido abaixo:*

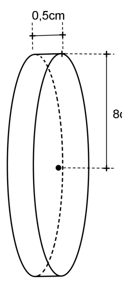

Figura 29 – Cilindro "deitado"

Qual a única diferença entre os sólidos das atividades 2.3.8 e 2.3.9?

Atividade 2.3.10 *Baseado no que fizeram nas atividades 2.3.8 e 2.3.9 e sabendo que a largura de cada disco abaixo (ou equivalentemente a "altura" de cada cilindro) é igual a 2cm, calcule o volume total das figuras abaixo:*

a)

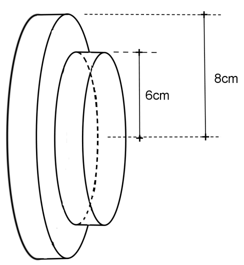

Figura 30 – Justaposição de cilindros I

b)

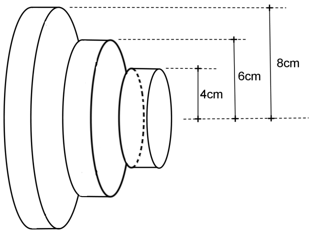

Figura 31 – Justaposição de cilindros II

Atividade 2.3.11 *Calcule o volume do cone abaixo:*

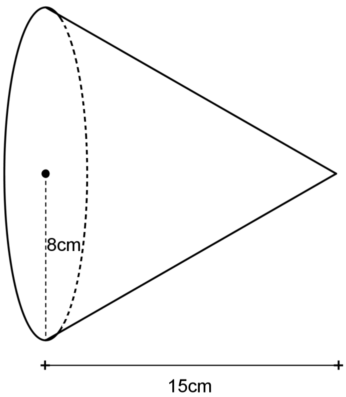

Figura 32 – Cone

Agora, observe a figura abaixo e perceba a relação entre o cone da atividade 2.3.11 e os discos da atividade 2.3.10.

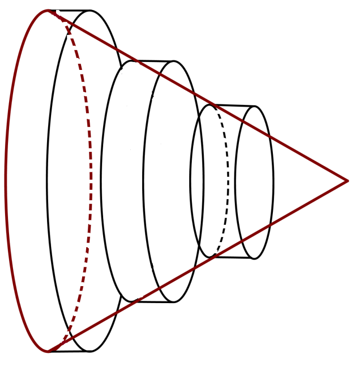

Figura 33 – Visualização do cone com justaposição de cilindros

Pela Figura 33, percebe-se que existe a possibilidade de aproximar um cone por cilindros. Pode-se “fatiá-lo” em n pedaços e aproximar esses pedaços a cilindros. Quanto mais cilindros, melhor será a comparação entre os volumes. E isso pode ser feito para muitos outros sólidos de revolução. No entanto, para utilizar esta técnica, deve-se primeiro perceber que os sólidos de revolução podem ser construídos através de parte de gráficos de funções, bastando ter uma função contínua definida em um intervalo fechado e rotacionar a região plana delimitada pelo gráfico desta função, pelo intervalo considerado e pelo eixo x em volta do próprio eixo x, gerando um sólido de revolução.

As próximas atividades que serão inseridas aos alunos servirão para que os mesmos percebam como relacionar uma região plana ao gráfico de uma função dentro de um intervalo e depois como rotacionar a região plana delimitada pelo gráfico da função no intervalo considerado, gerando um sólido.

As atividades 2.3.12, 2.3.13 e 2.3.14 utilizam o *software winplot* para esboçar os gráficos das funções afim, constante, quadrática e exponencial e depois rotacioná-los ao redor do eixo x, formando uma superfície de revolução [5]. Desta forma, nas duas primeiras atividades, espera-se que os alunos consigam perceber a relação entre a região plana delimitada em parte pelo gráfico da função afim e da função constante e os sólidos que eles já conhecem – cone e cilindro, respectivamente –, gerados pela rotação em torno do eixo x da região plana delimitada em parte pelo gráfico da função em um intervalo definido. Já na última dessas atividades, o aluno irá visualizar sólidos utilizando os gráficos das funções quadrática e exponencial, percebendo que tais sólidos não se “parecem” com algum sólido que eles conheçam. Este é o pontapé inicial para o debate sobre como podemos gerar sólidos de revolução desconhecidos através de intervalos de gráficos de funções conhecidas e, posteriormente, como podemos calcular seus volumes aproximados.

Na atividade 2.3.15, espera-se que os alunos consigam calcular o volume do cone e do cilindro gerado pela rotação da região plana delimitada em partes pelo gráfico das funções afim e constante num intervalo determinado, usando os conhecimentos que já possuem. E que, depois disso, percebam que o volume dos sólidos gerados por estas regiões delimitadas, em parte, pelo gráficos das funções quadrática e exponencial não pode ser calculados de maneira análoga, pois não existe uma “fórmula de volume” para os dois casos.

Atividade 2.3.12 *Utilizando o winplot, faça o esboço do gráfico da função* $f(x) = x$. *Depois vá na aba* ***Um*** *e clique em* ***superfície de revolução****. Aparecerá uma tela,*

[5] Neste ponto é importante que o professor explique que o *software winplot* só gera superfícies de revolução e não sólidos de revolução. Desta forma, é essencial que o professor faça a distinção entre estes dois conceitos, procurando explicar que a figura gerada pelo *winplot* é apenas para fins de visualização e que a superfície pode ser fechada, considerando seu interior e formando assim um sólido de revolução. A superfície dá uma ótima ideia do sólido e, por este motivo, o *software* foi utilizado. Mas essa distinção deve ser feita pelo professor para não causar confusão de conceitos.

onde você irá clicar no "botão" ***eixo x*** *(Pois a rotação será feita ao redor do eixo* x*). Deverá aparecer* $a = 0, b = 1$ *e* $c = 0$*. Depois clique em* ***ver superfície****. Qual superfície apareceu? Que sólido é delimitado por esta superfície? Você consegue relacionar o que está vendo com uma região plana que gere o sólido delimitado por esta superfície? Que região plana seria essa?*

Atividade 2.3.13 *Repita o mesmo procedimento com a função* $f(x) = 1$*, sempre usando como eixo de rotação o eixo* x*. A superfície gerada corresponde a qual sólido? E qual a região plana que gera este sólido? Consegue perceber a relação entre os gráficos das funções e os sólidos de revolução?*

Atividade 2.3.14 *Agora faça o esboço do gráfico da função* $f(x) = x^2 + 1$ *e depois gere a superfície de revolução ao redor do eixo* x*. Você conhece esse sólido delimitado por esta superfície? Mas ele é um sólido de revolução? Por quê? E quanto ao sólido gerado pela rotação da região plana delimitada em partes pelo gráfico da função* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$*, você o conhece? Ele é um sólido de revolução?*

Atividade 2.3.15 *Considerando as funções das atividades 2.3.12 e 1.2.13, calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo* x *de cada região plana delimitada por cada um dos gráficos dessas funções, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 3$ *e pelo eixo* x *usando os conhecimentos que já possui. Você conseguiria calcular o volume dos sólidos gerados na atividade 2.3.14 da mesma maneira? Explique.*

Através dessas atividades espera-se que o aluno perceba a relação existente entre gráficos de funções e os sólidos de revolução e perceba que nem todo sólido de revolução pode ter seu volume calculado através de fórmulas pré-estabelecidas.

Neste ponto da proposta, o debate com os alunos sobre todos os resultados e percepções dos mesmos a respeito das atividades deve ser incentivado, buscando uma construção efetiva do aprendizado e instigando-os para a próxima fase.

Através dessas discussões, o professor deverá despertar a curiosidade dos seus alunos a respeito da introdução que será feita da técnica dos discos para o cálculo aproximado de volume de sólidos desconhecidos. Assim, a próxima sequência de atividades prevê que o aluno consiga perceber que, mesmo não conseguindo calcular o volume exato, ele poderá estimar o volume de sólidos que não são conhecidos através da aproximação dos mesmos por cilindros.

Introdução para as atividades de aproximações por cilindros

Esta introdução mostra uma sugestão de discussão que o professor deve lançar ao seus alunos antes de partir para as atividades. É importante despertar essa capacidade imaginativa dos alunos, buscando aguçar a curiosidade e consequentemente, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Também é importante frisar com os alunos que, através dos instrumentos disponibilizados, não será possível calcular um volume exato para os sólidos que serão estudados, mas sim um intervalo que pode se tornar tão melhor quanto maior for a vontade de buscar essa exatidão.

Abaixo, encontra-se um pequeno texto como sugestão para início das discussões.

Bom, acho que ficou um pouco difícil calcular os volumes dos dois sólidos gerados na atividade 2.3.15, certo? Isso porque eles não são sólidos conhecidos e não sabemos uma fórmula que calcule seu volume. Mas agora você aprenderá uma técnica através da qual poderá estimar o volume desses sólidos: a aproximação por cilindros, conhecida também como técnica dos discos. Mas perceba que não há como você calcular o volume exato desses sólidos desconhecidos, pois isso requer conhecimentos matemáticos mais avançados, estudados somente no ensino superior. No entanto, você conseguirá números que lhe darão uma boa noção do volume desses sólidos, basta ter vontade de chegar cada vez mais perto do ideal.

Você já percebeu como podemos aproximar um cone através da justaposição de cilindros, certo? Só que isso foi feito apenas visualmente. Veremos agora como fazer com que essa justaposição de cilindros se torne cada vez mais próxima de um cone. E depois que você entender a técnica para o cone, poderá utilizá-la para estimar os volumes daqueles sólidos da atividade 2.3.15. Vamos lá?

Nesta etapa da proposta, espera-se que os alunos já tenham atingido a maturidade necessária para avançar mais um estágio do conhecimento matemático, no qual eles serão apresentados a conceitos num nível mais avançado, onde o grau de abstração é maior e as noções matemáticas mais "refinadas".

Antes de iniciarem as atividades onde será utilizada a ideia central da técnica dos discos, a tecnologia será uma aliada no cálculo do volume dos sólidos. Através da utilização do *software winplot* o aluno conseguirá saber o volume do sólido com o qual irá trabalhar, tendo assim, uma noção dos valores aos quais deverá se aproximar em seu estudo. Com o valor do volume, o aluno poderá fazer comparações, refletindo se é necessário melhorar as aproximações ou não.

Assim, utilizando o *winplot*, a atividade 2.3.16 visa mostrar aos alunos os valores reais dos volumes que irão buscar aplicando a técnica dos discos. Dessa forma, os alunos terão uma base de comparação entre os seus resultados e o resultado tido como ideal. Nesta etapa do processo, a resposta antes da resolução será de grande valia para o estudo, pois sem ela o aluno ficaria "perdido", não sabendo se o resultado encontrado é satisfatório ou não.

As atividades 2.3.17, 2.3.18 e 2.3.19 são referentes à aplicação da técnica dos discos para o cálculo de um intervalo de valores para o volume de um sólido gerado pela rotação da região plana delimitada em partes pelo gráfico de uma função ao redor do eixo x.

Atividade 2.3.16 *Utilizando o software winplot, iremos calcular os volumes dos sólidos gerados pela rotação das regiões planas delimitadas em partes pelo gráfico das funções dadas nas atividades 2.3.12 e 2.3.14, no intervalo* $[0,3]$*, como sugerido na atividade 2.3.15. Tendo feito o esboço dos gráficos e gerado a superfície de revolução, clique em* ***Um****, depois em* ***medidas*** *e depois* ***volume de revolução****. Na caixa de diálogo que será aberta, selecione o eixo* x*. Em "inicio arco", coloque o valor do extremo inferior do intervalo com o qual está trabalhando seu sólido de revolução. Em "fim arco", coloque o valor do extremo superior do intervalo com o qual está trabalhando. Clique em* ***volume****. Aparecerá o volume do sólido gerado pela região plana delimitada em parte pelo gráfico da função* $f(x) = x$ *no intervalo* $x \in [0,3]$*. Guarde esse valor relacionado a essa função e faça o mesmo com os outros sólidos gerados na atividade 2.3.14. Para o sólido gerado pela função* $f(x) = x^2 + 1$*, considere o intervalo* $x \in [0,2]$ *e para a função* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *considere o intervalo* $x \in [0,4]$*. Anote os valores do volume. Eles servirão de orientação em seus cálculos. (Mas lembre-se, os valores que aparecem no programa estão multiplicados por uma aproximação de* π*, logo, para que este valor seja comparado com os valores que irá encontrar, também deverá utilizar uma aproximação de* π *e efetuar a multiplicação.* ***Neste trabalho foi utilizada a aproximação*** $\pi \cong 3,1416$*.)*

Atividade 2.3.17 *Considerando a função* $f(x) = x$ *e o intervalo* $x \in [0,3]$*, vimos na atividade 2.3.12 que a região plana delimitada por esta função, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 3$ *e pelo eixo* x *quando girada em torne do próprio eixo* x *gera um cone. Iremos "aproximar" o cone por uma justaposição de cilindros circulares retos, buscando um intervalo de valores aproximado para o volume deste cone, conforme descrito abaixo.*

- Primeiro vamos esboçar o gráfico da função e trabalhar com um intervalo em x dessa função. Como na atividade 2.3.12 foi usado o intervalo $x \in [0,3]$, vamos usar esse mesmo intervalo.
- Agora dividimos esse intervalo em n partes iguais.
- Escolhemos um x_i em cada partição do intervalo, formando cilindros de raio $f(x_i)$ e altura $\frac{3}{n}$.
- Calculamos o volume de cada cilindro e somamos esses volumes. Essa é uma aproximação do volume do cone.
- Quanto maior o número de partes que dividirmos o intervalo, mais precisa será nossa aproximação.

Como o objetivo é encontrar um intervalo de valores para os volumes dos sólidos, neste trabalho serão feitas aproximações por cima e por baixo para os volumes [6]. O professor deve lembrar seus alunos que, nas aproximações por cima com funções crescentes, os cilindros ultrapassam o sólido e, por esta razão, o volume encontrado é maior que o volume procurado. Já nas aproximações por baixo com funções crescentes, haverá uma "falta" dos cilindros em relação ao sólido e, por isso, os volumes encontrados serão menores que o volume procurado. Para funções decrescentes, ocorre o contrário: nas aproximações por cima haverá uma "falta" dos cilindros em relação ao sólido e, por isso, os volumes encontrados serão menores que o volume procurado. Já nas aproximações por baixo, os cilindros ultrapassam o sólido e, por esta razão, o volume encontrado é maior que o volume procurado.

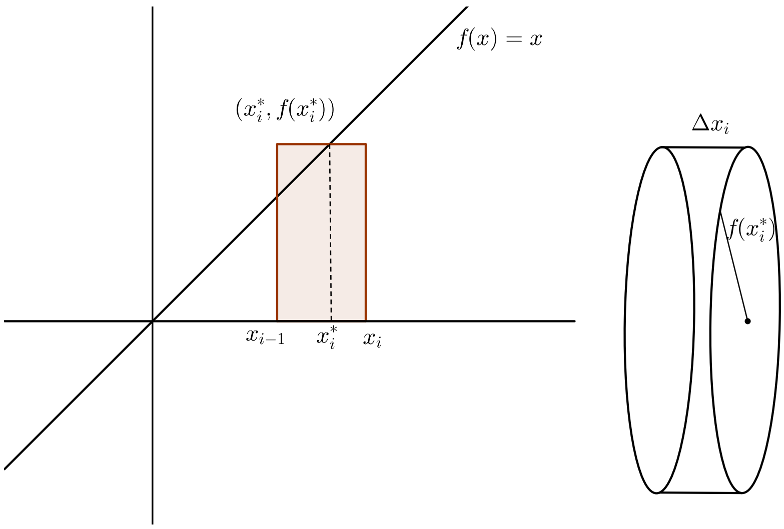

Figura 34 – Função afim

Primeiro serão feitas as aproximações por cima, utilizando o maior valor do intervalo de cada partição, isto é, considerando o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$***, serão utilizados os valores*** x_i***, para encontrar o valor do raio do cilindro*** $f(x_i)$***.***

1. O intervalo será, inicialmente, dividido em duas partes: $[0, \frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, 3]$, conforme Figura 35.

   Desta forma, serão formados dois cilindros de altura $\frac{3}{2}$ e de raios da base $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ e $f(3) = 3$.

[6] **Aproximações por cima** aqui consideradas são aproximações onde o volume total encontrado através da divisão em cilindros será maior que o volume real do sólido original, pois o sólido formado pela justaposição destes cilindros contém em seu interior todo o sólido original considerado, o qual fica inteiramente contido na porção de espaço delimitada por esta justaposição. Já as **aproximações por baixo** são aproximações onde o volume total encontrado através da divisão em cilindros será menor que o volume real do sólido, porque o sólido formado pela justaposição dos cilindros é quem fica inteiramente contido no interior do sólido original.

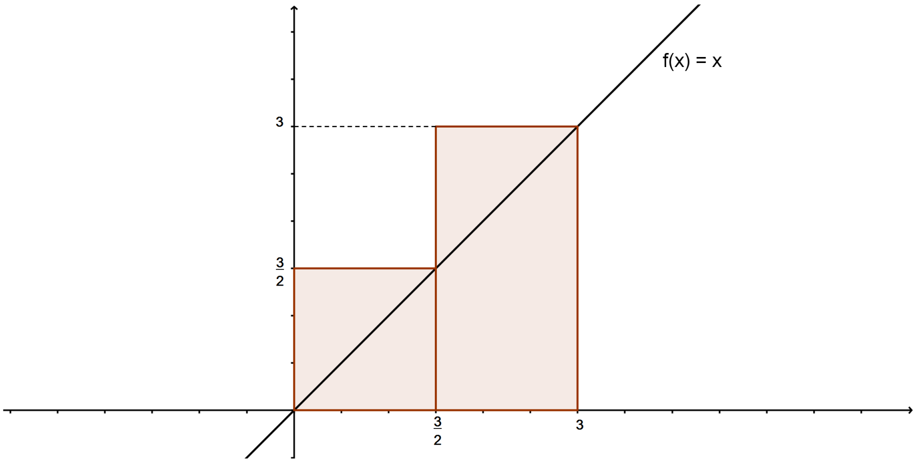

Figura 35 – Função afim

O volume do cilindro menor será: $V_1 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}\pi$

O volume do cilindro maior será: $V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2} = \pi \cdot 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}\pi$

Assim, o volume total será:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{27}{8}\pi + \frac{27}{2}\pi = \frac{135}{8}\pi = 16,875\pi \cong 53,01$$

2. Agora o intervalo será dividido em três partes: $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, conforme Figura 36.

   Desta forma, serão formados três cilindros de altura 1 e de raios da base $f(1) = 1, f(2) = 2 \;\; e \;\; f(3) = 3$.

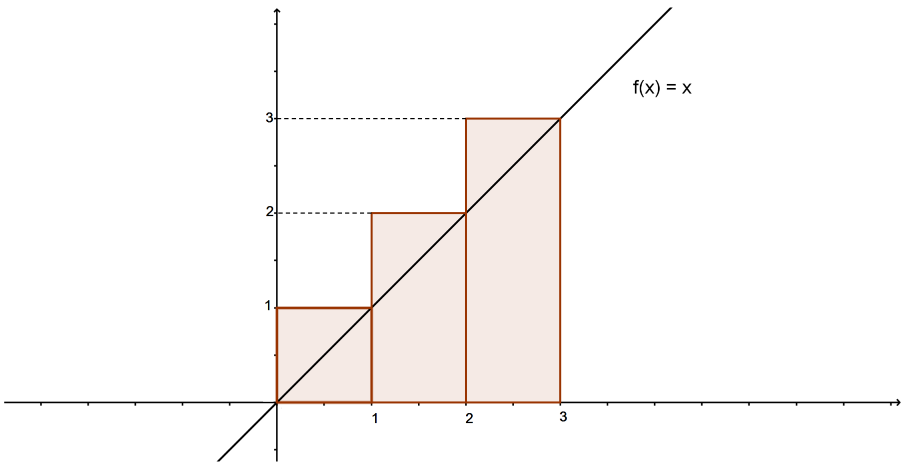

Figura 36 – Função afim

O volume total será dado pela soma dos volumes de cada um dos três cilindros, ou seja:

Volume do cilindro menor: $V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \cdot 1 \cdot 1 = \pi$

Volume do cilindro central: $V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = \pi \cdot 4 \cdot 1 = 4\pi$

Volume do cilindro maior: $V_3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 1 = \pi \cdot 9 \cdot 1 = 9\pi$

Assim, o volume total será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi + 4\pi + 9\pi = 14\pi \cong 43,98$$

3. Agora o intervalo será dividido em seis partes: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$, $[2, \frac{5}{2}]$ e $[\frac{5}{2}, 3]$, conforme Figura 37.

   Desta forma serão formados seis cilindros de altura $\frac{1}{2}$ e de raios da base $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(1) = 1, f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}, f(2) = 2, f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \;\; e \;\; f(3) = 3$.

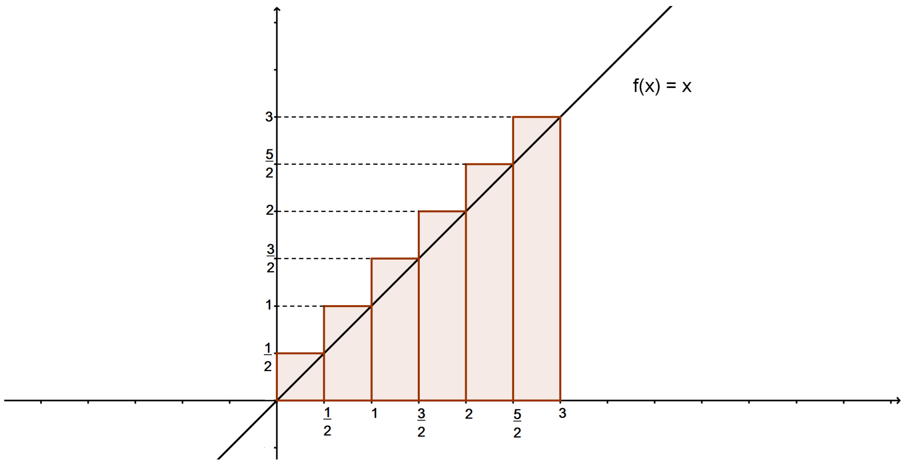

Figura 37 – Função afim

O volume total será feito como nos dois exemplos acima: somando-se os volumes de cada um dos cilindros. Sendo V_1 o volume do cilindro de raio da base $\frac{1}{2}$, V_2 o cilindro de raio da base 1, ..., V_6 o volume do cilindro de raio da base 3, tem-se:

$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\pi$

$V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$

$V_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}\pi$

$V_4 = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2\pi$

$V_5 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{8}\pi$

$V_6 = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\pi$

Assim, o volume total será:

$$V = V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6 = \frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}\pi+\frac{9}{8}\pi+2\pi+\frac{25}{8}\pi+\frac{9}{2}\pi = \frac{91}{8}\pi = 11,375\pi \cong 35,74$$

Perceba que quanto maior o número de intervalos, melhor será a aproximação do resultado exato. Como no exemplo acima tem-se um cone de altura 3 e raio da base $f(3) = 3$, pelo que foi visto anteriormente, sabe-se que seu volume é igual a

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \cong 28,27.$$

Note que o volume encontrado na última aproximação, com seis cilindros, é o mais próximo do volume exato do cone. Se a região for dividida em mais cilindros, melhor será a aproximação.

Agora, utilizando o mesmo raciocínio, serão feitas aproximações por baixo. Assim como foi feito para as aproximações por cima, o intervalo será dividido em duas, três e seis partes. A única diferença é que, para as aproximações por baixo, o que se quer é que os cilindros fiquem todos dentro da região que está sendo rotacionada. Para isso, serão utilizados os valores $x_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]$ ***de cada partição do intervalo*** $[0, 3]$***.***

1. Primeiro o intervalo será dividido em duas partes: $[0, \frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, 3]$, conforme Figura 38.

   Desta forma, a região ficará dividida em cilindros de altura $\frac{3}{2}$ e raios da base $f(0) = 0$ *e* $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.

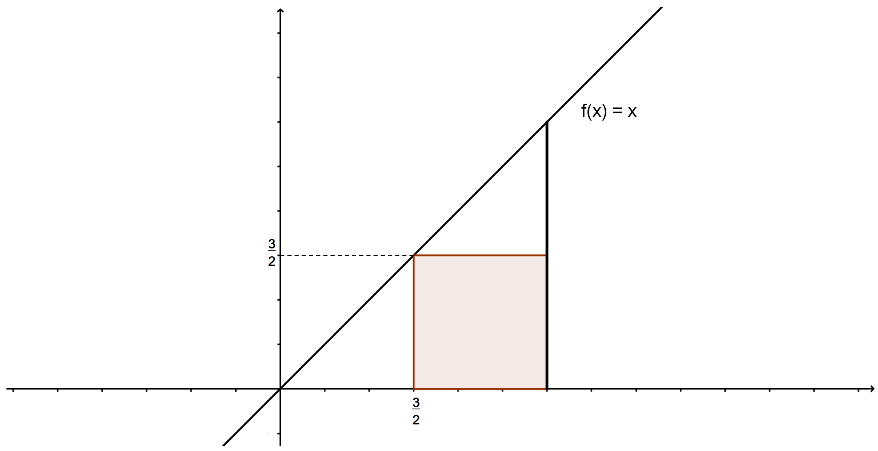

Figura 38 – Função afim

O volume do cilindro cujo raio da base é 0 será: $V_1 = \pi \cdot 0^2 \cdot \frac{3}{2} = 0$

O volume do cilindro cujo raio da base é $\frac{3}{2}$ será: $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}\pi$

Assim, o volume total será:

$$V = V_1 + V_2 = 0 + \frac{27}{8}\pi = \frac{27}{8}\pi = 3,375\pi \cong 10,60$$

2. Agora o intervalo será dividido em três partes: $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$, conforme Figura 39.

   Desta forma, serão formados cilindros de altura 1 e cujos raios da base serão iguais a $f(0)=0, f(1)=1 \;\; e \;\; f(2)=2$.

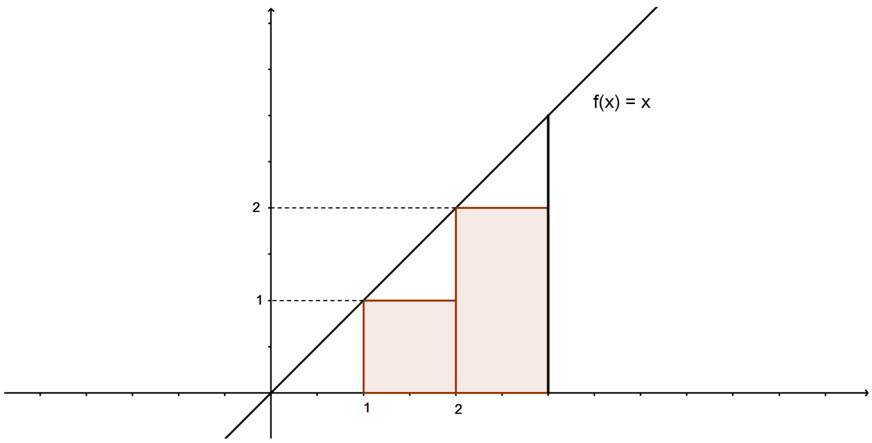

Figura 39 – Função afim

   O volume do cilindro de raio da base 0 será: $V_1 = \pi \cdot 0^2 \cdot 1 = 0$

   O volume do cilindro de raio da base 1 será: $V_2 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$

   O volume do cilindro de raio da base 2 será: $V_3 = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$

   Assim, o volume total, dado pela somas dos volumes acima, será de:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0 + \pi + 4\pi = 5\pi \cong 15,71.$$

3. Por último, será feita a divisão em seis partes:$[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$, $[1,\frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2},2]$, $[2,\frac{5}{2}]$ e de $[\frac{5}{2},3]$, conforme Figura 40.

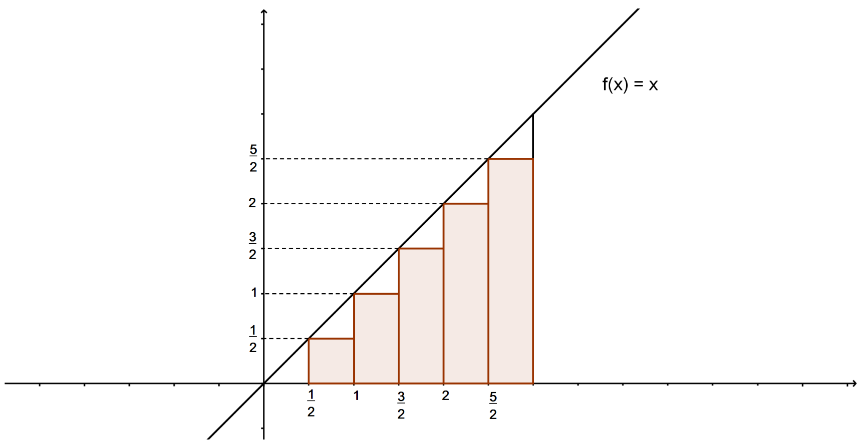

Figura 40 – Função afim

Desta forma, serão formados seis cilindros de altura $\frac{1}{2}$ e raios da base iguais a $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(1) = 1, f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}, f(2) = 2 \;\; e \;\; f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$.

O volume do cilindro de raio da base 0 será: $V_1 = \pi \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

O volume do cilindro de raio da base $\frac{1}{2}$ será: $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\pi$

O volume do cilindro de raio da base 1 será: $V_3 = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$

O volume do cilindro de raio da base $\frac{3}{2}$ será dado por: $V_4 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}\pi$

O volume do cilindro de raio da base 2 será dado por: $V_5 = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2\pi$

O volume do cilindro de raio da base $\frac{5}{2}$ será dado por: $V_6 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{8}\pi$

Assim, o volume total será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 + \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{9}{8}\pi + 2\pi + \frac{25}{8}\pi = \frac{55}{8}\pi = 6,875\pi \cong 21,60.$$

Quanto mais cilindros forem justapostos, mais próximo do valor exato do volume do cone se chega. Fazendo a aproximação por cima e por baixo, como acima, consegue-se um intervalo de valores muito bom. Note que o volume do cone é igual a 9π e com os cálculos feitos acima, conseguiu-se o intervalo $6,875\pi \leq volume \;\; do \;\; cone \;\; \leq 11,375\pi$. Se o intervalo tivesse sido dividido em mais partes, menor seria cada partição e mais próximo do valor real o intervalo encontrado para o volume se aproximaria.

O professor pode adequar essa divisão de acordo com os objetivos esperados. Mas, para os fins deste trabalho, que pretende encontrar valores aproximados para volumes de sólidos desconhecidos, o intervalo acima seria razoável.

Nos cálculos está sendo feita a multiplicação por uma aproximação de π para que os alunos consigam comparar seus resultados com o resultado encontrado pelo *software winplot*.

Bom, o método utilizado na atividade, conhecido como técnica dos discos ou mesmo aproximação por cilindros, utiliza-se da noção de limite para chegar ao resultado real, pois quanto maior for o número de cilindros utilizados, menor será o intervalo em x equivalente à altura desses cilindros e mais próximo do volume real do sólido se conseguirá chegar. É importante que os alunos compreendam essa noção para que consigam realmente compreender o método aplicado.

Se o professor quiser, pode aplicar atividades que desenvolvam essa noção intuitiva de limites. Alguns exemplos de atividades deste tipo podem ser encontradas em [11], páginas 21-24 e em [9], páginas 14-15, por exemplo.

Agora este trabalho apresentará alguns outros exemplos onde será utilizada esta mesma técnica em regiões delimitadas em partes pelo gráfico de funções conhecidas pelos alunos que, quando são giradas em torno do eixo x, delimitadas por um intervalo, formam sólidos de revolução que os mesmos não conhecem. Todas as atividades a seguir buscam aplicar o método da aproximação de cilindros para cálculo aproximado de volumes, encontrando um intervalo para o mesmo e sabendo que os alunos já possuem o valor exato para fins de comparação. Tais valores podem ser encontrados utilizando o *winplot* ou pode ser fornecido pelo professor, sendo que a primeira opção é mais interessante por ser mais estimulante para os alunos, permitir o contato dos mesmos com as tecnologias e ainda fornecer uma visão de como seria o sólido de revolução.

Atividade 2.3.18 *Utilize o método da aproximação por cilindros para calcular o volume aproximado do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = x^2 + 1$*, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 2$ *e pelo eixo* x*.*

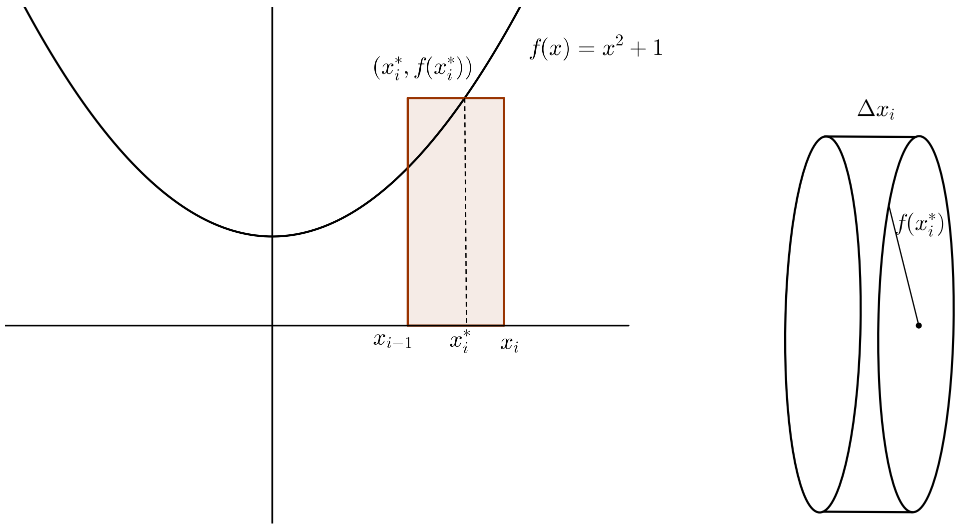

Figura 41 – Função quadrática

Aproximação por cima:

1. Dividindo o intervalo em duas partes – $[0, 1]$ e $[1, 2]$ –, conforme Figura 42, formam-se dois cilindros de altura 1 e raios da base $f(1) = 2$ *e* $f(2) = 5$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 + \pi \cdot 5^2 \cdot 1 = 29\pi \cong 91,11$$

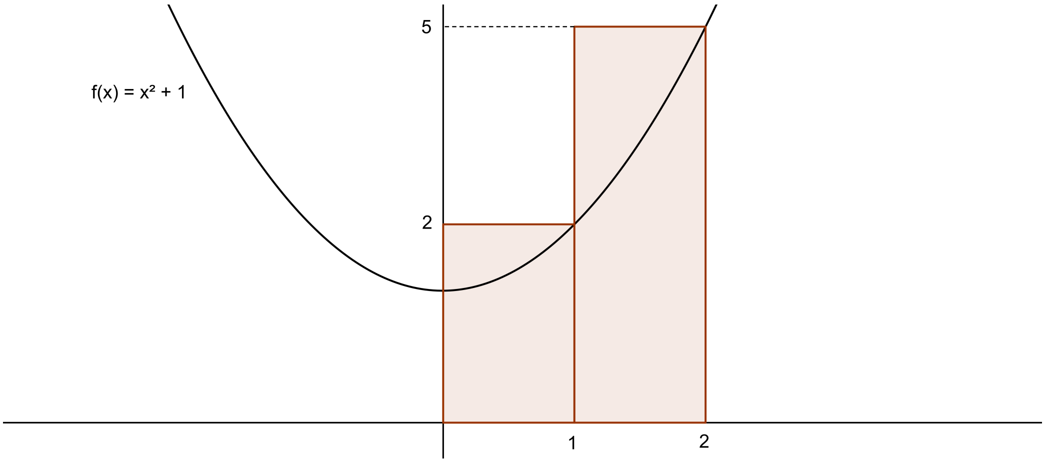

Figura 42 – Função quadrática

2. Dividindo o intervalo em quatro partes – $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, 2]$ –, conforme Figura 43, formam-se quatro cilindros de altura $\frac{1}{2}$ e raios da base $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}, f(1) = 2, f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{4} \;\; e \;\; f(2) = 5$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{658}{32}\pi \cong 20,563\pi \cong 64,60$$

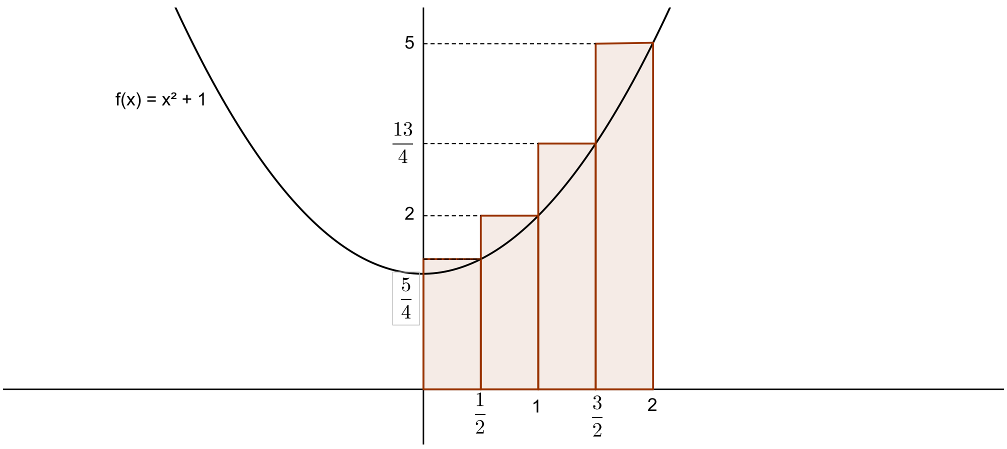

Figura 43 – Função quadrática

3. Dividindo o intervalo em oito partes – $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $[1, \frac{5}{4}]$, $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ e $[\frac{7}{4}, 2]$ – , conforme Figura 44, formam-se oito cilindros de altura $\frac{1}{4}$ e raios da base $f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{16}, f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}, f(\frac{3}{4}) = \frac{25}{16}, f(1) = 2, f(\frac{5}{4}) = \frac{41}{16}, f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{4}, f(\frac{7}{4}) = \frac{65}{16} \;\; e \;\; f(2) = 5$. O volume total será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \left(\frac{17}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \left(\frac{41}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \\ &\quad + \pi \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \left(\frac{65}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17348}{1024}\pi \cong 16,941\pi \cong 53,22 \end{aligned}$$

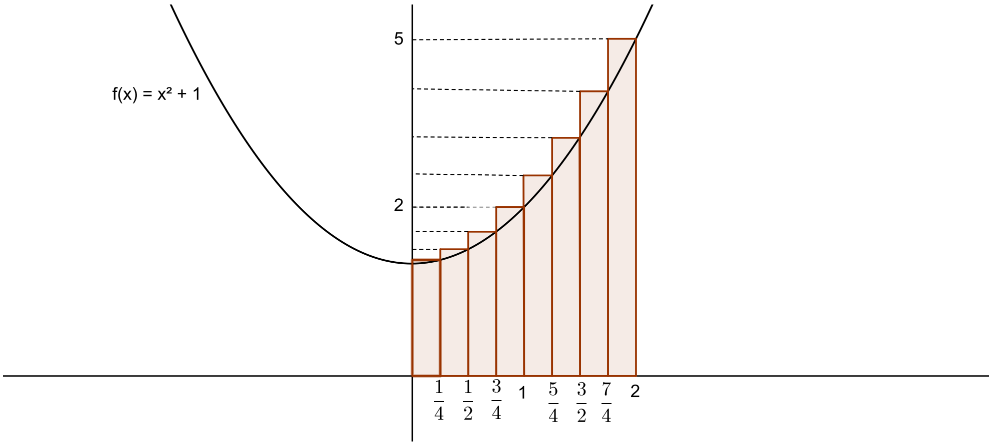

Figura 44 – Função quadrática

Aproximação por baixo:

1. Dividindo o intervalo em duas partes – $[0,1]$ e $[1,2]$ –, conforme Figura 45, formam-se dois cilindros de altura 1 e raios da base $f(0) = 1 \;\; e \;\; f(1) = 2$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 5\pi \cong 15,71$$

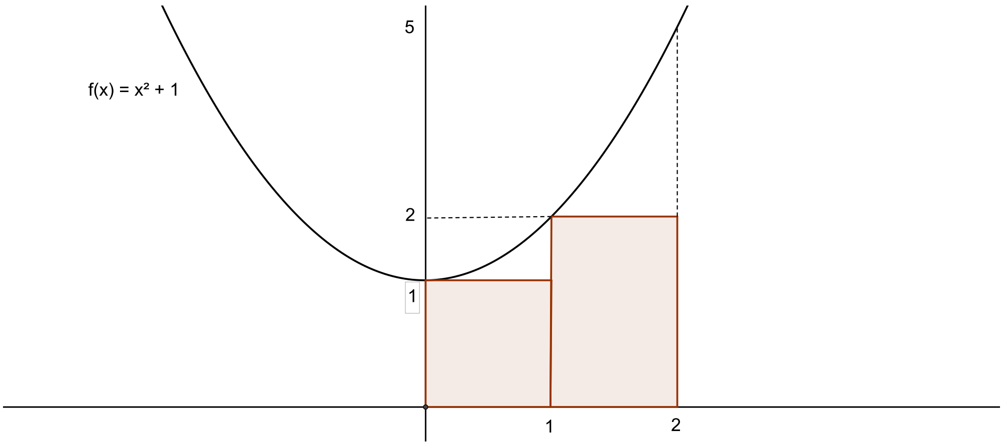

Figura 45 – Função quadrática

2. Dividindo o intervalo em quatro partes – $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, 2]$ –, conforme Figura 46, formam-se quatro cilindros de altura $\frac{1}{2}$ e raios da base $f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}, f(1) = 2 \;\; e \;\; f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{4}$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{274}{32}\pi \cong 8,563\pi \cong 26,90$$

.

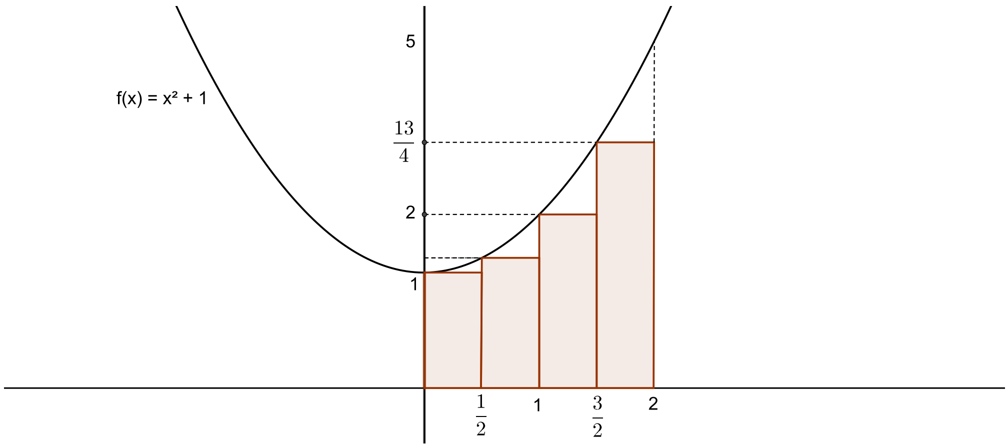

Figura 46 – Função quadrática

3. Dividindo a região em oito partes – $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $[1, \frac{5}{4}]$, $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ e $[\frac{7}{4}, 2]$ –, conforme Figura 47, formam-se oito cilindros de altura $\frac{1}{4}$ e raios da base $f(0) = 1, f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{16}, f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}, f(\frac{3}{4}) = \frac{25}{16}, f(1) = 2, f(\frac{5}{4}) = \frac{41}{16}, f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{4}$ *e* $f(\frac{7}{4}) = \frac{65}{16}$. O volume total será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot \left(\tfrac{17}{16}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot \left(\tfrac{25}{16}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot \left(\tfrac{41}{16}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \\ &+ \pi \cdot \left(\tfrac{13}{4}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi \cdot \left(\tfrac{65}{16}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{11204}{1024}\pi \cong 10,941\pi \cong 34,37 \end{aligned}$$

.

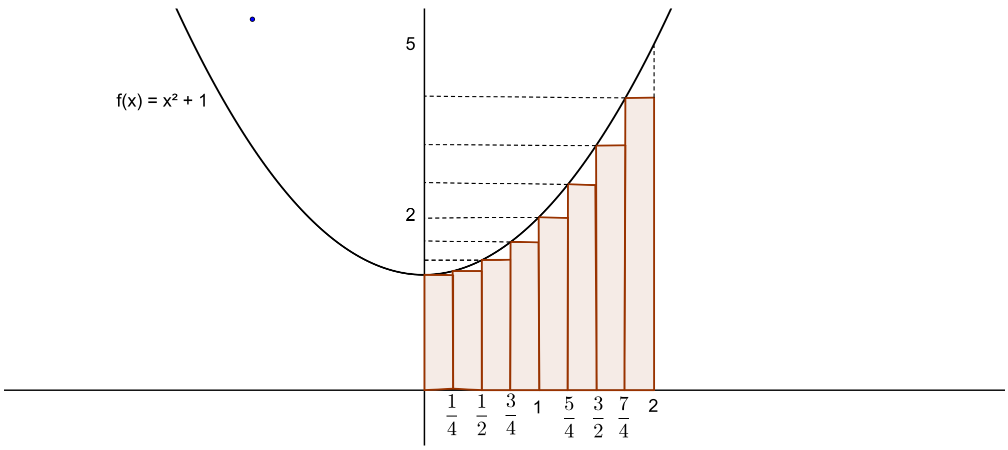

Figura 47 – Função quadrática

Observe que foi encontrado o seguinte intervalo aproximado para o volume: $34,37 \leq$ *volume do sólido* $\leq 53,22$. Utilizando o *winplot*, o aluno encontrará o valor aproximado de 43,14 para o volume, logo, o intervalo encontrado fica bem próximo do desejado.

Atividade 2.3.19 *Utilize a aproximação por cilindros para calcular o volume aproximado do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$*, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 4$ *e pelo eixo* x*.(Observe que esta é uma função decrescente, logo, para as aproximações por cima teremos que utilizar o menor valor de cada partição do intervalo e para aproximações por baixo teremos que utilizar o maior valor de cada partição do intervalo).*

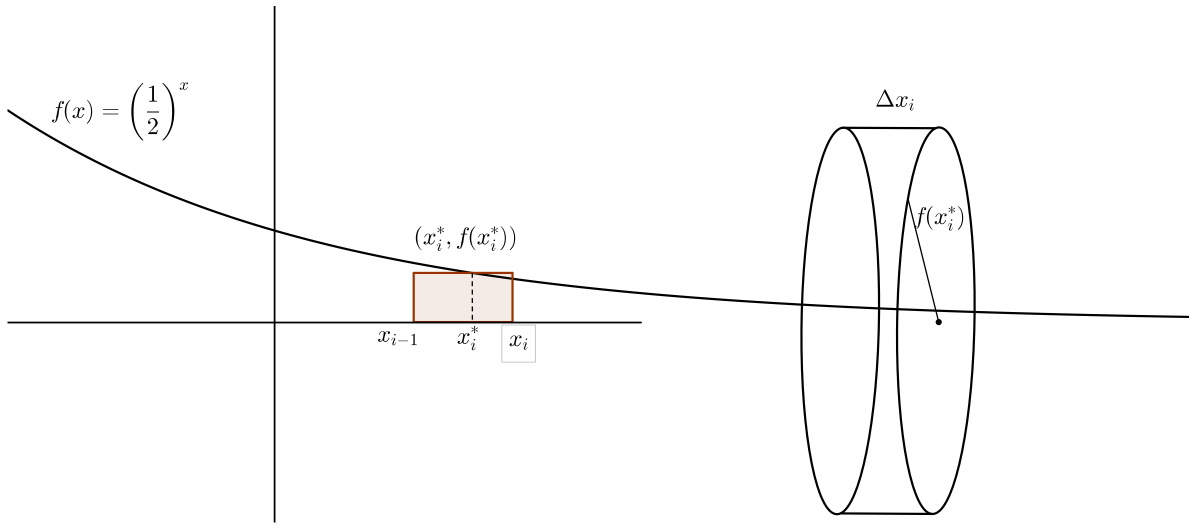

Figura 48 – Função exponencial

Aproximação por cima

1. Dividindo o intervalo em duas partes – $[0, 2]$ e $[2, 4]$ –, conforme Figura 49, formam-se dois cilindros de altura 2 e raios da base $f(0) = 1$ *e* $f(2) = \frac{1}{4}$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 + \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2 = \frac{17}{8}\pi = 2,125\pi \cong 6,68$$

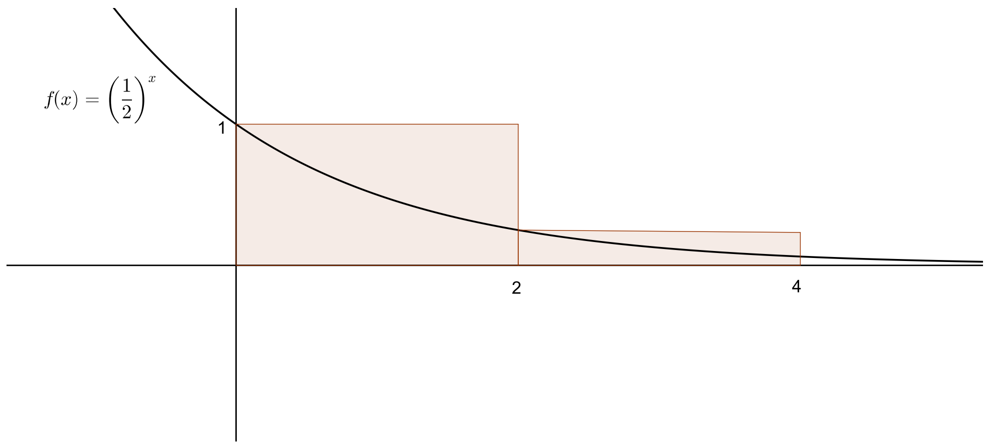

Figura 49 – Função exponencial

2. Dividindo o intervalo em quatro partes – $[0,1]$,$[1,2]$,$[2,3]$ e $[3,4]$ – , conforme Figura 50, formam-se quatro cilindros de altura 1 e raios da base $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$ e $f(3) = \frac{1}{8}$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 1 = \frac{85}{64}\pi \cong 1,328 \cong 4,17$$

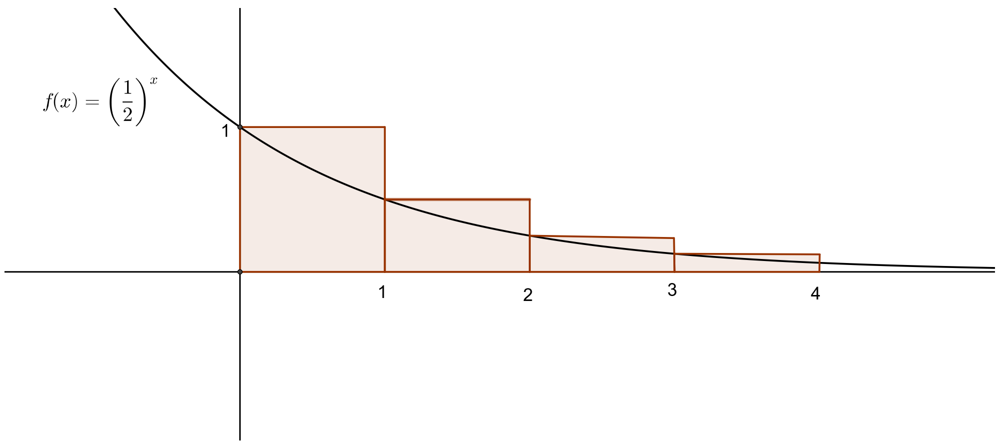

Figura 50 – Função exponencial

Aproximação por baixo:

1. Dividindo o intervalo em duas partes – $[0,2]$ e $[2,4]$ –, conforme Figura 51, formam-se dois cilindros de altura 2 e raios da base $f(2) = \frac{1}{4}$ e $f(4) = \frac{1}{16}$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2 + \pi \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 2 = \frac{17}{128}\pi \cong 0,133\pi \cong 0,42$$

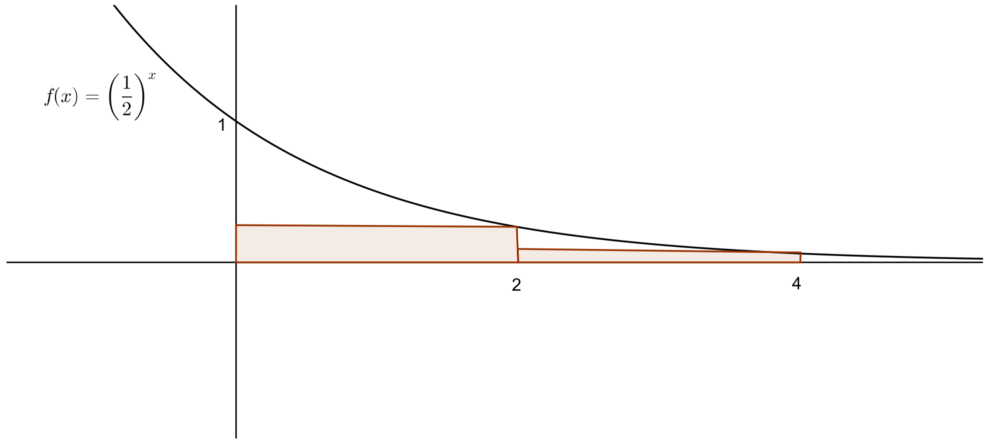

Figura 51 – Função exponencial

.

2. Dividindo o intervalo em quatro partes – $[0,1]$,$[1,2]$,$[2,3]$ e $[3,4]$ –, conforme Figura 52, formam-se quatro cilindros de altura 1 e raios da base $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{1}{8} e f(4) = \frac{1}{16}$. O volume total será:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 1 = \frac{85}{256}\pi \cong 0,332\pi \cong 1,04$$

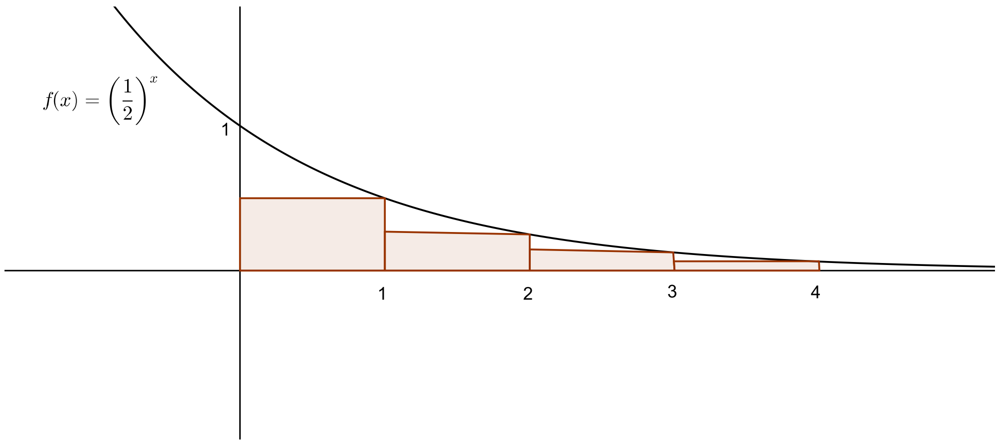

Figura 52 – Função exponencial

Observe que o valor encontrado através do *software winplot* para o volume do sólido gerado por esta função é $V = 2,257$ e que foi encontrado o intervalo $1,04 \leq volume \ \ do \ \ sólido \leq 4,17$, portanto, o intervalo encontrado é bem razoável. Optou-se, nesta última atividade, realizar apenas duas divisões porque os resultados encontrados através destas divisões já foram bem satisfatórios. No entanto, quanto mais divisões forem feitas, melhor será essa aproximação.

Através das atividades anteriores, espera-se que os alunos consigam compreender como utilizar a técnica dos discos em busca de um intervalo de valores razoável para o volume de sólidos de revolução que eles não conhecem. Isso permitirá aos mesmos desenvolver um pensamento matemático mais elaborado, no qual consegue-se relacionar, de maneira simplista, diferentes conteúdos de nível médio e superior.

O professor deve explorar outras funções com os alunos utilizando, como feito aqui neste trabalho, o *winplot* para visualização das superfícies geradas e cálculo do volume do sólido de revolução no intervalo dado. Essa parte da utilização do *software* é importante para que a proposta não se resuma a cálculos simplesmente e, sim, ao entendimento completo da aplicação dessa proposta e à compreensão de toda a dimensão do conteúdo, além de dar uma base de comparação de resultados para os alunos.

2.3.3.3 *Consolidando o aprendizado*

Esta seção traz alguns outros exemplos de atividades que podem ser utilizados pelo professor para consolidação do aprendizado da aplicação da técnica dos discos. É importante que o professor siga a mesma linha das atividades 2.3.17 a 2.3.19 e que explore também os recursos tecnológicos, como o *software winplot*.

Atividade 2.3.20 *Utilize a aproximação por cilindros para calcular o volume aproximado do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = 2^x$*, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 2$ *e pelo eixo* x*.*

Atividade 2.3.21 *Utilize a aproximação por cilindros para calcular o volume aproximado do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = -x + 3$*, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 3$ *e pelo eixo* x*.*

Atividade 2.3.22 *Utilize a aproximação por cilindros para calcular o volume aproximado do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = x^2$*, pelas retas* $x = 0$ *e* $x = 2$ *e pelo eixo* x*.*

3 BASE TEÓRICA

3.1 DEFINIÇÃO DE VOLUME

A teoria deste capítulo foi retirada de [12], [16] e [17], contendo algumas pequenas modificações.

Geralmente tem-se uma ideia intuitiva do significado de volume, mas faz necessário torná-la precisa usando o cálculo para chegar a uma definição exata de volume.

Para isso, inicialmente será usado um tipo bem simples de sólido, chamado **cilindro** (ou mais precisamente, um cilindro reto).

Um cilindro reto é um sólido limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2, situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, tendo seus extremos sobre os limites de R_1 e R_2, que se move de modo que seja sempre perpendicular aos planos de R_1 e R_2. A Figura 53 ilustra um cilindro reto. A altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos de R_1 e R_2 e a base é a região R_1 ou R_2, visto que são congruentes.

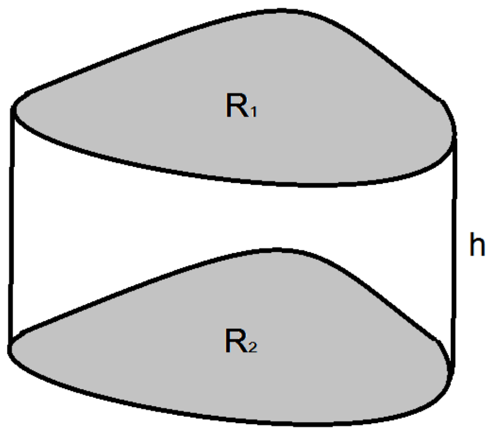

Figura 53 – Cilindro Reto

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular reto, como mostra a Figura 54. E se a base do cilindro reto for um retângulo, então o cilindro é uma caixa retangular (também chamado de paralelepípedo retangular), como mostra a Figura 55.

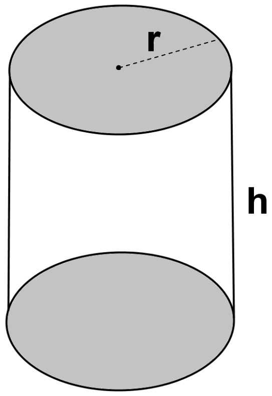

Figura 54 – Cilindro Circular Reto

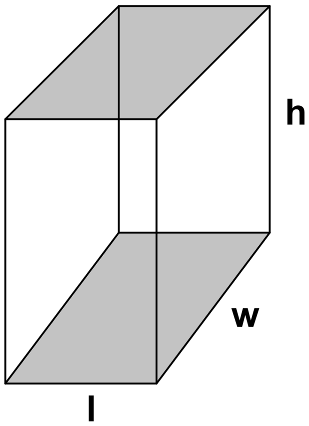

Figura 55 – Paralelepípedo Retangular

Se a área da base de um cilindro reto for A unidades quadradas e a altura for h unidades, então o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah.$$

Sendo assim, o volume de um cilindro circular reto é $V = \pi r^2 h$ e o volume do paralelepípedo retangular é $V = lwh$, onde l é o comprimento do retângulo da base e w a largura desse retângulo.

Para calcular o volume de um sólido S que não é um cilindro, mas cuja área de qualquer secção plana (uma região plana formada pela intersecção de um plano com um sólido) que é perpendicular a um eixo seja uma função da distância perpendicular da secção plana de um ponto fixo sobre o eixo, a fórmula acima também será utilizada. Para isso, primeiro "corta-se" S em pedaços e aproxima-se cada parte por um cilindro. O volume de

S é estimado adicionando os volumes dos cilindros. O volume exato de S é obtido através de um processo de limite em que o número de partes torna-se muito grande.

Começa-se interceptando S com um plano e obtendo uma região plana que é chamada de secção transversal de S. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P, perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leq x \leq b$. (Pense em fatiar S com uma faca passando por x e calcule a área da fatia.). A área da secção transversal $A(x)$ irá variar conforme x aumenta de a para b. Exige-se que $A(x)$ seja contínua em $[a, b]$.

O sólido S é dividido em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando os planos P_{x_1}, P_{x_2}, ... para fatiá-lo. (Pense em fatiar um pedaço de pão.) Se forem escolhidos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, pode-se aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx, conforme ilustra a Figura 56.

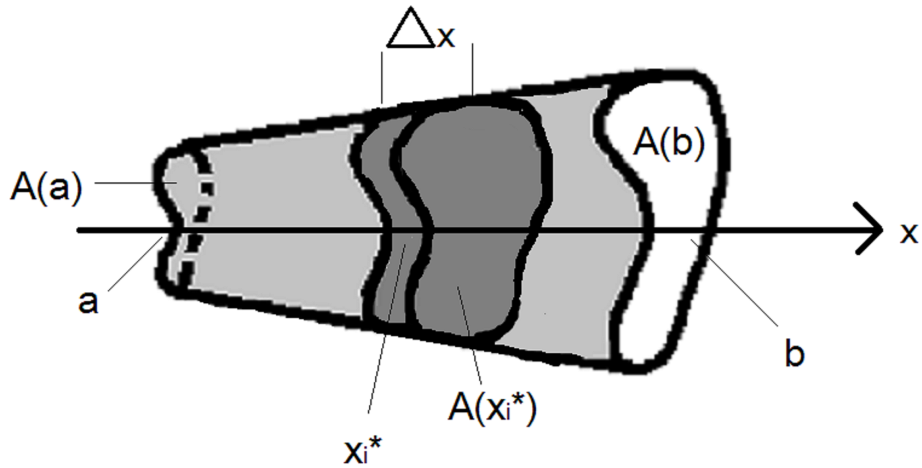

Figura 56 – Ilustração da partição em "fatias"

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\Delta x$, assim, uma aproximação para a concepção intuitiva do volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x.$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtem-se uma aproximação para o volume total (intuitivamente):

$$V \approx \sum_{i=1}^{\infty} A(x_i^*)\Delta x.$$

Essa aproximação parece melhorar quando $n \longrightarrow \infty$. (Pense em fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *define-se* o volume como o limite dessas somas quando $n \longrightarrow \infty$. Mas o limite da soma de Riemann é conhecido como uma integral definida e, dessa forma, tem-se a seguinte definição:

Definição 3.1.1 (Volume) *Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x é perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx.$$

Ao usar a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)dx$, é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em x perpendicularmente ao eixo x.

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x. Então, pela definição de volume, tem-se:

$$\begin{aligned} V &= \textstyle\int_a^b A(x)dx \\ &= \textstyle\int_a^b Adx \\ &= A(b-a) \end{aligned}$$

Note que isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

3.2 VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Um sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana R em torno de um eixo, chamado eixo de revolução, o qual pode ou não interceptar a região.

Neste trabalho só está sendo considerado o caso em que o eixo de revolução é uma fronteira da região que gira. Para saber sobre o caso onde o eixo de revolução não está na fronteira da região a ser rotacionada, o leitor pode consultar [12], pagina 379.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A Figura 57 mostra a região R e o i-ésimo retângulo. Quando o i-ésimo retângulo é girado em torno do eixo x obtemos um elemento de volume que é um disco cuja base é um círculo de raio $f(x_i^*)$ unidades e cuja altura é $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ unidades. O volume desse disco é:

$$\Delta V_i = \pi[f(x_i^*)]^2\Delta x.$$

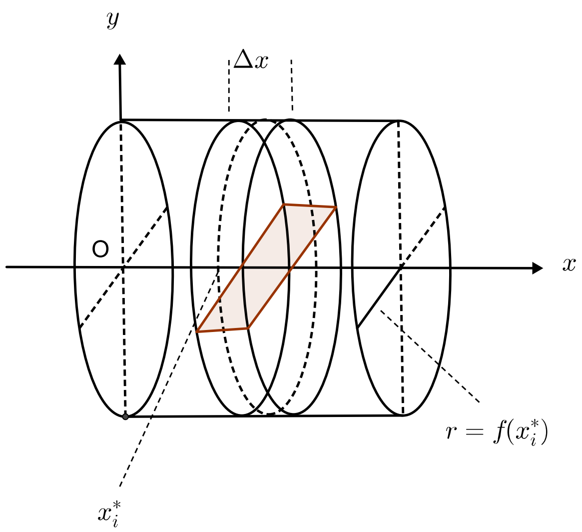

Figura 57 – Ilustração do sólido gerado pela rotação de R

Agora, considere $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo dessa partição escolha um ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Para cada ponto x_i^* teremos um ΔV_i e a soma desses volumes será,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i^*)]^2\Delta x.$$

Essa é uma soma de Riemann onde $A(x_i^*) = \pi[f(x_i^*)]^2$. E, na medida em que são tomadas partições mais e mais finas, os discos justapostos formam um sólido que se parece cada vez com o sólido de revolução original.

Como a função f é contínua, a função $g(x) = \pi[f(x)]^2$ também é contínua. Pode-se, então, estabelecer a seguinte definição:

Definição 3.2.1 (Volume do Sólido de Revolução) *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i^*)]^2\Delta x = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

REFERÊNCIAS

[1] BAIRRAL, M. A., SILVA, M.A. *Instrumentação do Ensino da Geometria.* Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006. v.2.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2013.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).* Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2014.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (Ensino Médio).* Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2013.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de educação básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias.* v. 2. Brasília. 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2014.

[6] BRASIL. *Reorientação Curricular da área de Ciências da Natureza e Matemática do estado do Rio de Janeiro para o segundo segmento do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.* Livro 2. Governo do estado do Rio de Janeiro. Secretaria de estado de educação. Rio de Janeiro. 2006. Disponível em: <http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/LIVROII_ciencias_inicio.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2013.

[7] DANTE, L. R. *Matemática.* 1.ed. São Paulo: Ática, 2005. v. único.

[8] DOLCE, O.; POMPEO, J.N. *Fundamentos de Matemática Elementar.* 5.ed. São Paulo: Atual, 1993. v .10. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).

[9] GIRALDO, V.; CAETANO, P. A. S.; MATTOS, F. R. P. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.* 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e Aplicações.* 2.ed. São Paulo: Atual, 2004. 2ª série: Ensino Médio. (Coleção Matemática: Ciência e Aplicações).

[11] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N.J. 3.ed. *Fundamentos de Matemática Elementar.* São Paulo: Atual, 1983. v.8. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).

[12] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3.ed. São Paulo: Editora HARBRA ltda, 1994. v.1.

[13] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria* 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[14] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio.* 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.2. (Coleção do Professor de Matemática).

[15] PATERLINI, R. R. *Os "Teoremas" de Cavalieri.* Extensão de artigo publicado na Revista do Professor de Matemática. n.72. 2010. p.43-47. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/p̃tlini/paterlini_cavalieri.pdf>. Acesso em 31 jan. 2014.

[16] Notas de Fundamentos de Cálculo preparadas por A. Hefez, L.M. Figueiredo, com a colaboração de P. Gusmão. (PROFMAT).

[17] STEWART, J. *Cálculo.* Tradução de EZ2Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v.1.

[18] Winplot - Página Oficial. Disponível em: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>. Acesso em 20 dez. 2013.

APÊNDICE A – Questionário de Sondagem dos Pré-Requisitos

1. Você sabe o que é um retângulo? (Explique com suas palavras). Sabe calcular sua área?

2. Como calcularia a área de um círculo?

3. Você sabe o que é um triângulo retângulo? (Explique com suas palavras). E como calcular sua área?

4. Conhece outras figuras planas e suas áreas? (Não deixe de identificá-las e mostrar como calcularia as respectivas áreas).

5. Você saberia esboçar os gráficos das funções abaixo? Se sim, faça o esboço.

   a) $f(x) = 2x + 1$

   b) $f(x) = x^2 - 3$

   c) $f(x) = 2^x$

   d) $f(x) = \log_2 x$

6. Considerando a função do item (b) da questão anterior, saberia calcular $f(5)$? E $f(-\frac{1}{2})$?

7. Dos sólidos abaixo, marque aqueles que você conhece e sabe calcular seu volume:

   ( ) Paralelepípedo Retângulo

   ( ) Prisma

   ( ) Pirâmide

   ( ) Cilindro

   ( ) Cone

   ( ) Esfera

8. Tente esboçar um desenho que represente cada sólido que marcou acima e destaque em cada um deles pelo menos um dos seguintes elementos: altura, base, vértice, raio (da base ou outro que desejar).

9. Agora, ainda em relação aos sólidos que assinalou, escreva a fórmula para cálculo de volume dos mesmos e identifique o que cada letra da fórmula significa.

APÊNDICE B – O Princípio de Cavalieri como Teorema

O Princípio de Cavalieri, conforme enunciado para estudantes do Ensino Médio na busca por demonstrar os volumes de alguns sólidos, não se preocupa em definir condições sobre fronteiras das regiões e dos sólidos. No entanto, para sua demonstração formal, é utilizada a teoria da integração de funções reais e, desta forma, é necessário definir essas condições.

De acordo com PATERLINI em [15], o Princípio de Cavalieri pode ser enunciado e demonstrado como teorema conforme segue abaixo.

Principio de Cavalieri para volumes Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ e seja P um sólido finito delimitado por, $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja P_t a intersecção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$ seja Q_t a intersecção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = ka(Q_t)$ para todo t, onde a representa a área das secções planas. Então $v(P) = kv(Q)$, onde v representa o volume dos sólidos.

Da teoria da integração de funções reais, temos:

$$\begin{array}{rcl} v(P) & = & \iiint_P dxdydz \\ & = & \int_0^c \left[\iint_{P_z} dxdy\right] dz \\ & = & \int_0^c a(P_z)dz \\ & = & \int_0^c ka(Q_z)dz \\ & = & k\int_0^c a(Q_z)dz \\ & = & ... \\ & = & kv(Q), \end{array}$$

o que demonstra a afirmação.

ANEXO A – Imagens do Material Concreto - Bandeirinhas

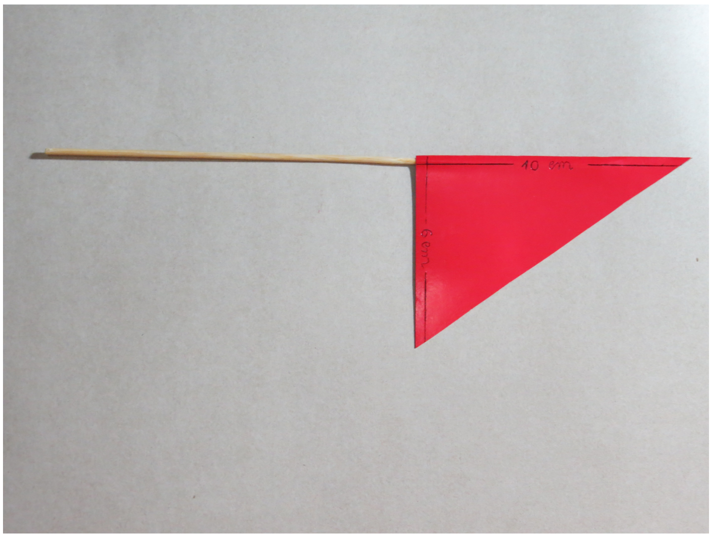

Figura 58 – Bandeirinha Triângulo

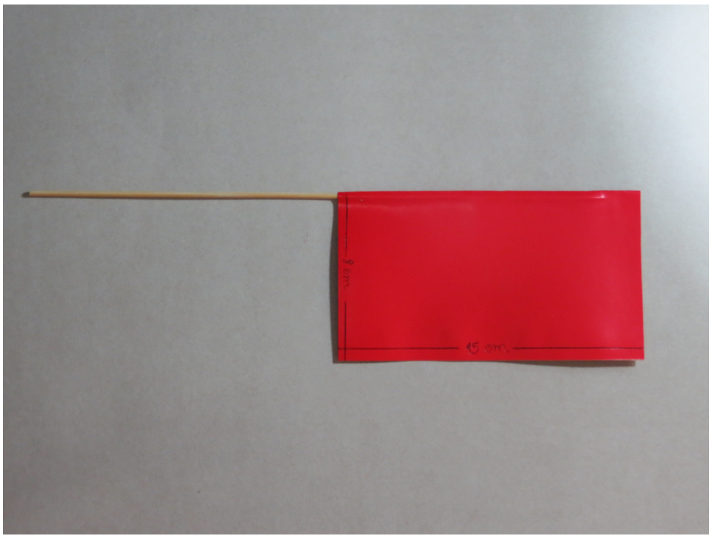

Figura 59 – Bandeirinha Retângulo

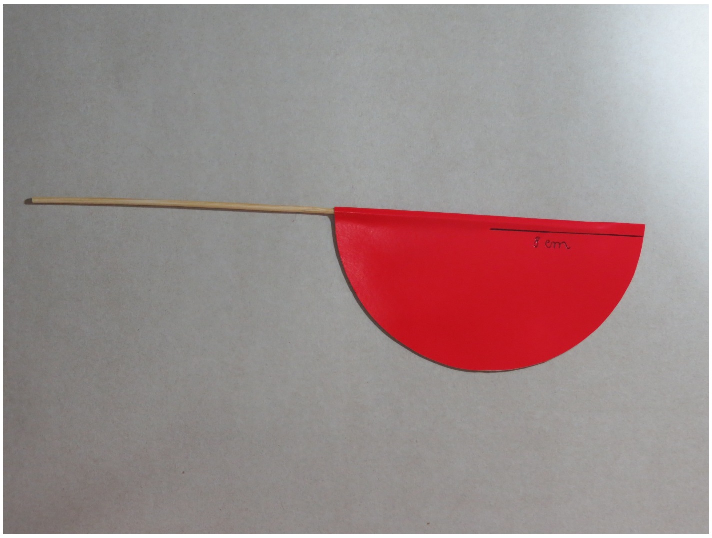

Figura 60 – Bandeirinha Semicírculo

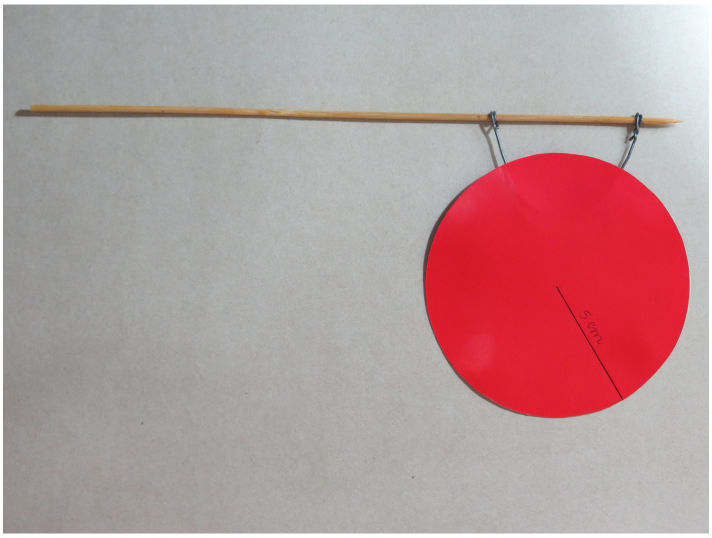

Figura 61 – Bandeirinha Círculo