

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Marcelo Cunha Figueiredo**

**Fundamentos da Geometria Euclidiana para o Ensino dos Números Reais**

Juiz de Fora

2014

**Marcelo Cunha Figueiredo**

**Fundamentos da Geometria Euclidiana para o Ensino dos Números Reais**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Figueiredo, Marcelo Cunha.

Fundamentos da Geometria Euclidiana para o Ensino dos Números Reais / Marcelo Cunha Figueiredo. – 2014.

54 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes .

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Números Reais. 2. Geometria Euclidiana. 3. Régua e Compasso. I. Gomes, José Barbosa, orient. II. Título.

**Marcelo Cunha Figueiredo**

**Fundamentos da Geometria Euclidiana para o Ensino dos Números Reais**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2014

---

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Kennedy Martins Pedroso  
Universidade Federal de Viçosa

*Dedico este trabalho à minha esposa, minha mãe e ao meu irmão, as pessoas mais importantes da minha vida*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, pela saúde e força nos momentos difíceis. Agradeço também à minha esposa Josiane, meu amor e companheira de todas as horas, à minha mãe, pelo exemplo de mãe, ao meu irmão, meu grande amigo, ao meu orientador, professor José Barbosa, que contribui muito na elaboração desse trabalho, ao IFET, campus Muriaé, uma escola abençoada que a cada dia que se passa tenho mais orgulho em fazer parte e à CAPES pelo auxílio financeiro que muito me ajudou a prosseguir no programa.

## RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade mostrar uma metodologia de ensino dos números reais com base em fundamentos da Geometria Euclidiana. A régua e o compasso serão instrumentos de grande importância na construção dos conjuntos numéricos. Partindo das imagens geométricas dos números naturais e das operações entre seus elementos, iremos, gradativamente, construindo o conjunto dos números inteiros e dos racionais. Provaremos a existência de números que não são racionais e uma característica desses números que os livros didáticos, em sua maioria, não abordam: a questão da densidade dos conjuntos dos números racionais e irracionais no conjunto dos reais. A geometria euclidiana como suporte nos números reais facilita o entendimento do aluno e traz dinâmica nas operações entre esses números. Apresentamos também uma possibilidade de continuação da proposta de trabalho.

**Palavras-chave:** Números Reais. Geometria Euclidiana. Régua e Compasso.

## ABSTRACT

This paper aims to show a teaching methodology of real numbers on the grounds of Euclidean geometry. The ruler and compass are instruments of great importance in the construction of numerical sets. Based on the geometric images of the natural numbers and operations between its elements, we will gradually building the set of integers and rational numbers. We prove the existence of numbers that are not rational and a propertie of those numbers that textbooks mostly do not address: the question of density of the sets of rational and irrational in the set of real numbers. Euclidean geometry as real numbers in support facilitates student understanding and produces dynamic operations between these numbers. We also present a possible continuation of the proposed work.

**Key-words:** Real Numbers. Euclidean Geometry. Ruler and Compass.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pontos e retas no plano . . . . .	12
Figura 2 – Posições relativas de ponto e reta . . . . .	12
Figura 3 – Dois pontos determinam uma única reta . . . . .	13
Figura 4 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$ de origem $A$ . . . . .	13
Figura 5 – Círculo de centro $O$ e raio $r$ . . . . .	13
Figura 6 – Elementos de um círculo . . . . .	14
Figura 7 – Regiões convexa (esq.) e não-convexa (dir.) . . . . .	15
Figura 8 – Semiplanos determinados por uma reta. . . . .	15
Figura 9 – Regiões angulares no plano . . . . .	15
Figura 10 – Grau como unidade de medida de ângulos. . . . .	16
Figura 11 – Ângulos agudo, reto e obtuso . . . . .	16
Figura 12 – Ângulos opostos pelo vértice . . . . .	16
Figura 13 – Três pontos não-colineares . . . . .	17
Figura 14 – O triângulo $ABC$ de vértices $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	17
Figura 15 – Dois triângulos congruentes . . . . .	18
Figura 16 – Retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.) . . . . .	19
Figura 17 – A desigualdade do ângulo externo . . . . .	20
Figura 18 – Se $\alpha = \beta$ , então $r$ é paralela a $s$ . . . . .	20
Figura 19 – $\alpha > \beta$ . . . . .	21
Figura 20 – Ângulos alternos internos e colaterais internos . . . . .	21
Figura 21 – Soma dos ângulos internos de um triângulo . . . . .	22
Figura 22 – Triângulo equilátero . . . . .	22
Figura 23 – O teorema do ângulo externo . . . . .	23
Figura 24 – $ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . . . . .	23
Figura 25 – $ABCD$ paralelogramo $\Leftrightarrow M$ é ponto médio de $AC$ e $BD$ . . . . .	24
Figura 26 – Bases médias do triângulo $ABC$ . . . . .	25
Figura 27 – Medida da base média do triângulo . . . . .	25
Figura 28 – Se $M$ é médio e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , então $N$ é médio . . . . .	26
Figura 29 – Dois triângulos semelhantes . . . . .	27
Figura 30 – A reta Real . . . . .	28
Figura 31 – $A$ é a imagem geométrica do natural 2 . . . . .	29
Figura 32 – $B$ é a imagem geométrica do natural 3 . . . . .	29
Figura 33 – $P$ é a imagem geométrica de $n + 1$ . . . . .	30
Figura 34 – Caso $p = 3$ , ou seja, $m = n + 3$ , ou ainda, $m - n = 3$ . . . . .	31
Figura 35 – $P$ é a imagem geométrica de 2 e $Q$ é a imagem geométrica de 7 . . . . .	32
Figura 36 – $Q$ é a imagem geométrica de 7 . . . . .	32
Figura 37 – $J$ é a imagem geométrica de $-1$ . . . . .	33
Figura 38 – Obtenção do ponto $R$ . . . . .	34

Figura 39 – Marcação de $\frac{4}{3}$ , $R$ é a imagem geométrica de $\frac{1}{3}$ e $P$ é a imagem geométrica de $\frac{4}{3}$ . . . . .	35
Figura 40 – Marcação de $-\frac{5}{2}$ , $R$ é a imagem geométrica de $\frac{1}{2}$ , $R'$ é a imagem geométrica de $-\frac{1}{2}$ e $P$ é a imagem geométrica de $-\frac{5}{2}$ . . . . .	35
Figura 41 – Comprimento do segmento $OP$ . . . . .	36
Figura 42 – Triângulo $OIJ$ . . . . .	37
Figura 43 – por construção existe o triângulo retângulo $OPE$ . . . . .	38
Figura 44 – Os pontos $C$ e $P$ da reta real . . . . .	39
Figura 45 – $\overline{OC} = \overline{AB}$ . . . . .	40
Figura 46 – Caso em que $n = 3$ , sendo, então, $Z = \frac{W}{3}$ , $A = 2 \cdot W$ e $B = 3 \cdot W$ . . . . .	41
Figura 47 – $Z$ é a imagem geométrica da adição $X \oplus Y$ . . . . .	42
Figura 48 – Imagem geométrica de $X \oplus Y$ , quando $X \prec O$ e $Y \prec O$ . . . . .	43
Figura 49 – Imagem geométrica de $X \oplus Y$ , quando $X \prec O \prec Y$ e $\overline{OX} < \overline{OY}$ . . . . .	43
Figura 50 – Imagem geométrica de $X \oplus Y$ , quando $X \prec O \prec Y$ e $\overline{OX} > \overline{OY}$ . . . . .	44
Figura 51 – Imagem geométrica de $X \oplus Y$ , quando $X = O$ e $O \prec Y$ . . . . .	44
Figura 52 – $Z$ é a imagem geométrica da subtração $X \ominus Y$ . . . . .	45
Figura 53 – Imagem geométrica de $X \ominus Y$ , quando $O \prec X \prec Y$ . . . . .	45
Figura 54 – Imagem geométrica de $X \ominus Y$ , quando $O \prec X = Y$ . . . . .	46
Figura 55 – Imagem geométrica de $X \ominus Y$ , quando $X \prec Y \prec O$ . . . . .	46
Figura 56 – Imagem geométrica de $X \ominus Y$ , quando $X \prec O \prec Y$ . . . . .	46
Figura 57 – Multiplicação de $X$ por $Y$ . . . . .	47
Figura 58 – Imagem geométrica de $X \otimes Y$ , quando $X \prec O$ e $Y \prec O$ . . . . .	48
Figura 59 – Imagem geométrica de $X \otimes Y$ , quando $X \in \mathfrak{R}^-$ e $Y \in \mathfrak{R}^+$ . . . . .	48
Figura 60 – Imagem geométrica de $X \otimes Y$ , quando $X = O$ e $Y \in \mathfrak{R}$ . . . . .	49
Figura 61 – Imagem geométrica de $X \otimes Y$ , quando $X = I$ e $Y \in \mathfrak{R}$ . . . . .	49
Figura 62 – Imagem geométrica de $Z = I \otimes Y$ . . . . .	50
Figura 63 – Imagem geométrica de $Z = I \otimes Y$ , quando $O \prec Y \prec I$ . . . . .	50
Figura 64 – Imagem geométrica de $Z = I \otimes Y$ , quando $Y \prec O$ . . . . .	51
Figura 65 – Visualização no GeoGebra da imagem geométrica $Z$ do produto $X \otimes Y$ . . . . .	52
Figura 66 – Protocolo de construção da imagem geométrica $Z$ do produto $X \otimes Y$ . . . . .	53

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA</b>	<b>12</b>
2.1	ÂNGULOS . . . . .	14
2.2	TRIÂNGULOS . . . . .	17
2.2.1	<b>Congruência de triângulos</b> . . . . .	18
2.3	PARALELISMO . . . . .	19
2.4	QUADRILÁTERO NOTÁVEL . . . . .	23
2.4.1	<b>Paralelogramo</b> . . . . .	23
2.5	TRIÂNGULO MEDIAL . . . . .	25
2.6	TEOREMA DE THALES . . . . .	26
2.7	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS . . . . .	27
<b>3</b>	<b>PROPOSTA DE ENSINO DE NÚMEROS REAIS . . . . .</b>	<b>28</b>
3.1	MARCAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NA RETA REAL . . . . .	29
3.1.1	<b>Adição entre dois números naturais</b> . . . . .	30
3.2	MARCAÇÃO DOS INTEIROS NA RETA REAL . . . . .	31
3.3	MARCAÇÃO DOS RACIONAIS NA RETA REAL . . . . .	33
3.4	UM PROBLEMA DE MEDIÇÃO . . . . .	36
3.5	DENSIDADE DE $\mathcal{Q}$ EM $\mathcal{R}$ . . . . .	39
3.6	DENSIDADE DE $\mathcal{I}$ EM $\mathcal{R}$ . . . . .	40
3.7	AS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS EM $\mathcal{R}$ . . . . .	42
3.7.1	<b>Adição</b> . . . . .	42
3.7.2	<b>Subtração</b> . . . . .	44
3.7.3	<b>Multiplicação</b> . . . . .	47
3.7.4	<b>Divisão</b> . . . . .	49
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E PROPOSTA DE CONTINUIDADE . . . . .</b>	<b>52</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>54</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, referência [3], alguns dos objetivos no tratamento dos números reais são:

- Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de".
- Reconhecimento dos números inteiros em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e explorações de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.
- Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
- Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações - problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações - problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.
- Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do  $\pi$ , da  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , etc.)
- Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.

Observando a explanação de alguns livros didáticos sobre a evolução dos conjuntos numéricos e as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais vemos que o conteúdo poderia ser trabalhado de forma diferente. Algumas características importantes dos números reais podem ser observadas pelos alunos se usarmos como suporte alguns resultados

da Geometria Euclidiana plana. O uso da régua e compasso trazem dinâmica nas operações entre esses números. Os livros didáticos, em sua maioria, não comentam de tópicos importantes dos números reais como a densidade de  $\mathbb{Q}$  (conjunto dos Racionais) em  $\mathbb{R}$  (conjunto dos Reais) e de  $\mathbb{I}$  (conjunto dos Irracionais) em  $\mathbb{R}$ .

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino de números reais, de maneira construtiva e com bastante uso de resultados da Geometria Euclidiana. Mostraremos uma forma diferente de enunciar os números reais, em que Geometria e Aritmética serão trabalhadas conjuntamente para a apresentação desses números.

No Capítulo 2 será apresentada a teoria de Geometria Euclidiana Plana, com referência na bibliografia [2], que será usada na proposta de Ensino dos Números Reais, no Capítulo 3.

No Capítulo 4 será feita a conclusão do trabalho com uma proposta de continuidade do mesmo.

## 2 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Neste capítulo introduziremos os conceitos da Geometria Euclidiana Plana e notações que serão utilizadas posteriormente, com base na referência bibliográfica [2].

Vamos assumir algumas noções como conhecidas: ponto, reta e plano.

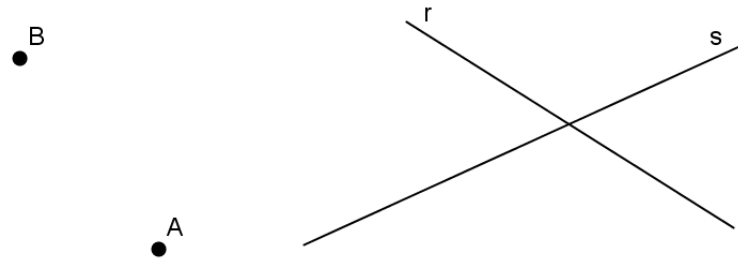


Figura 1 – Pontos e retas no plano

Dados no plano um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , só há duas possibilidades: ou o ponto  $P$  pertence à reta  $r$  ou não; no primeiro caso, escrevemos  $P \in r$  e, no segundo caso, escrevemos  $P \notin r$ .

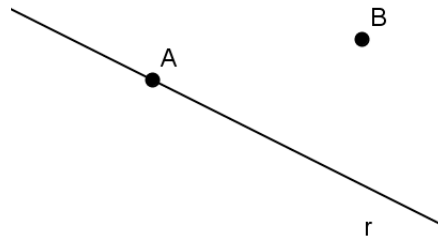


Figura 2 – Posições relativas de ponto e reta

Vemos na Figura 2 que  $A \in r$  e  $B \notin r$ . Por dois pontos  $A$  e  $B$  distintos do plano, podemos traçar uma única reta (veja Figura 3). Nesse caso sendo  $r$  a reta determinada por tais pontos, denotamos  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .

Dados pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ , o segmento  $AB$  é a porção da reta situada de  $A$  a  $B$ . Escrevemos  $\overline{AB}$  para denotar o comprimento do segmento  $AB$ . Para comparar a medida de dois segmentos podemos usar um compasso, trasportando um dos segmentos para a reta determinada pelo outro. É importante desenvolver no aluno habilidade no manuseio com a régua e o compasso, uma vez que esses instrumentos serão trabalhados de forma significativa na construção de números reais.

Um ponto  $A$ , situado sobre uma reta  $r$ , a divide em duas partes, quais sejam, as semirretas de origem  $A$ . Escolhendo pontos  $B$  e  $C$  sobre  $r$ , um em cada um de tais pedaços,

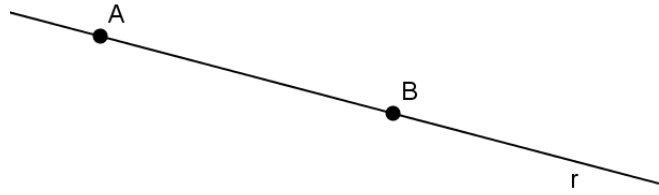


Figura 3 – Dois pontos determinam uma única reta

podemos denotar as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Na Figura 4, mostramos a porção da reta  $r$  correspondente à semirreta  $\overrightarrow{AB}$ .



Figura 4 – Semirreta  $\overrightarrow{AB}$  de origem  $A$

Dados, no plano, os segmentos  $AB$  e  $CD$ , com régua e compasso construímos os segmentos  $EF$  e  $GH$ , tais que  $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$  e  $\overline{GH} = 3 \cdot \overline{AB}$ .

Dados os pontos  $A$  e  $B$  no plano, definimos a distância  $d(A, B)$  entre os mesmos como o comprimento  $\overline{AB}$  do segmento  $AB$ :

$$d(A, B) = \overline{AB}.$$

Além de pontos, retas, segmentos, os círculos serão objetos de muita importância em nosso estudo. Dado um ponto  $O$  e um real  $r > 0$  (comprimento de um segmento), o círculo de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano que estão à mesma distância  $r$  de  $O$ , ou seja,  $\overline{OP} = r$ .

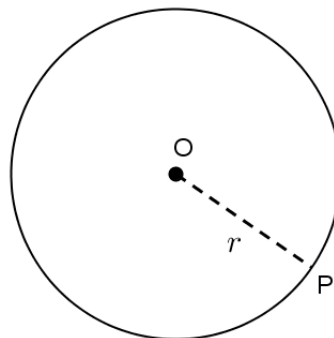


Figura 5 – Círculo de centro  $O$  e raio  $r$

O círculo de  $O$  e raio  $r$  é uma curva plana obtida quando posicionamos a ponta de um compasso no ponto  $O$  e fixamos sua abertura como igual comprimento  $r$ . Dado um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  (Figura 5) também denominamos raio do mesmo a todo segmento que une o centro  $O$  a um de seus pontos: por exemplo,  $OA$ ,  $OB$  e  $OP$  são raios do círculo  $\Gamma$ . Um corda de  $\Gamma$  é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo; um diâmetro de  $\Gamma$  é uma corda que passa por seu centro. Nas notações da Figura 6,  $AB$  e  $CD$  são cordas de  $\Gamma$ , sendo  $AB$  um diâmetro. Todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, denominadas semicírculos.

Podemos ainda perceber que na Figura 6 uma porção do círculo  $\Gamma$  aparece em negrito. Tal porção corresponde a um arco de círculo, que é um pedaço do círculo delimitado por dois de seus pontos. Para evitarmos ambiguidade na definição, falaremos em arco menor ou arco maior  $\widehat{CD}$

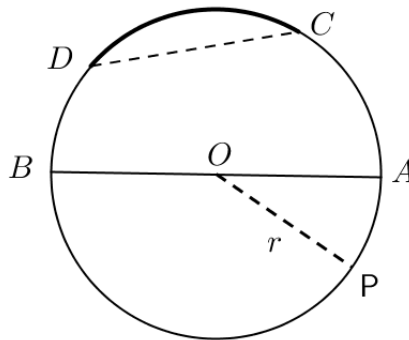


Figura 6 – Elementos de um círculo

## 2.1 ÂNGULOS

**Definição 1.** *Uma região  $R$  do plano é convexa quando, para todos os pontos  $A, B \in R$ , tivermos  $AB \subset R$ . Caso contrário, diremos que  $R$  é uma região não-convexa.*

Uma região  $R$  do plano é convexa quando, para todos os pontos  $A, B \in R$ , tivermos  $AB \subset R$ . Caso contrário, diremos que  $R$  é uma região não-convexa.

Uma reta  $r$  de um plano o divide em duas regiões convexas, os semiplanos delimitados por  $r$ . Dados pontos  $A$  e  $B$ , um em cada um dos semiplanos em que  $r$  divide o plano, tem-se sempre  $AB \cap r \neq \emptyset$ .

**Definição 2.** *Dadas, no plano, duas semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ , um ângulo (ou região circular) de vértice  $O$  e lados  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ .*



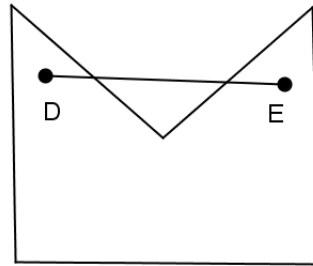
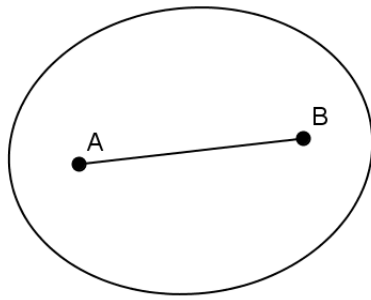


Figura 7 – Regiões convexas (esq.) e não-convexas (dir.)

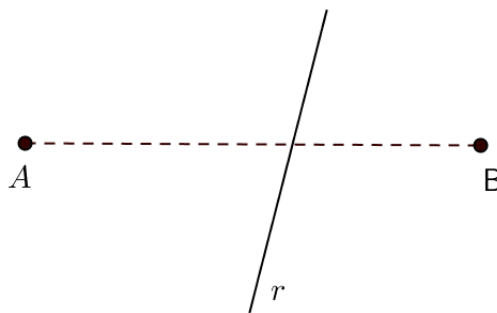


Figura 8 – Semiplanos determinados por uma reta.

Um ângulo pode ser côncavo ou convexo; na Figura 9 abaixo, o ângulo da esquerda é convexo e o da direita é côncavo. A notação para o ângulo de lados  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  será  $\angle AOB$ .

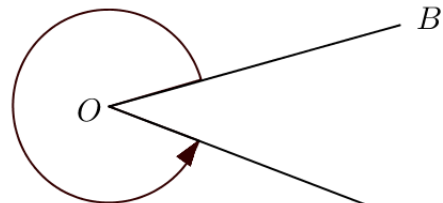
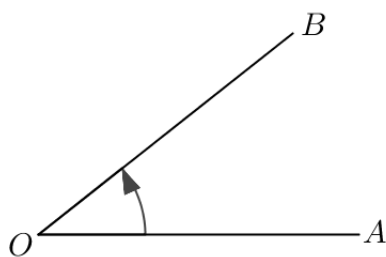


Figura 9 – Regiões angulares no plano

Dividindo um círculo  $\Gamma$  de centro  $O$  em 360 arcos iguais, tomamos pontos  $X$  e  $Y$ , extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida do  $\angle XOY$  é de 1 grau, e denotamos  $1^\circ$ , e escrevemos

$$X\hat{O}Y = 1^\circ.$$

Quando escrevemos  $\angle AOB$ , estaremos nos referindo, a menos que diga o contrário, ao ângulo convexo  $\angle AOB$ , isto é,  $0^\circ < A\hat{O}B \leq 180^\circ$ . Diremos que um ângulo  $\angle AOB$  é

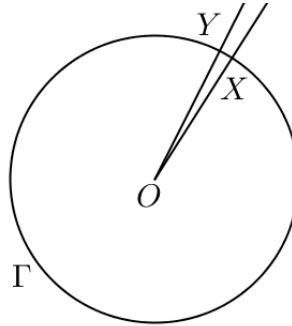


Figura 10 – Grau como unidade de medida de ângulos.

agudo quando  $0^\circ < \widehat{AOB} < 90^\circ$ , reto quando  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  e obtuso quando  $90^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$ . Observe ainda, na Figura 11, a notação especial utilizada para ângulos retos.

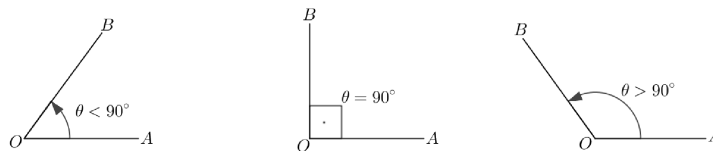


Figura 11 – Ângulos agudo, reto e obtuso

Diremos que dois ângulos são complementares se a soma das medidas dos dois seja  $90^\circ$ . Assim se  $\alpha$  e  $\beta$  são dois ângulos complementares, então  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Ainda nesse caso, dizemos que  $\alpha$  é o complemento de  $\beta$  e vice-versa.

Dois ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle COD$  (de mesmo vértice O) são chamados opostos pelo vértice (abreviamos OPV) se seus lados forem semirretas opostas.

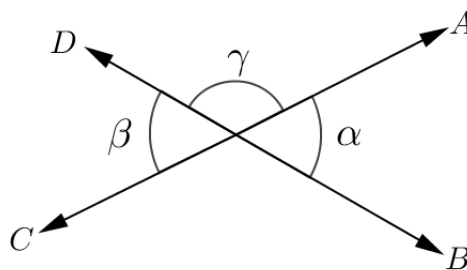


Figura 12 – Ângulos opostos pelo vértice

Os ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle COD$  da Figura 12 são OPV, uma vez que as semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ , bem como as semirretas  $\vec{OB}$  e  $\vec{OD}$ , são respectivamente opostas.

**Proposição 1.** *Dois ângulos OPV são iguais.*

*Demonstração.* Como as semirretas  $\vec{OB}$  e  $\vec{OD}$  são opostas, segue que  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Analogamente para as semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ , ou seja,  $\gamma + \beta = 180^\circ$ . Das duas igualdades, vem que:

$$\alpha + \gamma - (\gamma + \beta) = 180^\circ - 180^\circ \Rightarrow \alpha = \beta \quad \square$$

## 2.2 TRIÂNGULOS

Considere 3 pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do plano. Se  $C$  estiver sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , diremos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares; caso contrário, diremos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são não-colineares (Figura 13).

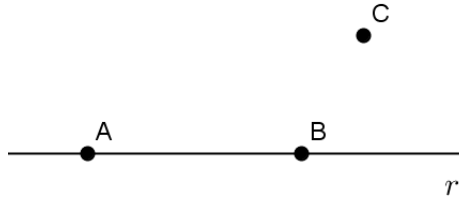


Figura 13 – Três pontos não-colineares

Vemos que três pontos não-colineares formam um triângulo. Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais pontos, diremos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo. Mostraremos, na Figura 14, o triângulo  $ABC$  que tem por vértices os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

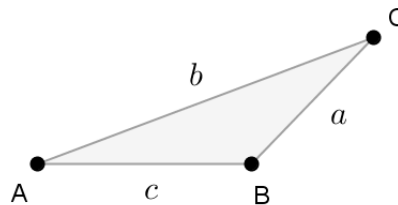


Figura 14 – O triângulo  $ABC$  de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$

Dizemos que os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  são os lados do triângulo; escrevemos  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  para denotar o comprimento dos lados de um triângulo  $ABC$ . A soma dos comprimentos dos lados do triângulo é seu perímetro, que será denotado por  $2p$ ; assim,  $p$  é o semiperímetro do triângulo. Nas notações feitas, temos

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Os ângulos  $\angle A = \angle BAC$ ,  $\angle B = \angle ABC$  e  $\angle C = \angle ACB$  (ou suas medidas  $\hat{A} = \hat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \hat{ABC}$  e  $\hat{C} = \hat{ACB}$ ) são os ângulos internos do triângulo.

Podemos classificar um triângulo com relação aos comprimentos de seus lados ou com relação às medidas de seus ângulos internos. Um triângulo  $ABC$  é denominado:

1. Equilátero, se  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ .

2. Isósceles, se ao menos dois dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  forem iguais.
3. Escaleno, se  $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$ .

Pela definição feita, todo triângulo equilátero é isósceles; porém a recíproca não é verdadeira. Quando  $ABC$  for triângulo isósceles, tal que  $\overline{AB} = \overline{AC}$ , dizemos que o lado  $BC$  é a base do triângulo.

### 2.2.1 Congruência de triângulos

Veremos quais são as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser considerados iguais. Consideremos inicialmente o problema de construir, com régua e compasso, um triângulo equilátero dado um lado. Nesse exemplo, construímos um triângulo tendo certas propriedades pré-estabelecidas. Ao resolvê-lo, aceitamos implicitamente o fato de que só havia, essencialmente, um triângulo satisfazendo as condições; de outro modo, qualquer outro triângulo que tivéssemos construído deveria ser dado como o mesmo do triângulo construído, uma vez que só se diferenciava por sua posição no plano.

Essa é a ideia que identificamos na igualdade de triângulos, que recebe o nome de congruência: dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no plano, sem deformá-lo, até fazer coincidir um com o outro. Logo se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes existe uma correspondência entre os vértices dos mesmos, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como os lados opostos a vértices correspondentes.

A Figura 15 mostra dois triângulos congruentes  $ABC$  e  $A'B'C'$ , com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'.$$

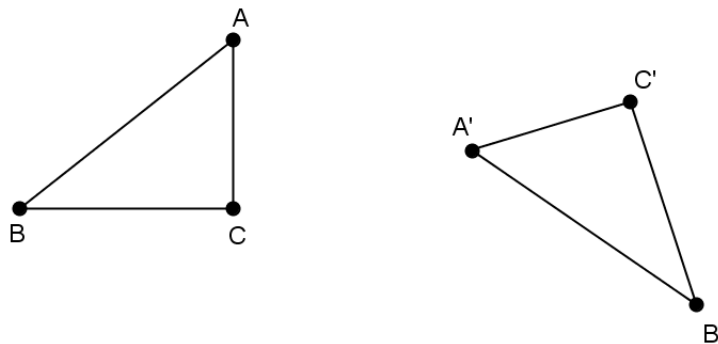


Figura 15 – Dois triângulos congruentes

Temos assim:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B}'; \overline{AC} = \overline{A'C}'; \overline{BC} = \overline{B'C}' \end{cases}$$

Escreveremos

$$ABC \equiv A'B'C'$$

para denotar a congruência entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'.$$

Dispomos de critérios para decidir se dois triângulos são ou não congruentes, que são chamados de casos de congruência de triângulos. Esses casos são tratados do ponto de vista da unicidade das construções com régua e compasso.

1. LAL: se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.
2. ALA: se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes
3. LLL: se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

### 2.3 PARALELISMO

Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um ponto em comum ou não tem nenhum ponto em comum, dizemos, no primeiro caso, que elas são concorrentes e, no segundo, que as retas são paralelas (Figura 16).

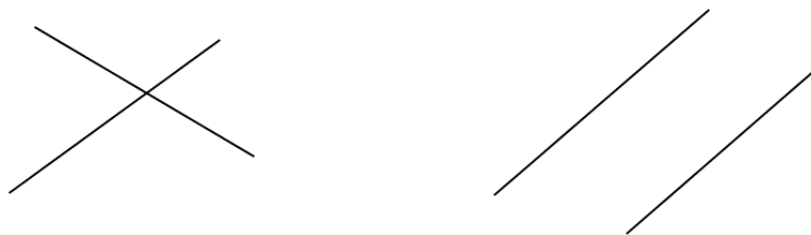


Figura 16 – Retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.)

**Lema 1.** *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a eles.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $M$  o ponto médio do lado  $AC$  (Figura 17). Prolonguemos a semirreta  $\overrightarrow{BM}$  até o ponto  $B'$  tal que  $\overline{BM} = \overline{MB'}$ , e consideremos os triângulos  $ABM$  e  $CB'M$ . Sendo  $M$  ponto médio de  $AC$  e  $MB'$ , temos que  $\overline{AM} = \overline{MC}$ ,

$\overline{BM} = \overline{B'M}$ . Os ângulos  $\widehat{AMB}$  e  $\widehat{B'MC}$  são iguais, pois são opostos pelo vértice. Portanto os triângulos  $AMB$  e  $CMB'$  são congruentes pelo caso LAL. Logo,

$$X\widehat{CA} > B'\widehat{CA} = B\widehat{AM} = B\widehat{AC}.$$

Analogamente, prova-se que  $X\widehat{CA} > A\widehat{BC}$ . □

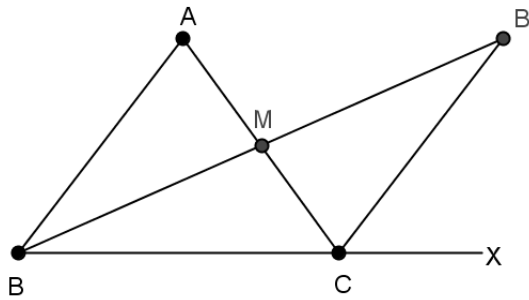


Figura 17 – A desigualdade do ângulo externo

**Lema 2.** *Nas notações da Figura 18, se os ângulos alternos internos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais, então as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.*

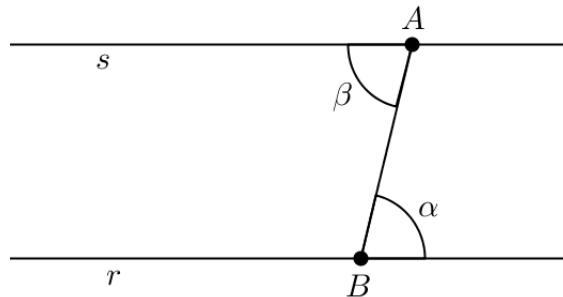


Figura 18 – Se  $\alpha = \beta$ , então  $r$  é paralela a  $s$

*Demonstração.* Vamos supor que as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas. Na Figura 19, conseguimos montar o triângulo  $PAB$  e pelo lema 1, concluímos que  $\alpha > \beta$ . Caso  $P$  esteja a direita de  $B$ , provamos de forma análoga que  $\beta > \alpha$ . □

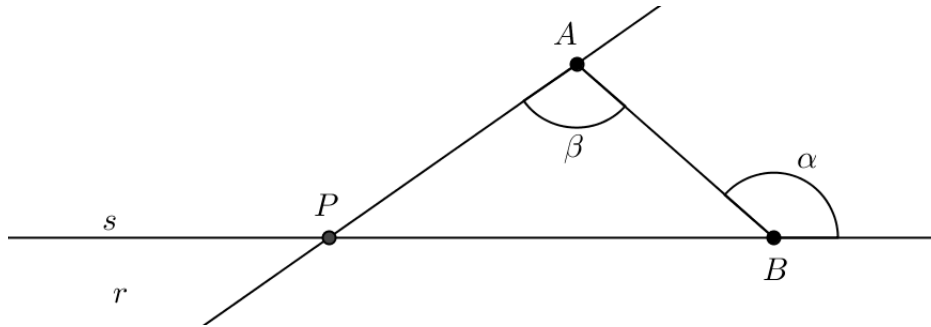


Figura 19 –  $\alpha > \beta$

Podemos agora, com régua e compasso, construir uma reta  $s$ , paralela à reta  $r$  e que passa pelo ponto  $A$ .

Abaixo temos os seguintes passos dessa construção:

1. Tome pontos  $C$  e  $X$  sobre a reta e uma  $A$  a  $C$ .
2. Construa o ângulo  $\angle CAY$ , tal que  $C\hat{A}Y = A\hat{C}X$  e  $X$  e  $Y$  estejam situados em semiplanos opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Pelo lema 2, a reta  $s = \overleftrightarrow{AY}$  é paralela à reta  $r$ .

Euclides impôs a unicidade da paralela a uma reta que passa por determinado ponto como postulado, conhecido em seu livro Elementos, como o quinto postulado de Euclides. Se duas retas  $r$  e  $s$  forem paralelas, escreveremos  $r \parallel s$ .

De posse do quinto postulado, podemos enunciar e provar alguns dos mais importantes resultados da geometria Euclidiana. Primeiramente, supomos dadas no plano três retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , com  $t$  intersectando  $r$  e  $s$  respectivamente nos pontos  $A$  e  $B$ , como mostra a Figura 20. O ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são ditos alternos internos, já os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  são chamados de colaterais internos.

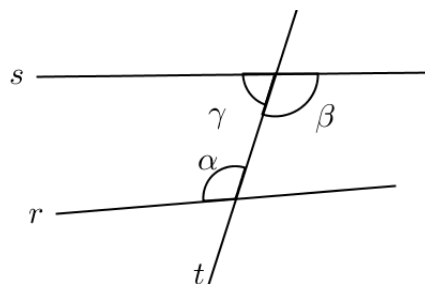


Figura 20 – Ângulos alternos internos e colaterais internos

**Corolário 1.** Nas notações da Figura 20, temos:

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$$

*Demonstração.* Pela figura temos que  $\gamma + \beta = 180^\circ$ , temos  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$ . Basta provar que  $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$ . Provamos que se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são distintos, então as retas  $r$  e  $s$  não podem ser paralelas. Assim a contrapositiva também é uma afirmativa verdadeira, ou seja, se as retas são paralelas, então os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais. Portanto,  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ .  $\square$

**Corolário 2.** A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .

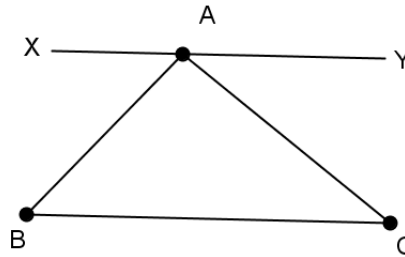


Figura 21 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer (Figura 21), e  $\overleftrightarrow{XY}$  uma reta paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  que passa pelo ponto  $A$ . Pelo Corolário 1 temos que  $\hat{B} = \hat{BAX}$  e  $\hat{C} = \hat{CAY}$ . Assim  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ .  $\square$

**Corolário 3.** Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a  $60^\circ$ .

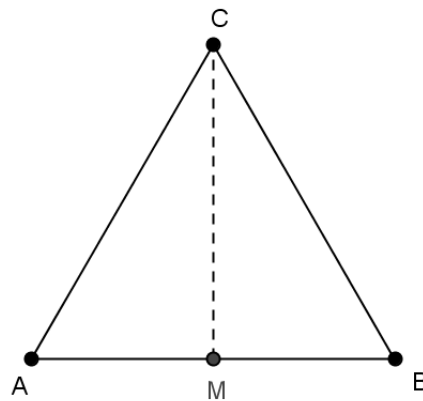


Figura 22 – Triângulo equilátero

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $ABC$  equilátero (Figura 22), e  $M$  o ponto médio do lado  $AB$ . Traçando o segmento  $CM$ , dividimos o triângulo  $ABC$  em dois congruentes:  $AMC$  e  $BMC$ , já que  $\overline{AC} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AM} = \overline{BM}$  e  $CM$  é comum aos dois triângulos. Assim temos que  $\hat{A} = \hat{B}$ ,  $\hat{ACM} = \hat{BCM} = \frac{\hat{C}}{2}$  e  $\hat{AMC} = \hat{BMC} = 90^\circ$ . Sendo  $M'$  o ponto médio do lado  $BC$ , conseguimos mostrar de forma análoga que  $\hat{B} = \hat{C}$ . Portanto  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ . Pelo Corolário 2 temos que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ , ou seja,  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ .  $\square$



**Corolário 4.** *Em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

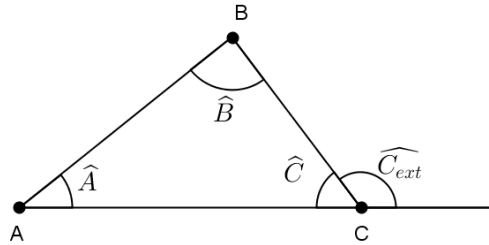


Figura 23 – O teorema do ângulo externo

*Demonstração.* Pela Figura 23 e pelo Corolário 2 temos que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  e  $\hat{C} + \hat{C}_{ext} = 180^\circ$ . Logo  $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_{ext}$ .  $\square$

## 2.4 QUADRILÁTERO NOTÁVEL

### 2.4.1 Paralelogramo

**Definição 3.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir os pares de lados opostos paralelos.*

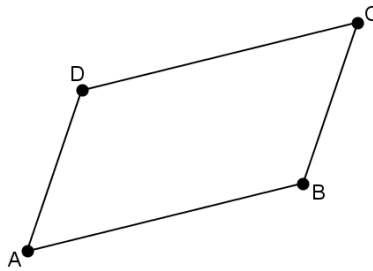


Figura 24 –  $ABCD$  é paralelogramo  $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

**Proposição 2.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos são iguais.*

*Demonstração.* Observando a Figura 24, temos que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são colaterais internos, pois  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , ou seja,  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ . O raciocínio é análogo para os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , já que  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ . Logo  $\hat{A} = \hat{C}$  e  $\hat{B} = \hat{D}$ .  $\square$

Conseguimos também provar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é  $360^\circ$ . Basta traçarmos a diagonal  $AC$ , criando dois triângulos  $ADC$  e  $ABC$ .

Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é  $180^\circ$ , concluímos que a de um quadrilátero convexo é sempre  $360^\circ$ .

Sendo  $\widehat{A} = \widehat{C}$  e  $\widehat{B} = \widehat{D}$ , vem que  $A + B + C + D = 360^\circ$ , ou seja,  $A + B = 180^\circ$ . Esse fato já garante o paralelismo entre as retas  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ . Analogamente para as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ .

**Proposição 3.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

*Demonstração.* Sendo  $ABCD$  um paralelogramo, temos que após traçar a diagonal  $AC$ , criamos dois triângulos  $ADC$  e  $ABC$  congruentes, pois  $\angle CAB = \angle ACD$ ,  $\angle DAC = \angle ACB$  e o segmento  $AC$  é comum aos dois triângulos. Logo  $\overline{AD} = \overline{BC}$  e  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

Reciprocamente, se  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , temos que os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  são congruentes pelo caso LLL. Podemos assim concluir que  $\angle BAC = \angle DCA$ . Logo, pelo Lema 2,  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ . Traçando a outra diagonal  $BD$ , provamos de forma análoga que as retas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  são paralelas. Portanto o quadrilátero é um paralelogramo.  $\square$

**Proposição 4.** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se encontram no ponto médio, aquele que equidista dos extremos.*

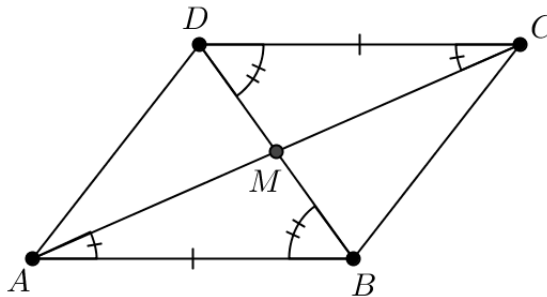


Figura 25 –  $ABCD$  paralelogramo  $\Leftrightarrow M$  é ponto médio de  $AC$  e  $BD$

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um paralelogramo e  $M$  o ponto de interseção das duas diagonais (Figura 25). Como  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  temos que  $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$  e  $\widehat{ABM} = \widehat{CDM}$ . Já provamos na Proposição 3 que  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , ou seja, os triângulos  $ABM$  e  $CDM$  são congruentes pelo caso ALA. Portanto  $\overline{AM} = \overline{CM}$  e  $\overline{BM} = \overline{DM}$ .

Reciprocamente, sendo  $ABCD$  um quadrilátero convexo tal que suas diagonais se intersectam no ponto médio  $M$  de ambas, temos que  $\overline{AM} = \overline{CM}$ ,  $\overline{BM} = \overline{DM}$  e  $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$  (ângulos OPV). Logo os triângulos  $AMB$  e  $CMD$  são congruentes por LAL, ou seja,  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . De forma análoga mostramos que  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Portanto os lados opostos desse quadrilátero possuem mesma medida. Assim, pela Proposição 3, o quadrilátero é um paralelogramo.  $\square$

## 2.5 TRIÂNGULO MEDIAL

Definimos uma base média de um triângulo como o segmento que une os pontos médios de dois de seus lados (segmentos  $MN$ ,  $NP$  e  $MP$  da Figura 26). Assim todo triângulo possui exatamente três bases médias.

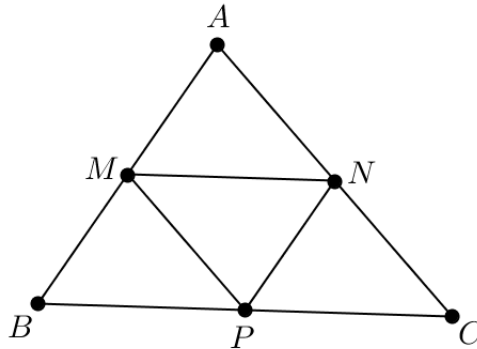


Figura 26 – Bases médias do triângulo  $ABC$

Nas notações da Figura 26 dizemos que o triângulo  $MNP$  é o triângulo medial, ou seja, formado pelas três bases médias do triângulo.

**Proposição 5.** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , então  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralela à  $\overleftrightarrow{BC}$ . Reciprocamente, se traçarmos por  $M$  uma paralela ao lado  $BC$ , então a mesma intersecta  $AC$  em  $N$ , e em qualquer dos dois casos temos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$$

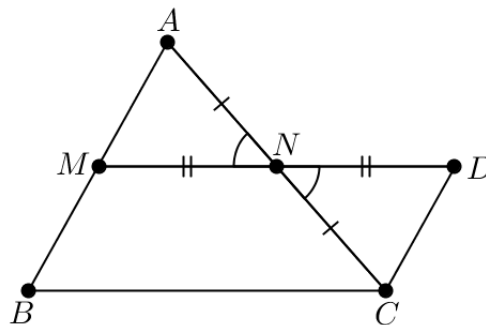


Figura 27 – Medida da base média do triângulo

*Demonstração.* Nas notações da Figura 27, tomemos o ponto  $D$  sobre  $\overleftrightarrow{MN}$  tal que  $\overline{MN} = \overline{ND}$ . Como  $N$  é o ponto médio do lado  $AC$  e  $\angle ANM = \angle CND$  são opostos pelo vértice, vem que os triângulos  $ANM$  e  $CND$  são congruentes por LAL. Portanto

$\overline{DC} = \overline{AM}$  e  $\widehat{DCN} = \widehat{MAN}$ , que nos leva a concluir que as retas  $\overleftrightarrow{DC}$  e  $\overleftrightarrow{AM}$  são paralelas. Assim

$$\overline{BM} = \overline{AM} = \overline{DC} \quad \text{e} \quad \overleftrightarrow{BM} \parallel \overleftrightarrow{DC}$$

Podemos então afirmar que o quadrilátero  $BMCD$  é um paralelogramo, pois sendo  $E$  o ponto de interseção entre os segmentos  $MC$  e  $BD$ , prova-se que os triângulos  $MEB$  e  $CED$  são congruentes pelo caso ALA. De modo análogo conseguimos também mostrar que  $\overline{MD} = \overline{BC}$ , portanto o quadrilátero  $BMCD$  possui os lados opostos com mesma medida, ou seja, é um paralelogramo. Logo  $\overline{BC} = \overline{MD} = 2 \cdot \overline{MN}$ , ou seja,  $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ .

Reciprocamente, sejam  $r$  uma reta passando por  $M$  e paralela ao lado  $BC$ ,  $s$  uma reta paralela ao lado  $AB$  que passa pelo ponto  $C$  e  $D$  o ponto de interseção entre elas. Vamos provar que os triângulos  $AMN$  e  $CDN$  são congruentes. De fato:

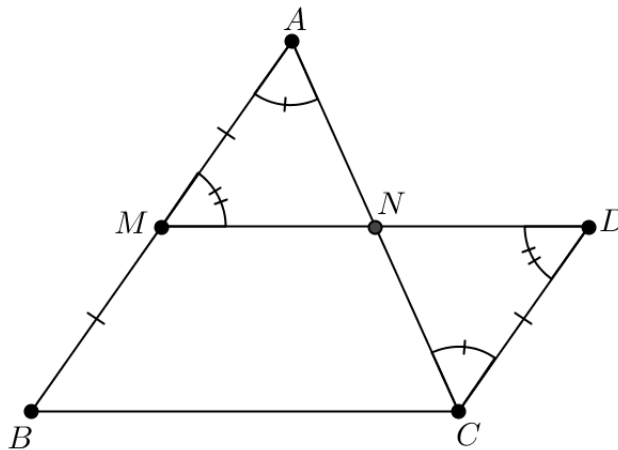


Figura 28 – Se  $M$  é médio e  $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , então  $N$  é médio

$\widehat{NCD} = \widehat{NAM}$  (alternos internos),  $\widehat{NDC} = \widehat{MNA}$  (alternos internos) e  $\overline{CD} = \overline{AM}$  ( $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CD}$ , já que  $BMCD$  é paralelogramo). Assim tais triângulos são congruentes pelo caso ALA. Logo  $\overline{AN} = \overline{NC}$ , ou seja,  $N$  é o ponto médio do lado  $AC$ .  $\square$

## 2.6 TEOREMA DE THALES

Considere no plano retas paralelas  $r$ ,  $s$  e  $t$  e transversais  $u$  e  $u'$ , a primeira intersectando  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e a segunda intersectando  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

A demonstração desse teorema se encontra nas páginas 154, 155 e 156 da bibliografia [2]

## 2.7 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando possuem três ângulos internos com a mesma medida.

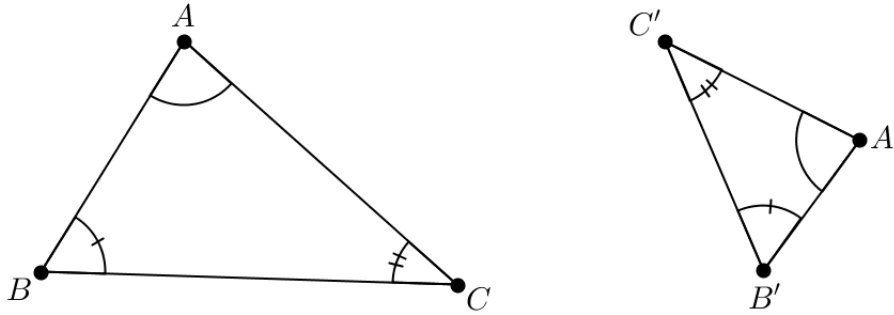


Figura 29 – Dois triângulos semelhantes

Na Figura 29 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \longleftrightarrow A'$ ,  $B \longleftrightarrow B'$ ,  $C \longleftrightarrow C'$ .

**Proposição 6.** *Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  são dois triângulos semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \longleftrightarrow A'$ ,  $B \longleftrightarrow B'$ ,  $C \longleftrightarrow C'$ , então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

em que o número real positivo  $k$  é chamado de razão de semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ .

A demonstração dessa proposição se encontra da página 164 à 168 da bibliografia [2]

### 3 PROPOSTA DE ENSINO DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo iremos, usando as ferramentas expostas anteriormente e a referência [1], propor uma metodologia para trabalhar com os números reais. Com base em caracteres geométricos mostraremos como algumas características desses números ficam mais evidentes quando usamos a Geometria como suporte.

Considere a reta abaixo como sendo a reta Real, indicada por  $\mathfrak{R}$ , onde foram marcados dois pontos distintos que denotaremos por  $O$  e  $I$ . Uma representação gráfica será:



Figura 30 – A reta Real

A letra  $O$  será a imagem geométrica do número real 0 e a letra  $I$  será a imagem geométrica do número real 1. Uma reta pode ser percorrida em dois sentidos, convecionaremos como positivo o sentido de  $O$  para  $I$ .

Dados dois pontos distintos  $X$  e  $Y$  na reta real, escreveremos:

- $X \prec Y$  se  $X$  precede  $Y$  e é distinto de  $Y$ , ou seja,  $X$  está à esquerda de  $Y$ .
- $X = Y$  para dizer que  $X$  e  $Y$  representam o mesmo ponto na reta Real.

O símbolo  $\preceq$  colocado entre dois pontos da reta Real significa

$$X \preceq Y \quad \text{se} \quad X \prec Y \quad \text{ou} \quad X = Y.$$

Geometricamente são evidentes as seguintes propriedades da relação  $\preceq$ :

- $\forall X \in \mathfrak{R}, \quad X \preceq X;$
- $\forall X, Y \in \mathfrak{R}, \quad X \preceq Y \wedge Y \preceq X \Rightarrow X = Y;$
- $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{R}, \quad X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z.$

Dados  $X$  e  $Y$  dois pontos de  $\mathfrak{R}$ , é verdadeira uma e somente uma das seguintes afirmações:

- $X \prec Y;$

- $X = Y$ ;
- $Y \prec X$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{R}^+$  o conjunto dos pontos  $X$  da reta Real tais que  $0 \prec X$ . A esse conjunto chamaremos a semirreta real positiva. O conjunto  $\mathfrak{R}^-$  será o conjunto formado pelos pontos  $X$  da reta Real tais que  $X \prec 0$ , e chamaremos de semirreta real negativa.

### 3.1 MARCAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NA RETA REAL

Começemos marcando, na reta Real, os números naturais. Já dissemos anteriormente que o ponto  $I$  será a imagem geométrica do número natural 1. Para marcar o número 2 basta centralizar o compasso no ponto  $I$  e construir uma circunferência de raio  $OI$ . O ponto  $A$  obtido na Figura 31, da interseção da circunferência com a reta Real, é a imagem geométrica do número natural 2.

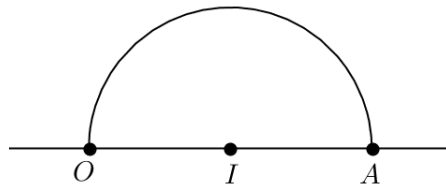


Figura 31 –  $A$  é a imagem geométrica do natural 2

Para construir a imagem geométrica do natural 3 basta repetir a construção anterior, porém centrado o compasso no ponto  $A$ , obtendo assim o ponto  $B$ .

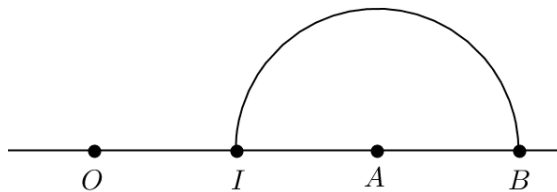


Figura 32 –  $B$  é a imagem geométrica do natural 3

Prosseguindo com esse processo, marcamos sucessivamente os números naturais.

Se  $M$  é a imagem geométrica do natural  $m$  e  $N$  é a imagem geométrica do natural  $n$  que o segue ( $n = m + 1$ ), então o ponto  $P$  da reta Real é a imagem geométrica do número natural que se segue a  $n$ , ou seja, de  $n + 1$  (Figura 33).

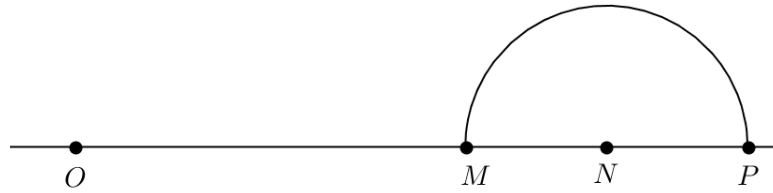


Figura 33 –  $P$  é a imagem geométrica de  $n + 1$

Assim, o processo gerador dos números naturais que (intuitivamente) consiste em dizer que

*1 é um número natural e que todos os outros se obtêm deste por sucessivas adições da unidade*

tem sua interpretação geométrica da seguinte forma

*$I$  é a imagem geométrica de 1 e todas as outras imagens geométricas de números naturais obtêm-se desta por sucessivas aplicações do processo considerado na figura anterior (ao qual damos o nome de processo elementar).*

Será denotado por  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números Naturais e por  $\mathcal{N}$  o conjunto de suas imagens geométricas.

Assim, o conjunto  $\mathcal{N}$  pode ser definido como o conjunto de pontos  $x$  de  $\mathfrak{R}$  que são imagens geométricas dos elementos de  $\mathbb{N}$ , ou pode ser definido da seguinte forma:

- $I \in \mathcal{N}$ ;
- dado  $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \in \mathcal{N}$  então ou  $x = I$  ou  $x$  pode ser obtido de  $I$  por um conjunto finito de aplicações sucessivas do processo elementar.

Define-se assim o conjunto  $\mathcal{N}$  em termos puramente geométricos.

### 3.1.1 Adição entre dois números naturais

Sejam  $m$  e  $n$  dois números naturais, e  $M$  e  $N$  suas imagens geométricas, respectivamente. Como representaremos geometricamente  $m + n$  ?

Sendo  $M$  a imagem geométrica de  $m$ , para obter o ponto  $P$  correspondente a  $m + n$ , basta tomar o ponto  $M$  e utilizar  $n$  vezes o processo elementar. Logo a soma de dois números naturais pode ser interpretada geometricamente.

A construção foi feita de modo que seja satisfeita, por exemplo,  $m + 3 = m + (1 + 1 + 1) = [(m + 1) + 1] + 1$ .

Escreveremos  $P = M \oplus N$  para distinguir a adição em  $\mathcal{N}$  da operação análoga em  $\mathbb{N}$ .



Da maneira como foram obtidas as imagens geométricas de  $M$ ,  $N$ ,  $M \oplus N$  e  $N \oplus M$ , obtemos que  $M \oplus N$  e  $N \oplus M$  representam o mesmo ponto na reta Real. Assim vale a seguinte proposição.

**Proposição 7.**  $M \oplus N = N \oplus M$  para todos  $M, N, P \in \mathcal{N}$ .

De forma análoga também vale a seguinte proposição.

**Proposição 8.**  $(M \oplus N) \oplus P = M \oplus (N \oplus P)$  para todos  $M, N \in \mathcal{N}$ .

### 3.2 MARCAÇÃO DOS INTEIROS NA RETA REAL

O conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  surge para que se possa definir a operação de subtração de um número natural  $m$  por um número natural  $n$ . Dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , a subtração de  $m$  por  $n$ , indicada por  $m - n$ , é o único número natural  $p$  tal que  $m = n + p$ .

Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , existirá pelo menos um  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + p$ ? Mesmo que exista tal  $p$ , ele é único?

Usando a representação geométrica dos números naturais, vamos mostrar que as duas perguntas são verdadeiras.

Sendo  $M$  e  $N$  as imagens geométricas de  $m$  e  $n$ , respectivamente, e suponhamos  $N \prec M$ .  $N$  obtém-se de  $I$  utilizando-se  $(n - 1)$  vezes o processo elementar, o mesmo acontece com  $M$ , utilizando-se  $(m - 1)$  vezes o processo elementar. Logo podemos afirmar que após um número finito de passos, alcançamos o ponto  $M$ , depois de atingido o ponto  $N$ . É também evidente que atingido esse ponto  $M$ , quaisquer novas utilizações do processo elementar conduzem a um ponto  $Q$  tais que  $M \prec Q$ .

Assim, sendo  $p$  o número de vezes que utilizamos o processo elementar para atingir o ponto  $M$  partindo-se de  $N$ , tem-se  $N \oplus P = M$ .

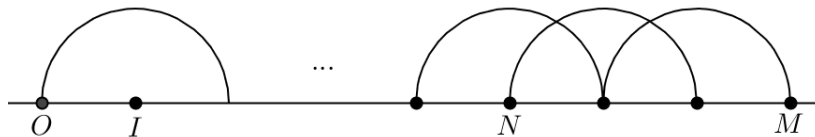


Figura 34 – Caso  $p = 3$ , ou seja,  $m = n + 3$ , ou ainda,  $m - n = 3$

Sendo  $m, n \in \mathbb{N}$ , suas imagens geométricas  $M$  e  $N$  de  $\mathcal{N}$ , respectivamente, definimos:

- $n < m$ , quando  $N \prec M$

- $n = m$ , quando  $N = M$
- $n > m$ , quando  $M \prec N$
- $n \leq m$ , quando  $N \preceq M$
- $n \geq m$ , quando  $M \preceq N$

Conclui-se daí que a subtração  $m - n$  é única em  $\mathbb{N}$ , se  $n < m$ . Se  $m = n$ , um argumento semelhante à prova da unicidade, mostra que a subtração é impossível nesse caso.

Pelo que foi construído, para calcular  $7 - 2$  basta contar o número de processos elementares que, partindo da imagem geométrica de 2, atingem a imagem geométrica de 7.

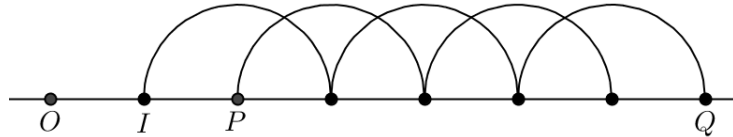


Figura 35 –  $P$  é a imagem geométrica de 2 e  $Q$  é a imagem geométrica de 7

Assim  $7 - 2 = 5$ . Note que o resultado da subtração é o número de processos elementares que se utilizam para, partindo de  $P$ , atingir o ponto  $Q$ .

Utilizando o mesmo exemplo, vamos indicar um outro processo geométrico que nos permite obter o mesmo resultado. Partiremos agora do ponto  $Q$  e utilizaremos o processo elementar no sentido inverso.

Começando no ponto  $Q$ , utilizamos 2 vezes o processo elementar (com sentido de processo inverso) o que determina um ponto  $S$  da reta real.

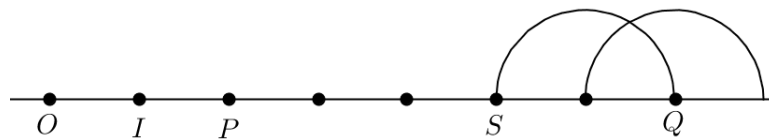


Figura 36 –  $Q$  é a imagem geométrica de 7

O resultado da subtração é, então, o único número natural (5), cuja imagem geométrica é  $S$ . Logo os dois processos são equivalentes sempre que pretendemos fazer a subtração de  $m$  por  $n$ , com  $n < m$ .

Esta segunda ideia para obter o resultado da subtração contém o processo gerador da imagem geométrica dos números inteiros não naturais.

Consideremos a subtração de 2 por 2, que sabemos não ser um número natural. Se utilizarmos o segundo processo, obtemos o ponto  $O$  que corresponde ao número 0. Toda

subtração do tipo  $m - m$  conduz à imagem do 0, ou seja, ao ponto  $O$ . Seja  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  (bem como  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{O\}$ ), no qual a subtração de  $m$  por  $n$  é válida para  $n \leq m$ .

Consideremos agora, a subtração de 1 por 2. Uma aplicação do processo anterior nos leva ao ponto  $J$ , a que chamaremos a imagem geométrica de  $-1$ .

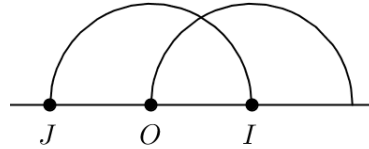


Figura 37 –  $J$  é a imagem geométrica de  $-1$

O ponto  $J$  possui mesma distância de  $O$  do que o ponto  $I$ . Assim tem um papel semelhante em  $\mathfrak{R}^-$ , ao que  $I$  tinha em  $\mathfrak{R}^+$ .

Aplicando, em  $\mathfrak{R}^-$ , o processo elementar sucessivamente, no sentido inverso (de  $O$  para  $J$ ), obtemos um conjunto que designaremos por  $-\mathcal{N}$ .

Denomina-se  $\mathcal{Z} = -\mathcal{N} \cup \{O\} \cup \mathcal{N}$ , a imagem geométrica de  $\mathbb{Z}$ , onde se encontram todas as imagens geométricas de  $m - n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), quer  $m$  seja maior que  $n$ , igual a  $n$  ou menor que  $n$ .

### 3.3 MARCAÇÃO DOS RACIONAIS NA RETA REAL

O conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ ) surge para que se possa definir a operação de divisão de um número inteiro  $m$ , por outro inteiro  $n$ , diferente de 0.

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $n$  divide  $m$ , se existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n \cdot q$ . Quando  $n$  divide  $m$  escrevemos  $n|m$ .

Como sabemos, em alguns casos a divisão de  $m$  por  $n$  é um número natural, por exemplo, na divisão de 4 por 2, 15 por 5. Mas, em vários outros, a divisão não é um número natural, por exemplo, na divisão de 1 por 3.

Uma interpretação geométrica esclarece a resolução desse problema.

Dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , pensemos em dar significado geométrico para a fração  $\frac{m}{n}$ . Introduziremos, inicialmente, as imagens geométricas dos números da forma  $\frac{1}{n}$ . Na construção que faremos de  $\frac{m}{n}$  ressaltamos que se pretende que  $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$ .

A representação geométrica de  $\frac{1}{n}$  está relacionada em dividir o segmento  $OI$  em  $n$  segmentos de mesmo comprimento. Já foi apresentado na Seção 2.3 o método de construção da paralela a uma reta dada que passa por determinado ponto fora dela.

Para simplificar a exposição, vamos descrever um processo para se determinar a imagem geométrica do número racional  $\frac{1}{4}$ .

Vamos começar por marcar na reta real os pontos  $A, B$  e  $C$ , imagens geométricas dos naturais 2, 3 e 4, respectivamente. Consideremos uma outra reta  $s$ , que passa pelo ponto  $O$  e não coincide com a reta real. Nela, marcamos os pontos  $A', B'$  e  $C'$ , interseções dessa reta com as circunferências de centro em  $O$ , e raios  $\overline{OA}, \overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ .

Com a régua, traçamos o segmento  $IB'$  e fazemos passar por  $I'$  uma reta  $l$  paralela à  $\overleftrightarrow{IB'}$ . Seja  $R$  o ponto de interseção da reta real com  $l$ .

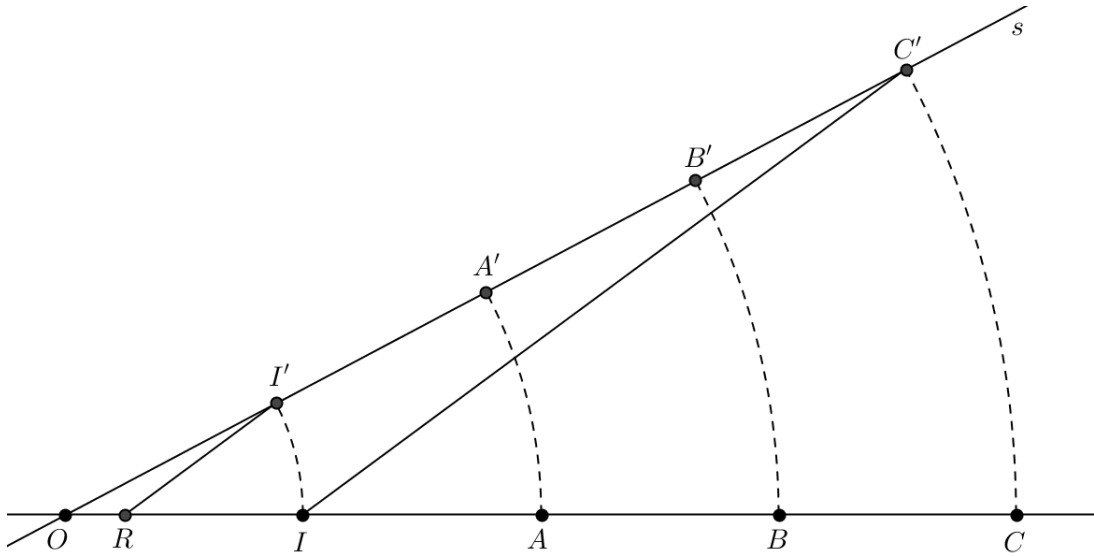


Figura 38 – Obtenção do ponto  $R$

Usando o teorema de Thales, temos:

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OC'}} \Rightarrow \frac{\overline{OR}}{1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{OR} = \frac{1}{4}.$$

Logo o ponto  $R$  é a imagem geométrica do número racional  $\frac{1}{4}$ .

Assim como marcamos  $\frac{1}{4}$ , poderíamos ter marcado as imagens geométricas de  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$ , e vários outros.

Tendo obtido a imagem geométrica dos números da forma  $\frac{1}{n}$ , para marcar na reta real os números da forma  $\frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$  usamos o compasso ( $m - 1$ ) vezes, sucessivamente, como fizemos com o processo elementar para a marcação do produto entre números naturais. Para marcação dos números da forma  $\frac{m}{n}$  (com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ) recorremos ao mesmo argumento da marcação dos números inteiros, conforme ilustram as Figuras 39 e 40 a seguir, que determinam as imagens geométricas de  $\frac{4}{3}$  e  $-\frac{5}{2}$ , respectivamente.

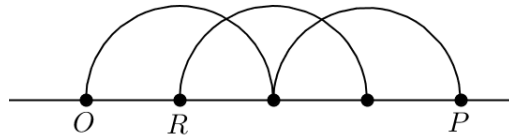


Figura 39 – Marcação de  $\frac{4}{3}$ ,  $R$  é a imagem geométrica de  $\frac{1}{3}$  e  $P$  é a imagem geométrica de  $\frac{4}{3}$ .

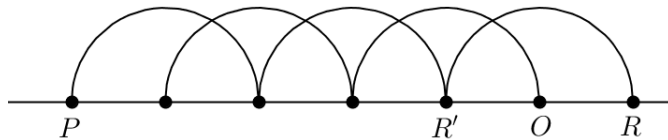


Figura 40 – Marcação de  $-\frac{5}{2}$ ,  $R$  é a imagem geométrica de  $\frac{1}{2}$ ,  $R'$  é a imagem geométrica de  $-\frac{1}{2}$  e  $P$  é a imagem geométrica de  $-\frac{5}{2}$ .

Denotaremos por  $\mathcal{Q}$  o conjunto de pontos da reta real que são imagens geométricas de números racionais.

### 3.4 UM PROBLEMA DE MEDIÇÃO

Marquemos na semirreta positiva um ponto  $P$  e procuremos medir o comprimento do segmento  $OP$  utilizando a régua.

Para medir o comprimento de  $OP$  fazemos coincidir o ponto  $O$  da régua com o ponto  $O$  da reta real e observemos a posição do ponto  $I$ . Se  $P \prec I$  então não conseguimos, com esta régua, determinar o comprimento de  $OP$ . Se  $I$  coincidir com  $P$ , então  $\overline{OP} = 1$ . Se  $I \prec P$  então deslocamos a reta fazendo coincidir o ponto  $O$  da régua com o ponto  $O$  de  $I$  da reta real, e somente uma das três situações pode acontecer:

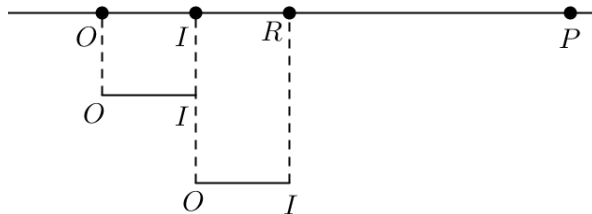


Figura 41 – Comprimento do segmento  $OP$

- Se  $P \prec R$ , então não podemos medir, com esta régua, o comprimento de  $OP$ ;
- Se  $R = P$ , então a medida de  $OP$  é 2 (2 é o número de vezes que utilizamos a régua);
- Se  $R \prec P$ , então temos que repetir o processo novamente com nossa régua.

Repetindo este processo concluímos que: ou a régua, após  $n$  utilizações, faz coincidir o ponto  $I$  com o ponto  $P$ , ou seja, o comprimento de  $OP$  é  $n$ , ou tal não acontece e, ao fim de um certo número de utilizações, o ponto  $I$  da régua ultrapassa o ponto  $P$  da reta real. Neste caso, podemos dizer que, com esta régua, não conseguimos medir o comprimento de  $OP$ . É o que acontece com as imagens geométricas de, por exemplo,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{7}{4}$ , dentre infinitos outros.

Uma ideia para vencer esse obstáculo é utilizar uma régua com mais divisões da unidade. Considere o ponto  $D$  da reta real imagem geométrica de  $\frac{1}{2}$ , facilmente se verifica que a imagem geométrica de  $\frac{5}{2}$  se obtém após 5 utilizações da "sub-régua"  $OD$ .

Mas esta régua não permite medir a imagem geométrica de  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{7}$ , dentre infinitos outros.

Teremos então que dividir o segmento  $OI$  em um número de partes iguais cada vez maiores.

Surge assim a seguinte questão:

Dado um ponto  $P$  da semirreta positiva, existirá alguma divisão do segmento  $OI$  num número finito de partes iguais, tal que uma destas partes caiba um número finito de vezes no segmento  $OP$  ?

Esta pergunta é equivalente à seguinte:

Será que dado um ponto  $X \in \mathfrak{R}$ , ele é imagem geométrica de um número racional?

Veremos que não.

Consideremos a reta real  $\mathfrak{R}$ . Tomando o segmento  $OI$  como cateto, construímos um triângulo retângulo isósceles  $OIJ$ , em que  $IJ$  é o outro cateto, como se ilustra na Figura 42:

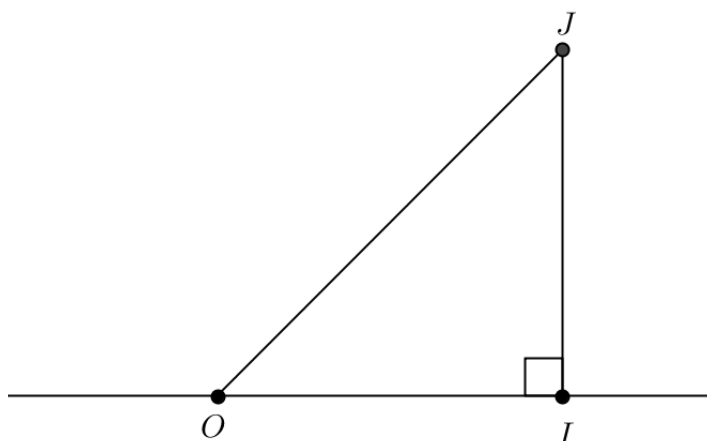


Figura 42 – Triângulo  $OIJ$

Suponhamos que a medida de  $OJ$  seja um número racional, ou seja,  $\overline{OJ} = \frac{m}{n}$ . Já vimos na Seção 2.7 que se multiplicarmos cada lado do triângulo  $OIJ$  por uma constante obtemos um triângulo semelhante ao primeiro. Escolhendo essa constante igual ao número natural  $n$ , obtemos o triângulo retângulo  $O'I'J'$  cujos lados têm medidas naturais  $n$ ,  $n$  e  $m$ .

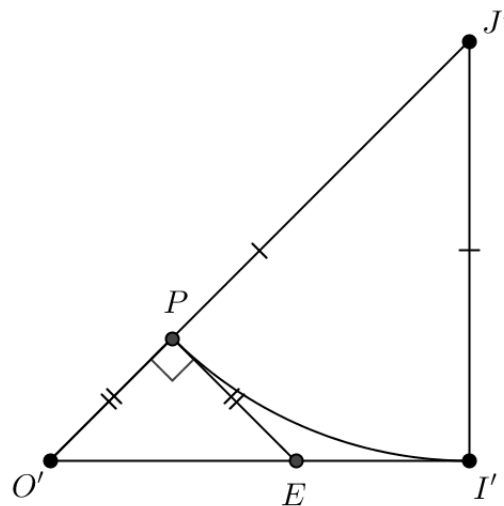


Figura 43 – por construção existe o triângulo retângulo  $OPE$

Traçando uma circunferência de centro  $J'$  e raio  $\overline{I'J'} = n$ , obtemos o ponto  $P$ . Construindo a perpendicular ao lado  $O'J'$  que passa pelo ponto  $P$ , obtemos o ponto  $E$ . Sendo assim, dado um triângulo retângulo isósceles, e com a construção feita anteriormente, obtemos um outro triângulo retângulo isósceles, porém com lados de medidas menores do que aquele que o originou.

Observemos que

$$\overline{OP} = \overline{O'J'} - \overline{I'J'} = m - n \in \mathbb{N}.$$

Esse processo é infinito, ou seja, dado um triângulo retângulo isósceles, e realizando a construção, conseguimos obter outro semelhante.

As medidas dos catetos desses triângulos retângulos obtidos pelas construções formam uma sequência de números naturais decrescente, porém essa sequência é finita. Chegamos assim a uma contradição.

Logo a medida do lado  $OJ$  não pode ser um número racional.

Usando o teorema de Pitágoras, na Figura 42, temos que

$$\overline{OJ}^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Definimos  $\overline{OJ} = \sqrt{2}$ . O número  $\sqrt{2}$  será chamado de um número irracional, ou seja, não existem  $m, n \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

No início do trabalho com o conjunto dos números Irracionais ( $\mathbb{I}$ ) os alunos têm certa ideia que esse conjunto tem poucos elementos, já que foi bem trabalhoso a demonstração que o número  $\sqrt{2}$  é irracional.

Na realidade, existem muito mais irracionais do que racionais. Um detalhe pode ser confuso para o aluno nessa fase inicial: o conjunto dos pontos correspondentes aos



números racionais é infinito, e se existem mais irracionais do que racionais, como um conjunto pode ser menos infinito do que o outro?

Utilizando definições apropriadas pode-se demonstrar que o "infinito do conjunto dos racionais" é o "menor dos infinitos". Mas este não é um dos objetivos do presente trabalho.

### 3.5 DENSIDADE DE $\mathcal{Q}$ EM $\mathcal{R}$

Vamos provar que entre dois números reais distintos (por mais próximos que estiverem) existem sempre infinitos números racionais, ou seja, os números racionais estão bem distribuídos na reta real.

**Proposição 9.** *Se  $C \in \mathfrak{R}^+$  então existe  $R \in \mathcal{Q}$  tal que  $0 \prec R \prec C$*

*Demonstração.* Se  $I \preceq C$ , podemos considerar  $R$  a imagem geométrica de  $\frac{1}{2}$ . Supondo  $C \prec I$ .

Geometricamente, vemos que, após um determinado número suficiente de utilizações do processo ilustrado na Figura 44 obtemos um ponto  $P$  tal que  $I \prec P$ .

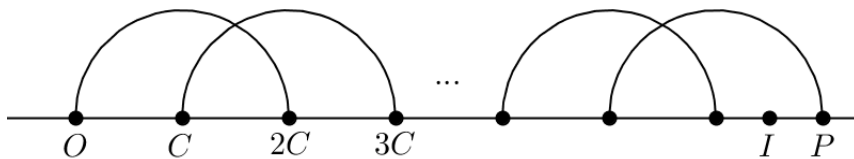


Figura 44 – Os pontos  $C$  e  $P$  da reta real

Seja  $m$  o número de utilizações do compasso que conduz a um ponto  $P$  tal que  $I \prec P$ , e tomemos  $R$  a imagem geométrica do número racional  $\frac{1}{m+1}$ .

Como  $R$  é a imagem geométrica de  $\frac{1}{m+1}$ , após  $m$  utilizações do processo ilustrado na Figura 44, obtemos o ponto  $I$ .

Podemos assim afirmar que o raio  $OR$  é menor do que o raio  $OC$ , pois o número de passos utilizados é o mesmo, porém um conduz ao ponto  $I$ , e o outro conduz ao ponto  $P$ , que sucede  $I$  por hipótese. Logo  $R \prec C$ .  $\square$

Na proposição seguinte provaremos que o mesmo acontece em qualquer segmento  $AB$  ( $A, B \in \mathfrak{R}^+$ , com  $A \prec B$ ).

**Proposição 10.** *Seja  $A$  e  $B$  dois pontos da semirreta real positiva (com  $A \prec B$ ), existe  $R \in \mathcal{Q}$  tal que  $A \prec R \prec B$ .*

*Demonstração.* Seja  $C$  o único ponto da semirreta real positiva tal que  $OC$  tem o comprimento igual ao de  $AB$ , como ilustra a Figura 45:

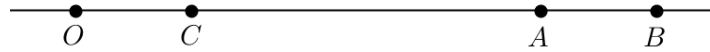


Figura 45 –  $\overline{OC} = \overline{AB}$

Pela Proposição 9 sabemos que existe  $P \in \mathcal{Q}$  tal que  $O \prec P \prec C$ . Aplicamos agora o processo elementar sobre o ponto  $P$ . Designemos por  $m$  o menor número de utilizações do processo elementar que conduza a um ponto  $R$ , com  $A \prec R$ . Nosso objetivo é mostrar que  $R \prec B$ .

Utilizando o processo elementar  $(m - 1)$  vezes, chegamos em um ponto  $L \prec A$ . Como  $\overline{LR} = \overline{OP} < \overline{OC} = \overline{AB}$ , temos que o ponto  $R$  satisfaz  $A \prec R \prec B$ .  $\square$

Na proposição seguinte mostraremos que esse raciocínio é válido  $\forall A, B \in \mathfrak{R}$ , com  $A \prec B$ .

**Proposição 11.** *Seja  $A$  e  $B$  dois pontos da reta real (com  $A \prec B$ ), existe  $R \in \mathcal{Q}$  tal que  $A \prec R \prec B$ .*

*Demonstração.* Se  $A$  e  $B$  pertencem à semirreta real positiva, a demonstração já foi feita. Se  $A \prec O \prec B$ , podemos considerar  $R = O$ . Se  $A \prec B \prec O$ , a demonstração é feita de forma análoga quando  $A$  e  $B$  pertencem à semirreta real positiva, a diferença é que será percorrido o sentido negativo.  $\square$

**Proposição 12.** *Seja  $A$  e  $B$  dois pontos da reta real (com  $A \prec B$ ), o conjunto  $\{R \in \mathcal{Q}: A \prec R \prec B\}$  é infinito.*

*Demonstração.* Pela proposição 11 temos que existe  $R \in \mathcal{Q}$  tal que  $A \prec R \prec B$ . Como  $A$  e  $R$  são reais, existe uma imagem geométrica  $R'$ , de um número racional, que satisfaz  $A \prec R' \prec R$ . Tomando agora os reais  $A$  e  $R'$ , provamos que existe  $R'' \in \mathcal{Q}$  tal que  $A \prec R'' \prec R'$ . Prosseguindo com esse raciocínio conseguimos demonstrar que existem infinitos racionais entre dois reais.  $\square$

### 3.6 DENSIDADE DE $\mathcal{I}$ EM $\mathcal{R}$

Vamos mostrar que os irracionais também estão muito bem distribuídos na reta real.

Seja  $y$  um número irracional e  $m$  um número natural maior que 1. Sabemos que o número real  $m \cdot y$  se obtém através de de  $(m - 1)$  utilizações do processo elementar.

Consideremos  $W$  a imagem de um irracional e  $n \in \mathbb{N}$ . Para definir  $\frac{W}{n}$ , utilizamos o mesmo processo que foi usado para determinar a imagem geométrica de  $\frac{1}{n}$ . A Figura 46 sugere o processo de construção de  $\frac{W}{n}$  (o ponto  $Z$ ). Se  $X = \frac{m \cdot W}{n}$ , então:

$$n \cdot X = n \cdot \frac{m \cdot W}{n} \Rightarrow n \cdot X = m \cdot W \Rightarrow \frac{n \cdot X}{m} = \frac{m \cdot W}{m} \Rightarrow \frac{n \cdot X}{m} = W$$

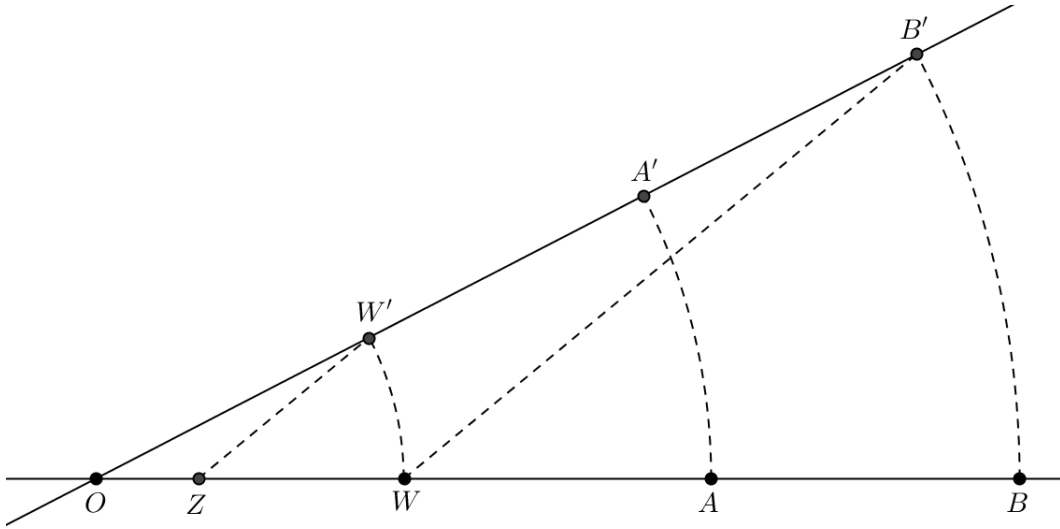


Figura 46 – Caso em que  $n = 3$ , sendo, então,  $Z = \frac{W}{3}$ ,  $A = 2 \cdot W$  e  $B = 3 \cdot W$

Assim sendo  $X$  um número irracional e  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\frac{m \cdot X}{n} = L \Rightarrow m \cdot X = n \cdot L \Rightarrow X = \frac{n \cdot L}{m}$$

**Proposição 13.** Se  $X$  é um número irracional,  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\frac{m \cdot X}{n}$  é um número irracional.

*Demonstração.* Supondo  $m, n \in \mathbb{N}$  e que  $\frac{m \cdot X}{n}$  seja um número racional  $L$ . Temos:

$$\frac{m \cdot X}{n} = L \Rightarrow X = \frac{n \cdot L}{m}$$

O que é um absurdo, uma vez que sendo  $L \in \mathbb{Q}$ , se tem imediatamente que  $\frac{n \cdot L}{m} \in \mathbb{Q}$ .

Resulta da proposição 13 que basta encontrar um número irracional  $X$ , para provar que o conjunto formado por eles é infinito, pois todo número da forma  $\frac{m \cdot X}{n}$  é irracional, em que  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 14.** *Se  $A$  e  $B$  são dois pontos da reta real, com  $A \prec B$ , então existe uma infinidade de pontos  $R \in \mathbb{I}$  tais que  $A \prec R \prec B$ .*

*Demonstração.* Se provarmos que existe um, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, provamos essa proposição.

Se na prova da Proposição 9 tivéssemos escolhido a imagem geométrica do irracional  $\sqrt{2}$  ao invés de  $I$ , a demonstração seria feita de forma análoga, já que o número  $\frac{\sqrt{2}}{m+1}$  é irracional.  $\square$

### 3.7 AS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS EM $\mathcal{R}$

#### 3.7.1 Adição

Começemos por ilustrar com uma figura a adição de  $X$  com  $Y$ :

- (1) Fazer passar por  $P$  uma reta paralela à reta real.
- (2) Traçar o segmento de reta  $XP$ .
- (3) Fazer passar por  $Y$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{OP}$  e designa-se por  $Q$  o ponto de interseção desta reta com a reta referida em (1).
- (4) Fazer passar por  $Q$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{XP}$ .
- (5) Designar por  $Z$  o ponto de interseção da reta referida em (4) com a reta real.

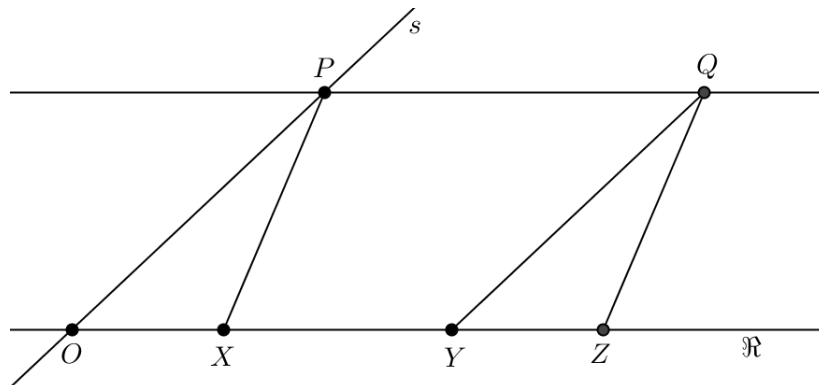


Figura 47 –  $Z$  é a imagem geométrica da adição  $X \oplus Y$

Notemos que os triângulos  $OPX$  e  $YQZ$  são congruentes. Pois construímos dois paralelogramos  $OPYQ$  e  $XPZQ$ , daí  $\overline{OP} = \overline{YQ}$  e  $\overline{XP} = \overline{ZQ}$ . Como  $\overleftrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{YQ}$  e  $\overleftrightarrow{XP} \parallel \overleftrightarrow{ZQ}$  temos que  $\angle POX = \angle QYZ$ ,  $\angle PXO = \angle QZY$ , e assim  $\angle OPX = \angle YQZ$ . Logo os dois triângulos são congruentes pelo caso LAL, ou seja,  $\overline{OX} = \overline{YZ}$ . Portanto o ponto  $Z$  representa a imagem geométrica  $X \oplus Y$ .

Das construções das imagens geométricas de  $X \oplus Y$  e de  $Y \oplus X$ , obtemos que esses pontos na reta Real são os mesmos. Logo é válida a seguinte proposição.

**Proposição 15.**  $X \oplus Y = Y \oplus X$  para todos  $X, Y \in \mathcal{R}$

Vamos ilustrar as imagens geométricas  $X \oplus Y$ , nos casos

(i)  $X \in \mathcal{R}^-$  e  $Y \in \mathcal{R}^-$ :

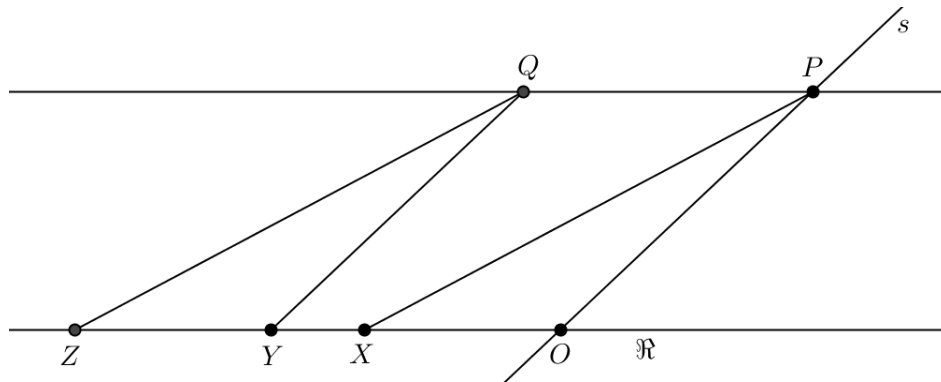


Figura 48 – Imagem geométrica de  $X \oplus Y$ , quando  $X \prec O$  e  $Y \prec O$

(ii)  $X \in \mathcal{R}^-$  e  $Y \in \mathcal{R}^+$ :

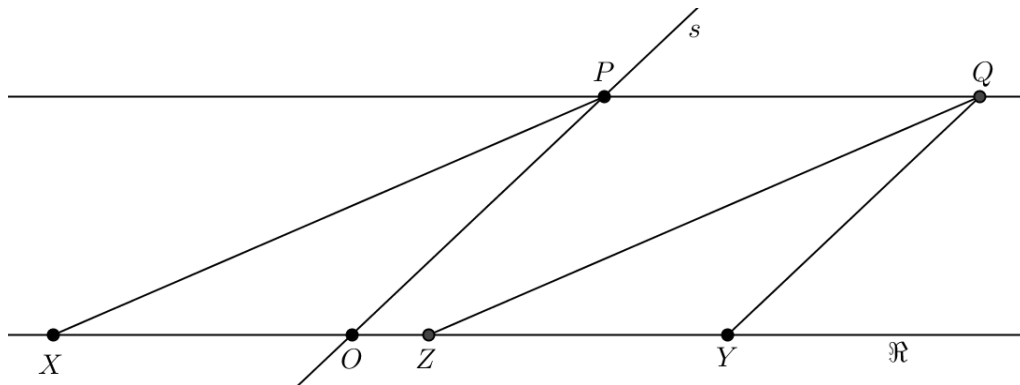


Figura 49 – Imagem geométrica de  $X \oplus Y$ , quando  $X \prec O \prec Y$  e  $\overline{OX} < \overline{OY}$

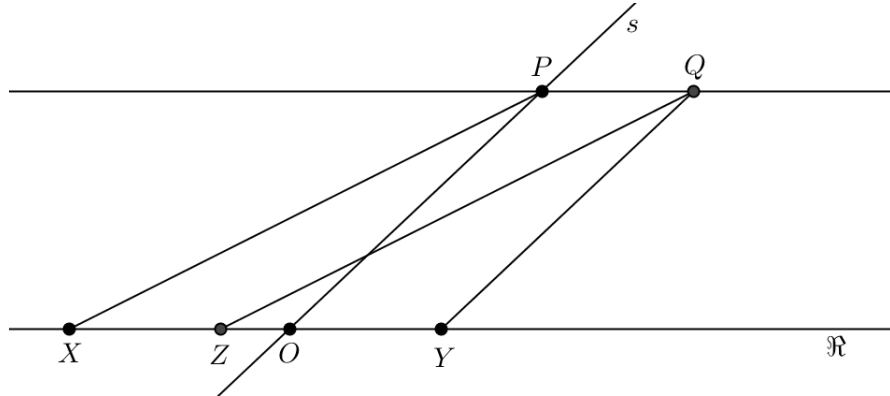


Figura 50 – Imagem geométrica de  $X \oplus Y$ , quando  $X \prec O \prec Y$  e  $\overline{OX} > \overline{OY}$

(iii)  $X = O$  e  $Y \in \mathfrak{R}^+$

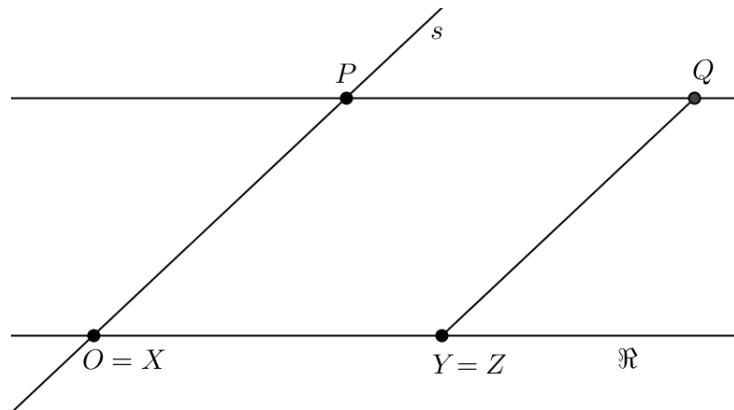


Figura 51 – Imagem geométrica de  $X \oplus Y$ , quando  $X = O$  e  $O \prec Y$

### 3.7.2 Subtração

Observemos a construção geométrica para determinarmos  $Z = X \ominus Y$

- (1) Fazer passar por  $P$  uma reta paralela à reta real.
- (2) Traçar o segmento de reta  $YP$  (nota-se que se escolheu  $YP$  e não  $XP$ ).
- (3) Fazer passar por  $X$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{YP}$  e considere  $Q$  o ponto de interseção desta reta com a reta referida em (1).
- (4) Fazer passar por  $Q$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{OP}$ .
- (5) Designar por  $Z$  o ponto de interseção da reta referida em (4) com a reta real.

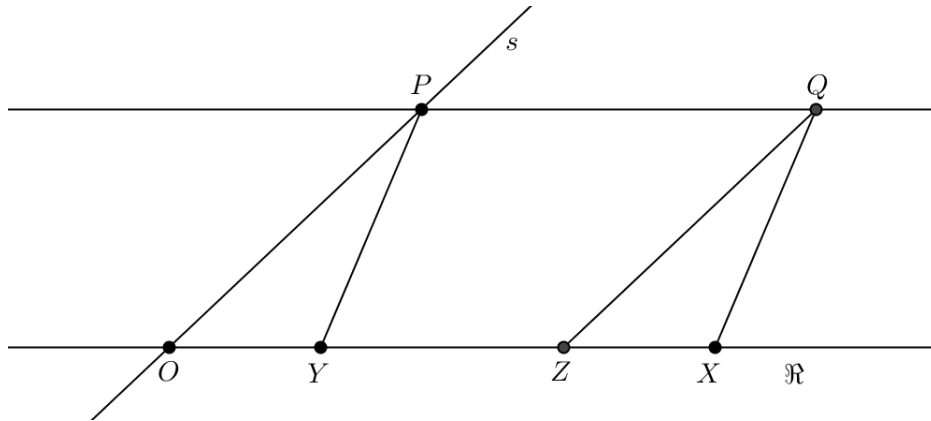


Figura 52 –  $Z$  é a imagem geométrica da subtração  $X \ominus Y$

Pelos mesmos motivos da construção da adição conseguimos provar que os triângulos  $OPY$  e  $ZQX$  são congruentes (Figura 52). Observe que neste caso não é indiferente a escolha de  $Y$  no passo (2). A adição é comutativa e a subtração não é.

Vamos ilustrar a imagem geométrica de  $X \ominus Y$  nos casos em que:

(i)  $X, Y \in \mathbb{R}^+$  e  $X \prec Y$

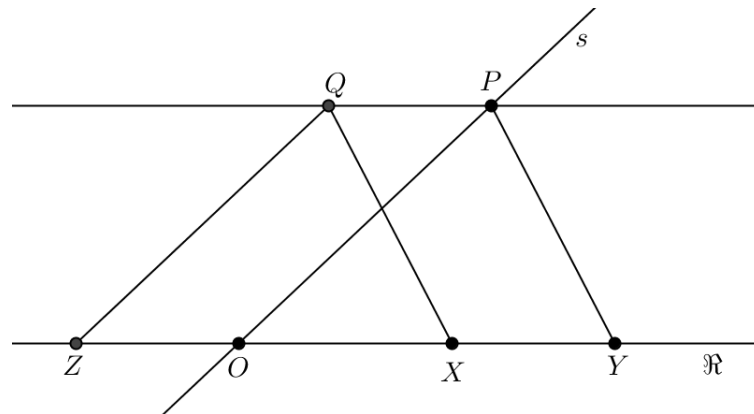


Figura 53 – Imagem geométrica de  $X \ominus Y$ , quando  $O \prec X \prec Y$

(ii)  $X, Y \in \mathfrak{R}^+$  e  $X = Y$

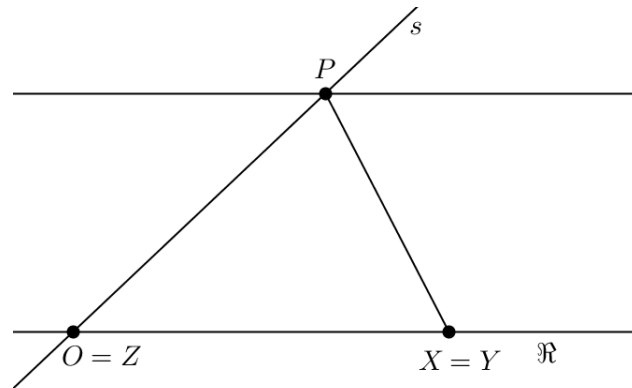


Figura 54 – Imagem geométrica de  $X \ominus Y$ , quando  $O \prec X = Y$

(iii)  $X, Y \in \mathfrak{R}^-$  e  $X \prec Y$

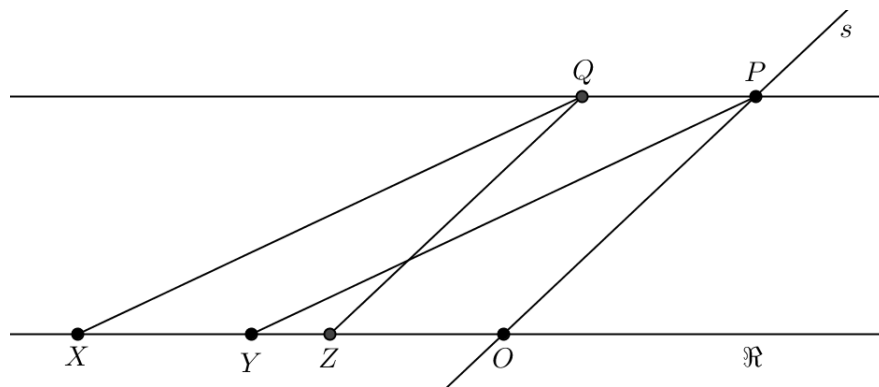


Figura 55 – Imagem geométrica de  $X \ominus Y$ , quando  $X \prec Y \prec O$

(iv)  $X \in \mathfrak{R}^-$  e  $Y \in \mathfrak{R}^+$

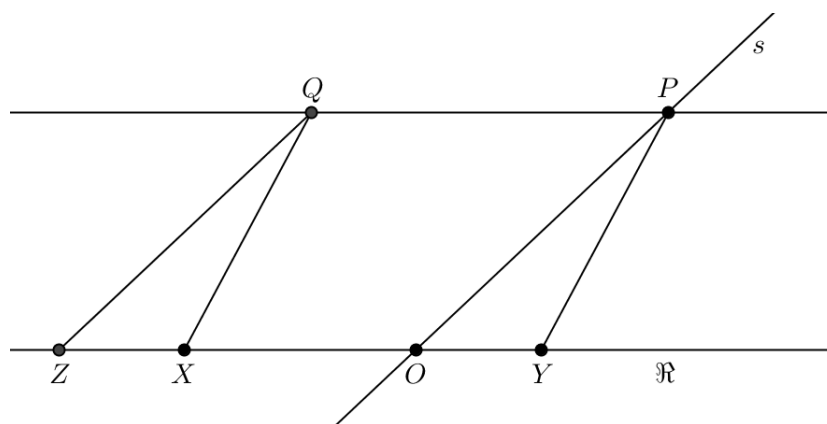


Figura 56 – Imagem geométrica de  $X \ominus Y$ , quando  $X \prec O \prec Y$



### 3.7.3 Multiplicação

Observemos a construção geométrica que ilustra a imagem  $Z$  do produto entre  $X$  e  $Y$ , indicada por  $Z = X \otimes Y$

- (1) Traçar os segmentos de reta  $XP$  e  $IP$ .
- (2) Fazer passar por  $Y$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{IP}$ , e designa-se por  $Q$  o ponto de interseção desta reta com  $\overleftrightarrow{OP}$ .
- (3) Fazer passar por  $Q$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{XP}$ .
- (4) Designar por  $Z$  o ponto de interseção da reta referida em (3) com a reta real.

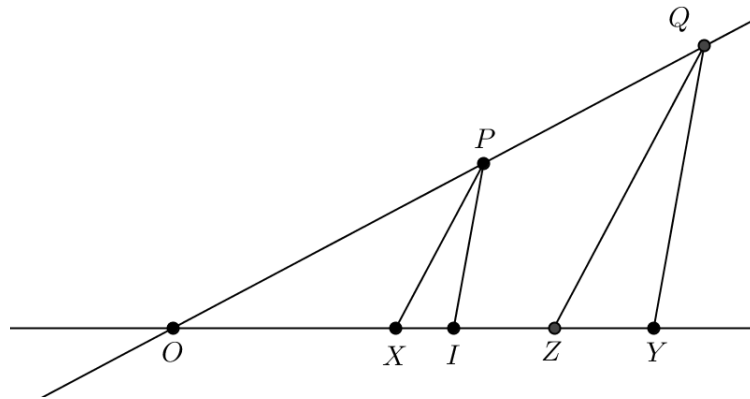


Figura 57 – Multiplicação de  $X$  por  $Y$

Nota-se que os triângulos  $OPX$  e  $OQZ$  são semelhantes, pois sendo paralelas as retas  $\overleftrightarrow{PX}$  e  $\overleftrightarrow{QZ}$  tem-se que  $\angle OXP = \angle OZQ$ . Sendo  $\angle POX = \angle QOZ$ . Como  $\angle POX = \angle QOZ$ , tais triângulos são semelhantes.

Assim temos:

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

Os triângulos  $OPI$  e  $OQY$  são semelhantes, pois sendo paralelas as retas  $\overleftrightarrow{IP}$  e  $\overleftrightarrow{YQ}$ , temos que  $\angle OIP = \angle QOY$ . Assim temos:

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

Das duas igualdades concluímos que

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{OI} \cdot \overline{OZ} = \overline{OX} \cdot \overline{OY} \Rightarrow \overline{OZ} = \overline{OX} \cdot \overline{OY} \Rightarrow Z = X \otimes Y$$

Observe que no passo (1) da descrição do modo como foi marcado o ponto  $Z$ , se traçou o segmento  $XP$  e não o  $YP$ . É indiferente ter começado com o segmento  $XP$  ou  $YP$ , o ponto seria o mesmo. Logo é válida a seguinte proposição.

**Proposição 16.**  $X \otimes Y = Y \otimes X$  para todos  $X, Y \in \mathcal{R}$

Ainda, com ferramentas geométricas, obtemos que é válida a proposição abaixo.

**Proposição 17.**  $X \otimes (Y \oplus Z) = (X \otimes Y) \oplus (X \otimes Z)$  para todos  $X, Y, Z \in \mathcal{R}$

Vamos determinar a imagem geométrica de  $X \otimes Y$  nos seguintes casos:

(i)  $X \in \mathfrak{R}^-$  e  $Y \in \mathfrak{R}^-$ ;

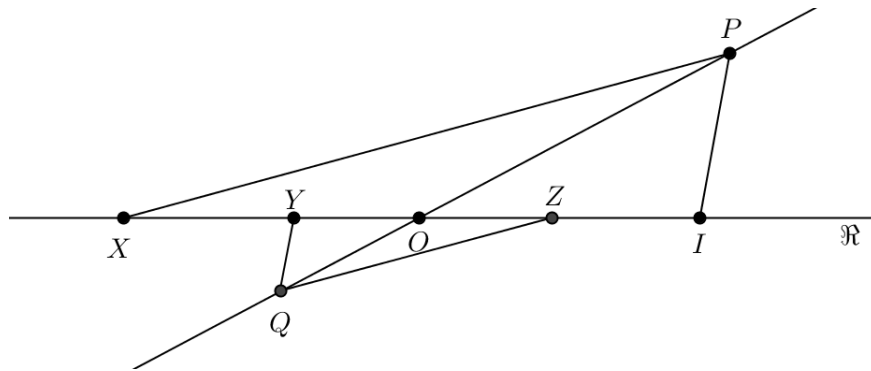


Figura 58 – Imagem geométrica de  $X \otimes Y$ , quando  $X \prec O$  e  $Y \prec O$

(ii)  $X \in \mathfrak{R}^-$  e  $Y \in \mathfrak{R}^+$ ;

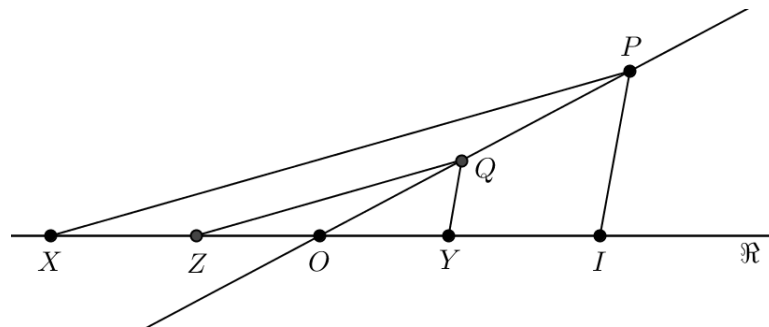


Figura 59 – Imagem geométrica de  $X \otimes Y$ , quando  $X \in \mathfrak{R}^-$  e  $Y \in \mathfrak{R}^+$

(iii)  $X = O$  e  $Y \in \mathfrak{R}$ ;

(iv)  $X = I$  e  $Y \in \mathfrak{R}$

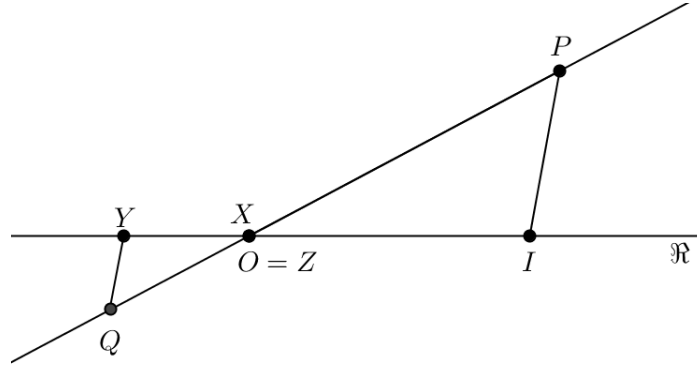


Figura 60 – Imagem geométrica de  $X \otimes Y$ , quando  $X = O$  e  $Y \in \mathfrak{R}$

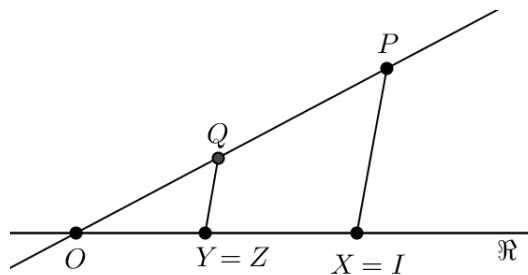


Figura 61 – Imagem geométrica de  $X \otimes Y$ , quando  $X = I$  e  $Y \in \mathfrak{R}$

Ao observarmos a construção geométrica de  $X \otimes I$ , notamos que  $X \otimes I = X$ . Logo é válida a proposição abaixo.

**Proposição 18.**  $X \cdot I = X$  para todo  $X \in \mathcal{R}$

### 3.7.4 Divisão

Observemos a Figura 64 que ilustra a divisão de  $I$  por  $Y \neq O$ , que denotaremos por  $Z = I \oslash Y$ .

- (1) Traçar os segmentos de reta  $YP$  e  $IP$ .
- (2) Fazer passar por  $I$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{YP}$  e designa-se por  $Q$  o ponto de interseção desta reta com  $\overleftrightarrow{OP}$ .
- (3) Fazer passar por  $Q$  uma reta paralela à  $\overleftrightarrow{IP}$ .
- (4) Designar por  $Z$  o ponto de interseção da reta referida em (3) com a reta real.

Note-se que os triângulos  $OQZ$  e  $OPI$  são semelhantes, pois sendo  $\overleftrightarrow{QZ}$  e  $\overleftrightarrow{IP}$  paralelas, temos que  $\angle OZQ = \angle OIP$  e  $\angle QOZ = \angle POI$ . Assim temos:

$$\frac{\overline{OZ}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

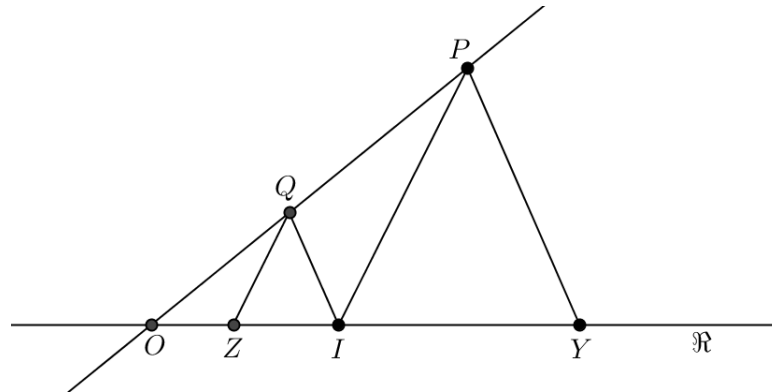


Figura 62 – Imagem geométrica de  $Z = I \otimes Y$

Os triângulos  $OIP$  e  $OYP$  também são semelhantes, pois sendo  $\overleftrightarrow{QI}$  e  $\overleftrightarrow{PY}$  paralelas, temos que  $\angle OIQ = \angle OYP$  e  $\angle QOI = \angle POI$ . Assim temos:

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

Das duas igualdades segue que:

$$\frac{\overline{OZ}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OY}} \Rightarrow \overline{OZ} = \frac{1}{\overline{OY}} \Rightarrow Z = I \otimes Y$$

Das construções geométricas de  $I \otimes Y$  e de  $Y \otimes Z$  verificamos que  $Y \otimes Z = I$ .

Vamos determinar a imagem geométrica de  $\frac{I}{Y}$  nos seguintes casos:

(i)  $O \prec Y \prec I$

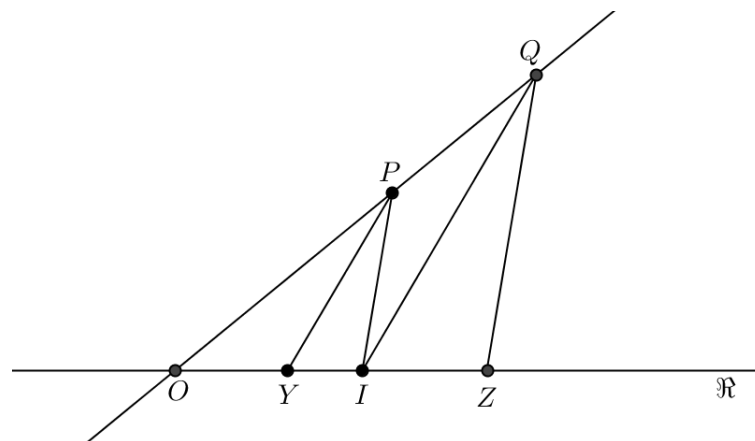


Figura 63 – Imagem geométrica de  $Z = I \otimes Y$ , quando  $O \prec Y \prec I$

(ii)  $Y \in \mathfrak{R}^-$

Finalmente para determinarmos a imagem geométrica da divisão  $\frac{X}{Y}$  basta efetuar o produto entre  $X$  e  $\frac{I}{Y}$ .

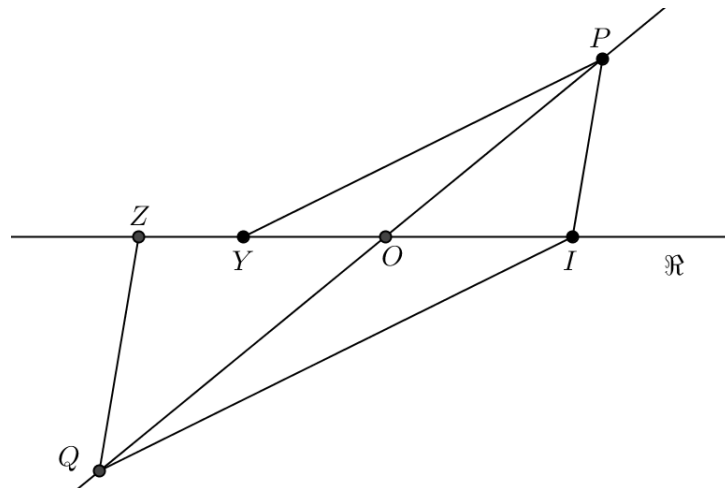


Figura 64 – Imagem geométrica de  $Z = I \odot Y$ , quando  $Y \prec O$

#### 4 CONCLUSÃO E PROPOSTA DE CONTINUIDADE

Nesse trabalho, usando régua e compasso, localizamos na reta real os números naturais, inteiros e racionais. Vimos que existem números que não são racionais, os números irracionais. Mostramos que esses conjuntos são densos com relação à reta real e por fim fizemos construções geométricas que representam as quatro operações entre números reais. Após essa introdução aos números reais, poderíamos oferecer atividades ao aluno, que por meio de visualizações, possa verificar algumas regularidades. Por exemplo: se  $X \prec O$  e  $Y \prec O$ , então  $O \prec X \otimes Y$ . O uso de softwares ajudariam muito nessa questão.

O GeoGebra, um software de geometria dinâmica, admite movimentarmos os pontos  $X$  e  $Y$  sobre a reta real obtendo, dinamicamente, as imagens geométricas de  $X \otimes Y$ , por exemplo. Isso se aplica às demais operações. As propriedades dos números reais seriam potencializadas com essas visualizações. As Figura 65 e 66 mostram a construção no GeoGebra do produto  $X \otimes Y$ , em que  $Z$  é a imagem geométrica desse produto e seu respectivo protocolo de construção.

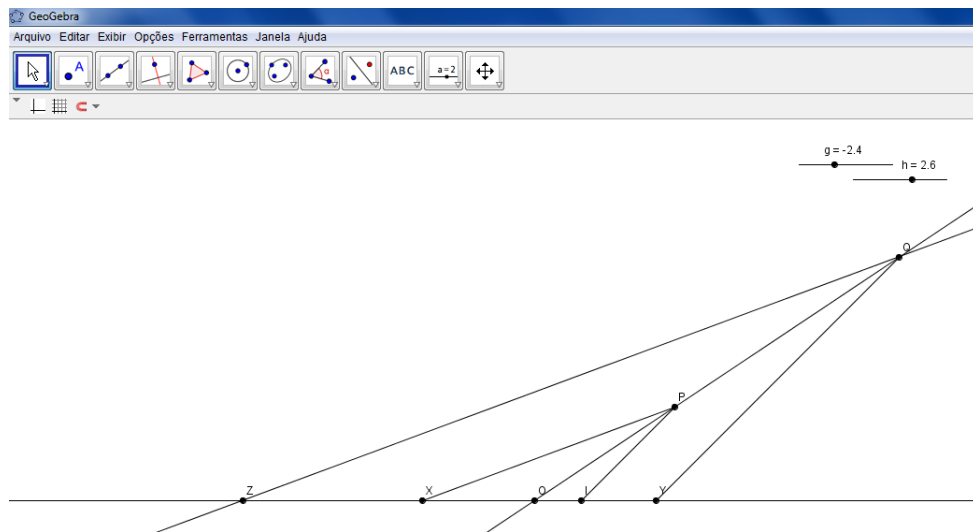


Figura 65 – Visualização no GeoGebra da imagem geométrica  $Z$  do produto  $X \otimes Y$

N.	Nome	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto O		$O = (0, 0)$	
2	Ponto I		$I = (1, 0)$	
3	Reta a	Reta OI	$a: y = 0$	
4	Ponto P		$P = (3, 2)$	
5	Reta b	Reta OP	$b: -2x + 3y = 0$	
6	Número g		$g = 2.4$	
7	Número h		$h = 5$	
8	Ponto X	$(g, 0)$	$X = (2.4, 0)$	
9	Ponto Y	$(h, 0)$	$Y = (5, 0)$	
10	Segmento c	Segmento [I, P]	$c = 2.83$	
11	Reta d	Reta passando por Y e paralela a c	$d: -x + y = -5$	
12	Ponto Q	Ponto de interseção de b, d	$Q = (15, 10)$	
13	Segmento e	Segmento [Y, Q]	$e = 14.14$	
14	Segmento f	Segmento [X, P]	$f = 2.09$	
15	Reta i	Reta passando por Q e paralela a f	$i: -4x + 1.2y = -48$	
16	Ponto Z	Ponto de interseção de i, a	$Z = (12, 0)$	

Figura 66 – Protocolo de construção da imagem geométrica  $Z$  do produto  $X \otimes Y$

**REFERÊNCIAS**

- [1] AUBNY, Antônio St.; FIGUEIREDO, Maria Carlos; DE LOURA, Luís; RIBEIRO, Luísa; VIEGAS, Francisco. *Números Reais*; Lisboa: Março de 2004.
- [2] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Geometria Elementar: Geometria Euclidiana Plana*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998, 148 p.